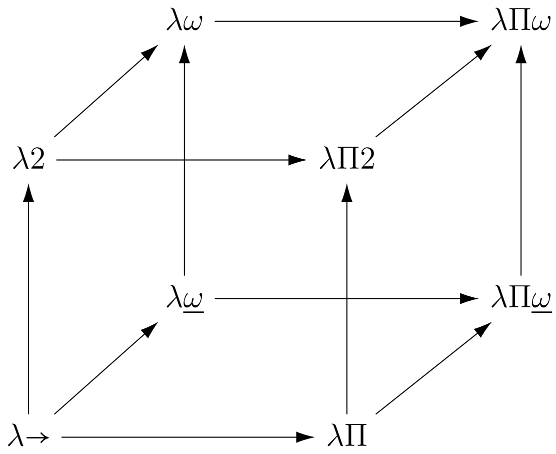
1 Rachunek λ z typami prostymi

Przedstawimy system rachunku λ z typami prostymi w stylu de Bruijna [BDS13; SU06]. Zgodnie z [HS08, roz. 13E] odpowiada on najsłabszemu z *czystych systemów typów* (ang. *pure type systems*, PTS) w myśl klasyfikacji zaproponowanej przez Henka Barendregta w [Bar91]. Klasyfikację tę obrazuje Rysunek 1; kierunek krawędzi oznacza na nim zawieranie w sensie możliwości wyrażenia słabszego systemu przez system wzbogacony o nowe typy.



Rysunek 1: Kostka lambda H. Barendregta

1.1 Typy proste

Niech U będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych p, q, … (być może indeksowanych liczbami naturalnymi), które będziemy nazywali *zmiennymi typowymi*.

Definicja 1. (Typy proste)
Typami prostymi będziemy określali najmniejszy w sensie mnogościowym zbiór wyrażeń taki, że:

T1. Jeśli p jest zmienną typową, to p jest typem prostym.

T2. Jeśli τ i σ są typami prostymi, to $(\tau \to \sigma)$ jest typem prostym.

Typy proste zbudowane tylko wedle reguły T1. nazywamy typami *atomowymi*, zaś wyrażenia zbudowe wedle reguły T2. – typami *funkcyjnymi*. Zbiór typów prostych określony w myśl powyższej definicji będziemy oznaczali przez $\mathbf{T}_{\to}$.

Późniejsze litery alfabetu greckiego, tj. σ, τ, ρ, ... będą służyły nam za zmienne metasyntaktyczne do oznaczania typów prostych. Dla lepszej czytelności będziemy pomijali najbardziej zewnętrzne nawiasy. Konstruktor typu $\to$ wiąże prawostronnie; oznacza to, że typy $\tau \to \sigma \to \theta$ oraz $\tau \to (\sigma \to \theta)$ będziemy uznawali za tożsame.

Typy proste ujęte Definicją 1 mają strukturę drzewa binarnego. Wysokość takiego drzewa będziemy nazywali *stopniem* typu. Precyzyjnie ujmuje to pojęcie poniższa definicja.

Definicja 2. (Stopień typu)
Stopniem typu nazywamy funkcję $\delta : \mathbf{T}_{\to} \longrightarrow \mathbb{N}$ taką, że

$$\begin{aligned} \delta(p) &= 0, \text{ gdzie } p \text{ jest typem atomowym,} \\ \delta(\tau \to \sigma) &= 1 + \max\left(\delta(\tau),\ \delta(\sigma)\right). \end{aligned}$$

1.2 Pseudotermy

Niech V będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych x, y, ... (indeksowanych być może liczbami naturalnymi). Elementy takiego zbioru będziemy nazywali λ-*zmiennymi*.

Definicja 3. (Pseudo-pretermy)
Pseudo-pretermami będziemy nazywali najmniejszy (w sensie mnogościowym) zbiór $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathrm{T}}$ taki, że:

PT1. Jeśli $x \in \mathrm{V}$, to $x \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathrm{T}}$.

PT2. Jeśli $M \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathrm{T}}$ i $N \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathrm{T}}$, to $(MN) \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathrm{T}}$.

PT3. Dla dowolnych $x \in \mathrm{V}$, $\sigma \in \mathbf{T}_{\to}$, $M \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathrm{T}}$ mamy, że $(\lambda x^{\sigma}.\, M) \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathrm{T}}$.

