

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Rachunek <math>\lambda</math> bez typów</b>	<b>2</b>
1.1	Wyrażenia $\lambda$ . . . . .	5
1.2	Redukcja . . . . .	9
1.3	Kodowanie typów danych . . . . .	14
1.3.1	Algebraiczne typy danych . . . . .	15
1.3.2	Proste typy wyliczeniowe . . . . .	16
1.3.3	Pary w rachunku $\lambda$ . . . . .	16
1.3.4	Kodowanie rekurencji . . . . .	18
1.3.5	Kodowanie Scotta typów rekursywnych . . . . .	18
1.3.6	Kodowanie Churcha typów rekursywnych . . . . .	19
1.3.7	Ogólny schemat kodowania Scotta typów ADT . . . . .	20
1.4	Podsumowanie . . . . .	21
<b>2</b>	<b>Rachunek <math>\lambda</math> z typami prostymi</b>	<b>21</b>
2.1	Typy proste . . . . .	21
2.2	Typowanie . . . . .	23
2.3	Własności . . . . .	25
2.3.1	Uniwersalny polimorfizm . . . . .	29
2.3.2	Silna normalizacja . . . . .	29
2.4	Typy w stylu Churcha . . . . .	34
2.4.1	Składnia . . . . .	34
2.4.2	Typowanie . . . . .	35
<b>3</b>	<b>Uogólnione systemy typów</b>	<b>35</b>
3.1	System $\lambda \rightarrow$ . . . . .	36

# 1 Rachunek $\lambda$ bez typów

Niech  $V$  będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych  $x, y, \dots$  (indeksowanych być może liczbami naturalnymi). Elementy takiego zbioru będziemy nazywali  $\lambda$ -zmiennymi. Ponieważ  $V$  jest potencjalnie nieskończony, zastrzegamy sobie możliwość wybierania w razie potrzeby wcześniej nie użytej zmiennej.

**Definicja 1.** (Zbiór  $\tilde{\Lambda}$  pretermów) Zbiorem pretermów będziemy nazywali najmniejszy (w sensie mnogościowym) zbiór wyrażeń  $\tilde{\Lambda}$  taki, że:

- (P1) Jeśli  $x \in V$ , to  $x \in \tilde{\Lambda}$ .
- (P2) Jeśli  $M, N \in \tilde{\Lambda}$ , to  $(M N) \in \tilde{\Lambda}$ .
- (P3) Jeśli  $x \in V$  i  $M \in \tilde{\Lambda}$ , to  $(\lambda x. M) \in \tilde{\Lambda}$ .

Definicję 1 można równoznacznie wyrazić przy pomocy notacji Backusa-Naura. Wówczas ma ona następującą, zwięzłą postać:

$$\tilde{\Lambda} \leftarrow V \mid (\tilde{\Lambda} \tilde{\Lambda}) \mid (\lambda V. \tilde{\Lambda})$$

Powiemy, że dwa  $\lambda$ -termy są *syntaktycznie równe*, jeśli rozumiane jako ciągi znaków są identyczne. Równość syntaktyczną będziemy oznaczali znakiem  $\equiv$ .

Elementy  $\tilde{\Lambda}$  będziemy oznaczali literami  $L, M, N, P, Q, R$  i ich wariantami z górnymi lub dolnymi indeksami. Wyrażenia postaci (P2) nazywamy *aplikacjami*  $M$  do  $N$ . Symbol  $\lambda$  występujący w (P3) nazywamy  $\lambda$ -abstraktorem, zaś wyrażenia powstałe przez zastosowanie tej reguły to  $\lambda$ -abstrakcje. W wyrażeniu postaci  $(\lambda x. M)$  preterm  $M$  jest w *zasięgu*  $\lambda$ -abstraktora, a zmienna  $x$  jest przez niego *związana*. Ponadto, będziemy stosowali następujące konwencje notacyjne:

- *najbardziej zewnętrzne nawiasy będą pomijane*,
- *aplikacja wiąże lewostronnie; wyrażenia postaci  $(PQ)R$  będą zapisywane w postaci  $PQR$ ,*
- *$\lambda$ -abstrakcja wiąże prawostronnie:  $\lambda x_1. (\lambda x_2. P)$  zapisujemy  $\lambda x_1. \lambda x_2. P$ ,*
- *następujące po sobie  $\lambda$ -abstrakcje postaci  $\lambda x_1. \lambda x_2. \dots \lambda x_n. P$  zapisujemy pod wspólnym  $\lambda$ -abstraktorem:  $\lambda x_1 x_2 \dots x_n. P$ .*
- *$n$ -krotną aplikację  $P \in \tilde{\Lambda}$  do siebie zapisujemy skrótowo:  $P^n \equiv \underbrace{P P \dots P}_{n\text{-razy}}$*

**Przykład 1.** Podajmy kilka przykładów  $\lambda$ -pretermów pogrupowanych ze względu na ich konstrukcję.

- (P1):  $x, y, z$ .
- (P2):  $xx, yx, x(xz),$   
 $(\lambda x. (xz))y, y(\lambda x. (xz)), (\lambda x. x)(\lambda x. x).$

(P3):  $\lambda x. (x z), \lambda y z. x, \lambda x. (\lambda x. (x x))$ .

Podwyrażenia  $\lambda$ -pretermu mogą być wzajemnie identyczne i występować wielokrotnie. Obserwację tę ujmuje następująca definicja.

**Definicja 2.** (Multizbiór Sub podtermów pretermu)

- (1)  $\text{Sub}(x) = \{x\}$
- (2)  $\text{Sub}(MN) = \text{Sub}(M) \cup \text{Sub}(N) \cup \{MN\}$
- (3)  $\text{Sub}(\lambda x. M) = \text{Sub}(M) \cup \{\lambda x. M\}$

Elementy multizbioru  $\text{Sub}(M)$  nazywamy *podtermami*  $M$ . Jeśli  $L$  jest podtermem  $M$ , ale  $L \neq M$ , to  $L$  nazywamy podtermem *właściwym*.

**Przykład 2.** Podtermy wybranych  $\lambda$ -pretermów.

- (a)  $\text{Sub}(\lambda x. x x) = \{(\lambda x. x x)^1, (x x)^1, x^2\}$
- (b)  $\text{Sub}((\lambda x. x x) (\lambda x. x x)) =$   
 $= \{((\lambda x. x x) (\lambda x. x x))^1, (\lambda x. x x)^2, (x x)^2, x^4\}$

W powyższych przykładach użyliśmy standardowej notacji w górnym indeksie umieszczając krotność występowania elementu.

**Definicja 3.** (Zbiór FV zmiennych wolnych) Dla dowolnego pretermu  $M$  określamy zbiór  $\text{FV}(M)$  *zmiennych wolnych* w  $M$  w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\text{FV}(x) &= \{x\} \\ \text{FV}(\lambda x. P) &= \text{FV}(P) \setminus \{x\} \\ \text{FV}(PQ) &= \text{FV}(P) \cup \text{FV}(Q)\end{aligned}$$

Jesli  $\text{FV}(M) = \emptyset$ , to mówimy, że  $M$  jest *domknięty* lub nazywamy  $M$  *kombinatorem*.

**Przykład 3.** (a)  $\text{FV}(\lambda x. x y) = \{y\}$

(b)  $\text{FV}(x (\lambda x. x y)) = \{x, y\}$

(c)  $\text{FV}(\lambda x y z. x y) = \emptyset$

**Definicja 4.** (Podstawienie) Dla dowolnych  $M, N \in \tilde{\Lambda}$  i  $x \in V$  przez  $N[x/N]$  oznaczamy rezultat podstawienia termu  $N$  za wszystkie wolne wystąpienia zmiennej  $x$  w  $M$ , o ile w rezultacie podstawienia nie zostaną związane żadne zmienne wolne występujące w  $N$ . W takim wypadku:

(S1)  $x[x/N] = N$

- (S2)  $y[x/N] = y$ , o ile  $x \neq y$   
(S3)  $(PQ)[x/N] = P[x/N]Q[x/N]$   
(S4)  $(\lambda y. P)[x/N] = \lambda y. P[x/N]$ , gdzie  $x \neq y$  i  $y \notin \text{FV}(N)$   
(S5)  $(\lambda x. P)[x/N] = \lambda x. P$

**Lemat 1.** (O podstawieniu) Niech  $M, N, L \in \tilde{\Lambda}$  i niech ponadto  $x \neq y$  oraz  $x \notin \text{FV}(L)$ . Wówczas

$$M[x/N][y/L] \equiv M[y/L][x/N[y/L]]. \quad (1)$$

**Dowód.** Dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem  $M$ . Rozważmy następujące przypadki:

- i)  $M$  jest zmienną. Wówczas:
- a. Jeśli  $M \equiv x$ , to obie strony (1) po podstawieniu są postaci  $N[y/L]$ .
  - b. Jeśli  $M \equiv y$ , to ponieważ  $x \neq y$  i  $x \notin \text{FV}(M)$ , po wykonaniu podstawienia po lewej stronie (1) otrzymujemy  $M[x/N][y/L] \equiv L$ . Ponieważ  $x \notin \text{FV}(L)$ , to po wykonaniu podstawienia po prawej stronie widzimy, że obydwie strony są identyczne.
  - c. Jeśli  $M \equiv z$  i  $z \neq x$  oraz  $z \neq y$ , to obydwie strony (1) są identyczne.
- ii)  $M \equiv PQ$  dla pewnych  $P, Q \in \tilde{\Lambda}$ . Wówczas korzystając z hipotezy indukcyjnej wnosimy, że

$$\begin{aligned} P[x/N][y/L] &\equiv P[y/L][x/N[y/L]], \\ Q[x/N][y/L] &\equiv Q[y/L][x/N[y/L]]. \end{aligned}$$

Mając na względzie (S3) widzimy, że twierdzenie zachodzi i w tym przypadku.

- iii) Jeśli  $M \equiv \lambda z. P$  oraz  $z \equiv x$  lub  $z \equiv y$ , to z (S'5) widzimy, że obydwie strony (1) są identyczne. Przypuśćmy, że  $z \neq x$  i  $z \neq y$  i  $z \notin \text{FV}(L)$ . Wówczas na podstawie hipotezy indukcyjnej mamy:

$$\begin{aligned} (\lambda z. P)[x/N][y/L] &= \lambda z. P[x/N][y/L] = \\ &= \lambda z. P[y/L][x/N[y/L]] = \\ &= (\lambda z. P)[y/L][x/N[y/L]]. \end{aligned}$$

□

**Wniosek 1.** Jeśli  $M[x/y]$  jest określone i  $y \notin \text{FV}(M)$ , to  $M[x/y][y/x]$  jest określone oraz  $M[x/y][y/x] = M$ .

**Dowód.** Mając na uwadze Lemat 4 dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem  $M$ . □

## 1.1 Wyrażenia $\lambda$

Na ogół chcielibyśmy utożsamiać pretermy, które różnią się wyłącznie zmiennymi związanymi, tak jak w przypadku wyrażeń  $\lambda x. zx$  i  $\lambda y. zy$ . W takim wypadku powiemy o nich, że są swoimi  $\alpha$ -wariantami lub że są ze sobą w relacji  $\alpha$ -konwersji.

**Definicja 5.** (Relacja  $\alpha$ -konwersji) Relacją  $=_\alpha$  ( $\alpha$ -konwersji) nazywamy najmniejszy w sensie mnogościowym praporządek na  $\tilde{\Lambda}$  taki, że

- ( $\alpha 1$ ) Jeśli  $y \notin \text{FV}(M)$  oraz  $M[x/y]$  jest określone,  
to  $\lambda x. M =_\alpha \lambda y. M[x/y]$
- ( $\alpha 2$ ) Jeśli  $M =_\alpha N$ , to dla dowolnego  $x \in V$  zachodzi  $\lambda x. M =_\alpha \lambda x. N$
- ( $\alpha 3$ ) Jeśli  $M =_\alpha N$ , to dla dowolnego  $Z \in \tilde{\Lambda}$  zachodzi  $MZ =_\alpha NZ$
- ( $\alpha 4$ ) Jeśli  $M =_\alpha N$ , to dla dowolnego  $Z \in \tilde{\Lambda}$  zachodzi  $ZM =_\alpha ZN$

**Przykład 4.**

$$\begin{aligned} \lambda xy. x(xy) &\equiv \lambda x. (\lambda y. x(xy)) \\ &\equiv_\alpha \lambda x. (\lambda z. x(xz)) \\ &\equiv_\alpha \lambda v. (\lambda z. v(vz)) \\ &\equiv \lambda vz. v(vz). \end{aligned}$$

**Wniosek 2.** Relacja  $=_\alpha$  jest relacją równoważności.

**Dowód.** Wystarczy, że pokażemy, że relacja  $=_\alpha$  jest symetryczna. Dowód przebiega przez indukcję względem Definicji 5. Rozważmy następujące przypadki:

- i) Jeśli  $M =_\alpha N$  w konsekwencji zwrotności  $=_\alpha$ , to  $M \equiv N$ , a zatem również  $N \equiv M$ . Stąd  $N =_\alpha M$ .
- ii) Jeśli  $M =_\alpha N$  w konsekwencji przechodniości  $=_\alpha$ , to istnieje  $L \in \tilde{\Lambda}$  takie, że  $M =_\alpha L$  i  $L =_\alpha N$ . Wówczas z hipotezy indukcyjnej  $N =_\alpha L$  i  $L =_\alpha M$ . Z przechodniości relacji  $=_\alpha$  otrzymujemy spodziewaną tezę.
- iii) Przypuśćmy, że  $M =_\alpha N$  w konsekwencji ( $\alpha 1$ ) dla  $M \equiv \lambda x. M'$  i  $N \equiv \lambda y. M'[x/y]$ . Ponieważ  $x \notin \text{FV}(M'[x/y])$ , to ze względu na Wniosek 1 mamy, że  $M'[x/y][y/x] = M'$ . Zatem, na podstawie ( $\alpha 1$ ):

$$\lambda y. M'[x/y] =_\alpha \lambda x. M'[x/y][y/x].$$

- iv) Jeśli  $M =_\alpha N$  w konsekwencji ( $\alpha 2$ ), gdzie  $M = \lambda x. M'$  i  $N = \lambda x. N'$  dla  $M' =_\alpha N'$ , to z hipotezy indukcyjnej  $N' =_\alpha M'$  i w konsekwencji ( $\alpha 2$ ) mamy, że  $N =_\alpha M$ .

v) Jeśli  $M =_{\alpha} N$  w konsekwencji  $(\alpha 3)$  dla  $M \equiv M'Z$  i  $N \equiv N'Z$  takich, że  $M' =_{\alpha} N'$ , to z hipotezy indukcyjnej oczywiście  $N' =_{\alpha} M'$ , a zatem z  $(\alpha 3)$   $N =_{\alpha} M$ .

vi) Jeśli  $M =_{\alpha} N$  w konsekwencji  $(\alpha 3)$ , to postępujemy jak w przypadku (v).  $\square$

**Definicja 6.** (Zbiór  $\Lambda$   $\lambda$ -termów) Każdą klasę abstrakcji relacji  $=_{\alpha}$  nazywamy  $\lambda$ -termem. Zbiór wszystkich  $\lambda$ -termów  $\Lambda$  to zbiór ilorazowy relacji  $\alpha$ -konwersji:

$$\Lambda = \{[M]_{=\alpha} \mid M \in \tilde{\Lambda}\}$$

**Konwencja.** Wprowadzamy następujące konwencje notacyjne:

$$\begin{aligned} x &= [x]_{=\alpha}, \\ PQ &= [M'N']_{=\alpha}, \text{ gdzie } M = [M']_{=\alpha} \text{ i } N = [N']_{=\alpha}, \\ \lambda x. M &= [\lambda x. M']_{=\alpha}, \text{ gdzie } N = [N']_{=\alpha}. \end{aligned}$$

**Twierdzenie 1.** Każdy  $M \in \Lambda$  ma jedną z poniższych postaci:

- (1)  $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n. y N_1 \dots N_m$ , gdzie  $n, m \geq 0$  i  $y \in V$
- (2)  $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n. (\lambda y. N_0) N_1 \dots N_m$ , gdzie  $n \geq 0$  i  $m \geq 1$

O  $\lambda$ -termach postaci (1) mówimy, że są w czołowej postaci normalnej (HNF, ang. head normal form).

