1 Rachunek λ

Niech V będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych x, y, … (indeksowanych być może liczbami naturalnymi). Elementy takiego zbioru będziemy nazywali λ-*zmiennymi*.

Definicja 1. (Zbiór $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ pretermów)
Zbiorem pretermów będziemy nazywali najmniejszy (w sensie mnogościowym) zbiór wyrażeń $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ taki, że:

(P1) Jeśli $x \in V$, to $x \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$.

(P2) Jeśli $M, N \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$, to $(M\,N) \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$.

(P3) Jeśli $x \in V$ i $M \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$, to $(\lambda x.\, M) \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$.

Korzystając z notacji Backusa-Naura induktywną definicję 1 możemy równoznacznie wyrazić w postaci:

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} \leftarrow V \quad | \quad (\tilde{\mathbf{\Lambda}}\,\tilde{\mathbf{\Lambda}}) \quad | \quad (\lambda V.\, \tilde{\mathbf{\Lambda}})$$

Elementy $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ oznaczamy literami L, M, N, P, Q, R i ich wariantami wzbogaconymi o indeksy. Wyrażenia postaci (P2) nazywamy *aplikacjami* M do N. Symbol λ występujący w (P3) nazywamy λ-*abstraktorem*, zaś wyrażenia powstałe przez zastosowanie tej reguły to λ-*abstrakcje*. W wyrażeniu postaci $(\lambda x.\, M)$ preterm M jest w *zasięgu* λ-abstraktora, a zmienna x jest przez niego *związana*. Ponadto, będziemy stosowali następujące konwencje notacyjne:

– najbardziej zewnętrzne nawiasy bedą pomijane,
– aplikacja wiąże lewostronnie; wyrażenia postaci $(PQ)R$ będą zapisywane w postaci PQR,
– λ-abstrakcja wiaże prawostronnie: $\lambda x_1.\, (\lambda x_2.\, P)$ zapisujemy $\lambda x_1.\, \lambda x_2.\, P$,
– następujące po sobie λ-abstrakcje postaci $\lambda x_1.\, \lambda x_2.\, \ldots \lambda x_n.\, P$ zapisujemy pod wspólnym λ-abstraktorem: $\lambda x_1\, x_2\, \ldots\, x_n.\, P$.

Powiemy, że dwa λ-termy są *syntaktycznie równe*, jeśli są identyczne rozumiane jako ciągi znaków. Równość syntaktyczną będziemy oznaczali znakiem $\equiv$.

Przykład 1. Podajmy kilka przykładów λ-pretermów pogrupowanych ze względu na konstrukcję.

(P1): $x,\ y,\ z.$

(P2): $x\,x,\ y\,x,\ x\,(x\,z),$
$(\lambda x.\, (xz))y,\ y\,(\lambda x.\, (x\,z)),\ (\lambda x.\, x)\,(\lambda x.\, x).$

(P3): $\lambda x.\, (x\,z),\ \lambda yz.\, x,\ \lambda x.\, (\lambda x.\, (x\,x)).$

Podwyrażenia λ-pretermu mogą być wzajemnie identyczne i występować wielokrotnie. Obserwację tę ujmuje następująca definicja.

Definicja 2. (Multizbiór Sub podtermów)

(1) $\mathrm{Sub}(x) = \{x\}$

(2) $\mathrm{Sub}(MN) = \mathrm{Sub}(M) \cup \mathrm{Sub}(N) \cup \{M\,N\}$

(3) $\mathrm{Sub}(\lambda x.\,M) = \mathrm{Sub}(M) \cup \{\lambda x.\,M\}$

Elementy multizbioru $\mathrm{Sub}(M)$ nazywamy *podtermami* M. Jeśli L jest podtermem M, ale $L \not\equiv M$, to L nazywamy podtermem *właściwym*.

Przykład 2. Podtermy wybranych λ-pretermów.