Wyrażenia postaci PT2. nazywamy *aplikacjami* M do N, zaś wyrażenia postaci PT3. – λ-*abstrakcjami*, gdzie o wszystkich podtermach termu M mówi się, że są w *zasięgu* λ-abstraktora, zaś o λ-zmiennej x mówi się, że jest nim *związana*.

Za zmienne metasyntaktyczne obieramy duże litery alfabetu łacińskiego M, N, ... Podobnie jak w podrozdziale 1.1 stosujemy konwencję o opuszczaniu najbardziej zewnętrznych nawiasów. Aplikacja termów wiąże lewostronnie; oznacza to, że będziemy utożsamiali ze sobą wyrażenia MNP oraz $(MN)P$.

Definicja 4. (Zmienne wolne)

Dla pseudo-pretermu M określamy zbiór *pseudo-pretermów wolnych* FV w nastepujący sposób:

$$\begin{aligned} \mathrm{FV}(x) &= \{x\} \\ \mathrm{FV}(\lambda x^{\sigma}.\, P) &= \mathrm{FV}(P) \setminus \{x\} \\ \mathrm{FV}(PQ) &= \mathrm{FV}(P) \cup \mathrm{FV}(Q) \end{aligned}$$

Jesli $\mathrm{FV}(M) = \varnothing$, to mówimy, że M jest *domknięcite.*

Definicja 5. (Podstawienie)
Podstawieniem $[x/N]$ pseudo-pretermu N za λ-zmienną x w M nazwamy zdefiniowane następująco przekształcenie:

$$\begin{aligned} x[x/N] &= N, & & \\ y[x/N] &= y, & & \text{o ile } x \neq y, \\ (PQ)[x/N] &= P[x/N]\, Q[x/N], & & \\ (\lambda y^{\sigma}.\, P)[x/N] &= \lambda y^{\sigma}.\, P[x/N], & & \text{gdzie } x \neq y \text{ i } y \notin \mathrm{FV}(N). \end{aligned}$$

Zachodzą następujące fakty:

Fakt 1. *(a) Jeśli $x \notin \mathrm{FV}(M)$, to $M[x/N]$ jest poprawnym podstawieniem i $M[x/N] = M$.*

(b) Jeśli $M[x/N]$ jest poprawnym podstawieniem, to $y \in \mathrm{FV}(M[x/N]$ wtw, gdy albo $y \in \mathrm{FV}(M)$ i $x \neq y$, albo $y \in \mathrm{FV}(N)$ i $x \in \mathrm{FV}(M)$.

(c) Podstawienie $M[x/x]$ jest poprawne i $M[x/x] = M$.

(d) Jeśli $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem, to $M[x/y]$ ma tę samą długość, co M.

Fakt 2. *Powiedzmy, że $M[x/N]$ jest poprawnym podstawieniem i $N[y/L]$ i $M[x/N][y/L]$ są poprawnymi podstawieniami, gdzie $x \neq y$. Jeśli $x \notin \mathrm{FV}(L)$ lub $y \notin \mathrm{FV}(M)$, to $M[y/L]$ i $M[y/L][x/N[y/L]]$ jest poprawnym podstawieniem oraz*

$$M[x/N][y/L] = M[y/L][x/N[y/L]].$$

Fakt 3. *Jesli $M[x/y]$ jest poprawnym postawieniem i $y \notin \mathrm{FV}(M)$, to $M[x/y][y/x]$ jest poprawnym podstawieniem oraz $M[x/y][y/x] = M$.*

Definicja 6. (α-konwersja)
α-konwersją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zwrotną i przechodnią relację binarną $=_\alpha$ określoną na zbiorze pseudotermów $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathrm{T}}$ spełniającą poniższe warunki:

(a) Jeśli $y \notin \mathrm{FV}(M)$ i $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem, to $\lambda x.\, M =_\alpha \lambda y.\, M[x/y]$.

(b) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla każdej λ-zmiennej x mamy $\lambda x.\, M =_\alpha \lambda x.\, N$.

(c) Jeśli $M =_\alpha N$, to $MZ =_\alpha NZ$.

(d) Jeśli $M =_\alpha N$, to $ZM =_\alpha ZN$.

