1 Rachunek λ z typami prostymi

1.1 Typy proste

Niech U będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych p, q, ... (być może indeksowanych liczbami naturalnymi), które będziemy nazywali *zmiennymi typowymi*.

Definicja 1. (Typy proste) *Typami prostymi* będziemy określali najmniejszy w sensie mnogościowym zbiór wyrażeń taki, że:

(S1) Jeśli p jest zmienną typową, to p jest typem prostym.

(S2) Jeśli σ i τ są typami prostymi, to $(\sigma \to \tau)$ jest typem prostym.

Typy proste zbudowane tylko wedle reguły (S1) nazywamy typami *atomowymi*, zaś wyrażenia zbudowe wedle reguły (S2) – typami *funkcyjnymi*. Zbiór typów prostych określony w myśl powyższej definicji będziemy oznaczali przez $\mathbb{T}$. Definicję 1 można równoznacznie wyrazić przy pomocy notacji Backusa-Naura. Wówczas ma ona następującą, zwięzłą postać:

$$\mathbb{T} \; \leftarrow \; U \mid (\mathbb{T} \to \mathbb{T})$$

Późniejsze litery alfabetu greckiego (σ, τ, ρ, ...), być może z indeksami, będą służyły nam za zmienne metasyntaktyczne do oznaczania typów prostych. Dla lepszej czytelności będziemy pomijali najbardziej zewnętrzne nawiasy. Konstruktor typu $\to$ wiąże prawostronnie; oznacza to, że typy $\sigma \to \tau \to \rho$ oraz $\sigma \to (\tau \to \rho)$ będziemy uznawali za tożsame.

Zauważmy, że obiekty skonstruowane w myśl Definicji 1 mają strukturę drzewa binarnego. Wysokość takiego drzewa będziemy nazywali *stopniem* typu.

Definicja 2. (Stopień typu) Stopniem typu nazywamy następująco określoną funkcję $\delta : \mathbb{T} \to \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \delta(p) &= 0, \text{ gdzie } p \text{ jest typem atomowym,} \\ \delta(\sigma \to \sigma) &= 1 + \max\left(\delta(\sigma),\ \delta(\sigma)\right). \end{aligned}$$

Definicja 3. (Stwierdzenie, deklaracja, kontekst, sąd)

(1) *Stwierdzeniem* (ang. *statement*) nazywamy każdy napis postaci $M : \sigma$, gdzie $M \in \mathbf{\Lambda}$ i $\sigma \in \mathbb{T}$. W stwierdzeniu $M : \sigma$ λ-term M nazwamy *podmiotem* (ang. *subject*), zaś σ – *predykatem*.

(2) *Deklaracją* (ang. *declaration*) nazywamy każde stwierdzenie w którym podmot jest zmienną termową.

(3) *Kontekstem* (ang. *context*) nazywamy skończony liniowo uporządkowany zbiór (*listę*) deklaracji, w którym wszystkie podmioty są wzajemnie różne.

(4) *Sądem* (ang. *judgement*) nazywamy kazdy napis postaci $\Gamma \vdash M : \sigma$, gdzie Γ jest kontekstem, zaś $M : \sigma$ – stwierdzeniem.

Definicja 4. (1) Jeśli $\Gamma = (x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n)$, to liniowo uporządkowany zbiór $\mathrm{dom}\Gamma = (x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy *dziedziną* kontekstu Γ.

(2) Kontekst Γ' nazywamy *podkontekstem* Γ i piszemy $\Gamma' \subseteq \Gamma$, jeśli wszystkie deklaracje występujące w Γ występują również w Γ z zachowaniem tego samego porządku.

(3) Kontekst Γ' nazywamy *permutacją* kontekstu Γ, jeśli wszystkie deklaracje w Γ' występują w Γ i odwrotnie.

