1 Rachunek λ z typami prostymi

1.1 Typy proste

Niech U będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych $p,\ q,\ \ldots$ (być może indeksowanych liczbami naturalnymi), które będziemy nazywali *zmiennymi typowymi.*

Definicja 1. (Typy proste)
Typami prostymi będziemy określali najmniejszy w sensie mnogościowym zbiór wyrażeń taki, że:

T1. Jeśli p jest zmienną typową, to p jest typem prostym.

T2. Jeśli τ i σ są typami prostymi, to $(\tau \to \sigma)$ jest typem prostym.

Typy proste zbudowane tylko wedle reguły T1 nazywamy typami *atomowymi*, zaś wyrażenia zbudowe wedle reguły T2 – typami *funkcyjnymi.* Zbiór typów prostych określony w myśl powyższej definicji będziemy oznaczali przez $\mathbf{T}_{\to}$.

Późniejsze litery alfabetu greckiego, tj. σ, τ, ρ, ... będą służyły nam za zmienne metasyntaktyczne do oznaczania typów prostych. Dla lepszej czytelności będziemy pomijali najbardziej zewnętrzne nawiasy. Konstruktor typu $\to$ jest prawostronnie łączny, co oznacza, że typy $\tau \to \sigma \to \theta$ oraz $\tau \to (\sigma \to \theta)$ będziemy uznawali za tożsame.

Typy proste ujęte Definicją 1 mają strukturę drzewa binarnego. Wysokość takiego drzewa będziemy nazywali *stopniem* typu. Precyzyjnie ujmuje to pojęcie poniższa definicja.

Definicja 2. (Stopień typu)
Stopniem typu nazywamy funkcję

$$\begin{aligned} \delta(p) &= 0, \text{ gdzie } p \text{ jest typem atomowym,} \\ \delta(\tau \to \sigma) &= 1 + \max\left(\delta(\tau),\ \delta(\sigma)\right). \end{aligned}$$

1.2 Pseudotermy

Niech V będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych $x,\ y,\ \ldots$ (indeksowanych być może liczbami naturalnymi). Elementy takiego zbioru będziemy nazywali λ-*zmiennymi.*

Definicja 3. (Pseudo-pretermy)
Pseudo-pretermami będziemy nazywali najmniejszy (w sensie mnogościowym) zbiór $\mathbf{\Lambda}^{-}_{\mathrm{T}}$ taki, że:

P1. Jeśli $x \in \mathrm{V}$, to $x \in \mathbf{\Lambda}^{-}_{\mathrm{T}}$.

P2. Jeśli $M \in \mathbf{\Lambda}^{-}_{\mathrm{T}}$ i $N \in \mathbf{\Lambda}^{-}_{\mathrm{T}}$, to $(MN) \in \mathbf{\Lambda}^{-}_{\mathrm{T}}$.

P3. Dla dowolnych $x \in \mathrm{V}$, $\sigma \in \mathbf{T}_{\to}$, $M \in \mathbf{\Lambda}^{-}_{\mathrm{T}}$ mamy, że $(\lambda x^{\sigma}.\, M) \in \mathbf{\Lambda}^{-}_{\mathrm{T}}$.

Wyrażenia postaci P2 nazywamy *aplikacjami* M do N, zaś wyrażenia postaci P3 – λ-abstrakcjami, gdzie o wszystkich podtermach termu M mówi się, że są w *zasięgu* λ-abstraktora, zaś o λ-zmiennej x mówi się, że jest *związana.*

Za zmienne metasyntaktyczne obieramy duże litery alfabetu łacińskiego M, N, ... Podobnie jak w podrozdziale 1.1 stosujemy konwencję o opuszczaniu najbardziej zewnętrznych nawiasów. Aplikacja termów jest łączna lewostronnie, co oznacza, że będziemy utożsamiali wyrażenia MNP oraz $(MN)P$.

