

# Spis treści

<b>1</b>	<b>Rachunek <math>\lambda</math> bez typów</b>	<b>4</b>
1.1	Język rachunku $\lambda$ . . . . .	4
1.2	Wyrażenia $\lambda$ i ich własności . . . . .	6
1.3	Semantyka operacyjna . . . . .	12
1.3.1	Redukcje i ich własności . . . . .	12
1.3.2	Strategie redukcji . . . . .	19
1.4	Równościowa teoria rachunku $\lambda$ . . . . .	22
1.5	Semantyka denotacyjna . . . . .	23
1.5.1	$\lambda$ -modele . . . . .	23
1.5.2	Model Scotta $D_\infty$ . . . . .	27
1.6	Kodowanie typów danych . . . . .	34
1.6.1	Algebraiczne typy danych . . . . .	35
1.6.2	Proste typy wyliczeniowe . . . . .	35
1.6.3	Pary w rachunku $\lambda$ . . . . .	36
1.6.4	Kodowanie rekurencji . . . . .	38
1.6.5	Kodowanie Scotta typów rekursywnych . . . . .	38
1.6.6	Kodowanie Churcha typów rekursywnych . . . . .	39
1.6.7	Ogólny schemat kodowania Scotta typów ADT . . . . .	40
1.7	Podsumowanie . . . . .	41
<b>2</b>	<b>Rachunek <math>\lambda</math> z typami prostymi</b>	<b>42</b>
2.1	Typy proste . . . . .	42
2.2	Typowanie . . . . .	44
2.2.1	Rodzaje problemów . . . . .	46
2.3	Własności . . . . .	47
2.3.1	Uniwersalny polimorfizm . . . . .	51
2.3.2	Silna normalizacja . . . . .	52
2.4	Typy w stylu Churcha . . . . .	56
2.4.1	Składnia . . . . .	57
2.4.2	Typowanie . . . . .	58
2.5	Podsumowanie . . . . .	58
<b>3</b>	<b>System Girarda/Reynoldsa</b>	<b>60</b>
3.1	Termy zależne od typów . . . . .	60
3.2	Typowanie . . . . .	64
3.3	Redukcja . . . . .	67
3.4	Język pośredni GHC . . . . .	70
3.5	Podsumowanie . . . . .	72

For a large class of cases of the employment of the word ‘meaning’ – though not for all – this word can be explained in this way: the meaning of a word is its use in the language. [Wit53]

---

*L. Wittgenstein*

The meaning of a proposition is determined by (...) what counts as a verification of it. [Mar96]

---

*P. Martin-Löf*

## Wstęp

Pojęcia *funkcji* używa się na ogół mając na myśli jedno z dwóch znaczeń:

- (1) *funkcji* jako algorytmu, którym obliczamy wartość dla zadanego argumentu.
- (2) *funkcji* w rozumieniu teoriomnogościowym: jako zbioru par argument-wartość z którego wartość odczytujemy.

Ujęcie (1) nazywane jest *semantyką operacyjną*. Oddaje dynamiczny charakter procesu obliczania wartości funkcji jako ciągu wykonywanych w czasie elementarnych operacji na zadanym argumentcie. W kontekście teorii języków programowania przez operacje elementarne możemy rozumieć wykonywanie podstawowych instrukcji procesora. W teorii obliczalności to samo rozumielibyśmy pod pojęciem *funkcji obliczalnej*, zaś algorytmiczny proces otrzymywania wartości nazwalibyśmy *efektywnym*.

Ujęcie (2) odpowiada rozumieniu funkcji jako ustalonego, statycznego zbioru przyporządkowań z którego możemy odczytać wartość. Przypisanie funkcjom takiego znaczenia nazywamy *semantyką denotacyjną*. Wymaga ono dostępu do pełnej informacji o funkcji. Niestety,

spełnienie tego wymogu na ogół nie może być efektywne zrealizowane ze względu na złożoność pamięciową konieczną do przeprowadzenia takiego procesu (tzw. *memoizacji*).

Obydwa ujęcia są wspólne dla programowania funkcyjnego. Refleksja nad rachunkiem  $\lambda$  D. Scotta i Ch. Strachey’a prowadziła do powstania semantyki denotacyjnej dla rachunku  $\lambda$  i w ogóle pozwoliła wyodrębnić się dziedzinie formalnej semantyki języków programowania. Przyjmując drugą perspektywę, wynosimy z bogatych teorii matematycznych abstrakcje, które kształtują techniki, którymi przetwarzamy informacje: funkcje wyższego rzędu, leniwa ewaluacja, dopasowywanie wzorców, różnorodne metody abstrakcji danych. Celem tej pracy jest wyłożenie minimalnych podstaw teoretycznych koniecznych do zrozumienia powyższych haseł. Bardzo konkretnym zamiarem tej pracy jest przygotowanie bazy wiedzy koniecznej do rozpoczęcia studiowania kompilatora GHC języka Haskell.

Pierwszy rozdział o rachunku  $\lambda$  bez typów to podstawa, na której opierały będą się pozostałe. Omówiona jest składnia rachunku  $\lambda$  i jego operacyjny charakter oraz elementy semantyki denotacyjnej. Rozdział kończy omówienie alternatywnej do kodowania Churcha metody reprezentowania struktur danych – kodowania Scotta.

Drugi rozdział uzupełnia rachunek  $\lambda$  o typy. Omawiamy własności tego systemu: związki jego operacyjnego charakteru z typowaniem i ewaluacją. Główny wynik to własność silnej normalizacji.

W pracy przechodzimy z systemu nietypowanego, przez system w którym termy mają arbitralny (dynamiczny) charakter, do systemu, w którym typy wyrażeń są z góry ustalone (statyczne). System F w Rozdziale 3 zarysowany jest tak, by wskazać różnice pomiędzy systemami w stylu Curry’ego i systemami w stylu Churcha. Składnia systemu wybrana została tak, aby zasugerować możliwe rozszerzenia systemu i z łatwością odnieść go do tzw. kostki  $\lambda$  H. P. Barendregta. Informacje tu zgromadzone są punktem wyjścia do zrozumienia technikaliów związanymi z kompilowaniem języka Haskell do języka pośredniego, który oparty jest w przeważającej mierze na Systemie F w stylu Churcha.

# 1 Rachunek $\lambda$ bez typów

## 1.1 Język rachunku $\lambda$

Niech  $V$  będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych  $x, y, \dots$  (indeksowanych być może liczbami naturalnymi). Elementy takiego zbioru będziemy nazywali  $\lambda$ -zmiennymi. Ponieważ  $V$  jest potencjalnie nieskończony, zastrzegamy sobie możliwość wybierania w razie potrzeby wcześniej nie użytej zmiennej.

**Definicja 1** (Zbiór  $\tilde{\Lambda}$  pretermów). Zbiorem pretermów będziemy nazywali najmniejszy (w sensie mnogościowym) zbiór wyrażeń  $\tilde{\Lambda}$  taki, że:

- (P1) Jeśli  $x \in V$ , to  $x \in \tilde{\Lambda}$ .
- (P2) Jeśli  $M, N \in \tilde{\Lambda}$ , to  $(M N) \in \tilde{\Lambda}$ .
- (P3) Jeśli  $x \in V$  i  $M \in \tilde{\Lambda}$ , to  $(\lambda x. M) \in \tilde{\Lambda}$ .

Definicję 1 można równoznacznie wyrazić przy pomocy notacji Backusa-Naura. Wówczas ma ona następującą, zwięzłą postać:

$$\tilde{\Lambda} \leftarrow V \mid (\tilde{\Lambda} \tilde{\Lambda}) \mid (\lambda V. \tilde{\Lambda})$$

Powiemy, że dwa  $\lambda$ -termy są *syntaktycznie równe*, jeśli rozumiane jako ciągi znaków są identyczne. Równość syntaktyczną będziemy oznaczali znakiem  $\equiv$ .

Elementy  $\tilde{\Lambda}$  będziemy oznaczali literami  $L, M, N, P, Q, R$  i ich wariantami z górnymi lub dolnymi indeksami. Wyrażenia postaci (P2) nazywamy *aplikacjami*  $M$  do  $N$ . Symbol  $\lambda$  występujący w (P3) nazywamy  $\lambda$ -abstraktorem, zaś wyrażenia powstałe przez zastosowanie tej reguły to  $\lambda$ -abstrakcje. W wyrażeniu postaci  $(\lambda x. M)$  preterm  $M$  jest w *zasięgu*  $\lambda$ -abstraktora, a zmienna  $x$  jest przez niego *związana*. Ponadto, będziemy stosowali następujące konwencje notacyjne:

- najbardziej zewnętrzne nawiasy będą pomijane,
- aplikacja wiąże lewostronnie; wyrażenia postaci  $(PQ)R$  będą zapisywane w postaci  $PQR$ ,
- $\lambda$ -abstrakcja wiąże prawostronnie:  $\lambda x_1. (\lambda x_2. P)$  zapisujemy  $\lambda x_1. \lambda x_2. P$ ,
- następujące po sobie  $\lambda$ -abstrakcje postaci  $\lambda x_1. \lambda x_2. \dots \lambda x_n. P$  zapisujemy pod wspólnym  $\lambda$ -abstraktorem:  $\lambda x_1 x_2 \dots x_n. P$ .
- $n$ -krotną aplikację  $P \in \tilde{\Lambda}$  do siebie zapisujemy skrótowo:  $P^n \equiv \underbrace{PP \dots P}_{n\text{-razy}}$

**Przykład 1.** Podajmy kilka przykładów  $\lambda$ -pretermów pogrupowanych ze względu na ich konstrukcję.

(P1):  $x, y, z$ .

(P2):  $xx, yx, x(xz),$   
 $(\lambda x.(xz))y, y(\lambda x.(xz)), (\lambda x.x)(\lambda x.x).$

(P3):  $\lambda x.(xz), \lambda yz.x, \lambda x.(\lambda x.(xx)).$

Podwyrażenia  $\lambda$ -pretermu mogą być wzajemnie identyczne i występować wielokrotnie. Obserwację tę ujmujemy następująca definicja.

**Definicja 2.** (Multizbiór Sub podtermów pretermu)

- (1)  $\text{Sub}(x) = \{x\}$
- (2)  $\text{Sub}(MN) = \text{Sub}(M) \cup \text{Sub}(N) \cup \{MN\}$
- (3)  $\text{Sub}(\lambda x.M) = \text{Sub}(M) \cup \{\lambda x.M\}$

Elementy multizbioru  $\text{Sub}(M)$  nazywamy *podtermami*  $M$ . Jeśli  $L$  jest podtermem  $M$ , ale  $L \neq M$ , to  $L$  nazywamy podtermem *właściwym*.

**Przykład 2.** Podtermy wybranych  $\lambda$ -pretermów.

- (a)  $\text{Sub}(\lambda x.xx) = \{(\lambda x.xx)^1, (xx)^1, x^2\}$
- (b)  $\text{Sub}((\lambda x.xx)(\lambda x.xx)) =$   
 $= \{((\lambda x.xx)(\lambda x.xx))^1, (\lambda x.xx)^2, (xx)^2, x^4\}$

W powyższych przykładach użyliśmy standardowej notacji w górnym indeksie umieszczając krotność występowania elementu.

**Definicja 3** (Zbiór FV zmiennych wolnych). Dla dowolnego pretermu  $M$  określamy zbiór  $\text{FV}(M)$  *zmiennych wolnych* w  $M$  w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\text{FV}(x) &= \{x\} \\ \text{FV}(\lambda x.P) &= \text{FV}(P) \setminus \{x\} \\ \text{FV}(PQ) &= \text{FV}(P) \cup \text{FV}(Q)\end{aligned}$$

Jeśli  $\text{FV}(M) = \emptyset$ , to mówimy, że  $M$  jest *domknięty* lub nazywamy  $M$  *kombinatorem*.

**Przykład 3.** (a)  $\text{FV}(\lambda x.xy) = \{y\}$

(b)  $\text{FV}(x(\lambda x.xy)) = \{x, y\}$

$$(c) \text{ FV}(\lambda xyz. xy) = \emptyset$$

**Definicja 4.** (Podstawienie) Dla dowolnych  $M, N \in \tilde{\Lambda}$  i  $x \in V$  przez  $N[x/N]$  oznaczamy rezultat podstawienia termu  $N$  za wszystkie wolne wystąpienia zmiennej  $x$  w  $M$ , o ile w rezultacie podstawienia nie zostaną związane żadne zmienne wolne występujące w  $N$ . W takim wypadku:

$$(S1) \ x[x/N] = N$$

$$(S2) \ y[x/N] = y, \text{ o ile } x \neq y$$

$$(S3) \ (PQ)[x/N] = P[x/N]Q[x/N]$$

$$(S4) \ (\lambda y. P)[x/N] = \lambda y. P[x/N], \text{ gdzie } x \neq y \text{ i } y \notin \text{FV}(N)$$

$$(S5) \ (\lambda x. P)[x/N] = \lambda x. P$$

## 1.2 Wyrażenia $\lambda$ i ich własności

Na ogół chcielibyśmy utożsamiać pretermy, które różnią się wyłącznie zmiennymi związanymi, tak jak w przypadku wyrażeń  $\lambda x. zx$  i  $\lambda y. zy$ . W takim wypadku powiemy o nich, że są swoimi  $\alpha$ -wariantami lub że są ze sobą w relacji  $\alpha$ -konwersji.