**Dowód.** Z definicji  $\lambda$ -term  $M$  jest albo zmienną, albo aplikacją postaci  $PQ$ , albo abstrakcją postaci  $(\lambda x. P)$ . Wówczas mamy następujące przypadki:

- i) Jeśli  $M$  jest zmienną, to wówczas  $M$  jest postaci (1).
- ii) Jeśli  $M$  jest aplikacją, to wówczas  $M \equiv P_0 P_1 \dots P_m$ , gdzie  $P_0$  nie jest aplikacją. Wówczas  $M$  jest postaci (1) albo postaci (2) dla  $n = 0$ , w zależności od tego czy  $P_0$  jest zmienną (wówczas jest to przypadek (1)) czy abstrakcja (wówczas jest to przypadek (2)).
- iii) Jeśli  $M$  jest abstrakcją, to wówczas  $M \equiv \lambda x_1 x_2 \dots x_m. P_0 P_1 \dots P_n$ , gdzie  $P_0$  abstrakcją już nie jest. Wówczas  $P_0$  jest albo zmienną (przypadek (1)) albo aplikacją (przypadek (2)).

Na zbiór  $\Lambda$  przenoszą się pojęcia podtermu, zmiennych wolnych i operacji podstawienia definiowane uprzednio dla pretermów.

**Definicja 7.** (Multizbiór Sub podtermów  $\lambda$ -termu) Dla dowolnego  $\lambda$ -termu  $M = [M']_{=\alpha}$  określamy

$$\text{Sub}(M) = \text{Sub}(M'),$$

gdzie  $\text{Sub}(M')$  jest multizbiorem podwyrażeń pretermu  $M'$  zdefiniowanym w myśl Definicji 2.

**Definicja 8.** (Zbiór zmiennych wolnych FV) Dla dowolnego  $\lambda$ -termu  $M = [M']_{=\alpha}$  określamy zbiór  $\text{FV}(M)$  *zmiennych wolnych* w  $M$

$$\text{FV}(M) = \text{FV}(M'),$$

gdzie  $\text{FV}(M')$  jest zbiorem zmiennych wolnych pretermu  $M'$  zdefiniowanym w myśl Definicji 3.

**Definicja 9.** (Podstawienie) Niech  $M = [M']_{=\alpha}$  i  $N = [N']_{=\alpha}$  i niech  $M'[x/N']$  będzie określone w myśl Definicji 4. Wówczas

$$M[x/N] = [M'[x/N']]_{=\alpha}.$$

Operacja podstawienia wymaga jednak pewnej delikatności. Rozważmy następującą relację:

$$\lambda x. zx =_{\alpha} \lambda y. zy$$

Zauważmy, że traktując podstawienie w sposób naiwny, mamy, że  $(\lambda x. zx)[z/x] \neq_{\alpha} (\lambda y. zy)[z/x]$ , a więc tracimy pożądaną własność niezmienniczości  $\alpha$ -konwersji względem podstawienia. Stąd w Definicji 4 wymóg, aby podstawienie nie prowadziło do uszczuplenia zbioru zmiennych wolnych. Alternatywnym rozwiązaniem jest określenie podstawienia, które wprowadzałoby do wyrażenia nową zmienną i prowadziło w konsekwencji do abstrahowania po wcześniej nie występujących zmiennych:

$$(\lambda x. M)[y/N] = \lambda x'. M[x/x'] [y/N],$$

w przypadku, gdy  $x \neq y$ , gdzie  $x' \notin \text{FV}(M)$  i  $x' \notin \text{FV}(N)$ . Rozstrzygnięcie takie przytacza się w [HS08]. Po uwzględnieniu odpowiednich modyfikacji, Definicja 4 przyjmuje następującą postać:

**Definicja 4'.** (*Podstawienie'*)

$$(S'1) \quad x[x/N] = N$$

$$(S'2) \quad y[x/N] = y, \text{ o ile } x \neq y$$

$$(S'3) \quad (PQ)[x/N] = P[x/N] Q[x/N]$$

$$(S'4) \quad (\lambda x. P)[x/N] = \lambda x. P$$

$$(S'5) \quad (\lambda y. P)[x/N] = \lambda y. P, \text{ jeśli } x \notin \text{FV}(P)$$

$$(S'6) \quad (\lambda y. P)[x/N] = \lambda y. P[x/N], \text{ gdzie } x \in \text{FV}(P) \text{ i } y \notin \text{FV}(N)$$

$$(S'7) \quad (\lambda y. P)[x/N] = \lambda z. P[y/z][x/N], \text{ gdzie } x \in \text{FV}(P) \text{ i } y \in \text{FV}(N)$$

przy czym w (S'7) wymagamy, aby zmienna  $z$  nie występowała wcześniej w termach  $N$  i  $P$  jako zmienna wolna, zaś dla (S'5)-(S'7) dodatkowo  $y \neq x$ .

*Uwaga 1.* Każde podstawienie  $[x/N]$  jest funkcją z  $\mathbf{\Lambda} \rightarrow \mathbf{\Lambda}$ , gdzie  $x \in V$  i  $N \in \mathbf{\Lambda}$  są dowolnymi parametrami. Zbiór  $S$  podstawień ma strukturę monoidu z działaniem składania

$$M([x_2/N_2] \circ [x_1/N_1]) = (M[x_1/N_1])[x_2/N_2] \equiv M[x_1/N_1][x_2/N_2]$$

dla dowolnych  $[x_1/N_1], [x_2/N_2] \in S$ , o ile  $S$  posiada element neutralny  $\iota$  taki, że

$$M\iota = M, \text{ gdzie } [x/x] = \iota \text{ dla dowolnego } x \in V.$$

W literaturze znajdujemy mnogość propozycji, które w ten czy inny sposób starają się ułatwić rzeczywistą implementację podstawienia. Na szczególną uwagę zasługują tutaj tak zwane *indeksy de Bruijna*. Zaproponowana przez N. G. de Bruijna w [Bru72] notacja eliminuje bezpośrednie występowanie symboli zmiennych w  $\lambda$ -termach, zastępując je liczbą naturalną wyrażającą głębokość zagnieżdżenia odpowiedniej  $\lambda$ -abstrakcji przez którą jest związana, przykładowo:

$$\lambda f. (\lambda x. (f(xx))\lambda x. (f(xx))) \equiv_{deBruijn} \lambda(\lambda 2(11))\lambda 2(11)$$

Historycznie wiąże się ta notacja z jego pracami nad systemem komputerowo wspomagane dowodzenia twierdzeń AUTOMATH. Rozwiązanie takie, podobnie jak w przypadku tzw. logik kombinatorów (np. rachunku SKI), eliminuje konieczność utożsamiania termów przez  $\alpha$ -konwersję, ale istotnie zmniejsza ich czytelność.

Szerszy komentarz dotyczący dotychczasowych prób uchwycenia operacji podstawienia można prześledzić w [Alt02]. Nasze rozważania opierają się w tej materii przeważająco na [SU06]. Samo podejście do definiowania  $\lambda$ -termów przez operację  $\alpha$ -konwersji nie jest powszechne w literaturze przedmiotu. Analogiczną konstrukcję należałoby powtarzać wprowadzając każdy kolejny system, dlatego w dalszej części tej pracy będziemy poprzestawali na nieformalnym traktowaniu wyrażeń danego systemu jako odpowiednich klas  $\alpha$ -konwersji.

**Definicja 10.** (Podstawienie jednoczesne) Dla dowolnego  $M \in \mathbf{\Lambda}$ , ciągu  $\lambda$ -zmiennych  $\vec{x}$  i ciągu  $\lambda$ -termów  $\vec{N}$  określamy:

- ( $\vec{s}1$ )  $x_i[\vec{x}/\vec{N}] = N_i$  dla  $i \in \mathbb{N}$ .
- ( $\vec{s}2$ )  $y[\vec{x}/\vec{N}] = y$  o ile dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$ ,  $y \neq x_i$ .
- ( $\vec{s}3$ )  $(PQ)[\vec{x}/\vec{N}] = P[\vec{x}/\vec{N}]Q[\vec{x}/\vec{N}]$
- ( $\vec{s}4$ )  $(\lambda y. P)[\vec{x}/\vec{N}] = \lambda y. P[\vec{x}/\vec{N}]$ , jeśli  $y \neq x_i$  dla wszystkich  $i \in \mathbb{N}$  i  $y \notin \bigcup_{i \in \mathbb{N}} FV(N_i)$

**Konwencja.** Jeśli  $N_i \equiv x_i$  dla wszystkich poza skończenie wieloma  $i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ , to  $[x_{i_1}/N_{i_1}, x_{i_2}/N_{i_2}, \dots, x_{i_n}/N_{i_n}] \equiv [\vec{x}/\vec{N}]$ .



**Przykład 5.** Zauważmy, że podstawienia w myśl Definicji 4 i Definicji 10 mogą, ale nie muszą, prowadzić do różnych rezultatów.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & (xy)[y/x][x/u] = uu, \\ & (xy)[y/x, x/u] = ux. \\ \text{b)} & (\lambda x. yx)[x/y][y/z] = \lambda x. zx, \\ & (\lambda x. yx)[x/y, y/z] = \lambda x. zx. \end{array}$$

## 1.2 Redukcja

Sens obliczeniowy  $\lambda$ -termom nadajemy przez określenie na  $\mathbf{\Lambda}$  operacji  $\beta$ - i  $\eta$ -redukcji. Pożądane jest, żeby operacje te wykonywane na podtermach pozostawały w zgodzie ze strukturą całego  $\lambda$ -termu.

**Definicja 11.** (Relacja zgodna) Relację binarną  $\mathcal{R}$  na zbiorze  $\mathbf{\Lambda}$  nazywamy *zgodną*, jeśli dla dowolnych  $M, N, P \in \mathbf{\Lambda}$  zachodzą następujące warunki:

- (c1) Jeśli  $MRN$ , to  $(\lambda x. M) \mathcal{R} (\lambda x. N)$  dla dowolnej  $\lambda$ -zmiennnej  $x$ .
- (c2) Jeśli  $MRN$ , to  $(MP) \mathcal{R} (NP)$ .
- (c3) Jeśli  $MRN$ , to  $(PM) \mathcal{R} (PN)$ .

Przez *domknięcie relacji*  $\mathcal{R}_1$  będziemy rozumieli najmniejszą (w sensie mnogościowym) relację  $\mathcal{R}_2$  taką, że  $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ . Z pewnego rodzaju domknięciami, ze względu na ich szczególną rolę, wiążemy następującą notację:

- (a) Przez  $\mathcal{R}^+$  oznaczamy przechodnie domknięcie relacji  $\mathcal{R}$ .
- (b) Przez  $\mathcal{R}^*$  oznaczamy zwrotnie domknięcie relacji  $\mathcal{R}^+$ .
- (c) Przez  $=_{\mathcal{R}}$  oznaczamy symetryczne domknięcie relacji  $\mathcal{R}^*$ .

Dla lepszego zrozumienia powyższych operacji warto zauważyć, że (b) wyznacza praporzadek, który w odniesieniu do redukcji określonych na  $\mathbf{\Lambda}$  można rozumieć jako graf skierowany (w przypadku  $\mathbf{\Lambda}$  być może nieskończony) w którym krawędzie odpowiadają możliwym krokom obliczenia, zaś (c) – kongruencję, która znów w szczególnym odniesieniu do  $\lambda$ -termów, będzie dokonywała podziału w  $\mathbf{\Lambda}$  ze względu na rezultat obliczenia.

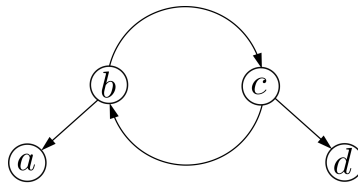
**Definicja 12.** Niech  $\rightarrow$  będzie relacją binarną w zbiorze  $A$ .

- (CR) Powiemy, że  $\rightarrow$  ma *własność Churcha-Rossera*, jeśli dla dowolnych  $a, b, c \in A$  takich, że  $a \rightarrow^* b$  oraz  $a \rightarrow^* c$  istnieje  $d \in A$  takie, że  $b \rightarrow^* d$  i  $c \rightarrow^* d$ . Innymi słowy, przemienny jest diagram:

$$\begin{array}{ccc} a & \xrightarrow{*} & b \\ \downarrow^* & & \downarrow^* \\ c & \xrightarrow{*} & d \end{array}$$

(WCR) Powiemy, że  $\rightarrow$  ma *słabą własność Churcha-Rossera*, jeśli dla dowolnych  $a, b, c \in A$  takich, że  $a \rightarrow b$  oraz  $a \rightarrow c$  istnieje  $d \in A$  takie, że  $b \rightarrow^* d$  i  $c \rightarrow^* d$ . Innymi słowy, przemienny jest diagram:

$$\begin{array}{ccc} a & \longrightarrow & b \\ \downarrow & & \downarrow^* \\ c & \xrightarrow{*} & d \end{array}$$



Rysunek 1: Rozważmy graf skierowany, w którym krawędzie odpowiadają relacji  $\rightarrow$  w zbiorze  $\{a, b, c, d\}$ . Widzimy, że relacja  $\rightarrow$  ma własność WCR, ale nie ma własności CR.

**Definicja 13.** (Postać normalna) Powiemy, że  $x \in A$  jest *redukowalny*, jeśli istnieje  $y \in A$  takie, że  $x \rightarrow y$ . W przeciwnym wypadku powiemy, że  $x$  jest w *postaci normalnej* i będziemy pisali  $x \in \text{NF}$ .

