Izomorfizm Curry'ego-Howarda

Rafał Szczerski

2018
Październik

1 Implikatywna logika minimalna

1.1 Język

Definicja 1.

- Zbiorem $\Phi_{\to}$ formuł implikatywnej logiki minimalnej NJ($\to$) nazywamy język generowany przez gramatykę

$$\begin{aligned} \Phi_{\to} &\coloneqq \mathrm{V} \mid (\Phi_{\to} \to \Phi_{\to}) \mid \bot \\ \mathrm{V} &\coloneqq \mathrm{p} \mid \mathrm{V}' \end{aligned}$$

- Wyrażenia powstałe z produkcji V nazywamy *zmiennymi zdaniowymi*. Zmienne zdaniowe oraz $\bot$ są formułami *atomowymi*. Pozostałe wyrażenia nazywamy formułami *złożonymi*.

- Konwencje:

  1. W języku podmiotowym wprowadzamy następujące oznaczenia

  $$\begin{aligned} \neg\varphi &\coloneqq \ulcorner \varphi \to \bot \urcorner \\ \top &\coloneqq \ulcorner \bot \to \bot \urcorner \end{aligned}$$

  2. Zamiast $\mathrm{p}', \mathrm{p}'', \mathrm{p}''', \ldots$ używamy kolejno liter p, q, r, ...
  3. Zmienne metasyntaktyczne oznaczamy późniejszymi literami greckiego alfabetu, tj. φ, ψ, ...
  4. $\to$ jest łączna w prawo.
  5. $\neg$ ma najwyższy priorytet, $\to$ – najniższy.
  6. Pomijamy najbardziej zewnętrzne nawiasy.

- Każdą parę $(\Gamma, \varphi) \in \mathcal{P}(\Phi_{\to}) \times \Phi_{\to}$, gdzie Γ jest zbiorem skończonym nazywamy *sądem* (*asercją*) i oznaczamy $\Gamma \vdash \varphi$.

  Piszemy:

  – $\varphi_1,\ \varphi_2 \vdash \psi$ zamiast $\{\varphi_1,\ \varphi_2\} \vdash \psi$,
  – Γ, φ zamiast $\{\Gamma \cup \varphi\}$,
  – Γ, Δ zamiast $\{\Gamma \cup \Delta\}$,
  – $\vdash \varphi$ zamiast $\varnothing \vdash \varphi$.

- Na zbiorze sądów $\mathcal{P}(\Phi_{\to}) \times \Phi_{\to}$ wprowadzamy relacje okreslające reguły wyprowadzania

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ (\to\mathrm{I}), \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\to\mathrm{E}).$$

oraz wybieramy spośród sądów jeden aksjomat postaci $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ (Ax).

- *Dowodem* sądu $\Gamma \vdash \varphi$ nazywamy skończone drzewo sądów spełniające poniższe warunki:

  1. W korzeniu drzewa znajduje się dowodzony sąd $\Gamma \vdash \varphi$.
  2. Liście są *aksjomatami*, tj. sądami postaci $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$.
  3. Każdego rodzica można otrzymać z jego dzieci przez zastosowanie którejś z reguł wyprowadzania nowych sądów.

  Jeśli istnieje dowód sądu $\Gamma \vdash \varphi$ to mówimy, że formuła φ jest *wyprowadzalna* ze zbioru *przesłanek* Γ i piszemy $\Gamma \vdash_N \varphi$. Formułę φ nazywamy wówczas *tezą* systemu NJ($\rightarrow$).

Lemat 1. NJ($\rightarrow$) *jest zamknięty ze względu na*

(a) osłabianie: jeśli $\Gamma \vdash \varphi$*, to tym bardziej* $\Gamma, \psi \vdash \varphi$*.*

(b) podstawianie: jeśli $\Gamma \vdash \varphi$*, to* $\Gamma[p/\psi] \vdash \varphi[p/\psi]$*.*

1.2 Semantyka

Twierdzenie 1. *(O pełności) System dedukcyjny* NJ($\rightarrow$) *jest pełny względem modeli Kripkego.*

2 Typy proste w stylu Churcha

2.1 Język

Definicja 2.

- *Typami prostymi* T nazywamy zbiór $\Phi_{\rightarrow}$ wszystkich formuł języka logiki NJ($\rightarrow$). Zamiast mówić o zmiennych zdaniowych, będziemy używali określenia *zmienne typowe.*

  Konwencja.