Definicja 4. (Zmienne wolne)

Dla pseudo-pretermu M określamy zbiór *termów wolnych* FV w nastepujący sposób:

$$\begin{aligned} \mathrm{FV}(x) &= \{x\} \\ \mathrm{FV}(\lambda x^{\sigma}.\, P) &= \mathrm{FV}(P) \setminus \{x\} \\ \mathrm{FV}(PQ) &= \mathrm{FV}(P) \cup \mathrm{FV}(Q) \end{aligned}$$

Jesli $\mathrm{FV}(M) = \varnothing$, to mówimy, że M jest *zamknięty.*

Definicja 5. (Podstawienie)

Podstawieniem $[x/N]$ pseudo-pretermu N za λ-zmienną x w M nazwamy zdefiniowane następująco przekształcenie:

$$\begin{aligned} x[x/N] &= N, && \\ y[x/N] &= y, && \text{o ile } x \neq y, \\ (PQ)[x/N] &= P[x/N]\, Q[x/N], && \\ (\lambda y^{\sigma}.\, P)[x/N] &= \lambda y^{\sigma}.\, P[x/N], && \text{gdzie } x \neq y \text{ i } y \notin \mathrm{FV}(N). \end{aligned}$$

Zachodzą następujące fakty:

Fakt 1. *(a) Jeśli $x \notin \mathrm{FV}(M)$, to $M[x/N]$ jest poprawnym podstawieniem i $M[x/N] = M$.*

(b) Jeśli $M[x/N]$ jest poprawnym podstawieniem, to $y \in \mathrm{FV}(M[x/N]$ wtw, gdy albo $y \in \mathrm{FV}(M)$ i $x \neq y$, albo $y \in \mathrm{FV}(N)$ i $x \in \mathrm{FV}(M)$.

(c) Podstawienie $M[x/x]$ jest poprawne i $M[x/x] = M$.

(d) *Jeśli $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem, to $M[x/y]$ ma tę samą długość, co M.*

Fakt 2. *Powiedzmy, że $M[x/N]$ jest poprawnym podstawieniem i $N[y/L]$ i $M[x/N][y/L]$ są poprawnymi podstawieniami, gdzie $x \neq y$. Jeśli $x \notin \mathrm{FV}(L)$ lub $y \notin \mathrm{FV}(M)$, to $M[y/L]$ i $M[y/L][x/N[y/L]]$ jest poprawnym podstawieniem oraz*

$$M[x/N][y/L] = M[y/L][x/N[y/L]].$$

Fakt 3. *Jesli $M[x/y]$ jest poprawnym postawieniem i $y \notin \mathrm{FV}(M)$, to $M[x/y][y/x]$ jest poprawnym podstawieniem oraz $M[x/y][y/x] = M$.*

Definicja 6. (α-konwersja)
α-konwersją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zwrotną i przechodnią relację binarną $=_\alpha$ określoną na zbiorze pseudotermów $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{T}}^{-}$ spełniającą poniższe warunki:

(a) Jeśli $y \notin \mathrm{FV}(M)$ i $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem, to $\lambda x.\, M =_\alpha \lambda y.\, M[x/y]$.

(b) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla każdej λ-zmiennej x mamy $\lambda x.\, M =_\alpha \lambda x.\, N$.

(c) Jeśli $M =_\alpha N$, to $MZ =_\alpha NZ$.

(d) Jeśli $M =_\alpha N$, to $ZM =_\alpha ZN$.

Bez dowodu podajemy następujące twierdzenia:

Fakt 4. *Relacja $=_\alpha$ jest symetryczna.*

Fakt 5. *$=_\alpha$ jest relacją równoważności.*

Fakt 6. *Jeśli $M =_\alpha N$, to $\mathrm{FV}(M) = \mathrm{FV}(N)$.*

Dysponując powyższymi rozstrzygnięciami otrzymujemy wygodne utożsamienie pseudo-pretermów, które różnią się między sobą tylko zmiennymi związanymi.