Element  $y \in A$  nazywamy *postacią normalną*  $x \in A$ , jeśli  $x \rightarrow^* y$  i  $y \in \text{NF}$ . Jeśli  $y$  jest postacią normalną  $x$  i  $y$  jest jedyną postacią normalną  $x$ , to piszemy  $x \downarrow y$ . W przeciwnym wypadku, czyli jeśli istnieją  $y, z \in \text{NF}, y \neq z$  takie, że  $x \rightarrow^* y$  i  $x \rightarrow^* z$ , powiemy, że  $x$  jest *niejednoznaczny*.

**Definicja 14.** Niech  $\rightarrow$  będzie relacją binarną na zbiorze  $A$ .

(WN) Powiemy, że relacja  $\rightarrow$  jest *słabo normalizująca*, jeśli dla dowolnego  $a \in A$  istnieje  $a' \in \text{NF}$  taki, że  $a \rightarrow^* a'$ . W takim wypadku o  $a \in A$  będziemy mówili, że jest *słabo normalizowalny* i pisali  $a \in \text{WN}$ .

(SN) Powiemy, że relacja  $\rightarrow$  jest *silnie normalizująca*, jeśli nie istnieje nieskończony ciąg relacji  $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots$ . W takim wypadku o  $a \in A$  będziemy mówili, że jest *silnie normalizowalny* i pisali  $a \in \text{SN}$ .

**Twierdzenie 2.** (Lemat Newmana) Niech  $\rightarrow$  będzie relacją binarną mającą własność SN. Jeśli  $\rightarrow$  ma własność WCR, to  $\rightarrow$  ma własność CR.

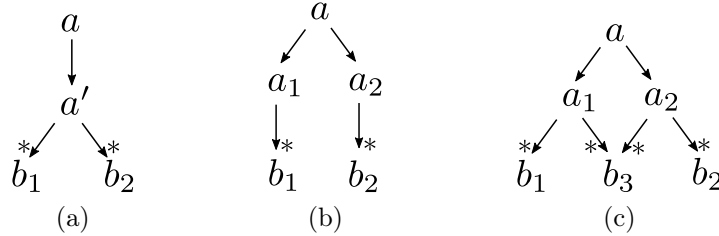
**Dowód.** Niech  $\rightarrow$  będzie relacją binarną na  $A$  o własności SN i WCR. Ponieważ  $\rightarrow$  jest SN, to każdy  $a$  jest normalizowalny.

Jeśli  $A$  nie zawiera elementów niejednoznacznych, to twierdzenie zachodzi w sposób trywialny. Przypuśćmy, że  $a \in A$  jest niejednoznaczny. Twierdzimy, że istnieje  $a' \in A$  taki, że  $a \rightarrow a'$  i  $a'$  jest niejednoznaczny. Niech  $b_1, b_2 \in \text{NF}$ ,  $b_1 \neq b_2$  i  $a \rightarrow^* b_1$  oraz  $a \rightarrow^* b_2$ . Ponieważ  $b_1 \neq b_2$ , to istnieją  $a_1, a_2 \in A$  takie, że:

$$a \rightarrow a_1 \rightarrow^* b_1 \quad \text{oraz} \quad a \rightarrow a_2 \rightarrow^* b_2$$

Jeśli  $a_1 = a_2$ , to  $a' = a_1 = a_2$  i wystarczy wybrać  $a' = a_1$ . Jeśli jednak  $a_1 \neq a_2$ , to z własności WCR istnieje  $b_3 \in A$  taka, że  $a_1 \rightarrow^* b_3$  oraz  $a_2 \rightarrow^* b_3$ . Z własności SN możemy przyjąć, że  $b_3$  jest w postaci normalnej. Zachodzą więc dwa przypadki:

- i)  $a_1 = a_2$ . Wówczas wystarczy ustalić  $a' = a_1$  albo  $a' = a_2$  (Rysunek 2a).
- ii)  $a_1 \neq a_2$  (Rysunek 2b). Wówczas z WCR istnieje  $b_3 \in A$  takie, że  $a_1 \rightarrow^* b_3$  oraz  $a_2 \rightarrow^* b_3$  (Rysunek 2c). Przypuśćmy, że  $b_3 \in \text{NF}$ . Ponieważ  $b_1 \neq b_3$ , to  $b_3 \neq b_1$  lub  $b_3 \neq b_2$ , zatem możemy wybrać  $a' = a_1$  albo  $a' = a_2$ .



Rysunek 2: Warianty konstruowania redukcji.

Stosując powyższe rozumowanie do  $a'$  otrzymujemy kolejny element niejednoznaczny. a zatem możemy skonstruować nieskończony ciąg redukcji, wbrew założeniu, że relacja  $\rightarrow$  jest SN. Zatem  $A$  nie zawiera elementów niejednoznacznych.  $\square$

**Definicja 15.** ( $\beta$ -redukcja)  $\beta$ -redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zgodną na  $\Lambda$  relację binarną  $\rightarrow_\beta$  taką, że

$$(\lambda x. M)N \rightarrow_\beta M[x/N].$$

$\beta$ -redexami będziemy nazywali wyrażenia postaci  $(\lambda x. M)N$ , zaś rezultat ich  $\beta$ -redukcji w postaci termu  $M[x/N]$  –  $\beta$ -reduktem. Przez  $\rightarrow_\beta^+$ ,  $\rightarrow_\beta^*$ ,  $=_\beta$  oznaczamy odpowiednie domknięcia relacji  $\beta$ -redukcji. Symbolem  $\leftarrow_\beta$  oznaczać będziemy relację odwrotną do  $\beta$ -redukcji, zaś przez  $\leftrightarrow_\beta$  jej symetryczne domknięcie.

*Ciągiem  $\beta$ -redukcji* nazywamy każdy skończony lub nieskończony ciąg  $\lambda$ -termów  $M_0, M_1, \dots$  taki, że  $M_0 \rightarrow_\beta M_1 \rightarrow_\beta \dots$

Relację  $=_\beta$  nazywamy  $\beta$ -konwersją. Zauważmy, że  $M =_\beta N$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg  $\lambda$ -termów  $M \equiv M_0, M_1, \dots, M_n \equiv N$  taki, że  $M_i \rightarrow_\beta M_{i+1}$  lub  $M_{i+1} \rightarrow_\beta M_i$  dla  $0 \leq i \leq n$ .

**Przykład 6.** Wszystkie pary  $\lambda$ -termów ze zbioru

$$\{(\lambda x. (\lambda y. yx) z) v, (\lambda y. yv) z, (\lambda x. zx) v, zv\}$$

są swoimi  $\beta$ -konwersami. Mamy:

$$\begin{aligned} (\lambda y. yv) z &\rightarrow_{\beta} zv \leftarrow_{\beta} (\lambda x. zx) v, \\ (\lambda y. yv) z &\leftarrow_{\beta} (\lambda x. (\lambda y. yx) z) v \rightarrow_{\beta} (\lambda x. zx) v. \end{aligned}$$

**Lemat 2.** Dla dowolnych  $N, Q \in \mathbf{\Lambda}$ , jeśli  $N[y/Q] \in \text{SN}_{\beta}$ , to  $N \in \text{SN}_{\beta}$ . Jeśli dodatkowo  $y \in \text{FV}(N)$ , to także  $Q \in \text{SN}_{\beta}$ .

**Dowód.** Dowód przeprowadzamy przez indukcję względem definicji 4'.  $\square$

**Definicja 16.** (Strategia redukcji) Strategią redukcji nazywamy każde odwzorowanie  $S: \mathbf{\Lambda} \rightarrow \mathbf{\Lambda}$  postaci

$$S(M) = \begin{cases} M, & \text{jeśli } M \in \text{NF}_{\beta}, \\ M', & \text{jeśli } M \rightarrow_{\beta} M'. \end{cases}$$

Strategię  $S$  nazywamy *normalizującą*, jeśli dla każdego  $M \in \text{WN}_{\beta}$  istnieje  $i \in \mathbb{N}$  takie, że  $F^i(M) \equiv \underbrace{F(F(\dots(F(M))\dots))}_{i\text{-razy}} \in \text{NF}_{\beta}$ .

**Przykład 7.** (a) Oznaczmy  $Y \equiv \lambda f. (\lambda x. (f(xx)) \lambda x. (f(xx)))$  i niech  $F$  będzie dowolnym  $\lambda$ -termem. Wówczas otrzymujemy nieskończony ciąg redukcji postaci

$$\begin{aligned} YF &\equiv (\lambda f. (\lambda x. (f(xx)) \lambda x. (f(xx)))) F \\ &\rightarrow_{\beta} (\lambda x. F(xx)) \lambda x. F(xx) \\ &\rightarrow_{\beta} F((\lambda x. F(xx)) \lambda x. F(xx)) \\ &\rightarrow_{\beta} F(\underbrace{F((\lambda x. F(xx)) \lambda x. F(xx))}_{=_{\beta} YF}) \\ &\rightarrow_{\beta} \dots \end{aligned}$$

$Y$  nazywamy *kombinatorem punktu stałego*. Widzimy, że relacja  $\beta$ -redukcji w rachunku  $\lambda$  nie jest ani słabo, ani silnie normalizująca.

(b) Niech  $\Omega \equiv (\lambda x. xx)(\lambda x. xx)$ .  $\Omega$  jest  $\beta$ -redexem, którego redukcja prowadzi do ponownego otrzymania termu  $\Omega$  i w konsekwencji do stałego ciągu redukcji postaci:

$$\Omega \rightarrow_{\beta} \Omega \rightarrow_{\beta} \Omega \rightarrow_{\beta} \dots$$

(c) Niech  $\Delta \equiv \lambda x. xxx$ . Wówczas:

$$\Delta\Delta \rightarrow_{\beta} \Delta\Delta\Delta \rightarrow_{\beta} \Delta\Delta\Delta\Delta \rightarrow_{\beta} \dots$$

Ponownie, ponieważ każda redukcja powoduje wydłużenie termu,  $\Delta\Delta$  nie ma postaci normalnej i w konsekwencji każdy powstały ciąg redukcji termu  $\Delta\Delta$  jest nieskończony.

(d) Redukcja  $\lambda$ -termu posiadającego więcej niż jeden redeks może prowadzić do różnych (choć  $\beta$ -równoważnych) reduktów. Zależy to od wyboru strategii redukcji. Rozważmy następujący term:  $(\lambda u. v) \Omega$ . Konsekwentne redukowanie podtermu  $\Omega$  prowadzić musi do niekończącego się stałego ciągu redukcji

$$(\lambda u. v) \Omega \rightarrow_{\beta} (\lambda u. v) \Omega \rightarrow_{\beta} \dots$$

Wybierając strategię polegającą na aplikacji  $\Omega$  do  $(\lambda u. v)$  otrzymujemy natychmiastowo redeks w postaci normalnej.

**Definicja 17.** ( $\eta$ -redukcja)  $\eta$ -redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zgodną na  $\Lambda$  relację binarną  $\rightarrow_{\eta}$  taką, że

$$\lambda x. Mx \rightarrow_{\eta} M, \text{ o ile } x \notin \text{FV}(M).$$

$\eta$ -redukcja pozwala na pominięcie niczego nie wnoszącej  $\lambda$ -abstrakcji. Operację odwrotną nazywamy  $\eta$ -abstrakcją, zaś  $\lambda$ -termy będące w którejkolwiek z tych relacji nazywamy  $\eta$ -konwersami. Operacja ta nie ma wpływu na rezultat obliczenia, jedynie optymalizuje zapis  $\lambda$ -termów i stąd ma duże znaczenie stylistyczne w programowaniu funkcyjnym.

**Przykład 8.** Przypuśćmy, że  $(+1) \in \Lambda$ . Wówczas  $\lambda x. ((+1)x) =_{\eta} (+1)$ .

Widzieliśmy, że  $\beta$ -redukcja może prowadzić do uzyskania rezultatu lub nie. Fakt 1 i następujące po nim Wniosek 3 i Wniosek 4 stwierdzają, że jeśli tylko mamy pewność, że  $\lambda$ -term ma postać normalną, to jest ona wyznaczona jednoznacznie i doprowadzi nas do niej każda strategia normalizująca. Fakt 1 to klasyczne twierdzenie, którego dowód można znaleźć w [Bar84, Rozdział 3.2] i ze względu na jego obszerność pozwalamy sobie go pominąć.

**Fakt 1.** (*Twierdzenie Churcha-Rossera*).  $\beta$ -redukcja ma własność CR.

**Wniosek 3.** Jeśli  $M =_{\beta} N$ , to istnieje  $L \in \Lambda$  takie, że  $M \rightarrow_{\beta}^* L$  i  $N \rightarrow_{\beta}^* L$ .

**Dowód.** Niech  $M, N \in \Lambda$  będą takie, że  $M =_{\beta} N$ . Wówczas istnieje ciąg  $\lambda$ -termów  $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n$  taki, że

$$M_0 \xleftrightarrow{\beta} M_1 \xleftrightarrow{\beta} \dots \xleftrightarrow{\beta} M_{n-1} \xleftrightarrow{\beta} M_n,$$

gdzie  $M_0 \equiv M$  i  $M_n \equiv N$ . Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem  $n$ . Rozważmy następujące przypadki:

- (1) Jeśli  $n = 0$ , to  $M \equiv N$ . Ustalając  $L \equiv M(\equiv N)$  w oczywisty sposób  $M \rightarrow_{\beta}^* L$  i  $N \rightarrow_{\beta}^* L$ .
- (2) Jeśli  $n = k > 0$ , to istnieje  $M_{k-1} \in \mathbf{\Lambda}$  takie, że

$$M \equiv M_0 \leftrightarrow_{\beta} M_1 \leftrightarrow_{\beta} \dots \leftrightarrow_{\beta} M_{k-1} \leftrightarrow_{\beta} M_k \equiv N$$

Z założenia indukcyjnego wiemy, że istnieje  $L' \in \mathbf{\Lambda}$  takie, że  $M_0 \rightarrow_{\beta}^* L'$  i  $M_{k-1} \rightarrow_{\beta}^* L'$ . Ponieważ  $\leftrightarrow_{\beta}$  jest symetryczna, rozważmy osobno przypadki  $M_{k-1} \rightarrow_{\beta} M_k$  i  $M_k \rightarrow_{\beta} M_{k-1}$ .