Fakt 4. *Relacja $=_\alpha$ jest symetryczna.*

Fakt 5. *$=_\alpha$ jest relacją równoważności.*

Fakt 6. *Jeśli $M =_\alpha N$, to* $\mathrm{FV}(M) = \mathrm{FV}(N)$.

Dysponując powyższymi rozstrzygnięciami otrzymujemy wygodne utożsamienie pseudo-pretermów, które różnią się między sobą tylko zmiennymi związanymi.

Definicja 7. (Pseudotermy)
Klasy abstrakcji relacji α-konwersji nazywamy *pseudotermami.* Zbiór wszystkich pseudotermów oznaczamy następująco:

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{T}} = \left\{ [M]_\alpha \mid M \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathrm{T}} \right\}$$

Nadużywając notacji będziemy odnosili się do pseudotermów tylko przez ich reprezentantów: zamiast $[\lambda x^\sigma.M]_\alpha$ będziemy pisali krótko $\lambda x^\sigma.M$.

1.3 Typowalność

Definicja 8. (Kontekst)
Kontekstem nazywamy skończoną funkcję częściową $\Gamma : \mathrm{V} \longrightarrow \mathbf{T}_\to$, czyli zbiór par postaci $\Gamma = \{x_1^{\tau_1}, \ldots, x_n^{\tau_n}\}$, gdzie $(x_i^{\tau_i}) = (x_i, \tau_i)$ oraz $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$. Zbiór

$$\mathrm{dom}(\Gamma) = \{x \in \mathrm{V} \mid \exists \tau (x^\tau \in \Gamma)\}$$

nazywamy *dziedziną* kontekstu Γ, zaś

$$\mathrm{rg}(\Gamma) = \{\tau \in \mathbf{T}_\to \mid \exists x (x^\tau \in \Gamma)\}$$

– *zakresem* kontekstu Γ. Piszemy:
– $x_1^{\tau_1}, x_2^{\tau_2}$ zamiast $\{x_1^{\tau_1}, x_2^{\tau_2}\}$, o ile $x_1^{\tau_1}$ i $x_2^{\tau_2}$ są różne,
– Γ, x^τ zamiast $\Gamma \cup \{x^\tau\}$, o ile $x^\tau \notin \Gamma$,
– Γ, Δ zamiast $\Gamma \cup \Delta$, o ile $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$.

Okreslimy teraz system przypisywania typów do pseudotermów w stylu dedukcji naturalnej. *Sekwentami* w tym systemie będziemy nazywali wyrażenia postaci $\Gamma \vdash M^\sigma$, gdzie $M \in \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{T}}$, $\sigma \in \mathbf{T}_\rightarrow$, zaś Γ jest pewnym kontekstem.

Wprowadzamy następujące reguły dowodzenia:

$$\frac{}{\Gamma, x^\tau \vdash x^\tau}\ (\mathrm{Var}), \qquad \frac{\Gamma, x^\varphi \vdash M^\psi}{\Gamma \vdash (\lambda\, x^\varphi.\, M)^{\varphi\to\psi}}\ (\mathrm{Abs}), \qquad \frac{\Gamma \vdash M^{\varphi\to\psi} \qquad \Gamma \vdash N^\varphi}{\Gamma \vdash (MN)^\psi}\ (\mathrm{App}).$$

Definicja 9. (Typowalność)
Mówimy, że pseudoterm M jest typu σ w kontekście Γ (jest *typowalny*), jeśli istnieje skończone drzewo sekwentów spełniające poniższe warunki:

P1. W korzeniu drzewa znajduje się sekwent $\Gamma \vdash M^\sigma$.

P2. Liście są *aksjomatami*, tj. sekwentami postaci $\Gamma, x^\sigma \vdash x^\sigma$.

P3. Każdego rodzica można otrzymać z jego dzieci przez zastosowanie którejś z reguł wyprowadzania nowych sekwentów.

Tak określone drzewo będziemy nazywali *wyprowadzeniem* typu i pisali $\Gamma \vdash M^\sigma$.

Otrzymujemy ostateczne określenie λ-termów w omawianym systemie.

Definicja 10. (λ-termy)
Wszystkie typowalne pseudotermy w pewnym kontekście Γ nazywamy λ-*termami* (z typami prostymi w kontekście Γ).

Uwaga. λ-term w kontekście Γ_1 może nie być typowalny w innym kontekście Γ_2.