Definicja 7. (Pseudotermy)
Klasy abstrakcji relacji α-konwersji nazywamy *pseudotermami*. Zbiór wszystkich pseudotermów oznaczamy następująco:

$$\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{T}} = \{[M]_\alpha \mid M \in \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{T}}^{-}\}$$

Nadużywając notacji będziemy odnosili się do pseudotermów tylko przez ich reprezentantów.

1.3 Typowalność

Definicja 8. (Kontekst)
Kontekstem nazywamy skończoną funkcję częściową $\Gamma : \mathrm{V} \longrightarrow \mathbf{T}_{\to}$, czyli zbiór par postaci $\Gamma = \{x_1^{\tau_1}, \dots, x_n^{\tau_n}\}$, gdzie $(x_i^{\tau_i}) = (x_i, \tau_i)$ oraz $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$. Zbiór

$$\mathrm{dom}(\Gamma) = \{x \in \mathrm{V} \mid \exists \tau (x^{\tau} \in \Gamma)\}$$

nazywamy *dziedziną* kontekstu Γ, zaś

$$\mathrm{rg}(\Gamma) = \{\tau \in \mathbf{T}_{\to} \mid \exists x (x^{\tau} \in \Gamma)\}$$

– *zakresem* kontekstu Γ. Piszemy:

- $x_1^{\tau_1}, x_2^{\tau_2}$ zamiast $\{x_1^{\tau_1}, x_2^{\tau_2}\}$, o ile $x_1^{\tau_1}$ i $x_2^{\tau_2}$ są różne,
- Γ, x^{φ} zamiast $\Gamma \cup \{x^{\varphi}\}$, o ile $x^{\varphi} \notin \Gamma$,
- Γ, Δ zamiast $\Gamma \cup \Delta$, o ile $\Gamma \cap \Delta = \varnothing$.

Okreslimy teraz system przypisywania typów do pseudotermów w stylu dedukcji naturalnej. *Sekwentami* w tym systemie będziemy nazywali wyrażenia postaci $\Gamma \vdash M^{\sigma}$, gdzie $M \in \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{T}}$, $\sigma \in \mathbf{T}_{\to}$, zaś Γ jest pewnym kontekstem.

Wprowadzamy następujące reguły dowodzenia:

$$\frac{}{\Gamma, x^{\tau} \vdash x^{\tau}}\ (\mathrm{Var}), \qquad \frac{\Gamma, x^{\varphi} \vdash M^{\psi}}{\Gamma \vdash (\lambda x^{\varphi}.\, M)^{\varphi \to \psi}}\ (\mathrm{Abs}), \qquad \frac{\Gamma \vdash M^{\varphi \to \psi} \qquad \Gamma \vdash N^{\varphi}}{\Gamma \vdash (MN)^{\psi}}\ (\mathrm{App}).$$

Definicja 9. (Typowalność)
Mówimy, że pseudoterm M jest typu σ w kontekście Γ (jest *typowalny*), jeśli istnieje skończone drzewo sekwentów spełniające poniższe warunki:

1. W korzeniu drzewa znajduje się sekwent $\Gamma \vdash M^{\sigma}$.
2. Liście są *aksjomatami*, tj. sekwentami postaci $\Gamma, x^{\sigma} \vdash x^{\sigma}$.
3. Każdego rodzica można otrzymać z jego dzieci przez zastosowanie którejś z reguł wyprowadzania nowych sekwentów.

Tak określone drzewo będziemy nazywali *wyprowadzeniem* typu.

Definicja 10. (λ-termy)
Wszystkie typowalne pseudotermy w pewnym kontekście Γ nazywamy λ-*termami* (z typami prostymi w kontekście Γ).

Uwaga. λ-term w kontekście Γ_1 może nie być typowalny w innym kontekście Γ_2.

Mówiąc o λ-termach i nie podając żadnego związanego z nimi kontekstu Γ będziemy implicite zakładali, że istnieje pewien kontekst w którym są one typowalne. Zakładamy również, że ustalone są typy dla wszystkich λ-zmiennych. Typ dowolnego λ-termu będziemy w ramach konwencji notowali używając górnego indeksu. Dla przykładu, λ-term $(M^{\sigma\to\tau}N^{\sigma})^{\tau}$ jest w pewnym kontekście Γ typu τ.

