

# 1 Rachunek $\lambda$ z typami prostymi

## 1.1 Typy proste

Niech  $U$  będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych  $p, q, \dots$  (być może indeksowanych liczbami naturalnymi), które będziemy nazywali *zmiennymi typowymi*.

**Definicja 1.** (Typy proste)

*Typami prostymi* będziemy określali najmniej w sensie mnogościowym zbiór wyrażeń taki, że:

T1. Jeśli  $p$  jest zmienną typową, to  $p$  jest typem prostym.

T2. Jeśli  $\tau$  i  $\sigma$  są typami prostymi, to  $(\tau \rightarrow \sigma)$  jest typem prostym.

Typy proste zbudowane tylko wedle reguły T1 nazywamy typami *atomowymi*, zaś wyrażenia zbudowane wedle reguły T2 – typami *funkcyjnymi*. Zbiór typów prostych określony w myśl powyższej definicji będziemy oznaczali przez  $\mathbf{T}_{\rightarrow}$ .

Późniejsze litery alfabetu greckiego, tj.  $\sigma, \tau, \rho, \dots$  będą służyły nam za zmienne metasyntaktyczne do oznaczania typów prostych. Dla lepszej czytelności będziemy pomijali najbardziej zewnętrzne nawiasy. Konstruktor typu  $\rightarrow$  jest prawostronnie łączny, co oznacza, że typy  $\tau \rightarrow \sigma \rightarrow \theta$  oraz  $\tau \rightarrow (\sigma \rightarrow \theta)$  będziemy uznawali za tożsame.

Typy proste ujęte Definicją 1 mają strukturę drzewa binarnego. Wysokość takiego drzewa będziemy nazywali *stopniem* typu. Precyzyjnie ujmując to pojęcie poniższa definicja.

**Definicja 2.** (Stopień typu)

Stopniem typu nazywamy funkcję  $\delta : \mathbf{T}_{\rightarrow} \longrightarrow \mathbb{N}$  taką, że

$$\begin{aligned} \delta(p) &= 0, \text{ gdzie } p \text{ jest typem atomowym,} \\ \delta(\tau \rightarrow \sigma) &= 1 + \max(\delta(\tau), \delta(\sigma)). \end{aligned}$$

## 1.2 Pseudotermy

Niech  $V$  będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych  $x, y, \dots$  (indeksowanych być może liczbami naturalnymi). Elementy takiego zbioru będziemy nazywali  *$\lambda$ -zmiennymi*.

**Definicja 3.** (Pseudo-pretermy)

*Pseudo-pretermami* będziemy nazywali najmniej (w sensie mnogościowym) zbiór  $\tilde{\Lambda}_{\mathbf{T}}$  taki, że:

P1. Jeśli  $x \in V$ , to  $x \in \tilde{\Lambda}_T$ .

P2. Jeśli  $M \in \tilde{\Lambda}_T$  i  $N \in \tilde{\Lambda}_T$ , to  $(MN) \in \tilde{\Lambda}_T$ .

P3. Dla dowolnych  $x \in V$ ,  $\sigma \in \mathbf{T}_\rightarrow$ ,  $M \in \tilde{\Lambda}_T$  mamy, że  $(\lambda x^\sigma. M) \in \tilde{\Lambda}_T$ .

Wyrażenia postaci P2 nazywamy *aplikacjami*  $M$  do  $N$ , zaś wyrażenia postaci P3 –  *$\lambda$ -abstrakcjami*, gdzie o wszystkich podtermach termu  $M$  mówi się, że są w *zasięgu*  $\lambda$ -abstraktora, zaś o  $\lambda$ -zmiennej  $x$  mówi się, że jest nim *związana*.

Za zmienne metasyntaktyczne wybieramy duże litery alfabetu łacińskiego  $M, N, \dots$ . Podobnie jak w podrozdziale 1.1 stosujemy konwencję o opuszczaniu najbardziej zewnętrznych nawiasów. Aplikacja termów jest łączna lewostronnie, co oznacza, że będziemy utożsamiali wyrażenia  $MNP$  oraz  $(MN)P$ .

**Definicja 4.** (Zmienne wolne)

Dla pseudo-pretermu  $M$  określamy zbiór *termów wolnych*  $FV$  w następujący sposób:

$$\begin{aligned} FV(x) &= \{x\} \\ FV(\lambda x^\sigma. P) &= FV(P) \setminus \{x\} \\ FV(PQ) &= FV(P) \cup FV(Q) \end{aligned}$$

Jeśli  $FV(M) = \emptyset$ , to mówimy, że  $M$  jest *zamknięty*.