Zachodzą następujące fakty:

Fakt 7. *(o odwracaniu)*

I1. Jeśli $\Gamma \vdash x^\sigma$, to $x^\sigma \in \Gamma$.

I2. Jeśli $\Gamma \vdash MN^\sigma$, to istnieje typ $\tau \in \mathbf{T}_\rightarrow$ taki, że $\Gamma \vdash M^{\tau\to\sigma}$ i $\Gamma \vdash N^\tau$.

I3. Jesli $\Gamma \vdash \lambda x^\tau. M^\sigma$, to istnieje typ $\rho \in \mathbf{T}_\rightarrow$ taki, że $\sigma \equiv \tau \to \rho$ oraz $\Gamma, x^\tau \vdash M^\rho$.

Dowód. I1. Przypuśćmy, że $\Gamma \vdash x^\sigma$. Ostatni wierzchołek w wyprowadzeniu nie może być uzyskany przez żadne z określonych reguł dowodzenia, zatem musi to być aksjomat, tj. $x^\sigma \in \Gamma$. Podobnie I2. i I3.. □

Fakt 8. *(o podstawianiu) Jeśli $\Gamma, x^\sigma \vdash M^\tau$ oraz $\Gamma \vdash N^\sigma$, to $\Gamma \vdash M[x/N]^\tau$.*

Dowód. Dowód przez indukcję strukturalną względem M. □

W danym kontekście każdy λ-term ma jednoznacznie przypisany typ, co stwierdza następujące twierdzenie:

Fakt 9. *Jesli* $\Gamma \vdash M^{\sigma}$ *oraz* $\Gamma \vdash M^{\tau}$*, to* $\sigma = \tau$*.*

Dowód. Dowód przez indukcję strukturalną względem M. □

Uwaga 1. (Adnotacje typowe) Mówiąc o λ-termach i nie podając żadnego związanego z nimi kontekstu Γ będziemy implicite zakładali, że istnieje pewien kontekst w którym są one typowalne. Wspólny dla λ-termów M^{σ} i N^{τ} kontekst Γ będziemy notowali pisząc $M,\ N \in \mathbf{\Lambda}^{\Gamma}_{\mathbf{T}}$. Ze względu na Fakt 9 mając określony kontekst Γ będziemy bez utraty jednoznaczności omijać adnotacje typowe dla λ-termów pisząc po prostu M w miejsce M^{σ}, gdy z kontekstu jasne będzie, że nie chodzi o pseudotermy.

Typ dowolnego λ-termu będziemy w ramach konwencji notowali używając adnotacji typowej umieszczonej w górnym indeksie. Dla przykładu, pisząc $(M^{\sigma\to\tau}N^{\sigma})^{\tau}$ będziemy mieli na myśli, że λ-term jest w pewnym kontekście Γ typu τ.

Rozważmy następujące przykłady:

Przykład 1. Niech $\Gamma = \{x^{\sigma},\ y^{\tau}\}$. Pokażemy, że $\mathrm{K} = \lambda x^{\sigma}y^{\tau}.\,x$ ma typ $\sigma \to \tau \to \sigma$. Istotnie,

$$\dfrac{\dfrac{x^{\sigma}, y^{\tau} \vdash x^{\sigma}}{x^{\sigma} \vdash (\lambda y^{\tau}.\,x)^{\tau\to\sigma}}\ (\mathrm{Abs})}{\vdash (\lambda x^{\sigma}\lambda y^{\tau}.\,x)^{\sigma\to\tau\to\sigma}}\ (\mathrm{Abs})$$

Przykład 2. Niech $\Gamma = \{x^{\tau\to\rho},\ y^{\sigma\to\tau},\ z^{\sigma}\}$. Wówczas

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash z^{\sigma} \qquad \Gamma \vdash y^{\sigma\to\tau}}{\Gamma \vdash yz^{\tau}}\ (\mathrm{App}) \qquad \Gamma \vdash x^{\tau\to\rho}}{\Gamma \vdash x(yz)^{\rho}}\ (\mathrm{App})}{x^{\tau\to\sigma}, y^{\sigma\to\rho} \vdash (\lambda z^{\sigma}.\,x(yz))^{\sigma\to\rho}}\ (\mathrm{Abs})}{x^{\tau\to\rho} \vdash (\lambda y^{\sigma\to\tau}\lambda z^{\sigma}.\,x(yz))^{(\sigma\to\tau)\to\sigma\to\rho}}\ (\mathrm{Abs})}{\vdash (\lambda x^{\tau\to\rho}\lambda y^{\sigma\to\tau}\lambda z^{\sigma}.\,x(yz))^{(\tau\to\rho)\to(\sigma\to\tau)\to\sigma\to\rho}}\ (\mathrm{Abs})$$