Fakt 7. *Jesli* $\Gamma \vdash M^{\sigma}$ *oraz* $\Gamma \vdash M^{\tau}$*, to* $\sigma = \tau$.

1.4 Redukcja

Definicja 11. (Zgodność)
Relację R na zbiorze termów $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{T}}$ nazywamy *zgodną*, jeśli dla M, N, $Z \in \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{T}}$ spełnia ona następujące warunki:

i) Jeśli $M\mathrm{R}N$, to $(\lambda x^{\sigma}.\,M)\,\mathrm{R}\,(\lambda x^{\sigma}.\,N)$ dla dowolnych $x \in \mathrm{V}$ i $\sigma \in \mathbf{T}_{\to}$.

ii) Jeśli $M\mathrm{R}N$, to $(MZ)\,\mathrm{R}\,(NZ)$.

iii) Jeśli $M\mathrm{R}N$, to $(ZM)\,\mathrm{R}\,(ZN)$.

Przy powyższych ustaleniach *kongruencją* będziemy nazywali każdą zgodną relację równowazności na $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{T}}$, zaś *redukcją* – każdą zgodną, zwrotną i przechodnią relację na $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{T}}$.

Definicja 12. (β-redukcja)
β-redukcją nazywamy najmniejsza w sensie mnogościowym *zgodną* relację binarną $\longrightarrow_{\beta}$ określoną zbiorze na pseudotermów $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{T}}$ za pomocą podstawienia

$$(\lambda x^{\sigma}.\,P)Q \longrightarrow_{\beta} P[x/Q].$$

β-redeksami bedziemy nazywali wyrażenia postaci $(\lambda x^{\sigma}.\,M)N$, zaś rezultat ich β-redukcji w postaci termu $M[x/N]$ – *β-reduktem.*

Definicja 13. (stopień λ-termu)
Niech M będzie dowolnym λ-termem. *Stopniem* M nazywamy funkcję

$$\delta\left((\lambda x^{\tau}.\,P^{\rho})Q^{\tau}\right) = \delta(\tau \to \rho), \quad \text{gdy } M = (\lambda x^{\tau}.\,P^{\rho})Q^{\tau} \text{ jest } \beta\text{-redeksem},$$
$$\delta(M) = \sup\{\delta(N) \mid N \text{ jest } \beta\text{-redeksem w } M\},$$

gdzie δ występująca po prawej stronie równości określona jest w myśl Definicji 2.

Określamy następujące relacje:

B1. $\longrightarrow_{\beta}^{+}$ jest przechodnim domknięciem relacji $\longrightarrow_{\beta}$ w zbiorze pseudotermów $\mathbf{\Lambda}_{\mathrm{T}}$.

B2. $\longrightarrow_\beta^*$ jest domknięciem przechodnio-zwrotnim w $\mathbf{\Lambda}_\mathrm{T}$ relacji $\longrightarrow_\beta$, a zatem jest *redukcją*.

B3. $=_\beta$ jest najmniejszą relację równowazności zawierającą relację $\longrightarrow_\beta$, (czyli *kongruencją*).

Definicja 14. (Postać normalna)
Powiemy, że λ-term M jest w *postaci normalnej*, jeśli żadna z jego podformuł nie jest β-redeksem. Przez NF_β będziemy oznaczali zbiór wszystkich λ-termów w postaci normalnej.

Zachodzą następujące fakty:

Fakt 8. M ma postać normalną*, jeśli $M =_\beta N$ dla pewnego N, który jest w postaci normalnej.*

Fakt 9. *Jeśli* $\Gamma \vdash M^\sigma$ *i* $M \longrightarrow_\beta^* N$*, to* $\Gamma \vdash N^\sigma$*.*

Definicja 15. (η-redukcja)
η-redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) *zgodną* relację w $\mathbf{\Lambda}_\mathrm{T}$ taką, że

$$\lambda x^\sigma . Mx \longrightarrow_\eta M,$$

o ile $x \notin \mathrm{FV}(M)$.