**Definicja 5.** (Podstawienie)

*Podstawieniem*  $[x/N]$  pseudo-pretermu  $N$  za  $\lambda$ -zmienną  $x$  w  $M$  nazywamy zdefiniowane następująco przekształcenie:

$$\begin{aligned} x[x/N] &= N, \\ y[x/N] &= y, && \text{o ile } x \neq y, \\ (PQ)[x/N] &= P[x/N] Q[x/N], \\ (\lambda y^\sigma. P)[x/N] &= \lambda y^\sigma. P[x/N], && \text{gdzie } x \neq y \text{ i } y \notin FV(N). \end{aligned}$$

Zachodzą następujące fakty:

**Fakt 1.** (a) Jeśli  $x \notin FV(M)$ , to  $M[x/N]$  jest poprawnym podstawieniem i  $M[x/N] = M$ .

(b) Jeśli  $M[x/N]$  jest poprawnym podstawieniem, to  $y \in FV(M[x/N])$  wtw, gdy albo  $y \in FV(M)$  i  $x \neq y$ , albo  $y \in FV(N)$  i  $x \in FV(M)$ .

(c) Podstawienie  $M[x/x]$  jest poprawne i  $M[x/x] = M$ .

(d) Jeśli  $M[x/y]$  jest poprawnym podstawieniem, to  $M[x/y]$  ma tę samą długość, co  $M$ .

**Fakt 2.** Powiedzmy, że  $M[x/N]$  jest poprawnym podstawieniem i  $N[y/L]$  i  $M[x/N][y/L]$  są poprawnymi podstawieniami, gdzie  $x \neq y$ . Jeśli  $x \notin \text{FV}(L)$  lub  $y \notin \text{FV}(M)$ , to  $M[y/L]$  i  $M[y/L][x/N[y/L]]$  jest poprawnym podstawieniem oraz

$$M[x/N][y/L] = M[y/L][x/N[y/L]].$$

**Fakt 3.** Jeśli  $M[x/y]$  jest poprawnym podstawieniem i  $y \notin \text{FV}(M)$ , to  $M[x/y][y/x]$  jest poprawnym podstawieniem oraz  $M[x/y][y/x] = M$ .

**Definicja 6.** ( $\alpha$ -konwersja)

$\alpha$ -konwersją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zwrotną i przechodnią relację binarną  $=_\alpha$  określoną na zbiorze pseudotermów  $\tilde{\Lambda}_T$  spełniającą poniższe warunki:

- (a) Jeśli  $y \notin \text{FV}(M)$  i  $M[x/y]$  jest poprawnym podstawieniem, to  $\lambda x. M =_\alpha \lambda y. M[x/y]$ .
- (b) Jeśli  $M =_\alpha N$ , to dla każdej  $\lambda$ -zmiennnej  $x$  mamy  $\lambda x. M =_\alpha \lambda x. N$ .
- (c) Jeśli  $M =_\alpha N$ , to  $MZ =_\alpha NZ$ .
- (d) Jeśli  $M =_\alpha N$ , to  $ZM =_\alpha ZN$ .

Bez dowodu podajemy następujące twierdzenia:

**Fakt 4.** Relacja  $=_\alpha$  jest symetryczna.

**Fakt 5.**  $=_\alpha$  jest relacją równoważności.

**Fakt 6.** Jeśli  $M =_\alpha N$ , to  $\text{FV}(M) = \text{FV}(N)$ .

Dysponując powyższymi rozstrzygnięciami otrzymujemy wygodne utożsamienie pseudo-pretermów, które różnią się między sobą tylko zmiennymi związanymi.

**Definicja 7.** (Pseudotermy)

Klasy abstrakcji relacji  $\alpha$ -konwersji nazywamy *pseudotermami*. Zbiór wszystkich pseudotermów oznaczamy następująco:

$$\Lambda_T = \{[M]_\alpha \mid M \in \tilde{\Lambda}_T\}$$

Nadużywając notacji będziemy odnosili się do pseudotermów tylko przez ich reprezentantów.