Zauważmy, że term $\lambda x^{\tau\to\rho}\lambda y^{\sigma\to\tau}\lambda z^{\sigma}.x(yz)$ odpowiada operacji złożenia funkcji.

Uwaga 2. Widzimy, że wyprowadzanie typu odpowiada w gruncie rzeczy konstrukcji λ-termu. Ponieważ każde wyprowadzenie musi być skończone, typowalne są tylko pseudotermy skończonej długości.

Przykład 3. Nie wszystkie pseudotermy są typowalne w rachunku λ z typami prostymi. Istotnie, przypuśćmy że $\omega = (\lambda x^{\sigma\to\sigma}.\,xx)$ jest typowalny. Wówczas dla kontekstu Γ mamy $x^{\sigma\to\sigma} \in \Gamma$. Ponieważ ω zawiera w sobie podterm (xx), to w wyprowadzeniu musiał on zostać otrzymany przez zastosowanie reguły (App). Wówczas $x^{\sigma} \in \Gamma$ i $x^{\sigma\to\sigma} \in \Gamma$, co nie jest możliwe, bo Γ musiałby nie być prawidłowo określonym kontekstem.

Przykład 3 wskazuje, że rachunek λ z typami prostymi nie ma wystarczających środków wyrazu, aby definiować w nim funkcje rekurencyjne. W rachunku λ bez typów definicje takie są osiągane za pomocą *kombinatorów punktu stałego*, które w rachunku λ z typami prostymi nie są typowalne właśnie ze względu na fakt, że nie jest możliwe wyprowadzenie typu dla aplikacji termu do samego siebie.

1.4 Redukcja

Definicja 11. (Zgodność)
Relację R na zbiorze pseudotermów $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathrm{T}}$ nazywamy *zgodną*, jeśli dla M, N, $Z \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathrm{T}}$ spełnia ona następujące warunki:

i) Jeśli $M\mathrm{R}N$, to $(\lambda x^{\sigma}.\, M)\,\mathrm{R}\,(\lambda x^{\sigma}.\, N)$ dla dowolnych $x \in \mathrm{V}$ i $\sigma \in \mathbf{T}_{\rightarrow}$.

ii) Jeśli $M\mathrm{R}N$, to $(MZ)\,\mathrm{R}\,(NZ)$.

iii) Jeśli $M\mathrm{R}N$, to $(ZM)\,\mathrm{R}\,(ZN)$.

Przy powyższych ustaleniach *kongruencją* będziemy nazywali każdą zgodną relację równowazności na $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathrm{T}}$, zaś *redukcją* – każdą zgodną, zwrotną i przechodnią relację na $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathrm{T}}$.

Definicja 12. (β-redukcja)
β-redukcją nazywamy najmniejsza w sensie mnogościowym *zgodną* relację binarną $\longrightarrow_{\beta}$ określoną zbiorze na pseudotermów $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathrm{T}}$ za pomocą podstawienia

$$(\lambda x^{\sigma}.\, P)Q \longrightarrow_{\beta} P[x/Q].$$

β-redeksami bedziemy nazywali wyrażenia postaci $(\lambda x^{\sigma}.\, M)N$, zaś rezultat ich β-redukcji w postaci termu $M[x/N]$ – *β-reduktem.*

Nadużywając notacji, z każdym β-redeksem Δ postaci $(\lambda x^{\tau}.\, P^{\rho})R$ będziemy wiązali jego *stopień* i pisali $\delta((\lambda x^{\tau}.\, P^{\rho})R) = \delta(\tau \rightarrow \rho)$, gdzie występująca po prawej stronie równości δ jest określona w myśl Definicji 2. Dysponując tą konwencją możemy określić pojęcie stopnia dowolnego λ-termu.