**Definicja 5.** ( $\alpha$ -konwersja) Relacją  $=_\alpha$  ( $\alpha$ -konwersji) nazywamy najmniejszy w sensie mnogościowym praporządek na  $\tilde{\Lambda}$  taki, że

$$(\alpha1) \text{ Jeśli } y \notin \text{FV}(M) \text{ oraz } M[x/y] \text{ jest określone,} \\ \text{to } \lambda x. M =_\alpha \lambda y. M[x/y]$$

$$(\alpha2) \text{ Jeśli } M =_\alpha N, \text{ to dla dowolnego } x \in V \text{ zachodzi } \lambda x. M =_\alpha \lambda x. N$$

$$(\alpha3) \text{ Jeśli } M =_\alpha N, \text{ to dla dowolnego } Z \in \tilde{\Lambda} \text{ zachodzi } MZ =_\alpha NZ$$

$$(\alpha4) \text{ Jeśli } M =_\alpha N, \text{ to dla dowolnego } Z \in \tilde{\Lambda} \text{ zachodzi } ZM =_\alpha ZN$$

**Przykład 4.**

$$\begin{aligned} \lambda xy. x(xy) &\equiv \lambda x. (\lambda y. x(xy)) \\ &\equiv_\alpha \lambda x. (\lambda z. x(xz)) \\ &\equiv_\alpha \lambda v. (\lambda z. v(vz)) \\ &\equiv \lambda vz. v(vz). \end{aligned}$$

**Wniosek 1.** Relacja  $=_\alpha$  jest relacją równoważności.

**Dowód.** Wystarczy, że pokażemy, że relacja  $=_\alpha$  jest symetryczna. Dowód przebiega przez indukcję względem Definicji 5. Rozważmy następujące przypadki:

- i) Jeśli  $M =_{\alpha} N$  w konsekwencji zwrotności  $=_{\alpha}$ , to  $M \equiv N$ , a zatem również  $N \equiv M$ . Stąd  $N =_{\alpha} M$ .
- ii) Jeśli  $M =_{\alpha} N$  w konsekwencji przechodniości  $=_{\alpha}$ , to istnieje  $L \in \tilde{\Lambda}$  takie, że  $M =_{\alpha} L$  i  $L =_{\alpha} N$ . Wówczas z założenia indukcyjnego  $N =_{\alpha} L$  i  $L =_{\alpha} M$ . Z przechodniości relacji  $=_{\alpha}$  otrzymujemy spodziewaną tezę.
- iii) Przypuśćmy, że  $M =_{\alpha} N$  w konsekwencji  $(\alpha 1)$  dla  $M \equiv \lambda x. M'$  i  $N \equiv \lambda y. M'[x/y]$ . Ponieważ  $x \notin \text{FV}(M'[x/y])$ , to ze względu na Wniosek 2 mamy, że  $M'[x/y][y/x] = M'$ . Zatem, na podstawie  $(\alpha 1)$ :

$$\lambda y. M'[x/y] =_{\alpha} \lambda x. M'[x/y][y/x].$$

- iv) Jeśli  $M =_{\alpha} N$  w konsekwencji  $(\alpha 2)$ , gdzie  $M = \lambda x. M'$  i  $N = \lambda x. N'$  dla  $M' =_{\alpha} N'$ , to z założenia indukcyjnego  $N' =_{\alpha} M'$  i w konsekwencji  $(\alpha 2)$  mamy, że  $N =_{\alpha} M$ .
- v) Jeśli  $M =_{\alpha} N$  w konsekwencji  $(\alpha 3)$  dla  $M \equiv M'Z$  i  $N \equiv N'Z$  takich, że  $M' =_{\alpha} N'$ , to z założenia indukcyjnego oczywiście  $N' =_{\alpha} M'$ , a zatem z  $(\alpha 3)$   $N =_{\alpha} M$ .
- vi) Jeśli  $M =_{\alpha} N$  w konsekwencji  $(\alpha 4)$ , to postępujemy jak w przypadku (v).  $\square$

**Definicja 6.** (Zbiór  $\Lambda$   $\lambda$ -termów) Każdą klasę abstrakcji relacji  $=_{\alpha}$  nazywamy  $\lambda$ -termem. Zbiór wszystkich  $\lambda$ -termów  $\Lambda$  to zbiór ilorazowy relacji  $\alpha$ -konwersji:

$$\Lambda = \{[M]_{=\alpha} \mid M \in \tilde{\Lambda}\}$$

*Konwencja.* Wprowadzamy następujące konwencje notacyjne:

$$\begin{aligned} x &= [x]_{=\alpha}, \\ MN &= [M'N']_{=\alpha}, \text{ gdzie } M = [M']_{=\alpha} \text{ i } N = [N']_{=\alpha}, \\ \lambda x. M &= [\lambda x. M']_{=\alpha}, \text{ gdzie } M = [M']_{=\alpha}. \end{aligned}$$

**Twierdzenie 1.** *Każdy  $M \in \Lambda$  ma jedną z poniższych postaci:*

- (1)  $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n. y N_1 \dots N_m$ , gdzie  $n, m \geq 0$  i  $y \in V$
- (2)  $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n. (\lambda y. N_0) N_1 \dots N_m$ , gdzie  $n \geq 0$  i  $m \geq 1$

**Dowód.** Z definicji  $\lambda$ -term  $M$  jest albo zmienną, albo aplikacją postaci  $PQ$ , albo abstrakcją postaci  $(\lambda x.P)$ . Wówczas mamy następujące przypadki:

- i) Jeśli  $M$  jest zmienną, to wówczas  $M$  jest postaci (1).
- ii) Jeśli  $M$  jest aplikacją, to wówczas  $M \equiv P_0 P_1 \dots P_m$ , gdzie  $P_0$  nie jest aplikacją. Wówczas  $M$  jest postaci (1) albo postaci (2) dla  $n = 0$ , w zależności od tego czy  $P_0$  jest zmienną (wówczas jest to przypadek (1)) czy abstrakcją (wówczas jest to przypadek (2)).
- iii) Jeśli  $M$  jest abstrakcją postaci  $M \equiv \lambda x_1 x_2 \dots x_n. P_0 P_1 \dots P_m$ , to wówczas mamy następujące przypadki:
  - (a) Jeśli  $P_0$  jest zmienną, to  $M$  jest postaci (1).
  - (b) Jeśli  $P_0$  jest aplikacją, to  $P_0 \equiv P'_0 P''_0$ , gdzie  $P'_0$  jest albo zmienną (wówczas  $M$  jest postaci (1)) albo  $\lambda$ -abstrakcją (wówczas  $M$  jest postaci (2)).
  - (c) Jeśli  $P_0$  jest abstrakcją, to  $M$  jest postaci (2).

**Definicja 7** (Postać HNF, WHNF). Niech  $M \in \mathbf{\Lambda}$ . Powiemy, że  $M$  jest w:

1. *czołowej postaci normalnej* (ang. *head normal form*), jeśli

$$M \equiv \lambda y_1 y_2 \dots y_n. x M_1 M_2 \dots M_m \quad \text{dla } n, m \geq 0.$$

2. *słabej czołowej postaci normalnej* (ang. *weak head normal form*), jeśli dla  $n \geq 0$  i  $x \in V$   $\lambda$ -term  $M$  jest postaci i) lub ii).

$$\text{i) } x P_1 P_2 \dots P_n \quad ,$$

$$\text{ii) } \lambda x. P_1 P_2 \dots P_n.$$

Z określenia HNF widzimy, że każdy  $\lambda$ -term w postaci HNF jest również w postaci WHNF, ale nie odwrotnie.

**Przykład 5.**  $\lambda x.(\lambda y.y) N$  jest w w postaci WHNF, ale nie jest w postaci HNF, ponieważ zawiera redeks czołowy  $(\lambda y.y)N$ .

Na zbiór  $\mathbf{\Lambda}$  przenoszą się pojęcia podtermu, zmiennych wolnych i operacji podstawienia definiowane uprzednio dla pretermów.



**Definicja 8.** (Multizbiór Sub podtermów  $\lambda$ -termu) Dla dowolnego  $\lambda$ -termu  $M = [M']_{=\alpha}$  określamy

$$\text{Sub}(M) = \text{Sub}(M'),$$

gdzie  $\text{Sub}(M')$  jest multizbiorem podwyrażeń pretermu  $M'$  zdefiniowanym w myśl Definicji 2.

**Definicja 9.** (Zbiór zmiennych wolnych FV) Dla dowolnego  $\lambda$ -termu  $M = [M']_{=\alpha}$  określamy zbiór  $\text{FV}(M)$  *zmiennych wolnych* w  $M$

$$\text{FV}(M) = \text{FV}(M'),$$

gdzie  $\text{FV}(M')$  jest zbiorem zmiennych wolnych pretermu  $M'$  zdefiniowanym w myśl Definicji 3.

**Definicja 10.** (Podstawienie) Niech  $M = [M']_{=\alpha}$  i  $N = [N']_{=\alpha}$  i niech  $M'[x/N']$  będzie określone w myśl Definicji 4. Wówczas

$$M[x/N] = [M'[x/N']]_{=\alpha}.$$

Operacja podstawienia wymaga jednak pewnej delikatności. Rozważmy następującą relację:

$$\lambda x. zx =_{\alpha} \lambda y. zy$$

Zauważmy, że traktując podstawienie w sposób naiwny, mamy, że  $(\lambda x. zx)[z/x] \neq_{\alpha} (\lambda y. zy)[z/x]$ , a więc tracimy pożądaną własność niezmienniczości  $\alpha$ -konwersji względem podstawienia. Stąd w Definicji 4 wymóg, aby podstawienie nie prowadziło do uszczuplenia zbioru zmiennych wolnych. Alternatywnym rozwiązaniem jest określenie podstawienia, które wprowadzałoby do wyrażenia nową zmienną i prowadziło w konsekwencji do abstrahowania po wcześniej nie występujących zmiennych:

$$(\lambda x. M)[y/N] = \lambda x'. M[x/x'] [y/N],$$

w przypadku, gdy  $x \neq y$ , gdzie  $x' \notin \text{FV}(M)$  i  $x' \notin \text{FV}(N)$ . Rozstrzygnięcie takie przytacza się w [HS08]. Po uwzględnieniu odpowiednich modyfikacji, Definicja 4 przyjmuje następującą postać:

**Definicja 4'.** (*Podstawienie'*)

$$(S'1) \quad x[x/N] = N$$

$$(S'2) \quad y[x/N] = y, \text{ o ile } x \neq y$$

$$(S'3) \ (PQ)[x/N] = P[x/N]Q[x/N]$$

$$(S'4) \ (\lambda x. P)[x/N] = \lambda x. P$$

$$(S'5) \ (\lambda y. P)[x/N] = \lambda y. P, \text{ jeśli } x \notin \text{FV}(P)$$

$$(S'6) \ (\lambda y. P)[x/N] = \lambda y. P[x/N], \text{ gdzie } x \in \text{FV}(P) \text{ i } y \notin \text{FV}(N)$$

$$(S'7) \ (\lambda y. P)[x/N] = \lambda z. P[y/z][x/N], \text{ gdzie } x \in \text{FV}(P) \text{ i } y \in \text{FV}(N)$$

przy czym w (S'7) wymagamy, aby zmienna  $z$  nie występowała wcześniej w pretermach  $N$  i  $P$  jako zmienna wolna, zaś dla (S'5)-(S'7) dodatkowo  $y \neq x$ .