### 1.3 Typowalność

#### Definicja 8. (Kontekst)

*Kontekstem* nazywamy skończoną funkcję częściową  $\Gamma : V \longrightarrow \mathbf{T}_\rightarrow$ , czyli zbiór par postaci  $\Gamma = \{x_1^{\tau_1}, \dots, x_n^{\tau_n}\}$ , gdzie  $(x_i^{\tau_i}) = (x_i, \tau_i)$  oraz  $x_i \neq x_j$  dla  $i \neq j$ . Zbiór

$$\text{dom}(\Gamma) = \{x \in V \mid \exists \tau (x^\tau \in \Gamma)\}$$

nazywamy *dziedziną* kontekstu  $\Gamma$ , zaś

$$\text{rg}(\Gamma) = \{\tau \in \mathbf{T}_\rightarrow \mid \exists x (x^\tau \in \Gamma)\}$$

– *zakresem* kontekstu  $\Gamma$ . Piszemy:

- $x_1^{\tau_1}, x_2^{\tau_2}$  zamiast  $\{x_1^{\tau_1}, x_2^{\tau_2}\}$ , o ile  $x_1^{\tau_1}$  i  $x_2^{\tau_2}$  są różne,
- $\Gamma, x^\tau$  zamiast  $\Gamma \cup \{x^\tau\}$ , o ile  $x^\tau \notin \Gamma$ ,
- $\Gamma, \Delta$  zamiast  $\Gamma \cup \Delta$ , o ile  $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$ .

Określimy teraz system przypisywania typów do pseudotermów w stylu dedukcji naturalnej. *Sekwentami* w tym systemie będziemy nazywali wyrażenia postaci  $\Gamma \vdash M^\sigma$ , gdzie  $M \in \mathbf{A}_T$ ,  $\sigma \in \mathbf{T}_\rightarrow$ , zaś  $\Gamma$  jest pewnym kontekstem.

Wprowadzamy następujące reguły dowodzenia:

$$\frac{}{\Gamma, x^\tau \vdash x^\tau} \text{ (Var)}, \quad \frac{\Gamma, x^\varphi \vdash M^\psi}{\Gamma \vdash (\lambda x^\varphi. M)^\varphi \rightarrow \psi} \text{ (Abs)}, \quad \frac{\Gamma \vdash M^{\varphi \rightarrow \psi} \quad \Gamma \vdash N^\varphi}{\Gamma \vdash (MN)^\psi} \text{ (App)}.$$

#### Definicja 9. (Typowalność)

Mówimy, że pseudoterm  $M$  jest typu  $\sigma$  w kontekście  $\Gamma$  (jest *typowalny*), jeśli istnieje skończone drzewo sekwentów spełniające poniższe warunki:

1. W korzeniu drzewa znajduje się sekwent  $\Gamma \vdash M^\sigma$ .
2. Liście są *aksjomatami*, tj. sekwentami postaci  $\Gamma, x^\sigma \vdash x^\sigma$ .
3. Każdego rodzica można otrzymać z jego dzieci przez zastosowanie którejś z reguł wyprowadzania nowych sekwentów.

Tak określone drzewo będziemy nazywali *wyprowadzeniem* typu i pisali  $\Gamma \vdash M^\sigma$ . W danym kontekście każdy  $\lambda$ -term ma jednoznacznie przypisany typ, co stwierdza następujące twierdzenie:

**Fakt 7.** *Jeśli  $\Gamma \vdash M^\sigma$  oraz  $\Gamma \vdash M^\tau$ , to  $\sigma = \tau$ .*

**Definicja 10.** ( $\lambda$ -termy)

Wszystkie typowalne pseudotermy w pewnym kontekście  $\Gamma$  nazywamy  $\lambda$ -termami (z typami prostymi w kontekście  $\Gamma$ ).

*Uwaga.*  $\lambda$ -term w kontekście  $\Gamma_1$  może nie być typowalny w innym kontekście  $\Gamma_2$ .