- (a) Jeśli  $M_{k-1} \rightarrow_{\beta} M_k$ , to tym bardziej  $M_{k-1} \rightarrow_{\beta}^* M_k$ . Ponieważ  $M_{k-1} \rightarrow_{\beta}^* L'$ , to korzystając Faktu 1 wnosimy, że istnieje  $L \in \mathbf{\Lambda}$  taki, że  $L' \rightarrow_{\beta}^* L$  i  $M_k \rightarrow_{\beta}^* L$ , czyli

$$\begin{array}{ccccccc} M_0 & \longleftrightarrow & \dots & \longleftrightarrow & M_{k-1} & \longrightarrow & M_k \\ & \searrow^* & & & \swarrow^* & & \downarrow^* \\ & & L' & \xrightarrow{*} & & & L \end{array}$$

- (b) Jeśli  $M_k \rightarrow_{\beta} M_{k-1}$ , to ponieważ  $M_{k-1} \rightarrow_{\beta}^* L'$ , natychmiast otrzymujemy, że  $M_k \rightarrow_{\beta}^* L'$ . Ustalając  $L \equiv L'$  otrzymujemy tezę.

□

**Wniosek 4.** (1) Jeśli  $N$  to postać normalna  $M$ , to  $M \rightarrow_{\beta}^* N$ .

(2) Każdy  $\lambda$ -term ma co najwyżej jedną postać normalną.

**Dowód.** (1) Przypuśćmy, że  $N \in \text{NF}_{\beta}$  i  $M =_{\beta} N$ . Wówczas z Wniosku 3 istnieje  $L$  takie, że  $M \rightarrow_{\beta}^* L$  i  $N \rightarrow_{\beta}^* L$ . Ponieważ  $N \in \text{NF}_{\beta}$  i  $N \rightarrow_{\beta}^* L$ , to  $N \equiv L$ . Ponieważ  $M \rightarrow_{\beta}^* L$ , to  $M \rightarrow_{\beta}^* N$ .

- (2) Przypuśćmy, że  $M$  ma dwie różne postaci normalne,  $N_1, N_2$ . Wówczas z części (1) tego twierdzenia,  $M \rightarrow_{\beta}^* N_1$  i  $M \rightarrow_{\beta}^* N_2$ . Z Faktu 1 istnieje  $L \in \mathbf{\Lambda}$  taki, że  $N_1 \rightarrow_{\beta}^* L$  i  $N_2 \rightarrow_{\beta}^* L$ . Ponieważ  $N_1, N_2 \in \text{NF}_{\beta}$ , to  $N_1 \equiv L \equiv N_2$ .

□

### 1.3 Kodowanie typów danych

Prosta składnia języka rachunku  $\lambda$  pozwala wyrazić zaskakująco wiele struktur danych reprezentując je i operacje na nich jako funkcje. Z tego powodu, stanowiąc inspirację dla wielu projektantów języków programowania, uchodzi za protoplastę rodziny języków funkcyjnych, chociaż bezpośrednio nie ma on praktycznego zastosowania w praktyce programistycznej. Rozwój tej legendy dobrze oddaje cykl

klasycznych artykułów (tzw. *Lambda Papers*) zapoczątkowany przez dokumentację języka Scheme [SS75].

Najpopularniejszym sposobem reprezentacji danych przez funkcje w rachunku  $\lambda$  oparty jest na kodowaniu liczb Peano za pomocą tzw. liczebników Churcha. Metoda ta, ze względu na wynikające z niej problemy natury złożonościowej [KPJ14], ma obecnie wyłącznie walory edukacyjne, dlatego w dalszej części pracy pokażemy tzw. kodowanie Scotta. Jest ona interesująca ze względu na praktyczną możliwość reprezentacji algebraicznych typów danych (ADT<sup>1</sup>) znanych ze współczesnych języków funkcyjnych [Jan13], pozwalając tym samym zaimplementować te konstrukcje na przykład w paradygmacie imperatywnym. Fakt, że każdy typ danych można zastąpić tym sposobem odpowiadającą mu funkcją, wskazuje na metodę konstruowania prostych języków funkcyjnych [JKP06] oraz na uniwersalność rachunku  $\lambda$  jako języka przejściowego dla kompilatorów języków funkcyjnych [PL92, Rozdział 3].

### 1.3.1 Algebraiczne typy danych

Algebraiczne typy danych są podstawowym środkiem współczesnych języków funkcyjnych do wyrażania struktur danych. Powstają one przy użyciu tzw. typów sumacyjnych i typów produktowych, jednak pojęcia te na gruncie formalnym będą szczegółowo omówione w późniejszej części pracy. Na potrzeby prezentacji poszczególnych kodowań wystarczy nam w tym rozdziale intuicje o ADT zbudowane na gruncie następujących definicji w języku Haskell:

```
data Boolean      = True
                  | False
data Tuple a b    = Tuple a b
data Temperature = Fahrenheit Int
                  | Celsius Int
data Maybe a      = Nothing
                  | Just a
data Nat          = Zero
                  | Succ Nat
data List t       = Nil
                  | Cons t (List t)
```

Definicja typu rozpoczyna się od słowa kluczowego `data`<sup>2</sup> po którym występuje *konstruktor typu*. Na wzór notacji BNF, typy przyjmują jedną z *wartości* odzie-

---

<sup>1</sup>Skrót od angielskojęzycznego *Algebraic Data Types*; nie należy mylić z *Abstract Data Types*.

<sup>2</sup>Dyskusja ta ma na celu wyłącznie ustalenie uwagi; świadomi jesteśmy niuansów związanych z określaniem synonimów typów lub definiowaniem typów przy pomocy słowa kluczowego `newtype`.

lonych znakiem "|". Każda z wartości składa się z *konstruktora wartości* i ewentualnie występujących po nim *parametrów typowych*. Zauważmy, że umożliwia to rekurencyjnie konstruowanie typów, tak jak w wypadku `Nat` i `List`.

Pokażemy, że algebraiczne typy danych możemy reprezentować w zwięzły sposób w rachunku  $\lambda$  bez typów. Przedstawione tutaj koncepcje w zaskakujący sposób przenoszą się do bardziej złożonych typowanych systemów rachunku  $\lambda$ .

### 1.3.2 Proste typy wyliczeniowe

Typy wyliczeniowe to typy, które reprezentują możliwe warianty przyjmowanej wartości. Najprostrzym nietrywialnym przykładem takiego typu jest `Boolean`. Ma on dwa konstruktory wartości: `True`, `False`. Praca z tego rodzaju typami wymaga mechanizmu dopasowywania wzorców (ang. *pattern-matching*) [PL92, Rozdział IV], który pozwala na wybór częściowej definicji funkcji w zależności od zadanego konstruktora wartości. Ponieważ w rachunku  $\lambda$  wyrażenia nie mają typów (lub, przyjmując perspektywę systemów z typami: wszystkie wyrażenia mają jeden, ten sam typ), interesowało nas będzie nie bezpośrednio kodowanie typu, ale kodowanie mechanizmu, który odpowiada za dopasowywanie wzorców. Posłużmy się znowu przykładem z języka Haskell i określmy funkcję odpowiadającą wykonaniu instrukcji warunkowej:

```
if True  a b = a
if False a b = b
```

gdzie `True` i `False` są wartościami typu `Boolean`. Właśnie ze względu na nie, mechanizm dopasowywania wzorca wybiera odpowiednią implementację instrukcji warunkowej. Ten sam efekt osiągnęlibyśmy kodując `True` i `False` w rachunku  $\lambda$  w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\text{True} &\equiv \lambda ab. a \\ \text{False} &\equiv \lambda ab. b\end{aligned}$$

Wówczas funkcję `if` możemy reprezentować wyrażeniem  $\text{if} \equiv \lambda cte. cte$  lub jego  $\eta$ -reduktem:  $\lambda c. c$ .

### 1.3.3 Pary w rachunku $\lambda$

Parą nazywamy każdy nierekurencyjny typ, który posiada jeden konstruktor wartości parametryzowany przez dwa typy. W takim wypadku potrzebujemy dwóch projekcji zwracających odpowiednio pierwszy i drugi element pary. Przykładem takiego typu jest `Tuple`. Mamy wówczas:

```
fst (Tuple a b) = a
snd (Tuple a b) = b
```



Tego rodzaju typy możemy reprezentować przez tak zwane *domknięcie* (ang. *closure*), czyli częściową aplikację termu. Standardowym sposobem reprezentacji pary w rachunku  $\lambda$  jest:

$$\text{Tuple} \equiv \lambda abf. fab$$

Aplikując Tuple tylko do dwóch termów (*domykając* term Tuple) otrzymujemy reprezentację pary. Pozostały, trzeci argument  $f$  nazywamy *kontynuacją*, gdyż aplikując (Tuple  $x$   $y$ ) dla dowolnych  $x, y \in \Lambda$  do pewnego  $f \in \Lambda$ , w konsekwencji  $x$  i  $y$  zostają zaaplikowane do  $f$ . Zauważmy, że wówczas reprezentacja `fst` i `snd` ma postać:

$$\text{fst} \equiv \lambda t. t(\lambda ab. a)$$

$$\text{snd} \equiv \lambda t. t(\lambda ab. b)$$

**Przykład 9.** Wprowadzone konstrukcje pozwalają nam na definicję skończonych (w sensie liczby konstruktorów) typów. Rozważmy następujące przykłady:

a) Konstruktory wartości typu `Maybe` możemy reprezentować przez

$$\text{Nothing} \equiv \lambda nj. n$$

$$\text{Just} \equiv \lambda anj. ja$$

Rozważmy następującą funkcję:

```
maybe :: b -> (a -> b) -> Maybe a -> b
maybe n _ Nothing = n
maybe _ f (Just x) = f x
```

Odpowiadająca jej reprezentacja to

$$\text{maybe} \equiv \lambda bft. tb(\lambda a. fa)$$

b) Rozważmy następującą funkcję

```
fromTemperature :: Temperature -> Int
fromTemperature (Fahrenheit a) = a
fromTemperature (Celsius a) = a
```

Ustalając reprezentację konstruktorów `Fahrenheit` i `Celsius`:

$$\text{Fahrenheit} \equiv \lambda tfc. ft$$

$$\text{Celsius} \equiv \lambda tfc. ct$$

otrzymujemy reprezentację funkcji `fromTemperature` postaci:

$$\text{fromTemperature} \equiv \lambda t. t(\lambda f. f)(\lambda c. c)$$

### 1.3.4 Kodowanie rekurencji

Rozważmy następującą funkcję dodawania liczb Peano w języku Haskell:

```
add Zero      m = m
add (Succ n) m = Succ (add n m)
```

Funkcję tę możemy wyrazić w rachunku  $\lambda$  przy pomocy kodowania Scotta w następujący sposób:

$$\text{add}_0 \equiv \lambda n m. n m (\lambda n. \text{Succ}(\text{add}_0 n m))$$

Formalizm rachunku  $\lambda$  nie pozwala na okreslanie nowych nazw i rekurencyjne odnoszenie się przez nie do nich samych. Standardową techniką w rachunku  $\lambda$  do określania funkcji w ten sposób jest użycie operatora punktu stałego  $Y$ . Przypomnijmy:

$$Y \equiv \lambda f. (\lambda x. (f(xx)) \lambda x. (f(xx)))$$

Wówczas określamy

$$\text{add}_Y \equiv Y (\lambda a n m. n m (\lambda n. \text{Succ}(a n m)))$$

Mając na uwadze możliwość przeprowadzenia powyższej konstrukcji przy użyciu rekurencji, będziemy dopuszczali w notacji odnoszenie się wprowadzanych  $\lambda$ -termów do nich samych.

### 1.3.5 Kodowanie Scotta typów rekursywnych

Stosując metody kodowania prostych typów wyliczeniowych i par, łatwo odnajdujemy reprezentację konstruktorów wartości dla typów **Nat** i **List**:

$$\begin{aligned} \text{Zero} &\equiv \lambda z s. z & \text{Nil} &\equiv \lambda n c. n \\ \text{Succ} &\equiv \lambda n z s. s n & \text{Cons} &\equiv \lambda x x_s n c. c x x_s \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że konstruktory **Nat** i **Maybe** są swoimi  $\alpha$ -konwersami. Podobieństwo nie jest przypadkowe: na poziomie typów konstrukcja **Maybe** jest odpowiednikiem brania następnika. Określając dodatkowo  $\text{Void} \equiv \lambda x. x$  jako element neutralny działania łącznego, otrzymujemy na poziomie typów strukturę półpierścienia z działaniem mnożenia określoną przez konstrukcję par i działaniem dodawania określonego przez konstrukcję typów wyliczeniowych. Stąd algebraiczne typy danych biorą swoją nazwę.

Z łatwością możemy określić teraz operacje brania poprzednika, głowy i ogona listy, odpowiednio:

$$\begin{aligned}\text{pred} &\equiv \lambda n. n \text{ undef } (\lambda m. m) \\ \text{head} &\equiv \lambda x_s. x_s \text{ undef } (\lambda x_s. x) \\ \text{tail} &\equiv \lambda x_s. \text{undef } (\lambda x_s. x_s)\end{aligned}$$

gdzie `undef` jest stałą o którą rozszerzamy rachunek  $\lambda$  celem sygnalizowania błędnej aplikacji.