**Lemat 1.** (O podstawieniu) Niech  $M, N, L \in \tilde{\Lambda}$  i niech ponadto  $x \neq y$  oraz  $x \notin \text{FV}(L)$ . Wówczas

$$M[x/N][y/L] \equiv M[y/L][x/N[y/L]]. \quad (1)$$

**Dowód.** Dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem  $M$ . Rozważmy następujące przypadki:

i)  $M$  jest zmienną. Wówczas:

- a. Jeśli  $M \equiv x$ , to obie strony (1) po podstawieniu są postaci  $N[y/L]$ .
- b. Jeśli  $M \equiv y$ , to ponieważ  $x \neq y$  i  $x \notin \text{FV}(M)$ , po wykonaniu podstawienia po lewej stronie (1) otrzymujemy  $M[x/N][y/L] \equiv L$ . Ponieważ  $x \notin \text{FV}(L)$ , to po wykonaniu podstawienia po prawej stronie widzimy, że obydwie strony są identyczne.
- c. Jeśli  $M \equiv z$  i  $z \neq x$  oraz  $z \neq y$ , to obydwie strony (1) są identyczne.

ii)  $M \equiv PQ$  dla pewnych  $P, Q \in \tilde{\Lambda}$ . Wówczas korzystając z założenia indukcyjnego wnosimy, że

$$\begin{aligned} P[x/N][y/L] &= P[y/L][x/N[y/L]], \\ Q[x/N][y/L] &= Q[y/L][x/N[y/L]]. \end{aligned}$$

Mając na względzie (S3) widzimy, że twierdzenie zachodzi i w tym przypadku.

iii) Jeśli  $M \equiv \lambda z. P$  oraz  $z \equiv x$  lub  $z \equiv y$ , to z (S'5) widzimy, że obydwie strony (1) są identyczne. Przypuśćmy, że  $z \neq x$  i  $z \neq y$  i

$z \notin \text{FV}(L)$ . Wówczas na podstawie założenia indukcyjnego mamy:

$$\begin{aligned} (\lambda z. P)[x/N][y/L] &= \lambda z. P[x/N][y/L] = \\ &= \lambda z. P[y/L][x/N[y/L]] = \\ &= (\lambda z. P)[y/L][x/N[y/L]]. \end{aligned}$$

□

**Wniosek 2.** *Jeśli  $M[x/y]$  jest określone i  $y \notin \text{FV}(M)$ , to  $M[x/y][y/x]$  jest określone oraz  $M[x/y][y/x] = M$ .*

**Dowód.** Mając na uwadze Lemat 4 dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem  $M$ . □

**Definicja 11.** (Podstawienie jednocześnie) Dla dowolnego  $M \in \mathbf{\Lambda}$ , nieskończonego ciągu  $\lambda$ -zmiennych  $\vec{x}$  i nieskończonego ciągu  $\lambda$ -termów  $\vec{N}$  określamy:

- ( $\vec{s}1$ )  $x_i[\vec{x}/\vec{N}] = N_i$  dla  $i \in \mathbb{N}$ .
- ( $\vec{s}2$ )  $y[\vec{x}/\vec{N}] = y$  o ile dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$ ,  $y \neq x_i$ .
- ( $\vec{s}3$ )  $(PQ)[\vec{x}/\vec{N}] = P[\vec{x}/\vec{N}]Q[\vec{x}/\vec{N}]$
- ( $\vec{s}4$ )  $(\lambda y. P)[\vec{x}/\vec{N}] = \lambda y. P[\vec{x}/\vec{N}]$ , jeśli  $y \neq x_i$  dla wszystkich  $i \in \mathbb{N}$  i  $y \notin \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{FV}(N_i)$

*Konwencja.* Jeśli  $N_i \equiv x_i$  dla wszystkich poza skończenie wieloma  $i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}$ , to  $[x_{i_1}/N_{i_1}, x_{i_2}/N_{i_2}, \dots, x_{i_n}/N_{i_n}] \equiv [\vec{x}/\vec{N}]$ .

**Przykład 6.** Zauważmy, że podstawienia w myśl Definicji 4 i Definicji 11 mogą, ale nie muszą, prowadzić do różnych rezultatów.

- a)  $(xy)[y/x][x/u] = uu,$       b)  $(\lambda x. yx)[x/y][y/z] = \lambda x. zx,$
- $(xy)[y/x, x/u] = ux.$        $(\lambda x. yx)[x/y, y/z] = \lambda x. zx.$

W literaturze znajdujemy mnogość propozycji, które w ten czy inny sposób starają się ułatwić rzeczywistą implementację podstawienia. Na szczególną uwagę zasługują tutaj tak zwane *indeksy de Bruijna*. Zaproponowana przez N. G. de Bruijna w [Bru72] notacja eliminuje bezpośrednio występowanie symboli zmiennych w  $\lambda$ -termach, zastępując je liczbą naturalną wyrażającą głębokość zagnieżdżenia odpowiedniej  $\lambda$ -abstrakcji przez którą jest związana, przykładowo:

$$\lambda f. (\lambda x. f(xx))(\lambda x. f(xx)) \equiv_{deBruijn} \lambda(\lambda 2(11))(\lambda 2(11))$$

Historycznie wiąże się ta notacja z jego pracami nad systemem komputerowo wspomaganego dowodzenia twierdzeń AUTOMATH. Rozwiązanie takie, podobnie jak w przypadku tzw. logik kombinatorów (np. rachunku SKI), eliminuje konieczność  $\alpha$ -konwersji termów przy wykonywaniu  $\beta$ -redukcji, ale istotnie zmniejsza ich czytelność wyrażen.

Szerszy komentarz dotyczący dotychczasowych prób uchwycenia operacji podstawienia można prześledzić w [Alt02]. Nasze rozważania opierają się w tej materii przeważająco na [SU06]. Technikalnia definiowania  $\lambda$ -termów jako klas  $\alpha$ -konwersji są na ogół w literaturze pomijane.

## 1.3 Sematyka operacyjna

### 1.3.1 Redukcje i ich własności

Sens obliczeniowy  $\lambda$ -termom nadajemy przez określenie na  $\Lambda$  operacji  $\beta$ - i  $\eta$ -redukcji. Pożądane jest, żeby operacje te wykonywane na podtermach pozostawały w *zgodzie* ze strukturą całego  $\lambda$ -termu.

**Definicja 12.** (Relacja zgodna) Relację binarną  $\mathcal{R}$  na zbiorze  $\Lambda$  nazywamy *zgodną*, jeśli dla dowolnych  $M, N, P \in \Lambda$  zachodzą następujące warunki:

- (c1) Jeśli  $M\mathcal{R}N$ , to  $(\lambda x. M)\mathcal{R}(\lambda x. N)$  dla dowolnej  $\lambda$ -zmiennnej  $x$ .
- (c2) Jeśli  $M\mathcal{R}N$ , to  $(MP)\mathcal{R}(NP)$ .
- (c3) Jeśli  $M\mathcal{R}N$ , to  $(PM)\mathcal{R}(PN)$ .

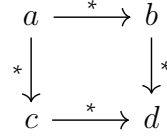
Przez *domknięcie relacji*  $\mathcal{R}_1$  względem własności  $P$  będziemy rozumieć najmniejszą (w sensie mnogościowym) relację  $\mathcal{R}_2$  taką, że  $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$  i  $\mathcal{R}_2$  ma własność  $P$ . Z pewnego rodzaju domknięciami, ze względu na ich szczególną rolę, wiążemy następującą notację:

- (a) Przez  $\mathcal{R}^+$  oznaczamy przechodnie domknięcie relacji  $\mathcal{R}$ .
- (b) Przez  $\mathcal{R}^*$  oznaczamy zwrotne domknięcie relacji  $\mathcal{R}^+$ .
- (c) Przez  $=_{\mathcal{R}}$  oznaczamy symetryczne domknięcie relacji  $\mathcal{R}^*$ .

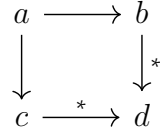
Dla lepszego zrozumienia powyższych operacji warto zauważyć, że (b) wyznacza praporzadek, który w odniesieniu do redukcji określonych na  $\Lambda$  można rozumieć jako graf skierowany (w przypadku  $\Lambda$  być może nieskończony) w którym krawędzie odpowiadają możliwym krokom obliczenia, zaś (c) – kongruencję, która znów w szczególnym odniesieniu do  $\lambda$ -termów, będzie dokonywała podziału w  $\Lambda$  ze względu na rezultat obliczenia.

**Definicja 13.** Niech  $\rightarrow$  będzie relacją binarną w zbiorze  $A$ .

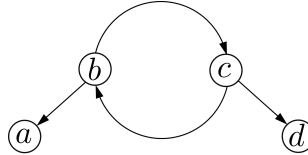
- (CR) Powiemy, że  $\rightarrow$  ma *własność Churcha-Rossera*, jeśli dla dowolnych  $a, b, c \in A$  takich, że  $a \rightarrow^* b$  oraz  $a \rightarrow^* c$  istnieje  $d \in A$  takie, że  $b \rightarrow^* d$  i  $c \rightarrow^* d$ . Własność tę przedstawia poniższy diagram:



- (WCR) Powiemy, że  $\rightarrow$  ma *słabą własność Churcha-Rossera*, jeśli dla dowolnych  $a, b, c \in A$  takich, że  $a \rightarrow b$  oraz  $a \rightarrow c$  istnieje  $d \in A$  takie, że  $b \rightarrow^* d$  i  $c \rightarrow^* d$ . Własność tę przedstawia poniższy diagram:



Widzimy, że własność CR pociąga za sobą własność WCR. Odwrotna zależność nie zachodzi (patrz Rysunek 1).



Rysunek 1: Rozważmy graf skierowany, w którym krawędzie odpowiadają relacji  $\rightarrow$  w zbiorze  $\{a, b, c, d\}$ . Widzimy, że relacja  $\rightarrow$  ma własność WCR, ale nie ma własności CR.

**Definicja 14.** (Postać normalna) Powiemy, że  $x \in A$  jest *redukowalny*, jeśli istnieje  $y \in A$  takie, że  $x \rightarrow y$ . W przeciwnym wypadku powiemy, że  $x$  jest w *postaci normalnej* i będziemy pisali  $x \in \text{NF}$ .

Element  $y \in A$  nazywamy *postacią normalną*  $x \in A$ , jeśli  $x \rightarrow^* y$  i  $y \in \text{NF}$ . Jeśli  $y$  jest jedyną postacią normalną  $x$ , to piszemy  $x \downarrow y$ . W przeciwnym wypadku, czyli jeśli istnieją  $y, z \in \text{NF}, y \neq z$  takie, że  $x \rightarrow^* y$  i  $x \rightarrow^* z$ , powiemy, że  $x$  jest *niejednoznaczny*.

*Uwaga.* Zbiór  $\lambda$ -termów w postaci normalnej względem  $\beta$ -redukcji będziemy oznaczali symbolem  $\text{NF}_\beta$ .

**Definicja 15.** Niech  $\rightarrow$  będzie relacją binarną na zbiorze  $A$ .

- (WN) Powiemy, że element  $a \in A$  jest *słabo normalizowany* i pisali  $a \in \text{WN}$ , jeśli istnieje  $a' \in \text{NF}$  taki, że  $a \rightarrow^* a'$ . Jeśli każdy element z dziedziny relacji  $\rightarrow$  jest słabo normalizowalny, to o relacji  $\rightarrow$  powiemy, że jest *słabo normalizująca*.
- (SN) Powiemy, że element  $a \in A$  jest *silnie normalizowalny* i pisali  $a \in \text{SN}$ , jeśli dla pewnego  $a' \in \text{NF}$  każdy ciąg relacji  $a \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots \rightarrow a'$  jest skończony. Jeśli każdy element z dziedziny relacji  $\rightarrow$  jest silnie normalizowalny, to o relacji  $\rightarrow$  powiemy, że jest *silnie normalizująca*.

*Uwaga.* Zbiory  $\lambda$ -termów słabo i silnie normalizowalnych względem  $\beta$ -redukcji będziemy oznaczali symbolami  $\text{WN}_\beta$  i  $\text{SN}_\beta$  odpowiednio.

**Twierdzenie 2.** (*Lemat Newmana*) Niech  $\rightarrow$  będzie relacją binarną mającą własność SN. Jeśli  $\rightarrow$  ma własność WCR, to  $\rightarrow$  ma własność CR.

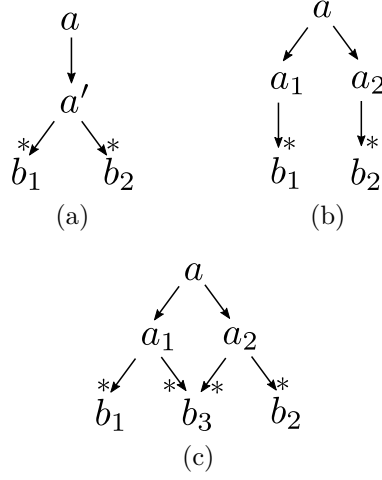
**Dowód.** Niech  $\rightarrow$  będzie relacją binarną na  $A$  o własności SN i WCR. Ponieważ  $\rightarrow$  jest SN, to każdy  $a$  jest normalizowalny.