(4) Jeśli Γ jest kontekstem i Φ jest zbiorem λ-zmiennych, wówczas *projekcją* Γ na Φ (symbolicznie $\Gamma \restriction \Phi$) nazywamy podkontekst Γ' kontekstu Γ taki, że $\mathrm{dom}\Gamma' = (\mathrm{dom}\Gamma) \cap \Phi$

Przykład 1. Niech $\Gamma \equiv (y : \sigma,\, x_1 : \rho_1,\, x_2 : \rho_2,\, z : \tau,\, x_3 : \rho_3)$. Wówczas:

(1) $\mathrm{dom}\,\Gamma = (y,\, x_1,\, x_2,\, z,\, x_3)$.

(2) $\varnothing \subseteq (x_1 : \rho_1,\, z : \tau) \subseteq \Gamma$

(3) $(x_1 : \rho_1,\, x_2 : \rho_2,\, x_3 : \rho_3,\, y : \sigma,\, z : \tau)$ jest permutacją Γ.

(4) $\Gamma \restriction \{z,\, u,\, x_1\} = (x_1 : \rho_1,\, z : \tau)$.

Wprowadzamy następujące reguły wyprowadzania typu:

$$\frac{}{\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma}\ (\mathrm{var}), \qquad \frac{\Gamma \vdash M : \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash N : \varphi}{\Gamma \vdash (MN) : \psi}\ (\mathrm{app}),$$

$$\frac{\Gamma, x : \varphi \vdash M : \psi}{\Gamma \vdash (\lambda x.\, M) : \varphi \to \psi}\ (\mathrm{abs}).$$

Definicja 5. (Typowalność)
Mówimy, że λ-term M jest typu σ w kontekście Γ (jest *typowalny*), jeśli istnieje skończone drzewo sądów spełniające poniższe warunki:

(D1) W korzeniu drzewa znajduje się sąd $\Gamma \vdash M : \sigma$.

(D2) Liście są *aksjomatami*, czyli sądami postaci $\Gamma, x : \sigma \vdash x : \sigma$.

(D3) Każdego rodzica można otrzymać z jego dzieci przez zastosowanie którejś z reguł wyprowadzania typu.

Tak określony obiekt będziemy nazywali *wyprowadzeniem* typu dla M (w kontekście Γ) i pisali $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$. O sądzie $\Gamma \vdash M : \sigma$ będziemy mówili, że jest *wyprowadzalny.*

Definicja 6. (Poprawność) λ-term $M \in \mathbf{\Lambda}$ nazywamy *poprawnym* (ang. *legal*), jeśli istnieje wyprowadzenie $\Gamma \vdash M : \rho$ dla pewnego kontekstu Γ i typu $\rho \in \mathbb{T}$.

Lemat 1. *(O podtermie) Podterm poprawnego λ-termu jest poprawny.*

Dowód. Załóżmy, że sąd $J : \Gamma \vdash M : \sigma$ jest wyprowadzalny. Dowód przebiega przez indukcję wględem długosci wyprowadzenia J. Rozważmy następujące przypadki:

(a) Jeśli J jest konsekwencją reguły *var*, to $\mathrm{Sub}(M) = \{M\}$ (Definicja **??**.**??**), a zatem teza jest trywialnie spełniona.

(b) Jesli J jest konsekwencją reguły *app*, to $M \equiv PQ$ dla P, Q dla których twierdzenie zachodzi. Ponieważ $\mathrm{Sub}(M) = \mathrm{Sub}(P) \cup \mathrm{Sub}(Q) \cup \{PQ\}$ (Definicja **??**.**??**), to teza również zachodzi.

(c) Jeśli J jest konsekwencją reguły *abs*, to $M \equiv \lambda x.\, P$ dla pewnego P dla którego twierdzenie zachodzi. Ponieważ $\mathrm{Sub}(\lambda x.\, M) = \mathrm{Sub}(M) \cup \{\lambda x.\, M\}$, (Definicja **??**.**??**) to teza zachodzi również w tym przypadku.