Celem lepszego porównania kodowania Churcha i Scotta podamy reprezentacje funkcji `foldl` dla typu `Nat`. Określmy:

$$\begin{aligned}\text{foldl } f \ x \ \text{Zero} &= x \\ \text{foldl } f \ x \ (\text{Succ } n) &= f \ (\text{foldl } f \ x \ n)\end{aligned}$$

`foldl` może być przy pomocy kodowania Scotta zapisane jako

$$\text{foldl} \equiv \lambda f \ x \ n. n \ x \ (\lambda n. (\text{foldl } f \ x \ n))$$

Ogólnie, przy pomocy `foldl` wyabstrahowujemy pojęcie tzw. rekursji od strony ogona (ang. *tail recursion*), w teorii obliczalności nazywane rekursją prostą lub, popularnie, zwijaniem od lewej. Operator `foldl` spełnia następującą własność [Hut99]

$$f = \text{foldl } \varphi \ a \iff \begin{cases} f \ \text{Zero} = a \\ f \ (\text{Succ } n) = \varphi \ (f \ n) \end{cases} \quad (2)$$

### 1.3.6 Kodowanie Churcha typów rekursywnych

Przedstawimy teraz klasyczny sposób kodowania typów po raz pierwszy zaprezentowany dla liczb naturalnych przez A. Churcha w [Chu41]. Różni się on od kodowania Scotta tylko w przypadku typów rekursywnych, w pozostałych przypadkach obydwa kodowania dają te same rezultaty. Typ `Nat` ma dwa konstruktory: `Zero` i `Succ`. W kodowaniu Churcha reprezentujemy je w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\text{Zero}_{Ch} &\equiv \lambda f \ x. x \\ \text{Succ}_{Ch} &\equiv \lambda n \ f \ x. f \ (n \ f \ x)\end{aligned}$$

Wyrażenia będące skutkiem konsekwentnej aplikacji `Succ` do `Zero` w literaturze popularnie nazywa się *liczebnikami Churcha* i oznacza następująco:

$$\begin{aligned}\bar{1} &\equiv \text{Succ}_{Ch} \ \text{Zero}_{Ch} =_{\beta} \lambda f \ x. f \ x \\ \bar{2} &\equiv \text{Succ}_{Ch} \ \text{Succ}_{Ch} \ \text{Zero}_{Ch} =_{\beta} \lambda f \ x. f \ f \ x \\ &\vdots \\ \bar{n} &\equiv \text{Succ}_{Ch}^n \ \text{Zero}_{Ch} =_{\beta} \lambda f \ x. f^n \ x\end{aligned}$$

Liczba naturalna  $n$  jest kodowana przez funkcję w której jej pierwszy argument jest aplikowany  $n$  razy do drugiego argumentu. Porównując je do kodowania Scotta widzimy, że różnica polega na aplikowaniu do kontynuacji termu  $(n f x)$  w przypadku brania następnika. Da się pokazać [HIN05], że liczebniki Churcha są w istocie operacją `foldl` na argumentach `Succ` i `Zero`. Istotnie, niech  $\text{nat} \equiv \lambda c. c \text{ Succ Zero}$ . Wówczas  $\text{nat } \bar{n} =_{\beta} \bar{n}$ . Z tego powodu kodowanie operacji na liczebnikach Churcha, lub ogólnie – funkcji opartych na rekursji prostej po zbiorze liczb naturalnych – jest wyjątkowo proste przy użyciu tej metody. Przykładowo, używając metody Churcha, operację dodawania kodujemy w następujący sposób:

$$\text{add}_{Ch} \equiv \lambda n m. n \text{ Succ}_{Ch} m$$

Dla porównania, używając kodowania Scotta:

$$\text{add}_S \equiv \lambda n m. \text{foldl Succ } n m$$

### 1.3.7 Ogólny schemat kodowania Scotta typów ADT

W ogólnym przypadku, mając następującą definicję ADT:

```
data type_constructor t1 t2 ... tk = C1 t11 ... t1n1
                                   | C2 t21 ... t2n2
                                   ...
                                   | Cm tm1 ... tnmn
```

dla  $m, n \in \mathbb{N}$ , wiążemy z nią reprezentację każdego z konstruktorów:

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv \lambda t_{11} t_{12} \dots t_{1n_1} f_1 f_2 \dots f_m. f_1 t_{11} t_{12} \dots t_{1n_1} \\ C_2 &\equiv \lambda t_{21} t_{22} \dots t_{2n_2} f_1 f_2 \dots f_m. f_2 t_{21} t_{22} \dots t_{2n_2} \\ &\vdots \\ C_m &\equiv \lambda t_{m1} t_{m2} \dots t_{mn_m} f_1 f_m \dots f_m. f_1 t_{m1} t_{m2} \dots t_{mn_m} \end{aligned}$$

Wówczas następującą definicję częściową funkcji  $f$ :

```
f (C1 v11 ... v1n1) = y1
...
f (Cm vm1 ... vmnm) = ym
```

kodujemy przy za pomocą następującego  $\lambda$ -termu:

$$\begin{aligned} &\lambda x. x (\lambda v_{11} \dots v_{1n_1}. y_1) \\ &\quad \vdots \\ &\quad (\lambda v_{m1} \dots v_{mn_m}. y_m) \end{aligned}$$

gdzie  $y_i$  są kodowaniami Scotta  $y_i$  dla  $i \in \mathbb{N}$ .

## 1.4 Podsumowanie

Istotą rachunku  $\lambda$  bez typów jest uchwycenie pojęcia aplikacji argumentu do funkcji. Kodując selektor `if` dla typu `Boolean` w 1.3.2 zauważmy, że nic nie powstrzymuje nas przed zaaplikowaniem do wyrażenia `if` dowolnego  $\lambda$ -termu. Analogiczna sytuacja ma miejsce, gdy określamy operacje na reprezentacji liczb naturalnych. Widzimy, że w ramach tak zakrojonego systemu nie mamy możliwości uchwycenia które rezultaty są sensowne. Jak przekonamy się w Rozdziale 2, problem ten eliminuje w pewnym stopniu rozszerzenie systemu rachunku  $\lambda$  o typy wyrażen. Wówczas aplikacja argumentu do funkcji wymaga wcześniejszej *weryfikacji* typu, zaś typy argumentów oraz rezultatu funkcji są z góry określone (z dokładnością do polimorfizmu). Niestety, w rezultacie otrzymujemy system w którym wiele sensownych wyrażen możliwych do zbudowania w rachunku  $\lambda$  nie jest poprawnych. Szukanie bogatych systemów typów, które jednocześnie nie ograniczałyby ekspresji (lub mówiąc bardziej obrazowo językiem informatyki: pozwalałyby na określenie większej ilości poprawnie zbudowanych programów ograniczając ilość tych błędnych) jest stale pojawiającym się tematem w dziedzinie teorii typów.

## 2 Rachunek $\lambda$ z typami prostymi

### 2.1 Typy proste

Niech  $U$  będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych  $p, q, \dots$  (być może indeksowanych liczbami naturalnymi), które będziemy nazywali *zmiennymi typowymi*.

**Definicja 18.** (Typy proste) *Typami prostymi* będziemy określali najmniejszy w sensie mnogościowym zbiór wyrażen taki, że:

- (S1) Jeśli  $p$  jest zmienną typową, to  $p$  jest typem prostym.
- (S2) Jeśli  $\sigma$  i  $\tau$  są typami prostymi, to  $(\sigma \rightarrow \tau)$  jest typem prostym.

Typy proste zbudowane tylko wedle reguły (S1) nazywamy typami *atomowymi*, zaś wyrażenia zbudowe wedle reguły (S2) – typami *funkcyjnymi*. Zbiór typów prostych określony w myśl powyższej definicji będziemy oznaczali przez  $\mathbb{T}$ . Definicję 18 można równoznacznie wyrazić przy pomocy notacji Backusa-Naura. Wówczas ma ona następującą, zwięzłą postać:

$$\mathbb{T} \leftarrow U \mid (\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T})$$

Późniejsze litery alfabetu greckiego ( $\sigma, \tau, \rho, \dots$ ), być może z indeksami, będą służyły nam za zmienne metasyntaktyczne do oznaczania typów prostych. Dla

lepszej czytelności będziemy pomijali najbardziej zewnętrzne nawiasy. Konstruktor typu  $\rightarrow$  wiąże prawostronnie; oznacza to, że typy  $\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho$  oraz  $\sigma \rightarrow (\tau \rightarrow \rho)$  będziemy uznawali za tożsame.

Zauważmy, że obiekty skonstruowane w myśl Definicji 18 mają strukturę drzewa binarnego. Wysokość takiego drzewa będziemy nazywali *stopniem* typu.

**Definicja 19.** (Stopień typu) Stopniem typu nazywamy następująco określoną funkcję  $\delta : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\begin{aligned}\delta(p) &= 0, \text{ gdzie } p \text{ jest typem atomowym,} \\ \delta(\sigma \rightarrow \tau) &= 1 + \max(\delta(\sigma), \delta(\tau)).\end{aligned}$$

**Definicja 20.** (Stwierdzenie, deklaracja, kontekst, sąd)

- (1) *Stwierdzeniem* (ang. *statement*) nazywamy każdy napis postaci  $M : \sigma$ , gdzie  $M \in \mathbf{\Lambda}$  i  $\sigma \in \mathbb{T}$ . W stwierdzeniu  $M : \sigma$   $\lambda$ -term  $M$  nazwamy *podmiotem* (ang. *subject*), zaś  $\sigma$  – *predykatem*.
- (2) *Deklaracją* (ang. *declaration*) nazywamy każde stwierdzenie w którym podmiot jest zmienną termową.
- (3) *Kontekstem* (ang. *context*) nazywamy skończony liniowo uporządkowany zbiór (*listę*) deklaracji, w którym wszystkie podmioty są wzajemnie różne.
- (4) *Sądem* (ang. *judgement*) nazywamy każdy napis postaci  $\Gamma \vdash M : \sigma$ , gdzie  $\Gamma$  jest kontekstem, zaś  $M : \sigma$  – stwierdzeniem.

**Definicja 21.** (1) Jeśli  $\Gamma = (x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n)$ , to liniowo uporządkowany zbiór  $\text{dom}\Gamma = (x_1, \dots, x_n)$  nazywamy *dziędziną* kontekstu  $\Gamma$ .

- (2) Kontekst  $\Gamma'$  nazywamy *podkontekstem*  $\Gamma$  i piszemy  $\Gamma' \subseteq \Gamma$ , jeśli wszystkie deklaracje występujące w  $\Gamma'$  występują również w  $\Gamma$  z zachowaniem tego samego porządku.
- (3) Kontekst  $\Gamma'$  nazywamy *permutacją* kontekstu  $\Gamma$ , jeśli wszystkie deklaracje w  $\Gamma'$  występują w  $\Gamma$  i odwrotnie.
- (4) Jeśli  $\Gamma$  jest kontekstem i  $\Phi$  jest zbiorem  $\lambda$ -zmiennych, wówczas *projekcją*  $\Gamma$  na  $\Phi$  (symbolicznie  $\Gamma \upharpoonright \Phi$ ) nazywamy podkontekst  $\Gamma'$  kontekstu  $\Gamma$  taki, że  $\text{dom}\Gamma' = (\text{dom}\Gamma) \cap \Phi$
- (5) Dla kontekstów  $\Gamma = (x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k)$  i  $\Gamma' = (y_1 : \rho_1, \dots, y_n : \rho_n)$  takich, że  $\text{dom}(\Gamma) \cap \text{dom}(\Gamma') = \emptyset$  *konkatenacją*  $\Gamma$  i  $\Gamma'$  nazywamy kontekst

$$\Gamma \# \Gamma' = (x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_k, y_1 : \rho_1, \dots, y_n : \rho_n).$$

**Przykład 10.** Niech  $\Gamma \equiv (y : \sigma, x_1 : \rho_1, x_2 : \rho_2, z : \tau, x_3 : \rho_3)$ . Wówczas:

- (1)  $\text{dom } \Gamma = (y, x_1, x_2, z, x_3)$ .
- (2)  $\emptyset \subseteq (x_1 : \rho_1, z : \tau) \subseteq \Gamma$
- (3)  $(x_1 : \rho_1, x_2 : \rho_2, x_3 : \rho_3, y : \sigma, z : \tau)$  jest permutacją  $\Gamma$ .
- (4)  $\Gamma \upharpoonright \{z, u, x_1\} = (x_1 : \rho_1, z : \tau)$ .

## 2.2 Typowanie

Wprowadzamy następujące reguły wyprowadzania typu (relacji typowalności):

$$\begin{array}{c}
\frac{}{\Gamma \vdash x : \sigma} \text{ (var)}, \text{ jeśli } x : \sigma \in \Gamma, \\
\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (MN) : \tau} \text{ (app)}, \\
\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x. M) : \sigma \rightarrow \tau} \text{ (abs)}.
\end{array}$$

**Definicja 22.** (Typowalność)

Mówimy, że  $\lambda$ -term  $M$  jest typu  $\sigma$  w kontekście  $\Gamma$ , jeśli istnieje skończone drzewo sądów spełniające poniższe warunki:

- (D1) W korzeniu drzewa znajduje się sąd  $\Gamma \vdash M : \sigma$ .
- (D2) Liście są *aksjomatami*, czyli sądami postaci  $\Gamma \vdash x : \sigma$ .
- (D3) Każdego rodzica można otrzymać z jego dzieci przez zastosowanie którejś z reguł wyprowadzania typu.

Tak określony obiekt będziemy nazywali *wyprowadzeniem* typu dla  $M$  (w kontekście  $\Gamma$ ) i pisali  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$ . O sądzie  $\Gamma \vdash M : \sigma$  będziemy wówczas mówili, że jest *wyprowadzalny*.

**Przykład 11.** (a) Niech  $\Gamma = (x : \sigma, y : \tau)$ . Pokażemy, że  $K = \lambda xy. x$  ma typ  $\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma$ . Istotnie,

$$\begin{array}{c}
\frac{x : \sigma, y : \tau \vdash x : \sigma}{x : \sigma \vdash \lambda y. x : \tau \rightarrow \sigma} \text{ (Abs)} \\
\frac{x : \sigma \vdash \lambda y. x : \tau \rightarrow \sigma}{\vdash \lambda xy. x : \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma} \text{ (Abs)}
\end{array}$$

- (b) Niech  $\Gamma = (x : \tau \rightarrow \rho, y : \sigma \rightarrow \tau, z : \sigma)$ . Wówczas:

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \vdash y : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash z : \sigma}{\Gamma \vdash yz : \tau} \text{ (App)} \\
\frac{\Gamma \vdash x : \tau \rightarrow \rho \quad \Gamma \vdash yz : \tau}{\Gamma \vdash x(yz) : \rho} \text{ (App)} \\
\frac{\Gamma \vdash x(yz) : \rho}{x : \tau \rightarrow \sigma, y : \sigma \rightarrow \rho \vdash \lambda z. x(yz) : \sigma \rightarrow \rho} \text{ (Abs)} \\
\frac{x : \tau \rightarrow \sigma, y : \sigma \rightarrow \rho \vdash \lambda z. x(yz) : \sigma \rightarrow \rho}{x : \tau \rightarrow \rho \vdash \lambda yz. x(yz) : (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho} \text{ (Abs)} \\
\frac{x : \tau \rightarrow \rho \vdash \lambda yz. x(yz) : (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho}{\vdash \lambda xyz. x(yz) : (\tau \rightarrow \rho) \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho} \text{ (Abs)}
\end{array}$$

- (c) Nie wszystkie  $\lambda$ -termy są typowalne. Niech  $\omega \equiv (\lambda x. xx)$  i przypuśćmy, że  $\omega$  ma typ  $\sigma$  w kontekście  $\Gamma$ . Zauważmy, że wówczas w  $x : \sigma \rightarrow \sigma \in \Gamma$ . Ponieważ  $\omega$  zawiera w sobie podterm  $(xx)$ , to w wyprowadzeniu musiał on zostać otrzymany przez zastosowanie reguły (app). Wówczas  $x : \sigma \in \Gamma$  i  $x : \sigma \rightarrow \sigma \in \Gamma$ , co nie jest możliwe, bo wszystkie deklaracje w  $\Gamma$  muszą mieć różne podmioty.

**Definicja 23.** (Poprawność, typowalność)  $\lambda$ -term  $M \in \Lambda$  nazywamy *poprawnym* (ang. *legal*) lub *typowalnym* (ang. *typable*), jeśli istnieje wyprowadzenie  $\Gamma \vdash M : \rho$  dla pewnego kontekstu  $\Gamma$  i typu  $\rho \in \mathbb{T}$ .