Jeśli  $A$  nie zawiera elementów niejednoznacznych, to twierdzenie zachodzi w sposób trywialny. Przypuśćmy, że  $a \in A$  jest niejednoznaczny. Twierdzimy, że istnieje  $a' \in A$  taki, że  $a \rightarrow a'$  i  $a'$  jest niejednoznaczny. Niech  $b_1, b_2 \in \text{NF}$ ,  $b_1 \neq b_2$  i  $a \rightarrow^* b_1$  oraz  $a \rightarrow^* b_2$ . Ponieważ  $b_1 \neq b_2$ , to istnieją  $a_1, a_2 \in A$  takie, że:

$$a \rightarrow a_1 \rightarrow^* b_1 \quad \text{oraz} \quad a \rightarrow a_2 \rightarrow^* b_2$$

Zachodzą więc dwa przypadki:

- i)  $a_1 = a_2$ . Wówczas wystarczy ustalić  $a' = a_1$  albo  $a' = a_2$  (Rysunek 2a).
- ii)  $a_1 \neq a_2$  (Rysunek 2b). Wówczas z WCR istnieje  $b_3 \in A$  takie, że  $a_1 \rightarrow^* b_3$  oraz  $a_2 \rightarrow^* b_3$  (Rysunek 2c). Przypuśćmy, że  $b_3 \in \text{NF}$ . Ponieważ  $b_1 \neq b_2$ , więc  $b_3 \neq b_1$  lub  $b_3 \neq b_2$ , zatem możemy wybrać  $a' = a_1$  albo  $a' = a_2$ .



Rysunek 2: Warianty konstruowania redukcji.

Stosując powyższe rozumowanie do  $a'$  otrzymujemy kolejny element niejednoznaczny. a zatem możemy skonstruować nieskończony ciąg redukcji, wbrew założeniu, że relacja  $\rightarrow$  jest SN. Zatem  $A$  nie zawiera elementów niejednoznacznych.  $\square$

**Definicja 16.** ( $\beta$ -redukcja)  $\beta$ -redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zgodną na  $\Lambda$  relację binarną  $\rightarrow_\beta$  taką, że

$$(\lambda x. M)N \rightarrow_\beta M[x/N].$$

$\beta$ -redekami będziemy nazywali wyrażenia postaci  $(\lambda x. M)N$ , zaś rezultat ich  $\beta$ -redukcji w postaci termu  $M[x/N]$  –  $\beta$ -reduktem. Przez  $\rightarrow_\beta^+$ ,  $\rightarrow_\beta^*$ ,  $=_\beta$  oznaczamy odpowiednie domknięcia relacji  $\beta$ -redukcji. Symbolem  $\leftarrow_\beta$  oznaczać będziemy relację odwrotną do  $\beta$ -redukcji, zaś przez  $\leftrightarrow_\beta$  jej symetryczne domknięcie.

*Ciągiem  $\beta$ -redukcji* nazywamy każdy skończony lub nieskończony ciąg  $\lambda$ -termów  $M_0, M_1, \dots$  taki, że  $M_0 \rightarrow_\beta M_1 \rightarrow_\beta \dots$

Relację  $=_\beta$  nazywamy  $\beta$ -konwersją. Zauważmy, że  $M =_\beta N$  wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg  $\lambda$ -termów  $M \equiv M_0, M_1, \dots, M_n \equiv N$  taki, że  $M_i \rightarrow_\beta M_{i+1}$  lub  $M_{i+1} \rightarrow_\beta M_i$  dla  $0 \leq i \leq n$ .

**Przykład 7.** Wszystkie pary  $\lambda$ -termów ze zbioru

$$\{(\lambda x. (\lambda y. yx) z) v, (\lambda y. yv) z, (\lambda x. zx) v, zv\}$$

są swoimi  $\beta$ -konwersami. Mamy:

$$\begin{aligned} (\lambda y. yv) z &\rightarrow_\beta zv \leftarrow_\beta (\lambda x. zx) v, \\ (\lambda y. yv) z &\leftarrow_\beta (\lambda x. (\lambda y. yx) z) v \rightarrow_\beta (\lambda x. zx) v. \end{aligned}$$

**Lemat 2.** Dla dowolnych  $N, Q \in \mathbf{\Lambda}$ , jeśli  $N[y/Q] \in \text{SN}_\beta$ , to  $N \in \text{SN}_\beta$ .  
Jeśli dodatkowo  $y \in \text{FV}(N)$ , to także  $Q \in \text{SN}_\beta$ .

**Dowód.** Dowód przeprowadzamy przez indukcję względem definicji 4'.  $\square$

*Konwencja.* Składnię rachunku  $\lambda$  często rozszerza się o wyrażenia *let* pozwalające konstruować  $\beta$ -redeksy w czytelny sposób. Rozszerzenie ma następującą postać:

$$\text{let } x=N \text{ in } M \equiv (\lambda x. M)N$$

Jest to przykład tzw. *cukru syntaktycznego*, czyli wtórnych rozszerzeń języka, które ułatwiają jego użycie. Wyrażenia *let* w których  $M \equiv \lambda y. M'$  dla pewnego  $M' \in \mathbf{\Lambda}$  nazywamy *domknięciami*<sup>1</sup> (ang. *closure*). Nieformalnie, pozwalają one na przypisywanie wartości zmiennym o tzw. *zakresie leksykalnym*.

**Definicja 17.** (Strategia redukcji) Strategią redukcji nazywamy każde odwzorowanie  $S : \mathbf{\Lambda} \rightarrow \mathbf{\Lambda}$ , które dla  $M \in \lambda$  spełnia następującą równość:

$$S(M) = \begin{cases} M, & \text{jeśli } M \in \text{NF}_\beta, \\ M', & \text{jeśli } M \rightarrow_\beta M'. \end{cases}$$

Strategię  $S$  nazywamy *normalizującą*, jeśli dla każdego  $M \in \text{WN}_\beta$  istnieje  $i \in \mathbb{N}$  takie, że  $\underbrace{S^i(M) \equiv S(S(\dots(S(M))\dots))}_{i\text{-razy}} \in \text{NF}_\beta$ .

**Przykład 8.** (a) Oznaczmy  $Y \equiv \lambda f. (\lambda x. (f(xx))\lambda x. (f(xx)))$  i niech  $F$  będzie dowolnym  $\lambda$ -termem. Wówczas otrzymujemy nieskończony ciąg redukcji postaci

$$\begin{aligned} YF &\equiv (\lambda f. (\lambda x. (f(xx))\lambda x. (f(xx))))F \\ &\rightarrow_\beta (\lambda x. F(xx))\lambda x. F(xx) \\ &\rightarrow_\beta F((\lambda x. F(xx))\lambda x. F(xx)) \\ &\rightarrow_\beta F(\underbrace{F((\lambda x. F(xx))\lambda x. F(xx))}_{=\beta YF}) \\ &\rightarrow_\beta \dots \end{aligned}$$

$Y$  nazywamy *kombinatorem punktu stałego*. Widzimy, że relacja  $\beta$ -redukcji w rachunku  $\lambda$  nie jest ani słabo, ani silnie normalizująca.

<sup>1</sup>Idiom ten w literaturze poświęconej językom programowania z rodziny Lisp powszechnie występuje pod nazwą wyrażen *let-over-lambda*.



- (b) Niech  $\Omega \equiv (\lambda x. xx)(\lambda x. xx)$ .  $\Omega$  jest  $\beta$ -redexsem, którego redukcja prowadzi do ponownego otrzymania termu  $\Omega$  i w konsekwencji do stałego ciągu redukcji postaci:

$$\Omega \rightarrow_{\beta} \Omega \rightarrow_{\beta} \Omega \rightarrow_{\beta} \dots$$

- (c) Niech  $\Delta \equiv \lambda x. xxx$ . Wówczas:

$$\Delta\Delta \rightarrow_{\beta} \Delta\Delta\Delta \rightarrow_{\beta} \Delta\Delta\Delta\Delta \rightarrow_{\beta} \dots$$

Ponownie, ponieważ każda redukcja powoduje wydłużenie termu,  $\Delta\Delta$  nie ma postaci normalnej i w konsekwencji każdy powstały ciąg redukcji termu  $\Delta\Delta$  jest nieskończony.

- (d) Redukcja  $\lambda$ -termu posiadającego więcej niż jeden redex może prowadzić do różnych (choć  $\beta$ -równoważnych) reduktów. Zależy to od wyboru strategii redukcji. Rozważmy następujący term:  $(\lambda u. v)\Omega$ . Konsekwentne redukowanie podtermu  $\Omega$  prowadzić musi do niekończącego się stałego ciągu redukcji

$$(\lambda u. v)\Omega \rightarrow_{\beta} (\lambda u. v)\Omega \rightarrow_{\beta} \dots$$

Wybierając strategię polegającą na aplikacji  $\Omega$  do  $(\lambda u. v)$  otrzymujemy natychmiastowo redex w postaci normalnej.

**Definicja 18.** ( $\eta$ -redukcja)  $\eta$ -redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zgodną na  $\Lambda$  relację binarną  $\rightarrow_{\eta}$  taką, że

$$\lambda x. Mx \rightarrow_{\eta} M, \text{ o ile } x \notin \text{FV}(M).$$

$\eta$ -redukcja pozwala na pominięcie niczego nie wnoszącej  $\lambda$ -abstrakcji. Operację odwrotną nazywamy  $\eta$ -abstrakcją, zaś  $\lambda$ -termy będące w którejkolwiek z tych relacji nazywamy  $\eta$ -konwersami. Operacja ta nie ma wpływu na rezultat obliczenia, jedynie optymalizuje zapis  $\lambda$ -termów i stąd ma duże znaczenie stylistyczne w programowaniu funkcyjnym.

**Przykład 9.** Przypuśćmy, że  $(+1) \in \Lambda$ . Wówczas  $\lambda x. ((+1)x) =_{\eta} (+1)$ .

Widzieliśmy, że konsekwentne  $\beta$ -redukowanie  $\lambda$ -termów nie zawsze prowadzi do uzyskania postaci normalnej. Fakt 1 i następujące po nim Wniosek 3 i Wniosek 4 stwierdzają, że jeśli tylko mamy pewność, że  $\lambda$ -term ma postać normalną, to jest ona wyznaczona jednoznacznie i doprowadzi nas do niej każda strategia normalizująca. Fakt 1 to klasyczne twierdzenie, którego dowód można znaleźć w [Bar84, Rozdział 3.2] i ze względu na jego obszerność pozwalamy sobie go pominąć.

**Fakt 1.** (*Twierdzenie Churcha-Rossera*).  $\beta$ -redukcja ma własność CR.

**Wniosek 3.** Jeśli  $M =_{\beta} N$ , to istnieje  $L \in \mathbf{\Lambda}$  takie, że  $M \rightarrow_{\beta}^* L$  i  $N \rightarrow_{\beta}^* L$ .

**Dowód.** Niech  $M, N \in \mathbf{\Lambda}$  będą takie, że  $M =_{\beta} N$ . Wówczas istnieje ciąg  $\lambda$ -termów  $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n$  taki, że

$$M_0 \leftrightarrow_{\beta} M_1 \leftrightarrow_{\beta} \dots \leftrightarrow_{\beta} M_{n-1} \leftrightarrow_{\beta} M_n,$$

gdzie  $M_0 \equiv M$  i  $M_n \equiv N$ . Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem  $n$ . Rozważmy następujące przypadki:

- (1) Jeśli  $n = 0$ , to  $M \equiv N$ . Ustalając  $L \equiv M(\equiv N)$  w oczywisty sposób  $M \rightarrow_{\beta}^* L$  i  $N \rightarrow_{\beta}^* L$ .
- (2) Jeśli  $n = k > 0$ , to istnieje  $M_{k-1} \in \mathbf{\Lambda}$  takie, że

$$M \equiv M_0 \leftrightarrow_{\beta} M_1 \leftrightarrow_{\beta} \dots \leftrightarrow_{\beta} M_{k-1} \leftrightarrow_{\beta} M_k \equiv N$$

Z założenia indukcyjnego wiemy, że istnieje  $L' \in \mathbf{\Lambda}$  takie, że  $M_0 \rightarrow_{\beta}^* L'$  i  $M_{k-1} \rightarrow_{\beta}^* L'$ . Ponieważ  $\leftrightarrow_{\beta}$  jest symetryczna, rozważmy osobno przypadki  $M_{k-1} \rightarrow_{\beta} M_k$  i  $M_k \rightarrow_{\beta} M_{k-1}$ .

