Izomorfizm Curry'ego-Howarda

Rafał Szczerski

2018
Październik

1 IPC(→)

1.1 Język

Definicja 1.

- Zbiorem $\Phi_{\rightarrow}$ formuł IPC(→) nazywamy język generowany przez gramatykę

$$\begin{aligned} \Phi_{\rightarrow} &:= \mathrm{V} \mid (\Phi_{\rightarrow} \rightarrow \Phi_{\rightarrow}) \mid \bot \\ \mathrm{V} &:= \mathrm{p} \mid \mathrm{V}' \end{aligned}$$

- Wyrażenia powstałe z produkcji V nazywamy *zmiennymi zdaniowymi.* Zmienne zdaniowe oraz $\bot$ są formułami *atomowymi.* Pozostałe wyrażenia nazywamy formułami *złożonymi.*
- Konwencje:
  1. W języku podmiotowym wprowadzamy następujące oznaczenia

     $$\begin{aligned} \neg\varphi &:= \ulcorner \varphi \rightarrow \bot \urcorner \\ \top &:= \ulcorner \bot \rightarrow \bot \urcorner \end{aligned}$$

  2. Zamiast $\mathrm{p}', \mathrm{p}'', \mathrm{p}''', \ldots$ używamy kolejno liter p, q, r, ...
  3. Zmienne metasyntaktyczne oznaczamy późniejszymi literami greckiego alfabetu, tj. $\varphi, \psi, \ldots$
  4. $\rightarrow$ jest łączna w prawo.
  5. $\neg$ ma najwyższy priorytet, $\rightarrow$ – najniższy.
  6. Pomijamy najbardziej zewnętrzne nawiasy.
- Każdą parę $(\Gamma, \varphi) \in \mathcal{P}(\Phi_{\rightarrow}) \times \Phi_{\rightarrow}$, gdzie Γ jest zbiorem skończonym nazywamy *sądem* (*asercją*) i oznaczamy $\Gamma \vdash \varphi$.

  Piszemy:
  - $\varphi_1,\ \varphi_2 \vdash \psi$ zamiast $\{\varphi_1,\ \varphi_2\} \vdash \psi$,
  - Γ, φ zamiast $\{\Gamma \cup \varphi\}$,
  - Γ, Δ zamiast $\{\Gamma \cup \Delta\}$,
  - $\vdash \varphi$ zamiast $\varnothing \vdash \varphi$.
- Na zbiorze sądów $\mathcal{P}(\Phi_{\rightarrow}) \times \Phi_{\rightarrow}$ wprowadzamy relacje okreslające reguły wyprowadzania

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi}\ (\rightarrow\mathrm{I}), \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\rightarrow\mathrm{E}).$$

oraz wybieramy spośród nich jeden aksjomat postaci $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ (Ax).

- *Dowodem* sądu $\Gamma \vdash \varphi$ nazywamy skończone drzewo sądów spełniające poniższe warunki:

  1. W korzeniu drzewa znajduje się dowodzony sąd $\Gamma \vdash \varphi$.
  2. Liście są *aksjomatami*, tj. sądami postaci $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$.
  3. Każdego rodzica można otrzymać z jego dzieci przez zastosowanie którejś z reguł wyprowadzania nowych sądów.

  Jeśli istnieje dowód sądu $\Gamma \vdash \varphi$ to mówimy, że formuła φ jest *wyprowadzalna* ze zbioru *przesłanek* Γ i piszemy $\Gamma \vdash_N \varphi$. Formułę φ nazywamy wówczas *tezą* systemu NJ($\to$).

1.2 Semantyka

Twierdzenie 1. *(O pełności) System dedukcyjny* NJ($\to$) *jest pełny względem modeli Kripkego.*

2 Typy proste w stylu Churcha

2.1 Język

Definicja 2.
- *Typami prostymi* nazywamy język T generowany przez gramatykę

$$\begin{aligned} \mathrm{T} &:= U \mid (\mathrm{T} \to \mathrm{T}) \\ \mathrm{U} &:= \mathrm{p} \mid \mathrm{U}' \end{aligned}$$

- Napisy powstałe z produkcji U nazywamy *zmiennymi typowymi.*

  Konwencja.

  1. *Zamiast* $\mathrm{p}', \mathrm{p}'', \mathrm{p}''', \ldots$ *używamy kolejno liter* p, q, r, ...
  2. *Zmienne metasyntaktyczne oznaczamy późniejszymi literami greckiego alfabetu, tj.* $\varphi, \psi, \ldots$
  3. $\to$ *jest łączna w prawo.*
  4. *Pomijamy najbardziej zewnętrzne nawiasy.*

- *Pseudotermami* nazywamy język Λ_T generowany przez gramatykę

$$\Lambda_\mathrm{T} := \ \mathrm{V} \mid \left(\lambda V^\mathrm{T}.\Lambda_\mathrm{T}\right) \mid (\Lambda_\mathrm{T}\Lambda_\mathrm{T})$$

  gdzie V to przeliczalny zbiór zmiennych $x, y, \ldots$

- *Otoczeniem* nazywamy funkcję częściową $\Gamma : \mathrm{V} \to \mathrm{T}$ przeprowadzającą zbiór zmiennych zmiennych typowych w zbiór typów prostych.

- Wprowadzamy relację *typizacji* $\vdash \subset C \times \Lambda_\mathrm{T} \times \mathrm{T}$ jako najmniejszą (w sensie mnogościowym) relację spełniającą reguły

$$\Gamma, x^\varphi \vdash x^\varphi \text{ (Ax)}, \qquad \frac{\Gamma, x^\varphi \vdash M^\psi}{\Gamma \vdash (\lambda x^\varphi . M)^{\varphi \to \psi}} \ (\to\mathrm{I}), \qquad \frac{\Gamma \vdash M^{\varphi \to \psi} \qquad \Gamma \vdash N^\varphi}{\Gamma \vdash (MN)^\psi} \ (\to\mathrm{E}).$$

  gdzie $C \subset \mathcal{P}(\mathrm{V} \times \mathrm{T})$ jest rodziną wszystkich otoczeń.

  Mówimy, że M jest *termem* typu τ w otoczeniu Γ, jeśli $\Gamma \vdash M^\tau$.

Literatura