□

Lemat 2. *(O zmiennych wolnych) Jeśli sąd $J : \Gamma \vdash L : \sigma$ jest wyprowadzalny, to* $\mathrm{FV}(L) \subseteq \mathrm{dom}\,\Gamma$.

Dowód. Prosty dowód przeprowadzamy przez indukcję względem długości wyprowadzenia sądu J. Rozważmy następujące przypadki:

(a) Jeśli J jest konsekwencą reguły *var*, to $L \equiv x$ dla pewnej λ-zmiennej x. Wobec tego $x : \sigma \in \Gamma$, a zatem $\mathrm{FV}(x) \subseteq \mathrm{dom}\,\Gamma$.

(b) Jesli J jest konsekwencją reguły *app*, to J musi mieć postać $\Gamma \vdash MN : \sigma$. Z założenia indukcyjnego: $\mathrm{FV}(M) \subseteq \mathrm{dom}\,\Gamma$ i $\mathrm{FV}(N) \subseteq \mathrm{dom}\,\Gamma$. Z Definicji **??**: $\mathrm{FV}(MN) = \mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{FV}(N)$. Stąd $\mathrm{FV}(MN) \subseteq \mathrm{dom}\,\Gamma$.

(c) Jesli J jest konsekwencją reguły *abs*, to J musi mieć postać $\Gamma \vdash \lambda x.\, M : \sigma$. Z założenia indukcyjnego $FV(M) \subseteq \mathrm{dom}\,\Gamma$. Ponieważ $\mathrm{FV}(\lambda x.\, M) = \mathrm{FV}(M) \setminus \{x\} \subseteq \mathrm{FV}(M)$ (z Definicji **??**), to $\mathrm{FV}(M) \subseteq \mathrm{dom}\,\Gamma$.

□

Lemat 3. *(1) Niech Γ' i Γ'' bedą kontekstami takimi, że $\Gamma' \subseteq \Gamma''$. Jeśli $\Gamma' \vdash M : \sigma$, to $\Gamma'' \vdash M : \sigma$.*

(2) Jeśli $\Gamma \vdash M : \sigma$, to $\Gamma \upharpoonright \mathrm{FV}(M) \vdash M : \sigma$.

(3) Jeśli $\Gamma \vdash M : \sigma$ *i* Γ' *jest permutacją* Γ*, to* $\Gamma' \vdash M : \sigma$*.*

Dowód. Dowody przebiegają przez indukcję względem długości wyprowadzenia. Czytelnika zainteresowanego szczegółami odsyłamy do [Bar92, Tw. 3.1.7]. □

Lemat 4. *(O podstawieniu) Załóżmy, że*

(a) $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$

(b) $\Gamma \vdash N : \sigma$

Wówczas $\Gamma \vdash M[x/N] : \rho$*.*

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem długości wyprowadzenia $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$. Rozważmy następujące przypadki:

(i) Jeśli $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$ jest konsekwencją reguły *var*, to $M \equiv x$. Wówczas $M[x/N] \equiv N$ i $\rho \equiv \sigma$. Teza zachodzi w oczywisty sposób.

(ii) $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$ jest konsekwencją reguły *app*. Wówczas $M \equiv PQ$ i istnieją wyprowadzenia $\Gamma, x : \sigma \vdash P : \tau \to \rho$ oraz $\Gamma, x : \sigma \vdash Q : \tau$. Z założenia indykcyjnego mamy, że $\Gamma \vdash P[x/N] : \tau \to \rho$ oraz $\Gamma \vdash Q[x/N] : \tau$. Wówczas stosując regułę *app* mamy:

$$\frac{\Gamma \vdash P[x/N] : \tau \to \rho \qquad \Gamma \vdash Q[x/N] : \tau}{\Gamma \vdash (P[x/N]Q[x/N]) : \rho} \text{ (app)},$$

Tezę otrzymujemy z faktu, że $(PQ)[x/N] = P[x/N]Q[x/N]$.