- (a) Jeśli  $M_{k-1} \rightarrow_{\beta} M_k$ , to tym bardziej  $M_{k-1} \rightarrow_{\beta}^* M_k$ . Ponieważ  $M_{k-1} \rightarrow_{\beta}^* L'$ , to korzystając Faktu 1 wnosimy, że istnieje  $L \in \mathbf{\Lambda}$  taki, że  $L' \rightarrow_{\beta}^* L$  i  $M_k \rightarrow_{\beta}^* L$ , czyli

$$\begin{array}{ccccc} M_0 & \longleftrightarrow & \dots & \longleftrightarrow & M_{k-1} & \longrightarrow & M_k \\ & \searrow^* & & \swarrow^* & & & \downarrow^* \\ & & L' & \xrightarrow{*} & & & L \end{array}$$

- (b) Jeśli  $M_k \rightarrow_{\beta} M_{k-1}$ , to ponieważ  $M_{k-1} \rightarrow_{\beta}^* L'$ , natychmiast otrzymujemy, że  $M_k \rightarrow_{\beta}^* L'$ . Ustalając  $L \equiv L'$  otrzymujemy tezę.

□

**Wniosek 4.**

*Każdy  $\lambda$ -term ma co najwyżej jedną postać normalną.*

**Dowód.**

Przypuśćmy, że  $M$  ma dwie różne postacie normalne,  $N_1, N_2$ . Wówczas na podstawie Definicji 14,  $M \rightarrow_{\beta}^* N_1$  i  $M \rightarrow_{\beta}^* N_2$ . Z Faktu 1 istnieje  $L \in \mathbf{\Lambda}$  taki, że  $N_1 \rightarrow_{\beta}^* L$  i  $N_2 \rightarrow_{\beta}^* L$ . Ponieważ  $N_1, N_2 \in \text{NF}_{\beta}$ , to  $N_1 \equiv L \equiv N_2$ . □

### 1.3.2 Strategie redukcji

Przedmiotem tego podrozdziału jest przedstawienie najczęściej spotykanych klasyfikacji obliczeń w rachunku  $\lambda$ . Na gruncie tego formalizmu zakreślimy czym jest szeroko stosowany w funkcyjnych językach programowania *leniwy* sposób wykonywania programów.

**Definicja 19.** Strategię nazywamy:

1. *normalną* (ang. *normal-order*), gdy zawsze redukujemy redeksy pojedynczo, rozpoczynając od najbardziej zewnętrznego redeksu od lewej strony wyrażenia; strategię tę nazywa się również *lewostronną najbardziej zewnętrzną* (ang. *leftmost outermost reduction*).
2. *aplikatywną* (ang. *applicative-order*), jeśli zawsze redukujemy redeksy pojedynczo, rozpoczynając od najbardziej zagnieżdżonego redeksu występującego najbardziej po lewej stronie wyrażenia; strategię tę nazywa się również *lewostronną najbardziej wewnętrzną* (ang. *leftmost innermost reduction*).

Strategia aplikatywna jest rodzajem strategii *ścistej* (nazywanej również *zachłanną*, w angielskojęzycznej literaturze określanej odpowiednio *strict*, *greedy* lub *eager*). Strategiami zachłannymi nazywamy wszystkie te redukcje, w których argumenty  $\lambda$ -abstrakcji są redukowane do postaci normalnej przed zaaplikowaniem ich. Strategie, które nie są ścisłe, nazywamy *strategiami nieściłymi* (ang. *non-strict*) – argumenty  $\lambda$ -abstrakcji w strategiach tego rodzaju mogą być redukowane dopiero wówczas, gdy jest to konieczne.

W przeciwieństwie do strategii aplikatywnej (patrz Przykład 8(d)), okazuje się, że strategia normalna jest strategią normalizującą [SU06, Rozdział 1.5]. Niestety, narzuca ona w pesymistycznym przypadku wykładniczą złożoność obliczeniową. Zobserwujemy następującą redukcję:

$$\begin{aligned}
 (\lambda x. (+ x x)) (* 5 4) &\rightarrow_{\beta} (+ (* 5 4) (* 5 4)) && (\blacktriangledown) \\
 &\rightarrow_{\beta} (+ 20 (* 5 4)) \\
 &\rightarrow_{\beta} (+ 20 20) \\
 &\rightarrow_{\beta} 40.
 \end{aligned}$$

Widzimy, że redeksy są niepotrzebnie zwielokrotniane, podczas gdy przy podejściu aplikatywnym zostałyby wpierw zredukowane. Obydwie

strategie mają więc poważne wady; niekiedy stosuje się je naprzemiennie, ich efektywność zależy od wyrażenia<sup>2</sup>. Używając grafowej reprezentacji  $\lambda$ -termów możemy wprowadzić jednak pewną optymalizację: w przypadku, gdy przy pomocy strategii normalnej redukujemy te same podwyrażenia, zamiast powielać wierzchołki odpowiadające  $\beta$ -reduktom, możemy dodać krawędzie prowadzące do tych podwyrażeń (Rysunek 3). Jest to nic innego jak ustawianie wskaźnika do innego, być może nieobliczonego jeszcze podwyrażenia<sup>3</sup> i współdzielenie wyników redukcji (Rysunek 4). Takie rozwiązanie pozwala na przeprowadzenie redukcji w skutek której współdzielone podwyrażenia są redukowane *dokładnie jeden raz*. Zauważmy jednak, że używając strategii zachłanych taka optymalizacja jest niemożliwa, gdyż podwyrażenia odpowiadające argumentom są już wstępnie redukowane do postaci normalnej. Współdzielenie wprowadza również właściwe sobie problemy, których omówienie można znaleźć w [Rin93, Rozdział 3.8.3].

Normalne strategie redukcji, które używają współdzielenia rezultatu redukcji (ang. *sharing*) nazywa się strategiami *call-by-need*. Wykonywanie redukcji strategią *call-by-need* aż do uzyskania wyrażenia w słabej czołowej postaci normalnej nazywamy *leniwą ewaluacją*. Ze względu na kolejność wykonywania redukcji strategii leniwe są więc strategiami nieściślymi<sup>4</sup>. Implementacja tej strategii odpowiada *leniwej redukcji grafu* [Pey87, Rozdział 12.1, str. 212] na przykład przy pomocy abstrakcyjnej maszyny STG, jak ma to miejsce w przypadku kompilatora GHC języka Haskell. Szczegóły technicznie związane z formalizmem maszyny STG można znaleźć w [JLP92]; prezentacja nawet zrębów tej implementacji znacznie wykracza poza zamierzony zakres tej pracy.

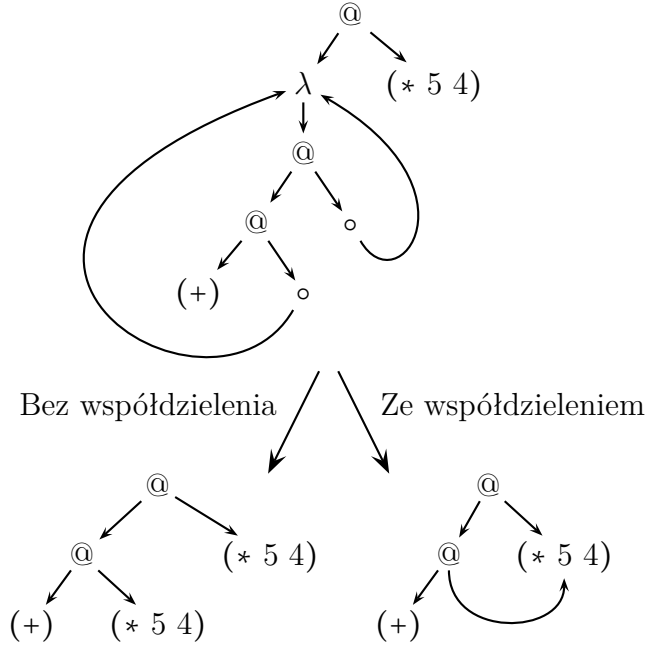
Redukcja do słabej czołowej postaci normalnej ma szczególne znaczenie, bowiem pozwala unikać  $\alpha$ -konwersji przy kolejnych  $\beta$ -redukcjach. Sensowne wyrażenia, które kodujemy w rachunku  $\lambda$ , są na ogół kombinatorami, tzn. nie zawierają zmiennych wolnych. Zauważmy, że jeśli redukujemy  $\lambda$ -term zamknięty strategią normalną, to nie jest możliwe aby wykonując podstawienie jakieś zmienne zostały dodatkowo związane  $\lambda$ -abstraktorem. Dopóki redukcja nie zostanie przeprowadzona we-

---

<sup>2</sup>Analiza wyrażen m.in. pod kątem możliwości redukowania wyrażen strategią aplikatywną to tzw. *strictness analysis*.

<sup>3</sup>Na określenie podwyrażeń, których redukcja jest odłożona na później, używa się nazwy *thunk*.

<sup>4</sup>Haskell, jako jeden z nielicznych języków programowania, określany jest jako *nieściśły*; ma to jednak związek z *nieściśłą semantyką* języka, a nie strategią redukcji jego wyrażen (które notabene najczęściej redukowane są strategią leniwą, a więc nieściśłą).



Rysunek 3: Schematyczne porównanie redukcji ( $\blacktriangledown$ ) z użyciem redukcji grafów wyrażeń bez współdzielenia (po lewej) i ze współdzieleniem (po prawej).

wewnątrz  $\lambda$ -abstrakcji, to  $\alpha$ -konwersja okazuje się zbędna.

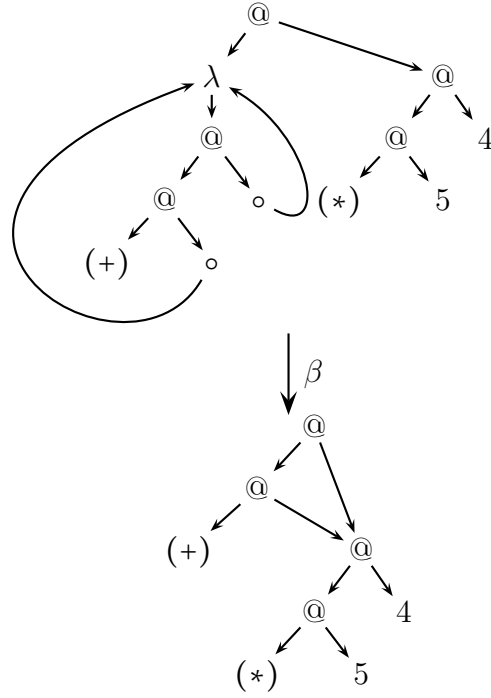
**Przykład 10.** Rozważmy następujący  $\lambda$ -term:

$$(\lambda y. (\lambda x y. xy) y) (\lambda x y. xy)$$

Zauważmy, że wykonanie redukcji strategią aplikatywną (tzn. redukcja redeksu  $(\lambda x y. xy) y$ ) musi być poprzedzone  $\alpha$ -konwersją. Dla porównania przeprowadźmy redukcję strategią normalną:

$$\begin{aligned} (\lambda y. (\lambda x y. xy) y) (\lambda x y. xy) &\rightarrow_{\beta} \\ (\lambda x y. xy)(\lambda x y. xy) &\rightarrow_{\beta} \\ \lambda y. (\lambda x y. xy) y & \end{aligned}$$

Żadna zmienna nie została dodatkowo związana. Otrzymany  $\lambda$ -term jest w czołowej postaci normalnej. Przeprowadzenie kolejnej redukcji wewnątrz  $\lambda$ -abstrakcji wymagałoby już jednak uprzedniej  $\alpha$ -konwersji.



Rysunek 4: Redukcja ( $\blacktriangledown$ ) z użyciem redukcji grafu ze współdzieleniem.

Własność tę można zachować dla wyrażeń ze zmiennymi wolnymi, jeśli tylko wstępnie przemianujemy zmienne wolne na zmienne nie występujące w wyrażeniu.

## 1.4 Równościowa teoria rachunku $\lambda$

Rachunek  $\lambda$  możemy rozszerzyć o teorię równościową w stylu Hilberta. Składa się ona z następujących reguł i aksjomatów inferencji.

(a) Aksjomaty:

- ( $\alpha$ )  $\lambda x. M = \lambda y. M[x/y]$ , jeśli  $y \in \text{FV}(M)$
- ( $\beta$ )  $(\lambda x. M)N = M[x/N]$
- ( $\rho$ )  $M = M$

(b) Reguły inferencji:

$$\begin{array}{c}
\frac{M = M'}{NM = NM} \text{ (l-con)} \quad \frac{M = N \quad N = P}{M = P} \text{ (trans)} \\
\frac{M = M'}{MN = M'N} \text{ (r-con)} \quad \frac{M = N}{N = M} \text{ (sym)} \\
\frac{M = M'}{\lambda x. M = \lambda x. M'} \text{ (\xi)}
\end{array}$$

Powyższy system nazywamy *teorią  $\lambda\beta$* ; jest ona zbiorem *równości* między  $\lambda$ -termami.