Fakt 10. *Jeśli* $\Gamma \vdash M^\sigma$ *i* $M \longrightarrow_\eta^* N$*, to* $\Gamma \vdash N^\sigma$*.*

1.5 Normalizacja

Powiemy, że λ-term M ma własność:
- *(słabej) normalizacji* (symbolicznie: $M \in \mathrm{WN}_\beta$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg β-redukcji rozpoczynający się od M i kończący się termem w postaci normalnej N.
- *silnej normalizacji* (symbolicznie: $M \in \mathrm{SN}_\beta$), jeśli wszystkie ciągi β-redukcji rozpoczynające się od M są skończone.

Z powyższego określenia widzimy, że własność SN_β pociąga za sobą własność WN_β.

Definicja 16. (Strategia redukcji)
Strategią redukcji nazywamy odwzorowanie $F : \mathbf{\Lambda}_\mathrm{T} \longrightarrow \mathbf{\Lambda}_\mathrm{T}$ takie, że $F(M) = M$, gdy M jest w postaci normalnej i $M \to_\beta F(M)$ w przeciwnym wypadku. Mówimy, że strategia F jest *normalizująca*, jeśli dla każdego $M \in \mathrm{WN}_\beta$ istnieje $i \in \mathbb{N}$ takie, że $F^i(M)$ jest w postaci normalnej.

Twierdzenie 1. *(*Własność WN_β*) Wszystkie λ-termy mają postać normalną.*

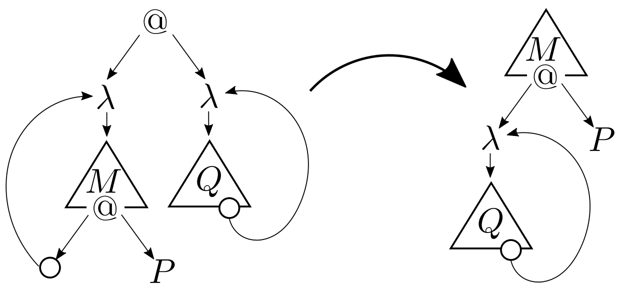
Dowód. Pokażemy, że dla dowolnego λ-termu M istnieje normalizująca strategia redukcji.

Przypuśćmy, że M nie jest w postaci normalnej. Oznaczmy przez δ_M maksymalny stopień redeksów występujących w M. Ponieważ wiele redeksów w M może mieć ten sam stopień δ_M, przez n_M oznaczmy liczbę wystąpień redeksów stopnia δ_M w M.

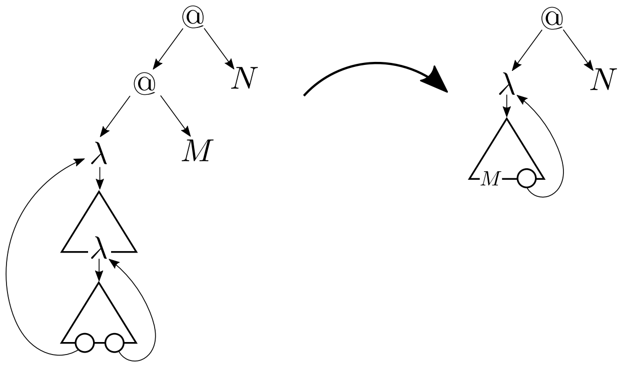
Niech Δ będzie β-redeksem stopnia δ_M położonym w M najbardziej na prawo i niech M' będzie β-reduktem otrzymanym przez zredukowanie Δ. Zauważmy, że $n_M < n_{M'}$, gdyż Δ nie wystepuje już w M', zaś β-redukcja Δ może prowadzić do powstania redeksów tylko mniejszego stopnia. Istotnie, ilość redeksów w M może zwiększyć się tylko na jeden z poniższych sposobów:

i) powstanie nie występujących wcześniej redeksów.