Definicja 13. (stopień λ-termu)
Stopniem $\mathrm{d}(M)$ λ-termu M nazywamy supremum zbioru stopni β-redeksów, które są zawarte w M, czyli

$$\mathrm{d}(M) = \sup\{\delta(N) \mid N \text{ jest } \beta\text{-redeksem w } M\}.$$

Uwaga. Z każdym β-redeksem Δ związane są więc dwa rodzaje stopni: stopień $\mathrm{d}(\Delta)$ jako λ-termu w myśl Defnicji 13 i stopień β-redeksu $\delta(\Delta)$.

Określamy następujące relacje:

B1. $\longrightarrow_\beta^+$ jest przechodnim domknięciem relacji $\longrightarrow_\beta$ w zbiorze pseudotermów $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathrm{T}}$.

B2. $\longrightarrow_\beta^*$ jest domknięciem przechodnio-zwrotnim w $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathrm{T}}$ relacji $\longrightarrow_\beta$ (jest *redukcją*).

B3. $=_\beta$ jest najmniejszą relację równowazności zawierającą relację $\longrightarrow_\beta$ (jest *kongruencją*).

Definicja 14. (Postać normalna)
Powiemy, że λ-term M jest w *postaci normalnej*, jeśli żadna z jego podformuł nie jest β-redeksem. Przez NF_β będziemy oznaczali zbiór wszystkich λ-termów w postaci normalnej.

Definicję postaci normalnej można ująć w alternatywny sposób w postaci Faktu 10.

Fakt 10. M ma postać normalną*, jeśli* $M =_\beta N$ *dla pewnego* N*, który jest w postaci normalnej.*

Uwaga. Fakt, że $=_\beta$ jest relacją równoważności może rodzić pokusę, aby utożsamić ze sobą wszystkie postacie normalne danego λ-termu. Z Twierdzenia 3 wynika jednak, że jest to zupełnie zbędne, bowiem o ile tylko λ-term jest normalizowalny, to wiemy, że posiada dokładnie jedną postać normalną i każde takie utożsamienie byłoby trywialne.

Definicja 15. (η-redukcja)
η-redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) *zgodną* relację w $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{T}}$ taką, że

$$\lambda x^\sigma.\, Mx \longrightarrow_\eta M,$$

o ile $x \notin \mathrm{FV}(M)$.

Zdefiniowane powyżej β- i η-redukcje zachowują typ, jak stwierdza Fakt 11. Własność ta pozwala sensownie mówić o redukcji λ-termów.

Fakt 11. *(o poprawności redukcji) Jeśli* $\Gamma \vdash M^\sigma$ *i* $M \longrightarrow_{\beta\eta}^* N$*, to* $\Gamma \vdash N^\sigma$*.*

Dowód. [BDS13, tw. 1B.14].

1.5 Normalizacja

Powiemy, że λ-term M ma własność:

- *(słabej) normalizacji* (symbolicznie: $M \in \mathrm{WN}_\beta$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg β-redukcji rozpoczynający się od M i kończący się termem w postaci normalnej N.
- *silnej normalizacji* (symbolicznie: $M \in \mathrm{SN}_\beta$), jeśli wszystkie ciągi β-redukcji rozpoczynające się od M są skończone.

Uwaga. Z powyższego określenia widzimy, że własność SN_β pociąga za sobą własność WN_β.

Definicja 16. (Strategia redukcji)
Strategią redukcji nazywamy odwzorowanie $F : \mathbf{\Lambda}_\mathrm{T} \longrightarrow \mathbf{\Lambda}_\mathrm{T}$ takie, że $F(M) = M$, gdy M jest w postaci normalnej i $M \longrightarrow_\beta F(M)$ w przeciwnym wypadku. Mówimy, że strategia F jest *normalizująca*, jeśli dla każdego $M \in \mathrm{WN}_\beta$ istnieje $i \in \mathbb{N}$ takie, że $F^i(M)$ jest w postaci normalnej.

Z puktu widzenia praktyki obliczeniowej istotny jest podział strategi redukcji ze względu na kolejność w jakiej redukowane będą podwyrażenia λ-termów. Wyróżniamy:

- strategie ścisłe (ang. *strict*), w których każdy λ-term przed aplikacją jest redukowany do postaci normalnej,
- strategie nieścisłe (ang. *non-strict*), w których dopuszcza się aplikowanie λ-termów, które można dalej zredukować.