**Definicja 20.** (Wyprowadzenie) Niech  $M, N \in \mathbf{\Lambda}$  będą dowolnymi  $\lambda$ -termami. *Wyprowadzeniem* równości  $M = N$  ze zbioru równości  $\Gamma$  w teorii  $\lambda\beta$  będziemy nazywali drzewo  $\mathcal{P}$  równości takie, że:

- (i) liście  $\mathcal{P}$  są aksjomatami albo należą do zbioru  $\Gamma$ ,
- (ii) korzeniem  $\mathcal{P}$  jest równość  $M = N$  (jest *wnioskiem*),
- (iii) wszystkie pozostałe równości w  $\mathcal{P}$  są uzyskane ze swoich dzieci (*przesłanek*) za pomocą reguł inferencji.

Jeśli istnieje wyprowadzenie  $\mathcal{P}$  równości  $M = N$  ze zbioru równości  $\Gamma$ , to  $M = N$  nazywamy *wyprowadzalnym w kontekście  $\Gamma$*  i piszemy  $\lambda, \Gamma \vdash M = N$ . Jeśli  $\Gamma$  jest zbiorem pustym, to wyprowadzenie  $\mathcal{P}$  nazywamy *dowodem* równości  $M = N$ , a o równości  $M = N$  mówimy, że jest *dowodliwa*.

Następujący fakt ustala związek między równościami dowodliwymi w  $\lambda\beta$  a  $\lambda$ -termami, które są swoimi  $\beta$ -konwersami.

**Fakt 2.** *Niech  $M, N \in \mathbf{\Lambda}$ . Wówczas*

$$M =_{\beta} N \iff \lambda \vdash M = N$$

## 1.5 Semantyka denotacyjna

### 1.5.1 $\lambda$ -modele

Ustalmy wpierw, że nie możemy naiwnie interpretować  $\lambda$ -termów jako funkcji i aplikacji argumentów do funkcji. Przypuśćmy bowiem, że w pewnej interpretacji  $\llbracket M \rrbracket = f_M$ , gdzie  $f_M \in A \rightarrow B$  dla pewnych zbiorów  $A$  i  $B$ . Wówczas  $\llbracket MM \rrbracket = f_M(f_M)$ , a zatem  $f_M \in A$ . Oznacza

to, że funkcja  $f_M$  jest elementem swojej własnej dziedziny i możliwe jest skonstruowanie nieskończonego zstępującego ciągu zbiorów:

$$f_M \ni (f_M, f_M(f_M)) \ni \{f_M\} \ni f_M \ni \dots$$

Istnienie takiego ciągu narusza jednak aksjomat ufundowania na gruncie aksjomatyki ZF, a to wyklucza możliwość określenia takich modeli.

Rozwiązanie Scotta polega na tym, aby zamiast próbować interpretować termy jako funkcje, przypisać im nieskończone ciągi funkcji postaci

$$\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots),$$

gdzie  $\varphi \in D_\infty$  i  $\varphi_n \in D_n$ . Określając na takiej strukturze aplikację następująco

$$\varphi \bullet \psi = (\varphi_1(\psi_0), \varphi_2(\psi_1), \varphi_3(\psi_2), \dots),$$

widzimy, że samoaplikacja jest poprawnie określona:

$$\varphi \bullet \varphi = (\varphi_1(\varphi_0), \varphi_2(\varphi_1), \varphi_3(\varphi_2), \dots).$$

Celem wprowadzenia ustalmy szereg następujących pojęć.

**Definicja 21.** (Struktura aplikatywna) Parę  $(D, \bullet)$ , gdzie  $D$  jest zbiorem zawierającym przynajmniej dwa elementy i w którym symbol  $\bullet$  oznacza działanie binarne na  $D$ , nazywamy *strukturą aplikatywną*.

*Konwencja.* Ponieważ nie zakładamy, że działanie  $\bullet$  jest łączne, to celem ograniczenia ilości nawiasów przyjmijmy, że  $\bullet$  wiąże lewostronnie, czyli  $a \bullet b \bullet c \bullet d \equiv ((a \bullet b) \bullet c) \bullet d$ .

**Definicja 22.** (Ekstensjonalność) Strukturę aplikatywną  $\mathcal{D} = (D, \bullet)$  nazywamy *ekstensjonalną*, jeśli dla dowolnych  $a, b \in D$  spełnia ona warunek

$$(\forall d \in D \ a \bullet d = b \bullet d) \implies a = b$$

**Definicja 23.** (Ekstensjonalna równoważność) Niech  $(D, \bullet)$  będzie strukturą aplikatywną i niech  $a, b \in D$ . Określamy relację:

$$a \sim b \iff \forall d \in D \ a \bullet d = b \bullet d.$$

Powiemy, że  $a$  jest *ekstensjonalnie równoważne*  $b$ , jeśli  $a \sim b$ .

Ustalmy teraz co rozumiemy przez  $\lambda$ -model.



**Definicja 24.** (Wartościowanie  $\lambda$ -zmiennych) Każde odwzorowanie

$$\rho : V \rightarrow D,$$

gdzie  $V$  jest zbiorem  $\lambda$ -zmiennych, a  $D$  dowolnym niepustym zbiorem, nazywamy *wartościowaniem* ( $\lambda$ -zmiennych).

**Definicja 25.** ( $\lambda$ -model) Trójkę  $\mathcal{M} = (D, \bullet, \llbracket \cdot \rrbracket)$ , gdzie

$$\llbracket \cdot \rrbracket : \mathbf{\Lambda} \times D^V \rightarrow D$$

oraz  $(D, \bullet)$  jest strukturą aplikatywną, nazywamy  $\lambda$ -modelem, jeśli dla dowolnego wartościowania  $\rho$  spełnione są poniższe własności:

- (i)  $\forall x \in V \ (\llbracket x \rrbracket_\rho = \rho(x))$
- (ii)  $\forall M, N \in \mathbf{\Lambda} \ (\llbracket MN \rrbracket_\rho = \llbracket M \rrbracket_\rho \bullet \llbracket N \rrbracket_\rho)$
- (iii)  $\forall x \in V \forall M \in \mathbf{\Lambda} \forall d \in D \ (\llbracket \lambda x. M \rrbracket_\rho \bullet d = \llbracket M \rrbracket_{\rho[x/d]})$
- (iv) Dla dowolnych wartościowań  $\rho, \sigma$  i dowolnego termu  $M \in \mathbf{\Lambda}$ , jeśli

$$\forall x \in \text{FV}(M) \ (\rho(x) = \sigma(x)),$$

$$\text{to } \llbracket M \rrbracket_\rho = \llbracket M \rrbracket_\sigma$$

- (v)  $\forall M \in \mathbf{\Lambda} \forall x, y \in V \ (y \notin \text{FV}(M) \implies \llbracket \lambda x. M \rrbracket_\rho = \llbracket \lambda y. M[x/y] \rrbracket_\rho)$
- (vi)  $\forall M, N \in \mathbf{\Lambda} \ ((\forall d \in D \ \llbracket M \rrbracket_{\rho[x/d]} = \llbracket N \rrbracket_{\rho[x/d]}) \implies \llbracket \lambda x. M \rrbracket_\rho = \llbracket \lambda x. N \rrbracket_\rho)$

Omówmy pokrótce Definicję 25. Zauważmy na początku, że aplikacja w rachunku  $\lambda$  oznacza w istocie działanie binarne na  $\lambda$ -termach; dlatego na uniwersum interpretacji  $D$  wprowadzamy strukturę aplikatywną określając działanie  $\bullet$  w myśl warunku (ii).

Określając działanie  $\bullet$  wymagamy w warunku (iii), żeby było ono zgodne z  $\beta$ -redukcją. Zauważmy, że w konsekwencji  $(\lambda x. M)N =_\beta M[x/N]$  mamy, że

$$\llbracket \lambda x. M \rrbracket_\rho \bullet \llbracket N \rrbracket_\rho = \llbracket (\lambda x. M)N \rrbracket_\rho = \llbracket M[x/N] \rrbracket_\rho.$$

Interpretacja rezultatu operacji podstawienia termu  $N$  za zmienną  $x$  nie różni się w tym wypadku niczym od zmiany wartościowania  $\rho$  dla zmiennej  $x$  na desygnat  $\llbracket N \rrbracket_\rho$  (symbolicznie:  $\rho[x/\llbracket N \rrbracket_\rho]$ ), bowiem w wyniku  $\beta$ -redukcji żadna nowa zmienna nie zostaje związana; przez  $N$  zastąpione zostają wszystkie wolne wystąpienia  $x$  w  $M$ . Zachodzi więc równość

$$\llbracket M[x/N] \rrbracket_\rho = \llbracket M \rrbracket_{\rho[x/\llbracket N \rrbracket_\rho]}.$$

Fakt ten wymaga dowodu; szczegółowe uzasadnienia można znaleźć w [HS08, Tw. 15.10(a)].

W myśl warunku (iv) wymagamy, żeby interpretacja  $\lambda$ -termu zależała tylko od wartościowania występujących w nim zmiennych wolnych.

Warunek (v) zapewnia, że interpretacja  $\lambda$ -termów, które są swoimi  $\alpha$ -konwersami jest taka sama.

Warunek (vi) odpowiada regule  $\xi$  z Rodrozdziału 1.4. Zauważmy wpierw jednak, że zgodnie z warunkiem (iii)

$$\forall d \in D \quad \llbracket M \rrbracket_{\rho[x/d]} = \llbracket N \rrbracket_{\rho[x/d]} \iff \llbracket \lambda x. M \rrbracket_{\rho} \sim \llbracket \lambda x. N \rrbracket_{\rho} \quad (\dagger)$$

Warunek (vi) stwierdza więc, że jeśli dwie  $\lambda$ -abstrakcje  $(\lambda x. M)$ ,  $(\lambda x. N) \in \Lambda$  indukują dwie częściowe aplikacje działania  $\bullet$

$$(\llbracket \lambda x. M \rrbracket_{\rho} \bullet), (\llbracket \lambda x. N \rrbracket_{\rho} \bullet) : D \rightarrow D,$$

które są sobie równe, czyli

$$\forall d \in D \quad \llbracket \lambda x. M \rrbracket_{\rho} \bullet d = \llbracket \lambda x. N \rrbracket_{\rho} \bullet d,$$

to interpretacje obu  $\lambda$ -abstrakcji również muszą być sobie równe. Zgodnie z dyskusją we wstępie do niniejszego rozdziału, nie możemy interpretować  $\lambda$ -abstrakcji jako funkcji  $D \rightarrow D$ , nic nie stoi jednak na przeszkodzie, żeby scharakteryzować je czysto semantycznie przez operację w  $\lambda$ -modelu.

Zgodnie z (†) możemy przepisać warunek (vi) do następującej równoważnej postaci

$$\forall M, N \in \Lambda \quad (\llbracket \lambda x. M \rrbracket_{\rho} \sim \llbracket \lambda x. N \rrbracket_{\rho} \implies \llbracket \lambda x. M \rrbracket_{\rho} = \llbracket \lambda x. N \rrbracket_{\rho}) \quad (\text{vi}')$$

Własność (vi') w literaturze nazywa się niekiedy warunkiem *słabej ekstensjonalności*  $\lambda$ -abstrakcji.

**Definicja 26.** (Spełnianie, prawdziwość) Jeśli dla ustalonych  $M, N \in \Lambda$  i wartościowania  $\rho$  zachodzi warunek (v) względem pewnej  $\lambda$ -interpretacji  $\mathcal{M}$ , to mówimy, że wartościowanie  $\rho$  *spełnia* równość  $M = N$  względem  $\mathcal{M}$  i piszemy  $\mathcal{M}, \rho \models M = N$ .

Jeśli  $\mathcal{M}$  spełnia równość  $M = N$  względem dowolnego wartościowania  $\rho$ , to mówimy, że równość  $M = N$  jest *prawdziwa* w  $\mathcal{M}$  i piszemy  $\mathcal{M} \models M = N$ .