**Przykład 1.** Niech  $\Gamma = \{x^\sigma, y^\tau\}$ . Pokażemy, że  $K = \lambda x^\sigma y^\tau. x$  ma typ  $\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma$ . Istotnie,

$$\frac{x^\sigma, y^\tau \vdash x^\sigma}{x^\sigma \vdash (\lambda y^\tau. x)^{\tau \rightarrow \sigma}} \text{ (Abs)} \\ \vdash (\lambda x^\sigma \lambda y^\tau. x)^{\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma} \text{ (Abs)}$$

**Przykład 2.** Niech  $\Gamma = \{x^{\tau \rightarrow \rho}, y^{\sigma \rightarrow \tau}, z^\sigma\}$ . Wówczas

$$\frac{\Gamma \vdash z^\sigma \quad \Gamma \vdash y^{\sigma \rightarrow \tau}}{\Gamma \vdash yz^\tau} \text{ (App)} \quad \Gamma \vdash x^{\tau \rightarrow \rho} \\ \frac{\Gamma \vdash yz^\tau \quad \Gamma \vdash x^{\tau \rightarrow \rho}}{\Gamma \vdash x(yz)^\rho} \text{ (App)} \\ \frac{\Gamma \vdash x(yz)^\rho}{x^{\tau \rightarrow \sigma}, y^{\sigma \rightarrow \rho} \vdash (\lambda z^\sigma. x(yz))^{\sigma \rightarrow \rho}} \text{ (Abs)} \\ \frac{x^{\tau \rightarrow \sigma}, y^{\sigma \rightarrow \rho} \vdash (\lambda z^\sigma. x(yz))^{\sigma \rightarrow \rho}}{x^{\tau \rightarrow \rho} \vdash (\lambda y^{\sigma \rightarrow \tau} \lambda z^\sigma. x(yz))^{\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho}} \text{ (Abs)} \\ \vdash (\lambda x^{\tau \rightarrow \rho} \lambda y^{\sigma \rightarrow \tau} \lambda z^\sigma. x(yz))^{\tau \rightarrow \rho \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho} \text{ (Abs)}$$

Term  $\lambda x^{\tau \rightarrow \rho} \lambda y^{\sigma \rightarrow \tau} \lambda z^\sigma. x(yz)$  odpowiada operacji złożenia funkcji. Co więcej, można wykazać że typ  $(\tau \rightarrow \rho) \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho$  może mieć tylko i wyłącznie operacja złożenia [Wad89].

*Uwaga 1.* Widzimy, że wyprowadzanie typu odpowiada w gruncie rzeczy konstrukcji  $\lambda$ -termu. Ponieważ każde wyprowadzenie musi być skończone, typowalne są tylko pseudotermy skończonej długości.

*Uwaga 2.* Mówiąc o  $\lambda$ -termach i nie podając żadnego związanego z nimi kontekstu  $\Gamma$  będziemy implícite zakładali, że istnieje pewien kontekst w którym są one typowalne.

Typ dowolnego  $\lambda$ -termu będziemy w ramach konwencji notowali używając adnotacji typowej umieszczonej w górnym indeksie. Dla przykładu, pisząc  $(M^{\sigma \rightarrow \tau} N^\sigma)^\tau$  będziemy mieli na myśli, że ten  $\lambda$ -term jest w pewnym kontekście  $\Gamma$  typu  $\tau$ .

**Przykład 3.** Nie wszystkie pseudotermy są typizowalne w rachunku  $\lambda$  z typami prostymi. Istotnie, przypuśćmy że  $\omega = (\lambda x^{\sigma \rightarrow \sigma}. xx)$  jest typowalny. Wówczas dla kontekstu  $\Gamma$  mamy  $x^{\sigma \rightarrow \sigma} \in \Gamma$ . Ponieważ  $\omega$  zawiera w sobie podterm  $(xx)$ , to w wyprowadzeniu musiał on zostać otrzymany przez zastosowanie reguły (App). Wówczas  $x^\sigma \in \Gamma$  i  $x^{\sigma \rightarrow \sigma} \in \Gamma$ , co nie jest możliwe, bo  $\Gamma$  musiałby nie być prawidłowo określonym kontekstem.

Przykład 3 wskazuje, że rachunek  $\lambda$  z typami prostymi nie ma wystarczających środków wyrazu, aby definiować w nim funkcje rekurencyjne. W rachunku  $\lambda$  bez typów definicje takie są osiągane za pomocą *kombinatorów punktu stałego*, które w rachunku  $\lambda$  z typami prostymi nie są typowalne.