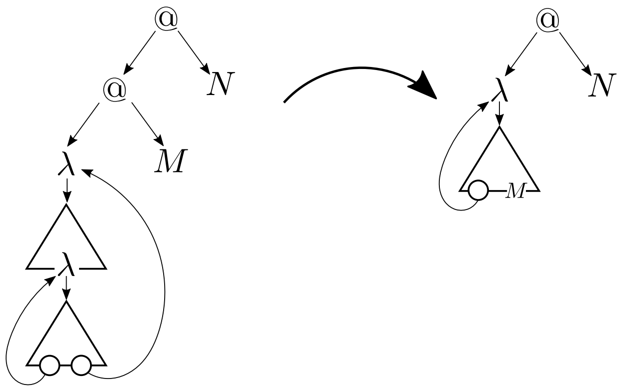
ii) powielenie już istniejących redeksów.



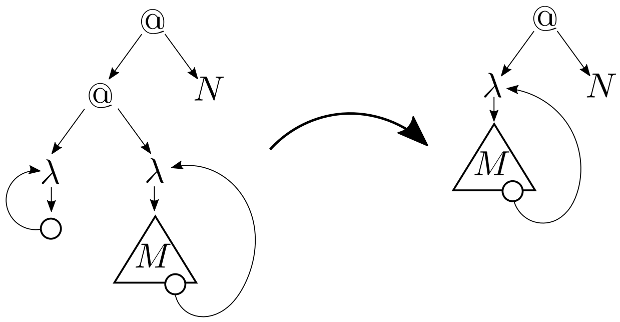
(a) Redukcja $(\lambda x^{\rho\to\mu}.\overbrace{\dots xP^{\rho}\dots}^{M^{\tau}})(\lambda y^{\rho}.\overbrace{\dots y\dots}^{Q^{\mu}})^{\rho\to\mu}$ do nowego redeksu $(\lambda y^{\rho}.\underbrace{\dots y\dots}_{Q^{\mu}})P^{\rho}$.



(b) Redukcja $(\lambda x^\tau y^\rho. \ldots x \ldots y \ldots)M^\tau Q^\rho$ do nowego redeksu postaci $(\lambda y^\rho. \ldots M^\tau \ldots y \ldots)Q^\rho$.



(c) Redukcja $(\lambda x^\tau y^\rho. \ldots y \ldots x \ldots)M^\tau Q^\rho$ do nowego redeksu postaci $(\lambda y^\rho. \ldots y \ldots M^\tau \ldots)Q^\rho$.



(d) Redukcja $(\lambda x^{\rho\to\mu}.\,x)(\lambda y^{\rho}.\,\overbrace{\ldots y\ldots}^{M^{\rho\to\mu}})N^{\rho}$ do nowego redeksu $(\lambda y^{\rho}.\,\underbrace{\ldots y\ldots}_{M^{\mu}})N^{\rho}$.

Rysunek 1: test

Powtarzając otrzymujemy więc λ-term w postaci normalnej. $\square$

Twierdzenie 2. *(*Własność SN_β*) Wszystkie λ-termy mają własność silnej normalizacji.*

- WCR: $\forall a, b, c \in A\,(a \longrightarrow b \wedge a \longrightarrow c) \to \exists d \in A\,(b \longrightarrow^{*} d \wedge c \longrightarrow^{*} d)$
- CR: $\forall a, b, c \in A\,(a \longrightarrow^{*} b \wedge a \longrightarrow^{*} c) \to \exists d \in A\,(b \longrightarrow^{*} d \wedge c \longrightarrow^{*} d)$

Twierdzenie 3. (Lemat Newmana) *Niech $\to$ bedzie relacją binarną spełniającą SN. Jeśli $\to$ spełnia WCR, to spełnia CR.*

Dowód.

Twierdzenie 4. *(*Własność SN_β*) Każdy λ-term w stylu Churcha własność silnej normalizacji.*

Dowód.