**Twierdzenie 3.** *Każdy  $\lambda$ -model spełnia wszystkie dowodliwe równania teorii  $\lambda\beta$ .*

**Dowód.**

□

### 1.5.2 Model Scotta $D_\infty$

- Definicja 27.** 1. Powiemy, że term  $M$  jest *kombinacją zmiennych*, jeśli  $M \equiv x$  dla pewnej zmiennej  $x$  albo  $M \equiv (PQ)$  dla pewnych kombinacji zmiennych  $P$  i  $Q$ .
2. Niech  $M$  będzie kombinacją zmiennych taką, że  $FV(M) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ . Względem  $M$  określamy funkcję  $f_M : D^n \rightarrow D$  następującym wzorem:

$$f_M(d_1, d_2, \dots, d_n) = \begin{cases} d_k, & \text{jeśli } M \equiv x_k, \\ f_P(d_1, d_2, \dots, d_n) \bullet f_Q(d_1, d_2, \dots, d_n), & \text{jeśli } M \equiv (PQ). \end{cases}$$

3. Powiemy, że struktura aplikatywna  $(D, \bullet)$  jest *kombinatorowo zupełna*, jeśli dla każdej kombinacji zmiennych  $M$  istnieje  $a_M \in D$  taki, że dla wszystkich  $d_1, d_2, \dots, d_n \in D$

$$a_M \bullet d_1 \bullet d_2 \bullet \dots \bullet d_n = f_M(d_1, d_2, \dots, d_n).$$

**Definicja 28** (Model bezsyntaktyczny). Modelem bezsyntaktycznym rachunku  $\lambda$  nazywamy trójkę  $(D, \bullet, \Lambda)$ , gdzie  $\mathbb{D} = (D, \bullet)$  jest strukturą aplikatywną,  $\Lambda : D \rightarrow D$  i spełnione są poniższe własności:

- (a)  $\mathbb{D}$  jest kombinatorowo zupełny.
- (b)  $\Lambda(a) \sim a$  dla wszystkich  $a \in D$ .
- (c) Jeśli  $a \sim b$ , to  $\Lambda(a) = \Lambda(b)$  dla wszystkich  $a, b \in D$ .
- (d)  $\Lambda(a) = e \bullet a$  dla pewnego  $e \in D$  i wszystkich  $a \in D$ .

**Elementy teorii porządku** Niech  $(D, \sqsubseteq)$  będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Powiemy, że  $b \in D$  jest elementem *najmniejszym*, jeśli  $b \sqsubseteq d$  dla wszystkich  $d \in D$ . Element ten, o ile istnieje, wyznaczony jest jednoznacznie i będziemy oznaczać go symbolem  $\perp$ . Niech  $X \subset D$ . *Ograniczeniem górnym*  $X$  nazywamy element  $u \in D$  taki, że  $x \sqsubseteq u$  dla wszystkich  $x \in X$ . *Kresem górnym* zbioru  $X$  nazywamy element  $\ell \in D$  taki, że  $\ell$  jest ograniczeniem górnym  $X$  i  $\ell \sqsubseteq u$  dla wszystkich ograniczeń górnych  $u$  zbioru  $X$ . Element taki, o ile istnieje, będziemy oznaczali symbolem  $\sqcup X$ . Podzbiór  $X \subset D$  nazywamy *skierowanym*, jeśli  $X \neq \emptyset$  i dla dowolnych  $x, y \in X$  istnieje  $z \in X$  taki, że  $x \sqsubseteq z$  i  $y \sqsubseteq z$ .

**Definicja 29** (Zupełny porządek częściowy). Porządek częściowy  $(D, \sqsubseteq)$  taki, że

- (a) posiada element najmniejszy oraz
- (b) każdy skierowany podzbiór  $X \subset D$  ma kres górny,

nazywamy *zupelnym porzadkiem czesciowym* (w skrócie: *cpo*).

Ustalmy, że jeśli  $D', D'', \dots$  są cpo, to odpowiadające im porządki częściowe będziemy notowali symbolami  $\sqsubseteq', \sqsubseteq'', \dots$

**Przykład 11.** Ustalmy  $\perp \notin \mathbb{N}$  i niech  $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \cup \perp$ . Określmy na  $\mathbb{N}^+$  następującą relację:

$$a \sqsubseteq b \iff (a = \perp \wedge b \in \mathbb{N}) \vee a = b$$

$\sqsubseteq$  jest oczywiście zwrotna, przechodnia i antysymetryczna. Widzimy, że  $\mathbb{N}^+$  ma względem niej element najmniejszy (jest nim  $\perp$ ). Podzbiory jednoelementowe  $\mathbb{N}^+$  i podzbiory dwuelementowe zawierające  $\perp$  to wszystkie skierowane podzbiory  $\mathbb{N}^+$ . Widzimy, że każdy z nich ma kres górny, a zatem  $\mathbb{N}^+$  jest cpo.

**Definicja 30** (Monotoniczność, ciągłość, ścisłość). Niech  $D$  i  $D'$  będą cpo i  $\varphi : D \rightarrow D'$ .

- (a) Powiemy, że  $\varphi$  jest *monotoniczna*, jeśli  $\varphi(a) \sqsubseteq' \varphi(b)$  dla  $a \sqsubseteq b$ .
- (b) Powiemy, że  $\varphi$  jest *ciągła* (w sensie Scotta<sup>5</sup>), jeśli  $\varphi(\sqcup X) = \sqcup \varphi(X)$  dla wszystkich skierowanych podzbioru  $X \subseteq D$ .
- (c) Powiemy, że  $\varphi$  jest *ściśła* (ang. *strict*), jeśli  $\varphi(\perp) = \perp'$ . Funkcje, które nie są ścisłe, nazywamy niekiedy *leniwymi* (ang. *lazy*).

Symbolem  $[D \rightarrow D']$  oznaczamy zbiór wszystkich funkcji ciągłych ze zbioru  $D$  do  $D'$ .

*Uwaga.* Zauważmy, że jeśli  $\varphi$  jest ciągła, to jest również monotoniczna. Istotnie, jeśli  $a \sqsubseteq b$ , to w szczególności  $\{a, b\} \subseteq D$  jest skierowanym podzbiorem  $D$ . Wówczas  $\sqcup \{a, b\} = b$  i ponieważ  $\sqcup \varphi(\{a, b\}) = \varphi(\sqcup \{a, b\})$ , to otrzymujemy, że  $\varphi(a) \sqsubseteq \varphi(\sqcup \{a, b\}) = \varphi(b)$ .

**Twierdzenie 4.** *Jeśli  $D$  i  $D'$  są cpo, to  $[D \rightarrow D']$  jest cpo.*

**Dowód.** Określmy na  $[D \rightarrow D']$  relację  $\leq$ :

$$\varphi \leq \psi \iff \forall d \in D (\varphi(d) \sqsubseteq' \psi(d)),$$

---

<sup>5</sup>Funkcje te są ciągłe w topologicznym sensie względem topologii Scotta.

Ponieważ  $D'$  jest cpo, to aby wykazać, że  $[D \rightarrow D']$  ma element najmniejszy, wystarczy, że rozpatrzymy  $\perp(d) = \perp'$  dla  $d \in D$ .

Niech teraz  $\Phi$  będzie skierowanym podzbiorem  $[D \rightarrow D']$ . Wówczas dla wszystkich  $d \in D$  zbiór  $\{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\}$  jest skierowanym podzbiorem  $D'$ . Wybierzmy  $y_1, y_2 \in \{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\}$ . Wówczas dla pewnych  $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$  mamy, że  $y_1 = \varphi_1(d)$  oraz  $y_2 = \varphi_2(d)$ . Ponieważ  $\Phi$  jest skierowany, to istnieje  $\varphi_3$  taki, że  $\varphi_1 \leq \varphi_3$  i  $\varphi_2 \leq \varphi_3$ . Wówczas dla dowolnego  $d \in D$   $\varphi_1(d) \sqsubseteq' \varphi_3(d)$  oraz  $\varphi_2(d) \sqsubseteq' \varphi_3(d)$ , a zatem zbiór  $\{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\}$  istotnie jest skierowany dla każdego  $d \in D$ . Ponieważ zaś  $D'$  jest cpo, to dla każdego  $d \in D$  istnieje kres górny  $\{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\}$ . Określmy więc funkcję  $\Psi_\Phi : D \rightarrow D'$  następującym wzorem:

$$\Psi_\Phi(d) = \bigsqcup \Phi d,$$

gdzie  $\Phi d = \{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\}$ . Wystarczy teraz pokazać, że  $\Psi_\Phi$  jest ciągła i jest kresem górnym zbioru  $\Phi$ .

1. Pokażemy najpierw, że  $\Psi_\Phi$  jest ciągła. Niech  $X$  będzie dowolnym skierowanym podzbiorem  $D$ . Wówczas:

$$\begin{aligned} \Psi_\Phi(\bigsqcup X) &= \bigsqcup \Phi(\bigsqcup X) \\ &= \bigsqcup \{\varphi(\bigsqcup X) \mid \varphi \in \Phi\} \\ &= \bigsqcup \{\bigsqcup \{\varphi(d) \mid d \in X\} \mid \varphi \in \Phi\} \\ &= \bigsqcup \left\{ \bigcup_{\varphi \in \Phi} \{\varphi(d) \mid d \in X\} \right\} \\ &= \bigsqcup \left\{ \bigcup_{\varphi \in \Phi} \bigcup_{d \in X} \{\varphi(d)\} \right\} = \bigsqcup \left\{ \bigcup_{d \in X} \bigcup_{\varphi \in \Phi} \{\varphi(d)\} \right\} \\ &= \bigsqcup \left\{ \bigcup_{d \in X} \{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\} \right\} \\ &= \bigsqcup \{\bigsqcup \{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\} \mid d \in X\} \\ &= \bigsqcup \{\bigsqcup \Phi d \mid d \in X\} = \bigsqcup \Psi_\Phi(X). \end{aligned}$$

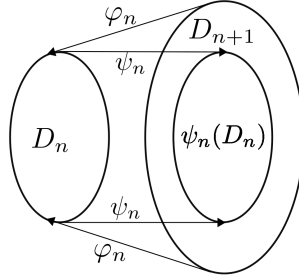
2. Niech  $\varphi \in \Phi$ . Wówczas dla dowolnego  $d \in D$  mamy  $\varphi(d) \sqsubseteq' \bigsqcup \Phi d = \Psi_\Phi d$ . Zatem  $\varphi \leq \Psi_\Phi$  i  $\Psi_\Phi$  jest ograniczeniem górnym  $\Phi$ . Jeśli  $\Psi_\Phi$  nie jest kresem górnym  $\Phi$ , to istnieje  $\chi$  takie, że  $\chi \leq \Psi_\Phi$  oraz  $\chi$  jest kresem górnym  $\Phi$ . Wówczas dla dowolnego  $d \in D$  mamy, że  $\chi(d)$  jest kresem górnym  $\Phi d$  oraz  $\chi(d) \sqsubseteq' \Psi_\Phi(d)$ . Ale  $\Psi_\Phi(d) = \bigsqcup \Phi d$ , a zatem  $\chi(d)$  nie jest kresem górnym  $\Phi d$ . Stąd  $\Psi_\Phi$  jest kresem górnym  $\Phi$ .

**Definicja 31.** Dla danego cpo  $D_0$  możemy skonstruować ciąg cpo  $\{D_n\}_{n=0}^\infty$  określając  $D_{n+1} = [D_n \rightarrow D_n]$  dla  $n \geq 0$ . Tak określony ciąg dla  $D_0 = \mathbb{N}^+$  (patrz Przykład 11) nazywamy modelem Scotta.

**Definicja 32** (Projekcja). Niech  $D$  i  $D'$  będą cpo. *Projekcją* z  $D'$  do  $D$  nazywamy parę  $(\varphi, \psi)$  funkcji  $\varphi \in [D \rightarrow D']$ ,  $\psi \in [D' \rightarrow D]$  takich, że

$$\psi \circ \varphi = I_D \quad \text{oraz} \quad \varphi \circ \psi \leq I_{D'} \quad (2)$$

gdzie przez  $I_D$  i  $I_{D'}$  oznaczamy funkcję identycznościową na zbiorze  $D$  i  $D'$ , odpowiednio.



Rysunek 5: Projekcja  $(\varphi_n, \psi_n)$  z  $D_{n+1}$  do  $D_n$

Okazuje się, że ciąg cpo  $\{D_n\}_{n=0}^\infty$  skonstruowany w myśl Wniosku 31 można określić definiując dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  projekcję  $(\varphi_n, \psi_n)$  z  $D_{n+1}$  do  $D_n$ . Istotnie, spróbujemy skonstruować taką rodzinę projekcji. Wybierzmy  $d \in D_0$  i niech  $\kappa_d$  oznacza funkcję stałą

$$\kappa_d(c) = d \quad \text{dla wszystkich } c \in D_0.$$

Określmy  $D_1 = [D_0 \rightarrow D_0]$ . Ponieważ  $\kappa_d$  jest funkcją ciągłą, to  $\kappa_d \in D_1$ . Niech teraz

$$\begin{aligned} \varphi_0(d) &= \kappa_d \quad \text{dla wszystkich } d \in D_0, \\ \psi_0(c) &= c(\perp_0) \quad \text{dla wszystkich } c \in D_1, \end{aligned}$$

gdzie  $\perp_0$  jest elementem najmniejszym  $D_0$ . Widzimy, że  $\varphi_0 : D_0 \rightarrow D_1$  i  $\psi_0 : D_1 \rightarrow D_0$ . Funkcje  $\varphi_0$  i  $\psi_0$  są ciągłe, zaś  $\psi_0 \circ \varphi_0 = I_{D_0}$  (dowód pomijamy), zatem  $(\varphi_0, \psi_0)$  jest projekcją z  $D_1$  do  $D_0$ .