(iii) Jeśli $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$ jest konsekwencją reguły *abs*, to $M \equiv \lambda y.\, P : \rho$ dla $\rho \equiv \sigma \to \tau$, $y \not\equiv x$. Z założenia indukcyjnego istnieje wyprowadzenie $\Gamma', y : \tau \vdash P[x/N] : \rho$, gdzie $\Gamma' = \Gamma + (x : \sigma)$. Wówczas, stosując regułę *abs* mamy:

$$\frac{\Gamma', y : \tau \vdash P[x/N] : \rho}{\Gamma' \vdash (\lambda y.\, P[x/N]) : \tau \to \rho} \text{ (abs)}$$

Ponieważ $(\lambda y.\, P)[x/N] = \lambda y.\, P[x/N]$ oraz $M \equiv \lambda y.\, P : \tau \to \rho$, otrzymujemy tezę.

□

Lemat 5. *(Redukcja podmiotu) Jeśli* $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} L : \rho$ *i* $L \to_\beta^* L'$*, to* $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} L' : \rho$*.*

Dowód. □

1.2 Silna normalizacja

Lemat 6. *Niech $\tau \in \mathbb{T}$ bedzie dowolnym typem prostym. Wówczas:*

(1) $[\![\tau]\!] \subseteq \mathrm{SN}$.

(2) Jeśli $N_1, N_2, \ldots, N_k \in \mathrm{SN}$, *to* $xN_1N_2\ldots N_k \in [\![\tau]\!]$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez indukcję strukturalną względem τ. Mamy do rozważenia następujące dwa przypadki:

(a) τ jest zmienną typową.

(1) Wynika bezpośrednio z definicji $[\![\tau]\!] \in \mathrm{SN}$.

(2) Niech $N_1, N_2, \ldots, N_k \in \mathrm{SN}$. Wówczas $N_1, N_2, \ldots, N_k \in \mathrm{SN}$. Z definicji $[\![\tau]\!]$ mamy, że $xN_1N_2\ldots N_k \in [\![\tau]\!]$.

(b) Przypuśćmy, że $\tau = \sigma \to \rho$ oraz twierdzenie zachodzi dla σ i ρ.

(1) Niech $M \in [\![\sigma \to \rho]\!]$ i niech x bedzie dowolną λ-zmienną. Z części (2) założenia indukcyjnego mamy $x \in [\![\sigma]\!]$, zatem z definicji $[\![\sigma \to \rho]\!]$ mamy $Mx \in [\![p]\!]$. Ponieważ z części (1) założenia indukcyjnego $[\![\rho]\!] \in \mathrm{SN}$, to $Mx \in \mathrm{SN}$ i w konsekwencji $[\![\sigma \to \rho]\!] \subseteq \mathrm{SN}$.

(2) Niech $P \in [\![\sigma]\!]$. Wówczas z części (1) założenia indukcyjnego $P \in \mathrm{SN}$. Chcemy pokazać, że $xN_1N_2\ldots N_k \in [\![\rho]\!]$. Z części (2) założenia indukcyjnego

$$xN_1N_2\ldots N_kN_{k+1} \in [\![\rho]\!].$$

Ustalając $N_{k+1} \equiv P$ otrzymujemy tezę.

□

Lemat 7. *Załóżmy, że:*

(a) $M[x/N_0]N_1\ldots N_k \in \mathrm{SN}$,

(b) $N_0 \in \mathrm{SN}$.

Wówczas $(\lambda x.\, M)N_0N_1\ldots N_k \in \mathrm{SN}$.