  1. *Zamiast* p′, p″, p‴, … *używamy kolejno liter* p, q, r, …
  2. *Zmienne metasyntaktyczne oznaczamy późniejszymi literami greckiego alfabetu, tj.* σ, τ, ρ …
  3. *„→” jest łączna w prawo.*
  4. *Pomijamy najbardziej zewnętrzne nawiasy.*

- *Pseudotermami* nazywamy język Λ_{T} generowany przez gramatykę

$$\Lambda_{\mathrm{T}} \coloneqq \ \mathrm{V} \mid \left(\lambda V^{\mathrm{T}}.\Lambda_{\mathrm{T}}\right) \mid (\Lambda_{\mathrm{T}}\Lambda_{\mathrm{T}})$$

  gdzie V to przeliczalny zbiór λ-zmiennych $x, y, \ldots$

  W języku podmiotowym będziemy używali późniejszych liter alfabetu łacińskiego (M, N, O, …) oznaczając pseudotermy.

- *Otoczeniem typowym* nazywamy skończoną funkcję częściową $\Gamma : \mathrm{V} \rightarrow \mathrm{T}$ przeprowadzającą zbiór λ-zmiennych w zbiór typów prostych. Nadużywając notacji piszemy

  - $\Gamma = \{x_1 : \tau_1, \ldots, x_n : \tau_n\}$
  - $\mathrm{dom}(\Gamma) = \{x \in \mathrm{V} \mid \exists\tau.\,(x : \tau) \in \Gamma\}$
  - $\mathrm{rg}(\Gamma) = \{\tau \in \Phi_{\rightarrow} \mid \exists x.\,(x : \tau) \in \Gamma\}$

- Dla pseudotermu M następująco określamy zbiór *termów wolnych* FV:

$$\begin{aligned}\mathrm{FV}(x) &= \{x\}\\ \mathrm{FV}(\lambda x^{\sigma}.\,P) &= \mathrm{FV}(P)\setminus\{x\}\\ \mathrm{FV}(PQ) &= \mathrm{FV}(P)\cup\mathrm{FV}(Q)\end{aligned}$$

- *Podstawieniem* pseudotermu N za λ-zmienną x w M nazwamy zdefiniowane następująco przekształcenie:

$$\begin{aligned}x[x/N] &= N, &&\\ y[x/N] &= y, && \text{o ile } x\neq y,\\ (PQ)[x/N] &= P[x/N]\,Q[x/N], &&\\ (\lambda y^{\sigma}.\,P)[x/N] &= \lambda y^{\sigma}.\,P[x/N], && \text{gdzie } x\neq y \text{ i } y\notin\mathrm{FV}(N).\end{aligned}$$

- *α-konwersją* $=_\alpha$ nazywamy najmniejszą w sensie mnogościowym relację zwrotną i przechodnią określoną na zbiorze przeudotermów Λ_{T} spełniającą poniższe warunki:
  (a) Jeśli $y\notin\mathrm{FV}(M)$ i $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem, to $\lambda x.\,M =_\alpha \lambda y.\,M[x/y]$.
  (b) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla każdej λ-zmiennej x mamy $\lambda x.\,M =_\alpha \lambda x.\,N$.
  (c) Jeśli $M =_\alpha N$, to $MZ =_\alpha NZ$.
  (d) Jeśli $M =_\alpha N$, to $ZM =_\alpha ZN$.

- *Sądem* (*asercją*) nazywamy każdą trójkę $(\Gamma,\,M,\,\sigma)\in\mathcal{P}(\mathrm{V}\times\mathrm{T})\times\Lambda_{\mathrm{T}}\times\mathrm{T}$, gdzie Γ jest otoczeniem typowym i oznaczamy $\Gamma\vdash M^{\sigma}$.

  Piszemy:

  – $\varphi_1,\ \varphi_2\vdash\psi$ zamiast $\{\varphi_1,\ \varphi_2\}\vdash\psi$,
  – Γ, x^{φ} zamiast $\Gamma\cup\{x^{\varphi}\}$, o ile $x^{\varphi}\notin\Gamma$.
  – Γ,Δ zamiast $\{\Gamma\cup\Delta\}$, o ile $\Gamma\cap\Delta=\varnothing$.
  – $\vdash\varphi$ zamiast $\varnothing\vdash\varphi$.

- Na zbiorze sądów wprowadzamy relacje określające reguły wyprowadzania termów

$$\frac{\Gamma, x^{\varphi}\vdash M^{\psi}}{\Gamma\vdash(\lambda\,x^{\varphi}.\,M)^{\varphi\to\psi}}\ (\mathrm{Abs}),\qquad \frac{\Gamma\vdash M^{\varphi\to\psi}\qquad \Gamma\vdash N^{\varphi}}{\Gamma\vdash(MN)^{\psi}}\ (\mathrm{App}).$$

  oraz wybieramy spośród sądów jeden aksjomat postaci $\Gamma, x^{\tau}\vdash x^{\tau}$ (Var).

  Dowód sądu określamy analogicznie jak w logince NJ($\to$).

  Mówimy, że M jest *termem* typu τ w otoczeniu Γ, jeśli istnieje dowód sądu $\Gamma\vdash M^{\tau}$ w powyższym systemie dedukcyjnym.

Literatura