Przykład 4. Niech $\mathrm{K} = \lambda xy.\, x$, $\mathrm{I} = \lambda x.\, x$, $0 = \lambda xy.\, y$. Rozważmy następujące ciągi redukcji:

(a) Redukcja strategią scisłą:

$$\begin{aligned}&\mathrm{KI}((\lambda mnxy.\, mx(nxy))00) \longrightarrow_\beta \mathrm{KI}((\lambda nxy.\, 0x(nxy))0) \longrightarrow_\beta \\ &\longrightarrow_\beta \mathrm{KI}((\lambda xy.\, 0x(0xy))) \longrightarrow_\beta \mathrm{KI}((\lambda xy.\, 0xy)) \longrightarrow_\beta \mathrm{KI0}) \longrightarrow_\beta \mathrm{I}\end{aligned}$$

(b) Redukcja strategią nieścisłą:

$$\mathrm{KI}((\lambda mnxy.\, mx(nxy))00) \longrightarrow_\beta \mathrm{I}$$

Twierdzenie 1. *(*Własność WN_β*) Wszystkie λ-termy mają postać normalną.*

Dowód. Pokażemy, że dla dowolnego λ-termu M istnieje normalizująca strategia redukcji.

Oznaczmy przez $\mathrm{R}_\beta(M)$ zbiór β-redeksów znajdujących się w M. Jeśli $M \in \mathrm{NF}_\beta$, to $\mathrm{R}_\beta(M) = \varnothing$ i twierdzenie zachodzi w sposób trywialny. Jeśli $M \notin \mathrm{NF}_\beta$, to istnieje w M przynajmniej jeden β-redeks. Z Uwagi 2 M jest skończonej długości, więc $\mathrm{R}_\beta(M)$ jest skończony. Możemy więc wybrać z M β-redeks znajdujący się (rozpoczynający się) w M najbardziej na prawo. Oznaczmy taki β-redeks przez Δ.

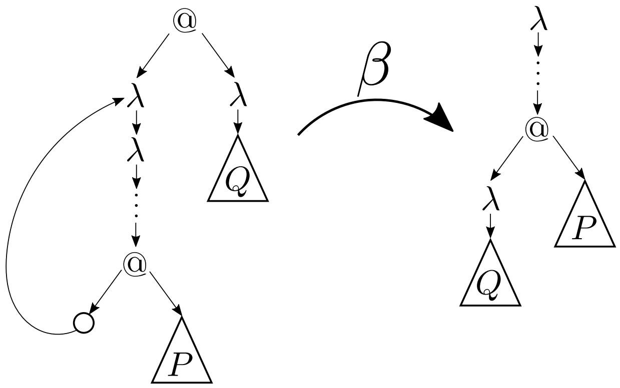
Niech δ_M będzie stopniem M (Definicja 13). Ponieważ wiele redeksów w M może mieć ten sam stopień δ_M, przez n_M oznaczmy liczbę wystąpień redeksów stopnia δ_M w M.

Niech F będzie strategią redukcji polegającą na β-redukowaniu redeksu Δ wybranego jak wyżej i niech $M' = F(M)$. Zauważmy, że $n_M < n_{M'}$, gdyż strategia F eliminuje Δ z M' i może prowadzić do powstania redeksów tylko mniejszego stopnia. Istotnie, ilość redeksów w M może zwiększyć się na skutek β-redukcji tylko w jeden z poniższych sposobów:

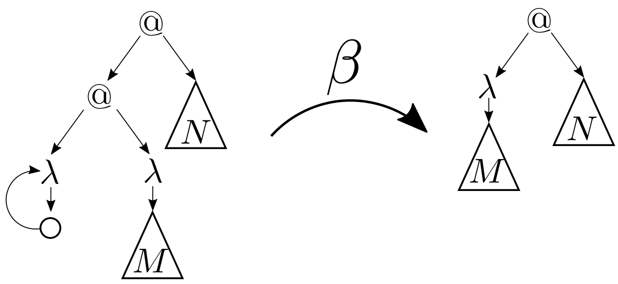
i) powstanie nie występujących wcześniej redeksów.

ii) powielenie już istniejących redeksów.