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad \mathrm{Sub}\,(\lambda x.\,x\,x) = \left\{(\lambda x.\,x\,x)^1,\ (x\,x)^1,\ x^2\right\}\\
&\text{(b)}\quad \mathrm{Sub}\,((\lambda x.\,x\,x)\ (\lambda x.\,x\,x)) =\\
&\qquad = \left\{((\lambda x.\,x\,x)\,(\lambda x.\,x\,x))^1,\ (\lambda x.\,x\,x)^2,\ (x\,x)^2,\ x^4\right\}
\end{aligned}$$

Definicja 3. (Zbiór FV zmiennych wolnych)
Z dowolnym pretermem M wiążemy zbiór $\mathrm{FV}(M)$ *zmiennych wolnych* w M określony w poniższy sposób:

$$\begin{aligned}
\mathrm{FV}(x) &= \{x\}\\
\mathrm{FV}(\lambda x.\,P) &= \mathrm{FV}(P) \setminus \{x\}\\
\mathrm{FV}(PQ) &= \mathrm{FV}(P) \cup \mathrm{FV}(Q)
\end{aligned}$$

Jesli $\mathrm{FV}(M) = \varnothing$, to mówimy, że M jest *domknięty* lub nazywamy M *kombinatorem*.

Przykład 3. (a) $\mathrm{FV}(\lambda x.\,x\,y) = \{y\}$

(b) $\mathrm{FV}(x\,(\lambda x.\,x\,y)) = \{x,\ y\}$

(c) $\mathrm{FV}(\lambda xyz.\,xy) = \varnothing$

Definicja 4. (Podstawienie)
Podstawieniem $[x/N]$ pretermu N za λ-zmienną x w M nazwamy następująco zdefiniowane przekształcenie:

$$\begin{aligned}
x[x/N] &= N, &&\\
y[x/N] &= y, && \text{o ile } x \neq y,\\
(PQ)[x/N] &= P[x/N]\,Q[x/N], &&\\
(\lambda y.\,P)[x/N] &= \lambda y.\,P[x/N], && \text{gdzie } x \neq y \text{ i } y \notin \mathrm{FV}(N).
\end{aligned}$$

Zachodzą następujące fakty:

Fakt 1. *(a) Jeśli* $x \notin \mathrm{FV}(M)$*, to* $M[x/N]$ *jest poprawnym podstawieniem i* $M[x/N] = M$*.*

(b) Jeśli $M[x/N]$ *jest poprawnym podstawieniem, to* $y \in \mathrm{FV}(M[x/N]$ *wtw, gdy albo* $y \in \mathrm{FV}(M)$ *i* $x \neq y$*, albo* $y \in \mathrm{FV}(N)$ *i* $x \in \mathrm{FV}(M)$*.*

(c) Podstawienie $M[x/x]$ *jest poprawne i* $M[x/x] = M$*.*

(d) Jeśli $M[x/y]$ *jest poprawnym podstawieniem, to* $M[x/y]$ *ma tę samą długość, co* M*.*

Dowód. □

Fakt 2. *Powiedzmy, że* $M[x/N]$ *jest poprawnym podstawieniem i* $N[y/L]$ *i* $M[x/N][y/L]$ *są poprawnymi podstawieniami, gdzie* $x \neq y$*. Jeśli* $x \notin \mathrm{FV}(L)$ *lub* $y \notin \mathrm{FV}(M)$*, to* $M[y/L]$ *i* $M[y/L][x/N[y/L]]$ *jest poprawnym podstawieniem oraz*

$$M[x/N][y/L] = M[y/L][x/N[y/L]].$$

Dowód. □

Fakt 3. *Jesli* $M[x/y]$ *jest poprawnym postawieniem i* $y \notin \mathrm{FV}(M)$*, to* $M[x/y][y/x]$ *jest poprawnym podstawieniem oraz* $M[x/y][y/x] = M$*.*

Dowód. □