## 1.4 Redukcja

**Definicja 11.** (Zgodność)

Relację  $R$  na zbiorze termów  $\mathbf{\Lambda}_T$  nazywamy *zgodną*, jeśli dla  $M, N, Z \in \mathbf{\Lambda}_T$  spełnia ona następujące warunki:

- i) Jeśli  $MRN$ , to  $(\lambda x^\sigma. M)R(\lambda x^\sigma. N)$  dla dowolnych  $x \in V$  i  $\sigma \in \mathbf{T}_\rightarrow$ .
- ii) Jeśli  $MRN$ , to  $(MZ)R(NZ)$ .
- iii) Jeśli  $MRN$ , to  $(ZM)R(ZN)$ .

Przy powyższych ustaleniach *kongruencją* będziemy nazywali każdą zgodną relację równoważności na  $\mathbf{\Lambda}_T$ , zaś *redukcją* – każdą zgodną, zwrotną i przechodnią relację na  $\mathbf{\Lambda}_T$ .

**Definicja 12.** ( $\beta$ -redukcja)

$\beta$ -redukcją nazywamy najmniejsza w sensie mnogościowym *zgodną* relację binarną  $\longrightarrow_\beta$  określoną na zbiorze pseudotermów  $\mathbf{\Lambda}_T$  za pomocą podstawienia

$$(\lambda x^\sigma. P)Q \longrightarrow_\beta P[x/Q].$$

$\beta$ -redekami będziemy nazywali wyrażenia postaci  $(\lambda x^\sigma. M)N$ , zaś rezultat ich  $\beta$ -redukcji w postaci termu  $M[x/N]$  –  $\beta$ -reduktem.

Nadużywając notacji, z każdym  $\beta$ -redeksem  $\Delta$  postaci  $(\lambda x^\tau. P^\rho)R$  będziemy wiązali jego *stopień* i pisali  $\delta((\lambda x^\tau. P^\rho)R) = \delta(\tau \rightarrow \rho)$ , gdzie występująca po prawej stronie równości  $\delta$  jest określona w myśl Definicji 2. Dysponując tą konwencją możemy określić pojęcie stopnia dowolnego  $\lambda$ -termu, które będzie nam pomocne w określeniu jego złożoności.

**Definicja 13.** (stopień  $\lambda$ -termu)

Stopniem  $d(M)$   $\lambda$ -termu  $M$  nazywamy supremum zbioru stopni  $\beta$ -redeków, które są zawarte w  $M$ , czyli

$$d(M) = \sup\{\delta(N) \mid N \text{ jest } \beta\text{-redeksem w } M\}.$$

*Uwaga.* Z każdym  $\beta$ -redeksem  $\Delta$  związane są więc dwa rodzaje stopni: stopień  $d(\Delta)$  jako  $\lambda$ -termu w myśl Definicji 13 i stopień  $\beta$ -redekusu  $\delta(\Delta)$ .

Określamy następujące relacje:

- B1.  $\longrightarrow_{\beta}^+$  jest przechodnim domknięciem relacji  $\longrightarrow_{\beta}$  w zbiorze pseudotermów  $\Lambda_T$ .
- B2.  $\longrightarrow_{\beta}^*$  jest domknięciem przechodnio-zwrotnym w  $\Lambda_T$  relacji  $\longrightarrow_{\beta}$ , a zatem jest *redukcją*.
- B3.  $=_{\beta}$  jest najmniejszą relacją równoważności zawierającą relację  $\longrightarrow_{\beta}$ , (czyli *kongruencją*).

**Definicja 14.** (Postać normalna)

Powiemy, że  $\lambda$ -term  $M$  jest w *postaci normalnej*, jeśli żadna z jego podformuł nie jest  $\beta$ -redksem. Przez  $NF_{\beta}$  będziemy oznaczali zbiór wszystkich  $\lambda$ -termów w postaci normalnej.

Definicję postaci normalnej można ująć w alternatywny sposób, którą prezentujemy w postaci Faktu 8.

**Fakt 8.**  $M$  ma postać normalną, jeśli  $M =_{\beta} N$  dla pewnego  $N$ , który jest w postaci normalnej.

*Uwaga.* Fakt, że  $=_{\beta}$  jest relacją równoważności może rodzić pokusę, aby utożsamić ze sobą wszystkie postacie normalne danego  $\lambda$ -termu. Z Twierdzenia 4 wynika jednak, że jest to zupełnie zbędne, bowiem o ile tylko  $\lambda$ -term jest normalizowalny, to wiemy, że posiada dokładnie jedną postać normalną i każde takie utożsamienie byłoby trywialne.