Dowód. (Ad absurdum) Przypuśćmy, że $P_0 \equiv (\lambda x.\, M)N_0N_1\ldots N_k \notin \mathrm{SN}$. Wówczas istnieje nieskończony ciąg redukcji

$$P_0 \to P_1 \to \ldots$$

Każdy podterm λ-termu silnie normalizowalnego jest silnie normalizowalny. Ponieważ $P_0 \equiv M[x/N_0]N_0N_1\ldots N_k \in \mathrm{SN}$, to $M[x/N_0]$, $N_0, N_1, \ldots, N_k \in \mathrm{SN}$. Na podstawie Lematu **??** mamy ponadto, że $M \in \mathrm{SN}$. Wobec tego dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ redukcji ulega redeks czołowy:

$$P_n \equiv (\lambda x.\, M')N_0'N_1' \dots N_k' \to_\beta M'[x/N_0']N_0'N_1' \dots N_k' \equiv P_{n+1},$$

gdzie $M \to_\beta^* M'$ oraz $N_i \to_\beta^* N_i'$ dla $i \le k$. Ale skoro tak, to prawdą jest również, że $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \to_\beta^* P_{n+1}$, zaś $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \in \mathrm{SN}$. Zatem $P_{n+1} \in \mathrm{SN}$, co prowadzi do sprzeczonści. □

Lemat 8. *Załóżmy, że:*

(a) $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \in [\![\tau]\!]$,

(b) $N_0 \in \mathrm{SN}$.

Wówczas $(\lambda x.\, M)N_0N_1 \dots N_k \in [\![\tau]\!]$.

Dowód. Dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem τ. Rozważmy następujące przypadki:

(a) Jeśli τ jest zmienną typową, to $[\![\tau]\!] = \mathrm{SN}$. Wobec tego problem sprowadza się do Lematu 7.

(b) Przypuśćmy, że $\tau \equiv \sigma \to \rho$ i niech $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \in [\![\sigma \to \rho]\!]$. Wybierzmy dowolny $P \in [\![\sigma]\!]$. Wówczas $M[x/N_0]N_1 \dots N_kN_{k+1} \in [\![\rho]\!]$. Z założenia indukcyjnego mamy jednak, że $(\lambda x.\, M)N_0N_1 \dots N_kN_{k+1} \in [\![\rho]\!]$. Wystarczy więc przyjąć $N_{k+1} \equiv P$ i z definicji $[\![\sigma \to \rho]\!]$ mamy, że $(\lambda x.\, M)N_0N_1 \dots N_k \in [\![\sigma \to \rho]\!]$.

□

Definicja 7. Powiemy, że kontekst $\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, x_2 : \sigma_2, \dots, x_n : \sigma_n\}$ *spełnia* stwierdzenie $M : \sigma$ i będziemy pisali $\Gamma \models M : \sigma$, jeśli dla dowolnych $N_1 \in [\![\sigma_1]\!]$, $N_2 \in [\![\sigma_2]\!]$, ..., $N_n \in [\![\sigma_n]\!]$ mamy, że:

$$M[x_1/N_1, x_2/N_2, \dots, x_n/N_n] \in [\![\tau]\!].$$

Lemat 9. *Jeśli* $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \tau$, *to* $\Gamma \models M : \tau$.

Dowód. Dowód będzie przebiegał przez indukcję względem wyprowadzenia $\Gamma \vdash M : \tau$. Niech $\Gamma = (x_1 : \tau_1, x_2 : \tau_2, \dots, x_n : \tau_n)$ będzie kontekstem dla którego istnieje wyprowadzenie $J : \Gamma \vdash M : \tau$. Wybierzmy $N_1 \in [\![\tau_1]\!]$, $N_2 \in [\![\tau_2]\!]$, ..., $N_n \in [\![\tau_n]\!]$. Rozważmy następujące przypadki:

(a) J jest konsekwencją reguły *var*. Wówczas J jest postaci $\Gamma \vdash x_i : \tau$ dla pewnego $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$, gdzie $x_i : \tau \in \Gamma$. Stąd $M[\vec{x}/\vec{N}] = x_i[x_i/N_i] = N_i \in [\![\tau]\!]$. Z dowolności N_i, $\Gamma \models M : \tau$.