W teorii typów spotykamy trzy rodzaje problemów dotyczące sądów:

1. *Problem typowalności* (ang. *well-typedness, typability*)

Polega na rozstrzygnięciu czy zadany term jest poprawny, czyli znalezieniu kontekstu oraz wyprowadzenia typu względem tego kontekstu dla zadanego termu. Symbolicznie:

$$? \vdash \text{term} : ?$$

Problem typowalności przy zadanym kontekście nazywamy problemem *przypisania typu* (ang. *type assignment*). Ma on następującą postać:

$$\text{kontekst} \vdash \text{term} : ?$$

2. *Problem weryfikacji typu* (ang. *type checking*)

Polega na sprawdzeniu czy term ma zadany typ względem danego kontekstu.

$$\text{kontekst} \stackrel{?}{\vdash} \text{term} : \text{typ}$$

3. *Problem inhabitacji* (ang. *inhabitation, term finding*)

Polega na skonstruowaniu termu (lub przynajmniej wykazaniu istnienia takiego termu), który miałby zadany typ względem danego kontekstu.

$$\text{kontekst} \vdash ? : \text{typ}$$



W wielu systemach problem typowalności można sprowadzić do problemu weryfikacji typu. Istotnie, przypuśćmy, że  $M$  jest poprawnym termem i  $FV(M) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Zauważmy, że  $M$  jest typowalny, jeśli wyprowadzalny jest sąd

$$x_0 : p \vdash Kx_0(\lambda x_1 \dots x_n. M) : p,$$

gdzie  $p \in U$  jest zmienną typową, zaś kombinatory  $K \equiv \lambda xy. x$ .

Wszystkie wymienione problemy są w rachunku  $\lambda$  z typami prostymi są rozstrzygalne<sup>3</sup>, tzn. istnieją efektywnie obliczalne metody ich rozwiązywania. Czytelnika zainteresowanego szczegółami odsyłamy do [SU06, Twierdzenie 3.2.7] i [Bar92, Rozdział 4.4].

## 2.3 Własności

Przedstawimy teraz szereg lematów ustalających między innymi związki między rachunkiem  $\lambda$  bez typów wprowadzonym w Rozdziale 1, a rachunkiem  $\lambda$  z typami prostymi.

**Lemat 3.** (*O generowaniu*)

- (1) Jeśli  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} x : \sigma$ , to  $x : \sigma \in \Gamma$ .
- (2) Jeśli  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} MN : \tau$ , to  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma \rightarrow \tau$  i  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} N : \sigma$  dla pewnego  $\sigma \in \mathbb{T}$ .
- (3) Jeśli  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} \lambda x. M : \tau$  i  $x \notin \text{dom } \Gamma$ , to  $\tau \equiv \tau_1 \rightarrow \tau_2$  oraz  $\Gamma, x : \tau_1 \vdash_{\mathbb{T}} N : \tau_2$ .

**Dowód.** Wynika natychmiast z postaci  $\lambda$ -termu. □

**Lemat 4.** (*O podtermie*) Podterm poprawnego  $\lambda$ -termu jest poprawny.

**Dowód.** Załóżmy, że sąd  $J : \Gamma \vdash M : \sigma$  jest wyprowadzalny. Dowód przebiega przez indukcję względem długości wyprowadzenia  $J$ . Rozważmy następujące przypadki:

- (a) Jeśli  $J$  jest konsekwencją reguły *var*, to  $\text{Sub}(M) = \{M\}$  (Definicja 2.1), a zatem teza jest trywialnie spełniona.
- (b) Jeśli  $J$  jest konsekwencją reguły *app*, to  $M \equiv PQ$  dla  $P, Q$  dla których twierdzenie zachodzi. Ponieważ  $\text{Sub}(M) = \text{Sub}(P) \cup \text{Sub}(Q) \cup \{PQ\}$  (Definicja 2.2), to teza również zachodzi.
- (c) Jeśli  $J$  jest konsekwencją reguły *abs*, to  $M \equiv \lambda x. P$  dla pewnego  $P$  dla którego twierdzenie zachodzi. Ponieważ  $\text{Sub}(\lambda x. M) = \text{Sub}(M) \cup \{\lambda x. M\}$ , (Definicja 2.3) to teza zachodzi również w tym przypadku.

---

<sup>3</sup>Nie jest to bynajmniej oczywiste dla innych systemów typów; za przykład wystarczy wziąć słynny wynik J. B. Wellsa [Wel99], który stwierdza, że problemy typowalności i weryfikacji typu w Systemie F są nierozstrzygalne. Stąd w praktyce uzasadnione jest zainteresowanie mniej ekspresywnymi systemami typów, np. systemem Hindleya-Millnera.

□

**Lemat 5.** *(O zmiennych wolnych) Jeśli sąd  $J : \Gamma \vdash L : \sigma$  jest wyprowadzalny, to  $FV(L) \subseteq \text{dom } \Gamma$ .*

**Dowód.** Prosty dowód przeprowadzamy przez indukcję względem długości wyprowadzenia sądu  $J$ . Rozważmy następujące przypadki:

- (a) Jeśli  $J$  jest konsekwencją reguły *var*, to  $L \equiv x$  dla pewnej  $\lambda$ -zmiennnej  $x$ . Wobec tego  $x : \sigma \in \Gamma$ , a zatem  $FV(x) \subseteq \text{dom } \Gamma$ .
- (b) Jeśli  $J$  jest konsekwencją reguły *app*, to  $J$  musi mieć postać  $\Gamma \vdash MN : \sigma$ . Z założenia indukcyjnego:  $FV(M) \subseteq \text{dom } \Gamma$  i  $FV(N) \subseteq \text{dom } \Gamma$ . Z Definicji 3:  $FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$ . Stąd  $FV(MN) \subseteq \text{dom } \Gamma$ .
- (c) Jeśli  $J$  jest konsekwencją reguły *abs*, to  $J$  musi mieć postać  $\Gamma \vdash \lambda x. M : \sigma$ . Z założenia indukcyjnego  $FV(M) \subseteq \text{dom } \Gamma$ . Ponieważ  $FV(\lambda x. M) = FV(M) \setminus \{x\} \subseteq FV(M)$  (z Definicji 3), to  $FV(M) \subseteq \text{dom } \Gamma$ .

□

**Lemat 6.** *(1) Niech  $\Gamma'$  i  $\Gamma''$  będą kontekstami takimi, że  $\Gamma' \subseteq \Gamma''$ . Jeśli  $\Gamma' \vdash M : \sigma$ , to  $\Gamma'' \vdash M : \sigma$ .*

*(2) Jeśli  $\Gamma \vdash M : \sigma$ , to  $\Gamma \upharpoonright FV(M) \vdash M : \sigma$ .*

*(3) Jeśli  $\Gamma \vdash M : \sigma$  i  $\Gamma'$  jest permutacją  $\Gamma$ , to  $\Gamma' \vdash M : \sigma$ .*

**Dowód.** Dowody przebiegają przez indukcję względem długości wyprowadzenia. Czytelnika zainteresowanego szczegółami odsyłamy do [Bar92, Tw. 3.1.7]. □

*Uwaga.* Zauważmy, że (6.(3)) rozluźnia konieczność eliminowania maksymalnej deklaracji z kontekstu przy stosowaniu reguły *abs*. W tekstach wprowadzających typy proste zazwyczaj przez kontekst rozumie się po prostu skończony zbiór wzajemnie różnych deklaracji [Bar92; SU06; HS08]. Określenie na tak rozumianych kontekstach porządku liniowego upraszcza przeprowadzanie rozumowań indukcyjnych. Ponieważ branie dowolnej permutacji listy nie wpływa na typizację, to widzimy, że obydwa znaczenia możemy stosować zamiennie, bowiem jest to nic innego jak traktowanie kontekstu jako zbioru deklaracji.

**Lemat 7.** *(O podstawieniu) Załóżmy, że*

*(a)  $\Gamma_1, x : \sigma, \Gamma_2 \vdash M : \rho$*

*(b)  $\Gamma_1 \vdash N : \sigma$*

*Wówczas  $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash M[x/N] : \rho$ .*

**Dowód.** Niech  $\Gamma = \Gamma_1 \# \Gamma_2$ . Korzystając z części (3) Lematu 6 dowód przeprowadzimy przez indukcję względem długości wyprowadzenia  $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$ . Rozważmy następujące przypadki:

- (i) Jeśli  $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$  jest konsekwencją reguły *var*, to  $M \equiv x$ . Wówczas  $M[x/N] \equiv N$  i  $\rho \equiv \sigma$ . Teza zachodzi w oczywisty sposób.
- (ii)  $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$  jest konsekwencją reguły *app*. Wówczas  $M \equiv PQ$  i istnieją wyprowadzenia  $\Gamma, x : \sigma \vdash P : \tau \rightarrow \rho$  oraz  $\Gamma, x : \sigma \vdash Q : \tau$ . Z założenia indukcyjnego mamy, że  $\Gamma \vdash P[x/N] : \tau \rightarrow \rho$  oraz  $\Gamma \vdash Q[x/N] : \tau$ . Wówczas stosując regułę *app* mamy:

$$\frac{\Gamma \vdash P[x/N] : \tau \rightarrow \rho \quad \Gamma \vdash Q[x/N] : \tau}{\Gamma \vdash (P[x/N]Q[x/N]) : \rho} \text{ (app)},$$

Tezę otrzymujemy z faktu, że  $(PQ)[x/N] = P[x/N]Q[x/N]$ .

- (iii) Jeśli  $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$  jest konsekwencją reguły *abs*, to  $M \equiv \lambda y. P : \rho$  dla  $\rho \equiv \sigma \rightarrow \tau$ ,  $y \neq x$ . Z założenia indukcyjnego istnieje wyprowadzenie  $\Gamma', y : \tau \vdash P[x/N] : \rho$ , gdzie  $\Gamma' = \Gamma \# (x : \sigma)$ . Wówczas, stosując regułę *abs* mamy:

$$\frac{\Gamma', y : \tau \vdash P[x/N] : \rho}{\Gamma' \vdash (\lambda y. P[x/N]) : \tau \rightarrow \rho} \text{ (abs)}$$

Ponieważ  $(\lambda y. P)[x/N] = \lambda y. P[x/N]$  oraz  $M \equiv \lambda y. P : \tau \rightarrow \rho$ , otrzymujemy tezę.

□

**Lemat 8.** (*Redukcja podmiotu*) Załóżmy, że

- (i)  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$
- (ii)  $M \rightarrow_{\beta}^* N$

Wówczas  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} N : \sigma$ .

**Dowód.** Pokażemy, że twierdzenie zachodzi dla jednego kroku redukcji  $\rightarrow_{\beta}$ . Dowód zwrotności jest trywialny, zaś aby pokazać przechodniość wystarczy skorzystać z indukcji względem długości ciągu redukcji.

Niech  $M \rightarrow_{\beta} N$ . Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem długości wyprowadzenia  $\Gamma \vdash M : \sigma$ . Rozważmy następujące przypadki:

- (a)  $\Gamma \vdash M : \sigma$  jest konsekwencją reguły *var*. Wówczas  $M \equiv x$  dla pewnej  $\lambda$ -zmiennnej  $x \in V$ . Wówczas poprzednik nie jest spełniony, bowiem  $M$  nie da się zredukować. Zatem twierdzenie trywialnie zachodzi.

(b)  $\Gamma \vdash M : \sigma$  jest konsekwencją reguły *app*. Wówczas  $M \equiv PQ$  oraz istnieją wyprowadzenia  $\Gamma \vdash P : \tau \rightarrow \sigma$  oraz  $\Gamma \vdash Q : \sigma$ . Ponadto zakładamy, że dla pewnych  $P', Q' \in \mathbf{\Lambda}$  mamy  $P \rightarrow_\beta P'$  i  $Q \rightarrow_\beta Q'$ . Istnieją dwie możliwości redukcji  $M \rightarrow_\beta N$ :

(1)  $N \equiv PQ'$ . Ponieważ  $\Gamma \vdash Q' : \sigma$  (założenie indukcyjne), to możemy zastosować regułę *app*:

$$\frac{\Gamma \vdash P : \tau \rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash Q' : \sigma}{\Gamma \vdash PQ' : \sigma} \text{ (app),}$$

Ponieważ  $N \equiv PQ'$ , to otrzymujemy tezę.

(2)  $N \equiv P'Q$ . Postępujemy analogicznie do przypadku (1)

(c)  $\Gamma \vdash M : \sigma$  jest konsekwencją reguły *abs*. Wówczas  $M \equiv \lambda x. P$ , dla pewnych  $\rho, \tau \in \mathbb{T}$  mamy  $\sigma \equiv \rho \rightarrow \tau$  oraz istnieje wyprowadzenie sądu  $\Gamma, x : \rho \vdash P : \tau$ . Ponadto zakładamy, że dla pewnego  $P' \in \mathbf{\Lambda}$  mamy  $P \rightarrow_\beta P'$ .  $\beta$ -redukcja  $M \rightarrow_\beta N$  musi prowadzić w tym wypadku do  $N \equiv \lambda x. P'$ . Ponieważ  $\Gamma, x : \rho \vdash P' : \tau$  (założenie indukcyjne), to możemy zastosować regułę *abs*:

$$\frac{\Gamma', x : \rho \vdash P' : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. P' : \rho \rightarrow \tau} \text{ (abs)}$$

Stąd teza. □

**Lemat 9.** (Zachowawczość  $\eta$ -redukcji) Załóżmy, że

(i)  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$

(ii)  $M \rightarrow_\eta^* N$

Wówczas  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} N : \sigma$ .

**Dowód.** Dowód przeprowadzamy analogicznie do Lematu 8. □

**Twierdzenie 3.** (Własność Churcha-Rossera) Relacja  $\rightarrow_\beta$  określona na typowych  $\lambda$ -termach ma własność CR.

**Dowód.** Wynika to bezpośrednio z Twierdzenia 1 i Lematu 8. □

### 2.3.1 Uniwersalny polimorfizm

Istnieje wiele wariantów wprowadzania typów prostych. Przedstawiony w tym rozdziale rachunek powszechnie nazywany jest *stylem Currego*. Charakteryzuje go interesująca własność: poprawne termy mają jednoznacznie wyznaczony typ z dokładnością do podstawienia. Oznacza to, że zmienne występujące w typie każdego poprawnego termu są w istocie kwantyfikowane po zbiorze wszystkich typów prostych. Każdy taki typ nazywamy *typem (uniwersalnie parametrycznie) polimorficznym*.

**Definicja 24.** (Podstawienie typu) Podstawienie typu  $\tau$  za zmienną typową  $p$  w typie  $\sigma$  nazywamy następującą funkcję :

$$\begin{aligned} p[p/\tau] &= \tau, \\ q[p/\tau] &= q, \text{ jeśli } q \neq p, \\ (\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)[p/\tau] &= \sigma_1[p/\tau] \rightarrow \sigma_2[p/\tau]. \end{aligned}$$

Jeśli  $\Gamma$  jest kontekstem, to przez  $\Gamma[p/\tau]$  oznaczamy podstawienie  $\tau$  za zmienną  $p$  dla wszystkich typów występujących w  $\Gamma$ .