**Definicja 15.** ( $\eta$ -redukcja)

$\eta$ -redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) *zgodną* relację w  $\Lambda_T$  taką, że

$$\lambda x^{\sigma}. Mx \longrightarrow_{\eta} M,$$

o ile  $x \notin FV(M)$ .

Zdefiniowane powyżej  $\beta$ - i  $\eta$ -redukcje zachowują typ, jak stwierdza Fakt 9. Własność ta pozwala sensownie mówić o redukcji  $\lambda$ -termów pomimo, że te relacje są zdefiniowane dla pseudotermów.

**Fakt 9.** (O poprawności redukcji) Jeśli  $\Gamma \vdash M^{\sigma}$  i  $M \longrightarrow_{\beta\eta}^* N$ , to  $\Gamma \vdash N^{\sigma}$ .

## 1.5 Normalizacja

Powiemy, że  $\lambda$ -term  $M$  ma własność:

- (*słabej normalizacji*) (symbolicznie:  $M \in \text{WN}_\beta$ ) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg  $\beta$ -redukcji rozpoczynający się od  $M$  i kończący się termem w postaci normalnej  $N$ .
- (*silnej normalizacji*) (symbolicznie:  $M \in \text{SN}_\beta$ ), jeśli wszystkie ciągi  $\beta$ -redukcji rozpoczynające się od  $M$  są skończone.

*Uwaga.* Z powyższego określenia widzimy, że własność  $\text{SN}_\beta$  pociąga za sobą własność  $\text{WN}_\beta$ .

**Definicja 16.** (Strategia redukcji)

*Strategią redukcji* nazywamy odwzorowanie  $F : \Lambda_T \longrightarrow \Lambda_T$  takie, że  $F(M) = M$ , gdy  $M$  jest w postaci normalnej i  $M \longrightarrow_\beta F(M)$  w przeciwnym wypadku. Mówimy, że strategia  $F$  jest *normalizująca*, jeśli dla każdego  $M \in \text{WN}_\beta$  istnieje  $i \in \mathbb{N}$  takie, że  $F^i(M)$  jest w postaci normalnej.

**Twierdzenie 1.** (Własność  $\text{WN}_\beta$ ) *Wszystkie  $\lambda$ -termy mają postać normalną.*

*Dowód.* Pokażemy, że dla dowolnego  $\lambda$ -termu  $M$  istnieje normalizująca strategia redukcji.

Oznaczmy przez  $R_\beta(M)$  zbiór  $\beta$ -redeksów znajdujących się w  $M$ . Jeśli  $M \in \text{NF}_\beta$ , to  $R_\beta(M) = \emptyset$  i twierdzenie zachodzi w sposób trywialny. Jeśli  $M \notin \text{NF}_\beta$ , to istnieje w  $M$  przynajmniej jeden  $\beta$ -redeks. Z Uwagi 1  $M$  jest skończonej długości, więc  $R_\beta(M)$  jest skończony. Możemy więc wybrać z  $M$   $\beta$ -redeks znajdujący się (rozpoczynający się) w  $M$  najbardziej na prawo. Oznaczmy taki  $\beta$ -redeks przez  $\Delta$ .

Niech  $\delta_M$  będzie stopniem  $M$  (Definicja 13). Ponieważ wiele redeksów w  $M$  może mieć ten sam stopień  $\delta_M$ , przez  $n_M$  oznaczmy liczbę wystąpień redeksów stopnia  $\delta_M$  w  $M$ .

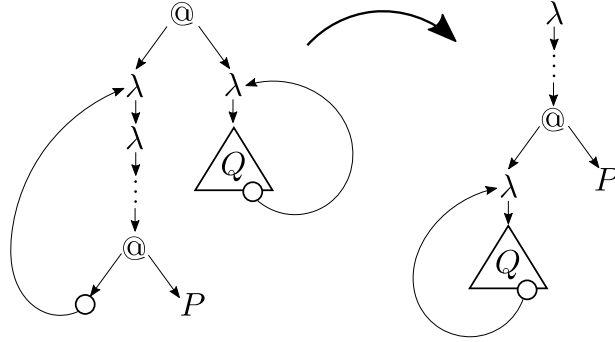
Niech  $F$  będzie strategią redukcji polegającą na  $\beta$ -redukowaniu redeksu  $\Delta$  wybranego jak wyżej i niech  $M' = F(M)$ .