(b) J jest konsekwencją reguły *app*. Wówczas J jest postaci $\Gamma \vdash PQ : \tau$. Z założenia indukcyjnego istnieje $\sigma \in \mathbb{T}$ takie, że $\Gamma \vDash P : \sigma \to \tau$ i $\Gamma \vDash Q : \sigma$. Wobec tego $P[\vec{x}/\vec{N}] \in [\![\sigma \to \tau]\!]$ i $Q[\![\vec{x}/\vec{N}]\!] \in [\![\sigma]\!]$. Z definicji jednoczesnego podstawienia (Definicja **??**) mamy:

$$PQ[\vec{x}/\vec{N}] = P[\vec{x}/\vec{N}]Q[\vec{x}/\vec{N}]$$

Z definicji $[\![\sigma \to \tau]\!]$ wówczas $M \in [\![\tau]\!]$.

(c) J jest konsekwencją reguły *abs*. Wówczas J jest postaci $\Gamma \vdash \lambda y.\, P : \sigma \to \rho$, gdzie $y \notin \mathrm{dom}\Gamma$. Z założenia indukcyjnego mamy, że $\Gamma, y : \sigma \vDash P : \rho$. Oznacza to, że dla dowolnych $N_1 \in [\![\tau_1]\!]$, $N_2 \in [\![\tau_2]\!]$, $\ldots$, $N_n \in [\![\tau_n]\!]$ mamy

$$\forall N \in [\![\sigma]\!] \left(P[\vec{x}, y/\vec{N}, N] \in [\![\rho]\!]\right) \tag{$*$}$$

Ustalmy $P' \equiv P[y/y'][\vec{x}/\vec{N}]$, gdzie $y' \notin \mathrm{dom}\Gamma$ i $y' \notin \mathrm{FV}(N_i)$ dla $i \in \mathbb{N}$, $1 \le i \le n$. Wówczas z $(*)$:

$$\forall N \in [\![\sigma]\!] \ (P'[y'/N] \in [\![\rho]\!])$$

Ustalmy $N_0 \in [\![\sigma]\!]$. Wówczas z cześci (1) Lematu 6 $N_0 \in \mathrm{SN}$. Wobec tego z Lematu 8 wnioskujemy, że:

$$(\lambda y'.\, P')N_0 \in [\![\rho]\!] \tag{$**$}$$

Zauważmy teraz, że ponieważ $\forall i \ y_i \notin \mathrm{FV}(N_i)$

$$\begin{aligned}(\lambda y'.\, P') &= (\lambda y'.\, P[y/y'][\vec{x}/\vec{N}]) \\ &= (\lambda y'.\, P[y/y'])[\vec{x}/\vec{N}] = (\lambda y.\, P)[\vec{x}/\vec{N}]\end{aligned} \tag{$***$}$$

Z $(**)$ i $(***)$ otrzymujemy

$$\left((\lambda y.\, P)[\vec{x}/\vec{N}]\right) N_0 \in [\![\rho]\!].$$

Ponieważ $N_0 \in [\![\sigma]\!]$, to z definicji $[\![\sigma \to \rho]\!]$ mamy, że

$$(\lambda y.\, P)[\vec{x}/\vec{N}] \in [\![\sigma \to \rho]\!].$$

Z dowolności $\vec{N}$ otrzymujemy ostatecznie, że $\Gamma \vDash \lambda y.\, P$.

□

Twierdzenie 1. *(O silnej normalizacji) Jeżeli* $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \tau$, *to* $M \in \mathrm{SN}_\beta$.

Dowód. Na podstawie Lematu 9, jeśli $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \tau$, to $M \in [\![\tau[\![$. Stosując Lemat 6 otrzymujemy tezę. □

Literatura

[Bar92] Henk (Hendrik Barendregt. "Lambda Calculi with Types". In: vol. 2. Jan. 1992, pp. 117–309. ISBN: 0198537611.