**Twierdzenie 4.** *Jeśli  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$ , to  $\Gamma[p/\tau] \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma[p/\tau]$  dla dowolnego  $\tau \in \mathbb{T}$  i zmiennej  $p \in U$ .*

**Dowód.** Dowód przebiega przez indukcję względem długości wyprowadzenia  $\Gamma \vdash M : \sigma$ . Szczegóły pomijamy.  $\square$

Mając na uwadze Twierdzenie 4 możemy wnioskować o wielu własnościach funkcji reprezentowanych przez  $\lambda$ -termy tylko na podstawie typu. Na przykład typowi  $\sigma \rightarrow \sigma$  odpowiada dokładnie jeden (z dokładnością do  $\alpha$ -konwersji) term  $\lambda x. x$  i reprezentuje on funkcję identycznościową; typom  $\sigma \rightarrow \rho \rightarrow \sigma$  i  $\sigma \rightarrow \rho \rightarrow \rho$  odpowiednio przypisać możemy wyłącznie projekcje  $\text{fst}$  i  $\text{snd}$  (określone w 1.3.3), zaś typowi  $(\rho \rightarrow \tau) \rightarrow (\sigma \rightarrow \rho) \rightarrow \sigma \rightarrow \tau$  term  $\lambda g f x. g(fx)$  reprezentujący złożenie funkcji (Przykład 11 (b)), co do której wiemy z kolei, że jest łączna. Jest to wraz ogólnej zależności: dysponując dowolnym typem polimorficznym otrzymujemy *twierdzenie za darmo* [Wad89] dotyczące termów, które mają ten typ.

### 2.3.2 Silna normalizacja

Pokażemy, że wszystkie typowalne  $\lambda$ -termy redukują się do postaci  $\beta$ -normalnej przez skończony ciąg  $\beta$ -redukcji. Oznacza to, że nie ma możliwości otrzymania nieskończonego ciągu  $\beta$ -redukcji, tak jak to miało miejsce w Przykładzie 7 (a) (b) i to bez względu na przyjętą strategię redukcji.

Ponieważ wszystkie  $\lambda$ -termy samorepliujące się przy  $\beta$ -redukcji nie są typowalne, nie jest możliwe w rachunku  $\lambda$  z typami prostymi reprezentowanie rekurencyjnych typów ADT w myśl podrozdziału 1.3.4. Wynika to z faktu, że dodanie typów prostych do rachunku  $\lambda$  bez typów znacznie zmniejsza ekspresywność systemu, uniemożliwiając wyrażenie operacji rekursji prostej. Okazuje się, że stosując reprezentację Churcha dla liczb naturalnych i utożsamiając  $\lambda$ -termy za pomocą  $\beta$ -konwersji, rachunek  $\lambda$  z typami prostymi równoważny jest zbiorowi *wielomianów rozszerzonych* [Zak07]. Liczebnikom Churcha odpowiada wówczas typ postaci  $(\sigma \rightarrow \sigma) \rightarrow \sigma \rightarrow \sigma$  i możliwe jest określenie na nich dodawania i mnożenia.

Ponieważ wszystkie ciągi redukcji są w tym systemie skończone, to relacja  $\beta$ -konwersji jest rozstrzygalna, wystarczy bowiem sprowadzić jej argumenty do postaci normalnej. Podejście to rodzi jednak nietrywialne problemy natury złożonościowej [SU06, Podrozdział 3.7].

Opracowany tutaj dowód pochodzi z [HS08, Dodatek A3]. Polega on na:

1. Konstrukcji interpretacji dla typów prostych: termów redukowalnych.
2. Wykazaniu, że każdy term redukowalny jest silnie normalizowalny.
3. Wykazaniu, że każdy typowalny term jest redukowalny.

Rozumowanie przedstawione w tym dowodzie, tzw. *computability method* oryginalnie przypisywane W. Taitowi [Tai67], z odpowiednimi zmianami stosuje się w dowodach własności silnej normalizacji dla innych systemów typów [SU06, Podrozdział 11.5].

**Definicja 25.** (Termy redukowalne) Niech  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$ . Powiemy, że  $M$  jest *redukowalny* (także *silnie obliczalny*), jeśli spełnia poniższe warunki:

(R1) Jeśli  $\sigma$  jest zmienną typową, to  $M$  jest silnie normalizowalny. Określamy:

$$\llbracket \sigma \rrbracket = \text{SN}.$$

(R2) Jeśli  $\sigma$  jest typem funkcyjnym postaci  $\sigma \equiv \rho \rightarrow \tau$ , to dla wszystkich termów redukowalnych  $N$  takich, że  $\Gamma' \vdash_{\mathbb{T}} MN : \tau$ ,  $MN$  jest redukowalny. Określamy:

$$\llbracket \rho \rightarrow \tau \rrbracket = \{M \mid \forall N (N \in \llbracket \rho \rrbracket) \implies MN \in \llbracket \tau \rrbracket\}.$$

**Lemat 10.** Niech  $\tau \in \mathbb{T}$  będzie dowolnym typem prostym. Wówczas:

- (1)  $\llbracket \tau \rrbracket \subseteq \text{SN}$ .
- (2) Jeśli  $N_1, N_2, \dots, N_k \in \text{SN}$ , to  $xN_1N_2 \dots N_k \in \llbracket \tau \rrbracket$ .

**Dowód.** Dowód przeprowadzimy przez indukcję strukturalną względem typu  $\tau$ . Mamy do rozważenia następujące dwa przypadki:

(a)  $\tau$  jest zmienną typową.

- (1) Wynika bezpośrednio z definicji  $\llbracket \tau \rrbracket \in \text{SN}$ .
- (2) Niech  $N_1, N_2, \dots, N_k \in \text{SN}$ . Wówczas  $N_1, N_2, \dots, N_k \in \text{SN}$ . Z definicji  $\llbracket \tau \rrbracket$  mamy, że  $xN_1N_2 \dots N_k \in \llbracket \tau \rrbracket$ .

(b) Przypuśćmy, że  $\tau = \sigma \rightarrow \rho$  oraz twierdzenie zachodzi dla  $\sigma$  i  $\rho$ .

- (1) Niech  $M \in \llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket$  i niech  $x$  będzie dowolną  $\lambda$ -zmienną. Z części (2) założenia indukcyjnego mamy  $x \in \llbracket \sigma \rrbracket$ , zatem z definicji  $\llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket$  mamy  $Mx \in \llbracket \rho \rrbracket$ . Ponieważ z części (1) założenia indukcyjnego  $\llbracket \rho \rrbracket \in \text{SN}$ , to  $Mx \in \text{SN}$  i w konsekwencji  $\llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket \subseteq \text{SN}$ .
- (2) Niech  $P \in \llbracket \sigma \rrbracket$ . Wówczas z części (1) założenia indukcyjnego  $P \in \text{SN}$ . Chcemy pokazać, że  $xN_1N_2 \dots N_k \in \llbracket \rho \rrbracket$ . Z części (2) założenia indukcyjnego

$$xN_1N_2 \dots N_k N_{k+1} \in \llbracket \rho \rrbracket.$$

Ustalając  $N_{k+1} \equiv P$  otrzymujemy tezę.

□

**Lemat 11.** *Założmy, że:*

- (a)  $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \in \text{SN}$ ,
- (b)  $N_0 \in \text{SN}$ .

Wówczas  $(\lambda x. M)N_0N_1 \dots N_k \in \text{SN}$ .

**Dowód.** (Ad absurdum) Przypuśćmy, że  $P_0 \equiv (\lambda x. M)N_0N_1 \dots N_k \notin \text{SN}$ . Wówczas istnieje nieskończony ciąg redukcji

$$P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots$$

Każdy podterm  $\lambda$ -termu silnie normalizowalnego jest silnie normalizowalny. Ponieważ  $P_0 \equiv M[x/N_0]N_0N_1 \dots N_k \in \text{SN}$ , to  $M[x/N_0], N_0, N_1, \dots, N_k \in \text{SN}$ . Na podstawie Lematu 2 mamy ponadto, że  $M \in \text{SN}$ . Wobec tego dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$  redukcji ulega redeksc czołowy:

$$P_n \equiv (\lambda x. M')N'_0N'_1 \dots N'_k \rightarrow_\beta M'[x/N'_0]N'_0N'_1 \dots N'_k \equiv P_{n+1},$$

gdzie  $M \rightarrow_\beta^* M'$  oraz  $N_i \rightarrow_\beta^* N'_i$  dla  $i \leq k$ . Ale skoro tak, to prawdą jest również, że  $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \rightarrow_\beta^* P_{n+1}$ , zaś  $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \in \text{SN}$ . Zatem  $P_{n+1} \in \text{SN}$ , co prowadzi do sprzeczności. □

**Lemat 12.** *Założmy, że:*

- (a)  $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \in \llbracket \tau \rrbracket$ ,
- (b)  $N_0 \in \text{SN}$ .

Wówczas  $(\lambda x. M)N_0N_1 \dots N_k \in \llbracket \tau \rrbracket$ .

**Dowód.** Dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem  $\tau$ . Rozważmy następujące przypadki:

- (a) Jeśli  $\tau$  jest zmienną typową, to  $\llbracket \tau \rrbracket = \text{SN}$ . Wobec tego problem sprowadza się do Lematu 11.
- (b) Przypuśćmy, że  $\tau \equiv \sigma \rightarrow \rho$  i niech  $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \in \llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket$ . Wybierzmy dowolny  $P \in \llbracket \sigma \rrbracket$ . Wówczas  $M[x/N_0]N_1 \dots N_k N_{k+1} \in \llbracket \rho \rrbracket$ . Z założenia indukcyjnego mamy jednak, że  $(\lambda x. M)N_0N_1 \dots N_k N_{k+1} \in \llbracket \rho \rrbracket$ . Wystarczy więc przyjąć  $N_{k+1} \equiv P$  i z definicji  $\llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket$  mamy, że  $(\lambda x. M)N_0N_1 \dots N_k \in \llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket$ .

□

**Definicja 26.** Powiemy, że kontekst  $\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, x_2 : \sigma_2, \dots, x_n : \sigma_n\}$  spełnia stwierdzenie  $M : \sigma$  i będziemy pisali  $\Gamma \models M : \sigma$ , jeśli dla dowolnych  $N_1 \in \llbracket \sigma_1 \rrbracket$ ,  $N_2 \in \llbracket \sigma_2 \rrbracket$ ,  $\dots$ ,  $N_n \in \llbracket \sigma_n \rrbracket$  mamy, że:

$$M[x_1/N_1, x_2/N_2, \dots, x_n/N_n] \in \llbracket \tau \rrbracket.$$

**Lemat 13.** Jeśli  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \tau$ , to  $\Gamma \models M : \tau$ .

**Dowód.** Dowód będzie przebiegał przez indukcję względem wyprowadzenia  $\Gamma \vdash M : \tau$ . Niech  $\Gamma = (x_1 : \tau_1, x_2 : \tau_2, \dots, x_n : \tau_n)$  będzie kontekstem dla którego istnieje wyprowadzenie  $J : \Gamma \vdash M : \tau$ . Wybierzmy  $N_1 \in \llbracket \tau_1 \rrbracket$ ,  $N_2 \in \llbracket \tau_2 \rrbracket$ ,  $\dots$ ,  $N_n \in \llbracket \tau_n \rrbracket$ . Rozważmy następujące przypadki:

- (a)  $J$  jest konsekwencją reguły *var*. Wówczas  $J$  jest postaci  $\Gamma \vdash x_i : \tau$  dla pewnego  $i \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i \leq n$ , gdzie  $x_i : \tau \in \Gamma$ . Stąd  $M[\vec{x}/\vec{N}] = x_i[x_i/N_i] = N_i \in \llbracket \tau \rrbracket$ . Z dowolności  $N_i$ ,  $\Gamma \models M : \tau$ .
- (b)  $J$  jest konsekwencją reguły *app*. Wówczas  $J$  jest postaci  $\Gamma \vdash PQ : \tau$ . Z założenia indukcyjnego istnieje  $\sigma \in \mathbb{T}$  takie, że  $\Gamma \models P : \sigma \rightarrow \tau$  i  $\Gamma \models Q : \sigma$ . Wobec tego  $P[\vec{x}/\vec{N}] \in \llbracket \sigma \rightarrow \tau \rrbracket$  i  $Q[\vec{x}/\vec{N}] \in \llbracket \sigma \rrbracket$ . Z definicji jednoczesnego podstawienia (Definicja 10) mamy:

$$PQ[\vec{x}/\vec{N}] = P[\vec{x}/\vec{N}]Q[\vec{x}/\vec{N}]$$

Z definicji  $\llbracket \sigma \rightarrow \tau \rrbracket$  wówczas  $M \in \llbracket \tau \rrbracket$ .



- (c)  $J$  jest konsekwencją reguły *abs*. Wówczas  $J$  jest postaci  $\Gamma \vdash \lambda y. P : \sigma \rightarrow \rho$ , gdzie  $y \notin \text{dom}\Gamma$ . Z założenia indukcyjnego mamy, że  $\Gamma, y : \sigma \models P : \rho$ . Oznacza to, że dla dowolnych  $N_1 \in \llbracket \tau_1 \rrbracket$ ,  $N_2 \in \llbracket \tau_2 \rrbracket$ , ...,  $N_n \in \llbracket \tau_n \rrbracket$  mamy

$$\forall N \in \llbracket \sigma \rrbracket \left( P[\vec{x}, y/\vec{N}, N] \in \llbracket \rho \rrbracket \right) \quad (*)$$

Ustalmy  $P' \equiv P[y/y'][\vec{x}/\vec{N}]$ , gdzie  $y' \notin \text{dom}\Gamma$  i  $y' \notin \text{FV}(N_i)$  dla  $i \in \mathbb{N}$ ,  $1 \leq i \leq n$ . Wówczas z (\*):

$$\forall N \in \llbracket \sigma \rrbracket \left( P'[y'/N] \in \llbracket \rho \rrbracket \right)$$

Ustalmy  $N_0 \in \llbracket \sigma \rrbracket$ . Wówczas z części (1) Lematu 10  $N_0 \in \text{SN}$ . Wobec tego z Lematu 12 wnioskujemy, że:

$$(\lambda y'. P')N_0 \in \llbracket \rho \rrbracket \quad (**)$$

Zauważmy teraz, że ponieważ  $\forall i \ y_i \notin \text{FV}(N_i)$

$$\begin{aligned} (\lambda y'. P') &= (\lambda y'. P[y/y'][\vec{x}/\vec{N}]) \\ &= (\lambda y'. P[y/y'])[\vec{x}/\vec{N}] = (\lambda y. P)[\vec{x}/\vec{N}] \end{aligned} \quad (***)$$

Z (\*\*) i (\*\*\*) otrzymujemy

$$((\lambda y. P)[\vec{x}/\vec{N}])N_0 \in \llbracket \rho \rrbracket.$$

Ponieważ  $N_0 \in \llbracket \sigma \rrbracket$ , to z definicji  $\llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket$  mamy, że

$$(\lambda y. P)[\vec{x}/\vec{N}] \in \llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket.$$

Z dowolności  $\vec{N}$  otrzymujemy ostatecznie, że  $\Gamma \models \lambda y. P$ .