Zauważmy, że  $n_M < n_{M'}$ , gdyż strategia  $F$  eliminuje  $\Delta$  z  $M'$  i może prowadzić do powstania redeksów tylko mniejszego stopnia.

Istotnie, ilość redeksów w  $M$  może zwiększyć się na skutek  $\beta$ -redukcji tylko w jeden z poniższych sposobów:

- i) powstanie nie występujących wcześniej redeksów.
- ii) powielenie już istniejących redeksów.

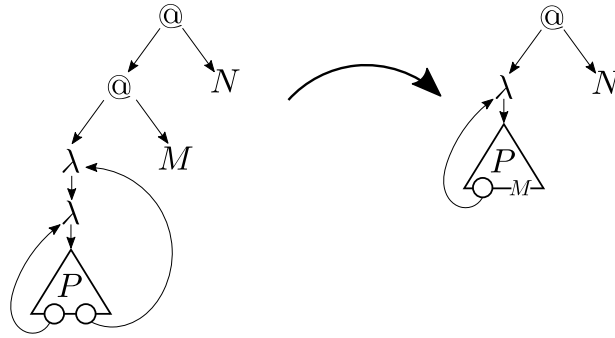




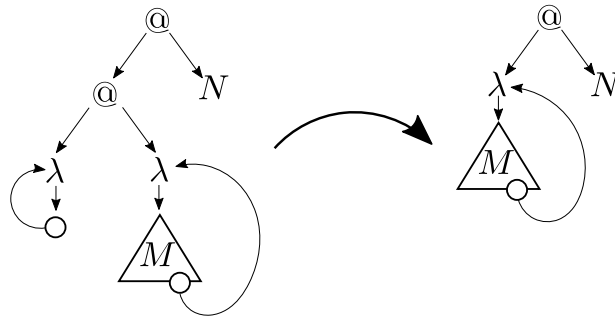
(a) Redukcja  $(\lambda x^{\rho \rightarrow \mu} \dots x P^\rho \dots) (\lambda y^\rho. Q^\mu)^{\rho \rightarrow \mu}$  do nowego redeksu  $(\dots (\lambda y^\rho. Q^\mu) P^\rho \dots)$ .

$M^\tau$

$M[x/Q]^\tau$



(b) Redukcja  $(\lambda x^\tau \lambda y^\rho. P^\sigma) M^\tau N^\rho$  do nowego redeksu postaci  $(\lambda y^\rho. P[x/M]^\sigma) N^\rho$ .



(c) Redukcja  $(\lambda x^{\tau \rightarrow \rho}. x) (\lambda y^\tau. M^\rho) N^\tau$  do nowego redeksu  $(\lambda y^\tau. M^\rho) N^\tau$ .

Rysunek 1: test

Powtarzając otrzymujemy więc  $\lambda$ -term w postaci normalnej.  $\square$

**Twierdzenie 2.** (Własność  $SN_\beta$ ) *Wszystkie  $\lambda$ -termy mają własność silnej normalizacji.*

- WCR:  $\forall a, b, c \in A (a \longrightarrow b \wedge a \longrightarrow c) \rightarrow \exists d \in A (b \longrightarrow^* d \wedge c \longrightarrow^* d)$
- CR:  $\forall a, b, c \in A (a \longrightarrow^* b \wedge a \longrightarrow^* c) \rightarrow \exists d \in A (b \longrightarrow^* d \wedge c \longrightarrow^* d)$

**Twierdzenie 3.** (Lemat Newmana) *Niech  $\rightarrow$  będzie relacją binarną spełniającą  $SN$ . Jeśli  $\rightarrow$  spełnia WCR, to spełnia CR.*

*Dowód.*

**Twierdzenie 4.** *Rachunek  $\lambda$  z typami prostymi ma własność Churcha-Rossera.*

**Twierdzenie 5.** (Własność  $SN_\beta$ ) *Każdy  $\lambda$ -term w stylu Churcha własność silnej normalizacji.*

*Dowód.*

## Literatura

- [Wad89] Philip Wadler. “Theorems for Free!” In: *Proceedings of the Fourth International Conference on Functional Programming Languages and Computer Architecture*. FPCA '89. Imperial College, London, United Kingdom: ACM, 1989, pp. 347–359. ISBN: 0-89791-328-0. DOI: 10.1145/99370.99404. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/99370.99404>.