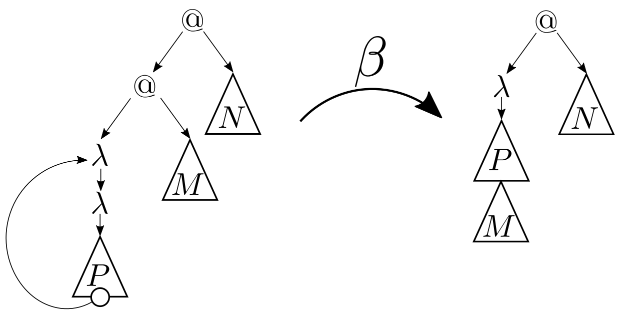
W przypadku i)



(a) Redukcja $(\lambda x^{\rho\to\mu}\overbrace{\ldots\ .xP^{\rho}\ldots}^{M^{\tau}})(\lambda y^{\rho}.\,Q^{\mu})^{\rho\to\mu}$ do nowego redeksu $(\underbrace{\ldots\ .(\lambda y^{\rho}.\,Q^{\mu})P^{\rho}\ldots}_{M[x/Q]^{\tau}})$.



(b) Redukcja $(\lambda x^{\tau} \lambda y^{\rho}.\, P^{\sigma}) M^{\tau} N^{\rho}$ do nowego redeksu postaci $(\lambda y^{\rho}.\, P[x/M]^{\sigma}) N^{\rho}$.



(c) Redukcja $(\lambda x^{\tau \to \rho}.\, x)(\lambda y^{\tau}.\, M^{\rho}) N^{\tau}$ do nowego redeksu $(\lambda y^{\tau}.\, M^{\rho}) N^{\tau}$.

Rysunek 2: Grafy odpowiadające wszystkim możliwościom w których powstają nowe β-redeksy

Twierdzenie 1 można istotnie wzmocnić. Okazuje się, że biorąc dowolny λ-term możemy mieć nie tylko pewność, że można go zredukować do postaci normalnej, ale że obierając dowolną strategię redukcja zakończy się po skończonej liczbie kroków.

Twierdzenie 2. *(*Własność SN_β*) Wszystkie λ-termy mają własność silnej normalizacji.*

Dowód. [SU06, tw. 3.5.5].

Twierdzenie 3. *(Własność Churcha-Russera)*

CR1. Niech M, N_1, $N_2 \in \mathbf{\Lambda}_T^\Gamma$. Wówczas jeśli $M \longrightarrow^*_{\beta\eta} N_1$ i $M \longrightarrow^*_{\beta\eta} N_2$, to istnieje $Q \in \mathbf{\Lambda}_T^\Gamma$ takie, że $N_1 \longrightarrow^*_{\beta\eta} Q$ i $N_2 \longrightarrow^*_{\beta\eta} Q$.

CR2. Niech M, $N \in \mathbf{\Lambda}_T^\Gamma$. Wówczas jeśli $M =_{\beta\eta} N$, to istnieje $Q \in \mathbf{\Lambda}_T^\Gamma$ takie, że $M \longrightarrow^*_{\beta\eta} Q$ i $N \longrightarrow^*_{\beta\eta} Q$.

Dowód. [SU06, p. 3.6.3]

Poprawność redukcji (Fakt 11), własność silnej normalizacji (Twierdzenie 2) i własność Churcha-Russera (Twierdzenie 3) razem oznaczają, że każda strategia redukcji jest normalizująca, zaś konsekwentne redukowane λ-termu prowadzi zawsze do tej samej postaci normalnej.

Literatura

[Bar91] Henk Barendregt. "Introduction to generalized type systems". In: *Journal of Functional Programming* 1.2 (1991), pp. 125–154. DOI: 10.1017/S0956796800020025.

[BDS13] Henk Barendregt, Wil Dekkers, and Richard Statman. *Lambda Calculus with Types*. Perspectives in Logic. Cambridge University Press, 2013. DOI: 10.1017/CBO9781139032636.

[HS08] J. Roger Hindley and Jonathan P. Seldin. *Lambda-Calculus and Combinators: An Introduction*. 2nd ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2008. ISBN: 0521898854, 9780521898850.

[SU06] Morten Heine Sørensen and Pawel Urzyczyn. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, Volume 149 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics)*. New York, NY, USA: Elsevier Science Inc., 2006. ISBN: 0444520775.