□

**Twierdzenie 5.** (*O silnej normalizacji*) Jeżeli  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \tau$ , to  $M \in \text{SN}_{\beta}$ .

**Dowód.** Na podstawie Lematu 13, jeśli  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \tau$ , to  $M \in \llbracket \tau \rrbracket$ . Stosując Lemat 10 otrzymujemy tezę. □

Natychmiast widzimy, że własność silnej normalizacji pociąga za sobą własność słabej normalizacji, dlatego pomijamy dowód tej drugiej.

## 2.4 Typy w stylu Churcha

Przypisanie typu  $\lambda$ -termowi rozpoczynamy zawsze od określenia typów dla  $\lambda$ -zmiennych. Zasadniczo możemy to rozwiązać na dwa sposoby:

1. Możemy przypisać unikalny typ każdej  $\lambda$ -zmiennej przed jej wprowadzeniem. Takie podejście nazywamy *stylem Churcha* albo typowaniem *explicite*, ponieważ deklaracje typowe zmiennych występują jawnie w składni  $\lambda$ -termów. W konsekwencji w podejściu tym nie spotykamy problemu typowalności. Stąd systemy w tym stylu nazywa się również systemami typowanymi (ang. *typed systems*).
2. Inny sposób polega na nie ustalaniu typów zmiennych. Składnia  $\lambda$ -termów nie ulega wówczas zmianie, zaś o typie rozstrzyga algorytm rekonstrukcji typu. Typy w tym stylu były przedmiotem Rozdziału 2. W literaturze powszechnie nazywa się to podejście *stylem Currego* albo typowaniem *implicite*, zaś systemy w takim stylu określa się systemami *przypisywania typu* (ang. *type assignment systems*).

Obydwa podejścia dają w rezultacie takie same systemy typów [SU06, Rozdział 3.4]. Rozwiązaniem kompromisowym jest tzw. typowanie w *stylu de Brujina*<sup>4</sup> [BDS13, 1A.33] w którym nie ustala się typu wszystkich zmiennych, jednak adnotacje typowe są częścią składni (tak jak w stylu Churcha) i zależą od ustalonego kontekstu.

Zaprezentujemy teraz składnię oraz reguły wyprowadzania typu dla systemu w stylu Churcha. Wszystkie określenia oraz twierdzenia występujące dotychczas w Rozdziale 2 mają swoje odpowiedniki dla systemu w stylu Churcha [NG14, Rozdział 2.10]. Wyjątek stanowi Twierdzenie 4, które jest zastąpione w tym systemie Twierdzeniem 6 o jednoznaczności typu.

### 2.4.1 Składnia

Zbiór typów  $\mathbb{T}$  definiujemy w myśl Definicji 18. Niech  $U, V$  będą przeliczalnie nieskończonymi zbiorami zmiennych przedmiotowych, odpowiednio: zmiennych typowych i ( $\lambda$ -zmiennych). Celem zdefiniowania  $\lambda$ -termów w stylu Churcha przeprowadzamy konstrukcję analogiczną do tej przedstawionej w Rozdziale 1: określamy zbiór pretermów  $\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}}$ , a następnie definiujemy  $\lambda$ -termy jako klasy abstrakcji  $\alpha$ -konwersji.

$$\begin{aligned}\mathbb{T} &\leftarrow U \mid (\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}) \\ \tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}} &\leftarrow V \mid (\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}} \tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}}) \mid (\lambda V : \mathbb{T}. \tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}})\end{aligned}$$

---

<sup>4</sup>W [SU06] nazywa się to podejście *nieortodoksyjnym stylem Churcha*

Zauważmy, że  $\lambda$ -termy w stylu Churcha różnią się od stylu Currego tylko w wypadku  $\lambda$ -abstrakcji. Z tą jedną modyfikacją definicje zbioru zmiennych wolnych, podstawienia,  $\beta$ - i  $\eta$ -redukcji, kontekstu i wyprowadzenia są analogiczne do tych z Rozdziałów 1 i 2.

### 2.4.2 Typowanie

$$\begin{array}{c} \frac{}{\Gamma \vdash x : \sigma} \text{ (var)}, \text{ jeśli } x : \sigma \in \Gamma, \\ \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (MN) : \tau} \text{ (app)}, \\ \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma. M) : \sigma \rightarrow \tau} \text{ (abs)}. \end{array}$$

Istotną różnicą, którą wprowadza styl Churcha polega na tym, że mając zadany kontekst, typ każdego poprawnego  $\lambda$ -termu jest jednoznacznie określony. W systemach w stylu Currego termy poprawne są zamknięte ze względu na podstawienie typu. Własność, którą wyraża Twierdzenie 6 zachodzi w nich z dokładnością do podstawienia.

**Twierdzenie 6.** (*O jednoznaczności*) Jeśli  $\Gamma \vdash M : \sigma$  i  $M \rightarrow_{\beta}^* N$ , to  $\Gamma \vdash N : \sigma$ .

**Dowód.** Dowód przebiega przez indukcję względem długości wyprowadzenia  $\Gamma \vdash M : \sigma$ . Szczegóły pomijamy.  $\square$

## 3 Uogólnione systemy typów

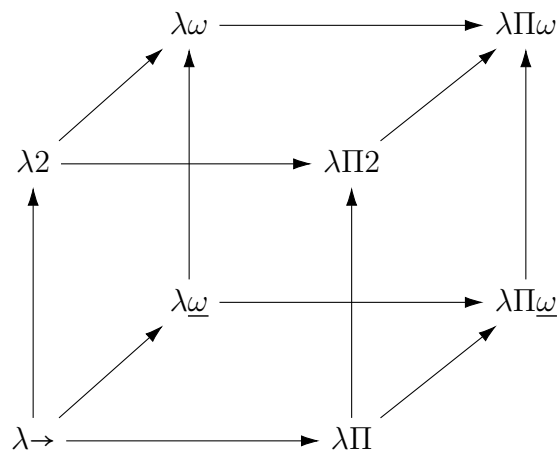
System typów, który był przedmiotem Rozdziału 2 jest najbardziej elementarnym przypadkiem typowanego rachunku  $\lambda$ <sup>5</sup>. W literaturze często spotyka się być może jeszcze prostszy, równoważny wariant typów prostych, w którym wszystkie typy buduje się wyłącznie z jednej stałej typowej. Pod pojęciem typów prostych rozumie się także szereg rozszerzeń przedstawionego przez nas systemu. Ich celem jest zwiększenie ekspresji, np. o odpowiednie konstrukcje dla par, w których pierwszy element może być innego typu niż drugi. Konstrukcja ta jest bowiem niemożliwa w naszym, elementarnym ujęciu.

Rozszerzenia takie mają na ogół szczególny cel praktyczny: rozszerzenie o typ dla par umożliwia na przykład elegancką prezentację analogii między intuicjonistycznym rachunkiem zdań, typowanym rachunkiem  $\lambda$  i kategoriami kartezjańsko

<sup>5</sup>Patologicznym przypadkiem jest rachunek  $\lambda$  bez typów, jeśli przyjmiemy, że wszystkie wyrażenia mają w nim dokładnie jeden typ. Argument ten często podejmowany jest na rzecz statycznie typowanych języków programowania.

domkniętymi, znanej szerzej jako izomorfizm Currego-Howarda-Lambeka [GTL89, Rozdział 3.1]. Nie wpływa to jednak na samą istotę typowania.

Na kanwie zaproponowanej przez H. P. Barendregta w [Bar92, Rozdział 5] klasyfikacji rozszerzeń rachunku  $\lambda$  z typami prostymi (tzw. *kostki*  $\lambda$ , Rysunek 3), rozdział ten poświęcimy omówieniu wzajemnych zależności jakie mogą łączyć  $\lambda$ -termy i typy. Zajmować będziemy się wyłącznie systemami w stylu Churcha.



Rysunek 3: Poszczególne systemy klasyfikacji H. Barendregta; kierunek krawędzi  $\rightarrow$  oznacza relację  $\subseteq$ .

### 3.1 System $\lambda \rightarrow$

Przez system  $\lambda \rightarrow$  rozumiemy rachunek  $\lambda$  z typami prostymi w stylu Churcha (Rozdział 2.4). W rachunku tym mamy do czynienia z wyraźnym podziałem na obiekty dwóch rodzajów:  $\lambda$ -termy i typy.  $\lambda$ -termy możemy przekształcać dwoma dualnymi operacjami:  $\lambda$ -abstrakcją i aplikacją. Rezultat operacji zależy od wyboru zmiennej wolnej, którą chcemy wyabstrahować z termu albo wyboru termu, który chcemy zaaplkować do innego termu, odpowiednio. Innych możliwości nie ma. Dlatego mówimy, że w systemie  $\lambda \rightarrow$  termy *zależą* od termów. Ponieważ abstrahowanie przebiega wyłącznie po zbiorze  $\lambda$ -zmiennych, mówimy, że zależność jest *pierwszego rzędu*.

**Przykład 12.** (a) Zauważmy, że nie istnieje jeden typ dla reprezentacji funkcji identycznościowej. Jeśli  $nat$  jest stałą typową, którą reprezentujemy liczby naturalne, to identyczność na zbiorze liczb naturalnych będziemy reprezentowali termem  $\lambda x : nat. x$ , na zbiorze funkcji  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $\lambda x : nat \rightarrow nat. x$  i tak dalej. Aby określić ogólną postać identyczności, musimy móc abstrahować

po zbiorze typów, czyli parametryzować postać termu typem. Własność tę miał w pewnym sensie rachunek  $\lambda$  w stylu Currego (Podrozdział 2.3.1).

(b)

## Literatura

- [Alt02] Thorsten Altenkirch. “ $\alpha$ -conversion is easy”. Under Revision. 2002. URL: <https://www.cs.nott.ac.uk/~psztxa/publ/alpha-draft.pdf>.
- [Bar84] H. P. Barendregt. *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*. Elsevier, 1984.
- [Bar92] H. P. Barendregt. “Lambda Calculi with Types”. In: vol. 2. Jan. 1992, pp. 117–309. ISBN: 0198537611.
- [BDS13] Henk Barendregt, Wil Dekkers, and Richard Statman. *Lambda Calculus with Types*. Perspectives in Logic. Cambridge University Press, 2013. DOI: 10.1017/CB09781139032636.
- [Bru72] N.G. de Bruijn. “Lambda Calculus Notation with Nameless Dummies, a Tool for Automatic Formula Manipulation, with Application to the Church-Rosser Theorem”. In: *Indagationes Mathematicae (Proceedings)* 75 (Dec. 1972), pp. 381–392. DOI: 10.1016/1385-7258(72)90034-0.
- [Chu41] Alonzo Church. *The Calculi of Lambda-Conversion*. Princeton University Press, 1941.
- [GTL89] Jean-Yves Girard, Paul Taylor, and Yves Lafont. *Proofs and Types*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 1989. ISBN: 0-521-37181-3.
- [HIN05] RALF HINZE. “THEORETICAL PEARL Church numerals, twice!” In: *Journal of Functional Programming* 15.1 (2005), pp. 1–13. DOI: 10.1017/S0956796804005313.
- [HS08] J. Roger Hindley and Jonathan P. Seldin. *Lambda-Calculus and Combinators: An Introduction*. 2nd ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2008. ISBN: 0521898854, 9780521898850.
- [Hut99] Graham Hutton. “A Tutorial on the Universality and Expressiveness of Fold”. In: *J. Funct. Program.* 9.4 (July 1999), pp. 355–372. ISSN: 0956-7968. DOI: 10.1017/S0956796899003500. URL: <http://dx.doi.org/10.1017/S0956796899003500>.

- [Jan13] Jan Martin Jansen. “Programming in the  $\lambda$ -Calculus: From Church to Scott and Back”. In: *Essays Dedicated to Rinus Plasmeijer on the Occasion of His 61st Birthday on The Beauty of Functional Code - Volume 8106*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013, pp. 168–180. ISBN: 978-3-642-40354-5. DOI: 10.1007/978-3-642-40355-2\_12. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-40355-2\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-642-40355-2_12).
- [JKP06] Jan Martin Jansen, Pieter Koopman, and Rinus Plasmeijer. “Efficient Interpretation by Transforming Data Types and Patterns to Functions”. In: Jan. 2006, pp. 73–90.
- [KPJ14] Pieter Koopman, Rinus Plasmeijer, and Jan Martin Jansen. “Church Encoding of Data Types Considered Harmful for Implementations: Functional Pearl”. In: *Proceedings of the 26Nd 2014 International Symposium on Implementation and Application of Functional Languages*. IFL ’14. Boston, MA, USA: ACM, 2014, 4:1–4:12. ISBN: 978-1-4503-3284-2. DOI: 10.1145/2746325.2746330. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/2746325.2746330>.
- [NG14] Rob Nederpelt and Herman Geuvers. *Type Theory and Formal Proof: An Introduction*. Cambridge University Press, 2014. DOI: 10.1017/CB09781139567725.
- [PL92] Simon L. Peyton Jones and David R. Lester. *Implementing Functional Languages*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1992. ISBN: 0-13-721952-0.
- [SS75] Gerald J. Sussman and Guy L. Steele Jr. *An Interpreter for Extended Lambda Calculus*. Tech. rep. Cambridge, MA, USA, 1975.
- [SU06] Morten Heine Sørensen and Pawel Urzyczyn. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, Volume 149 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics)*. New York, NY, USA: Elsevier Science Inc., 2006. ISBN: 0444520775.
- [Tai67] W. W. Tait. “Intensional Interpretations of Functionals of Finite Type I”. In: *Journal of Symbolic Logic* 32.2 (1967), pp. 198–212. DOI: 10.2307/2271658.
- [Wad89] Philip Wadler. “Theorems for Free!” In: *Proceedings of the Fourth International Conference on Functional Programming Languages and Computer Architecture*. FPCA ’89. Imperial College, London, United Kingdom: ACM, 1989, pp. 347–359. ISBN: 0-89791-328-0. DOI: 10.1145/99370.99404. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/99370.99404>.

- [Wel99] J. B. Wells. “Typability and type checking in system F are equivalent and undecidable”. English. In: *Annals of Pure and Applied Logic* 98.1-3 (June 1999), pp. 111–156. ISSN: 0168-0072.
- [Zak07] Mateusz Zakrzewski. “Definable functions in the simply typed lambda-calculus”. In: *CoRR* abs/cs/0701022 (2007). arXiv: cs/0701022. URL: <http://arxiv.org/abs/cs/0701022>.