Dla  $n > 0$  określamy teraz  $\varphi_n : D_n \rightarrow D_{n+1}$  i  $\psi_{n+1} : D_{n+1} \rightarrow D_n$  następującym wzorem:

$$\begin{aligned} \varphi_n(\sigma) &= \varphi_{n-1} \circ \sigma \circ \psi_{n-1} \quad \text{dla } \sigma \in D_n, \\ \psi_n(\tau) &= \psi_{n-1} \circ \tau \circ \varphi_{n-1} \quad \text{dla } \tau \in D_{n+1} \end{aligned}$$

Wówczas  $\varphi_n \in [D_n \rightarrow D_{n+1}]$ ,  $\psi_n \in [D_{n+1} \rightarrow D_n]$  i  $\psi_n \circ \varphi_n = I_{D_n}$  oraz  $\varphi_n \circ \psi_n \leq I_{D_{n+1}}$ . [HS08, Lemat 16.28]. A zatem  $(\varphi_n, \psi_n)$  jest projekcją z  $D_{n+1}$  do  $D_n$ .

Ponieważ projekcje  $(\varphi_n, \psi_n)$  przenoszą nas tylko pomiędzy następującymi po sobie cpo w ciągu  $\{D_n\}_{n=0}^\infty$ , (Rysunek 5) określamy następujące złożenie pozwalające na projekcje między dowolnymi dwoma wyrazami ciągu.

**Definicja 33.** Dla  $m, n \geq 0$  określamy  $\varphi_{mn} : D_m \rightarrow D_n$  w następujący sposób:

$$\varphi_{mn} = \begin{cases} \varphi_{n-1} \circ \varphi_{n-2} \circ \dots \circ \varphi_{m+1} \circ \varphi_m, & \text{jeśli } m \leq n, \\ I_{D_n}, & \text{jeśli } m = n, \\ \psi_n \circ \psi_{n+1} \circ \dots \circ \psi_{m-2} \circ \psi_{m-1} & \text{jeśli } m \geq n. \end{cases}$$

Ponieważ dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  para  $(\varphi_n, \psi_n)$  jest projekcją z  $D_{n+1}$  do  $D_n$ , to zachodzi następujący szereg własności.

**Fakt 3** ([HS08, p. 16.33]). *Niech  $m, n \geq 0$ . Wówczas*

- (i)  $\varphi_{mn} \in [D_m \rightarrow D_n]$ ,
- (ii) *jeśli  $m \leq n$ , to  $\varphi_{nm} \circ \varphi_{mn} = I_{D_m}$ ,*
- (iii) *jeśli  $m > n$ , to  $\varphi_{nm} \circ \varphi_{mn} \leq I_{D_m}$ ,*
- (iv) *jeśli  $m < n$ , to  $(\varphi_{mn}, \varphi_{nm})$  jest projekcją z  $D_n$  do  $D_m$ ,*
- (v) *jeśli  $m < k < n$  lub  $n < k < m$ , to  $\varphi_{kn} \circ \varphi_{mk} = \varphi_{mn}$ .*

**Konstrukcja  $D_\infty$**  Mając zadane dwa cpo  $D, D'$  możemy zapytać czy istnieje włożenie jednego z nich w drugi. Zauważmy, że jeśli  $\varphi, \psi$  jest projekcją z  $D'$  do  $D$ , to  $\phi$  jest włożeniem  $D$  w  $D'$  (w sensie topologii Scotta). Ciąg  $\{D_n\}_{n=0}^\infty$  intuicyjnie przypomina więc wstępujący ciąg zbiorów. Formalizuje to następująca definicja.

**Definicja 34.** Niech  $D_\infty$  oznacza zbiór wszystkich nieskończonych ciągów postaci

$$d = (d_0, d_1, \dots)$$

takich, że dla wszystkich  $n \geq 0$  mamy, że  $d_n \in D_n$  oraz  $\psi_n(d_{n+1}) = d_n$ . Na zbiorze  $D_\infty$  określamy relację  $\sqsubseteq$  w następujący sposób:

$$(d_0, d_1, \dots) \sqsubseteq (d'_0, d'_1, \dots) \iff \forall n \geq 0 (d_n \sqsubseteq d'_n)$$

Przez  $d_n$  oznaczać będziemy  $n$ -ty element ciągu  $d$ . Jeśli  $X \subset D_\infty$ , to określamy  $X_n = \{d_n \mid d \in X\}$ .

Przy powyższym określeniu  $D_\infty$  okazuje się być cpo.

**Fakt 4** ([HS08, p. 16.36]). (i)  $D_\infty$  jest cpo.

(ii)  $D_\infty$  zawiera element najmniejszy  $\perp = (\perp_0, \perp_1, \dots)$ , gdzie przez  $\perp_n$  oznaczamy najmniejszy element  $D_n$ .

(iii) Kres górny każdego skierowany zbioru  $X \subset D_\infty$  ma postać

$$\bigsqcup X = (\bigsqcup X_0, \bigsqcup X_1, \dots)$$

Dodatkowo, określamy projekcję z  $D_\infty$  do  $D_n$  dla każdego  $n \in \mathbb{N}$ . Wymaga to dowodu (patrz Fakt 5(i)), który pomijamy.

**Definicja 35** ( $D_\infty$ ). Dla  $n \geq 0$  określamy funkcje  $\varphi_{n\infty} : D_n \rightarrow D_\infty$  oraz  $\varphi_{\infty n} : D_\infty \rightarrow D_n$ , gdzie

$$\begin{aligned}\varphi_{n\infty}(d) &= (\varphi_{n0}(d), \varphi_{n1}(d), \dots) \text{ dla } d \in D_n, \\ \varphi_{\infty n}(d) &= d_n.\end{aligned}$$

Określona para funkcji spełnia poniższy szereg własności.

**Fakt 5** ([HS08, pp. 16.38, 16.39, 16.42]). Niech  $m, n \geq 0$ ,  $m \leq n$  i  $a, b \in D_\infty$ . Wówczas:

- (i)  $(\varphi_{n\infty}, \varphi_{\infty n})$  jest projekcją z  $D_\infty$  do  $D_n$ ,
- (ii)  $\varphi_{mn}(a_m) \sqsubseteq a_n$ ,
- (iii)  $\varphi_{m\infty}(a_m) \sqsubseteq \varphi_{n\infty}(a_n)$ ,
- (iv)  $a = \bigsqcup_{n \geq 0} \varphi_{n\infty}(a_n)$ ,
- (v)  $\varphi_{n\infty}(a_{n+1}(b_n)) \sqsubseteq \varphi_{(n+1)\infty}(a_{n+2}(b_{n+1}))$ .

Zauważmy, że  $\varphi_{n\infty}$  jest izomorficznym włożeniem  $D_n$  w  $D_\infty$ . Oznacza to, że każdy  $a \in D_n$  możemy utożsamiać z odpowiadającym mu  $\varphi_{n\infty}(a) \in D_\infty$ . Biorąc  $a \in D_\infty$  i stosując tę odpowiedniość jako konwencję notacyjną, na podstawie 5(iii) mamy, że

$$a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq a_2 \sqsubseteq a_3 \sqsubseteq \dots,$$

zaś na podstawie 5(iv):

$$a = \bigsqcup \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Zatem wyrazy  $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$  możemy traktować jako kolejne przybliżenia elementu  $a$ . Zauważmy, że na podstawie Faktu (v) ciąg ten



jest zawsze rosnący. Traktując nieformalnie  $D_\infty$  jako pewną przestrzeń informacji i w niej: element  $\perp$  jako brak informacji, zaś relację  $\sqsubseteq$  odczytując jako „więcej informacji”, kolejne przybliżenia możemy odczytać jako proces poznawczy prowadzący do stanu pełnej informacji o jakimś fakcie.

Kolejną istotną obserwacją jest fakt, że dziedzina każdej funkcji z  $D_n$  zawiera się w powyższym sensie również w  $D_n$ . Fakty 5(iv) i 5(v) sugerują metodę określenia struktury aplikatywnej na  $D_\infty$ . Przypuśćmy bowiem, że  $a, b \in D_\infty$ . Wówczas dla każdego  $n \in \mathbb{N}$  wyrazy  $a_n$  i  $b_n$  są przybliżeniami  $a$  i  $b$ , odpowiednio. Ponieważ  $a_{n+1} \in D_{n+1} = [D_n \rightarrow D_n]$ , to  $a_{n+1}(b_n)$  jest określony. A zatem  $a_{n+1}(b_n)$  jest pewnym przybliżeniem aplikacji  $a$  do  $b$ . Widzimy jednocześnie, że rozwiązuje to problem samoaplikacji wymieniony na wstępie.

**Definicja 36.** Dla  $a, b \in D_\infty$  określamy:

$$a \bullet b = \bigsqcup \{ \varphi_{n\infty}(a_{n+1}(b_n)) \mid n \geq 0 \}$$

Zauważmy, że na podstawie Faktu 5(v)  $D_\infty$  jest łańcuchem, a zatem zbiorem skierowanym. Ponieważ  $D_\infty$  jest cpo, to supremum takiego zbioru zawsze istnieje. Zatem działanie  $\bullet$  jest poprawnie określone. Dowód, że operacja ta nie wyprowadza poza zbiór funkcji ciągłych pomijamy.

**Fakt 6** ([HS08, p. 14.29]). *Struktura aplikatywna  $(D, \bullet)$  jest kombinatorowo zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie  $k, s \in D$ , że dla wszystkich  $a, b, c \in D$  mamy:*

$$k \bullet a \bullet b = a \quad \text{oraz} \quad s \bullet a \bullet b \bullet c = a \bullet c \bullet (b \bullet c).$$

**Fakt 7** ([HS08, p. 15.30]). *Niech  $(D, \bullet)$  będzie kombinatorowo zupełną strukturą aplikatywną taką, że dla dowolnych  $a, b \in D$  jeśli  $a \sim b$ , to  $a = b$ . Określmy  $\Lambda(a) = a$  dla wszystkich  $a \in D$ . Wówczas  $(D, \bullet, \Lambda)$  jest modelem bezsyntaktycznym.*

Ostatecznie, na podstawie Faktu 6 i Faktu 7 zachodzi następujące twierdzenie.

**Twierdzenie 5.**  $(D, \bullet, \Lambda)$  jest modelem bezsyntaktycznym.

**Dowód.** Określmy:

$$\begin{aligned} k &= (\perp_0, I_{D_0}, k_2, k_3, \dots), \\ s &= (\perp_0, I_{D_0}, \psi_2(s_3), s_3, s_4, \dots). \end{aligned}$$

Okazuje się [HS08, Tw. 16.51, 16.53], że  $k, s \in D_\infty$  oraz, że dla dowolnych  $a, b, c \in D_\infty$  mamy

$$k \bullet a \bullet b = a \quad \text{oraz} \quad s \bullet a \bullet b \bullet c = a \bullet c \bullet (b \bullet c).$$

Struktura  $(D, \bullet)$  jest ekstensjonalna. Istotnie, niech  $a, b \in D_\infty$  takie, że  $a \sim b$  i  $m \geq 0$ . Wybierzmy  $d \in D_m$  oraz ustalmy  $c = \varphi_{m\infty}(d)$ . Wówczas [HS08, Tw. 16.54]

$$(a \bullet c)_m = a_{m+1}(d) \quad \text{oraz} \quad (b \bullet c)_m = b_{m+1}(d).$$

Stąd  $a_{m+1}(d) = (a \bullet c)_m = (b \bullet c)_m = b_{m+1}(d)$ , a zatem  $a_n = b_n$  dla  $n > 0$ . Wówczas również  $a_0 = \psi_0(a_1) = \psi_0(b_1) = b_0$  i stąd  $a = b$ .

A zatem na podstawie Faktu 7  $(D, \bullet, \Lambda)$  jest modelem bezsyntaktycznym.  $\square$

## 1.6 Kodowanie typów danych

Prosta składnia języka rachunku  $\lambda$  pozwala wyrazić zaskakująco wiele struktur danych reprezentując je i operacje na nich jako funkcje. Z tego powodu, stanowiąc inspirację dla wielu projektantów języków programowania, uchodzi za protoplastę rodziny języków funkcyjnych. Rozwój tej legendy dobrze oddaje cykl klasycznych artykułów (tzw. *Lambda Papers*) zapoczątkowany przez dokumentację języka Scheme [SS75].

Najpopularniejszym sposobem reprezentacji danych przez funkcje w rachunku  $\lambda$  oparty jest na kodowaniu liczb Peano za pomocą tzw. liczebników Churcha. Metoda ta, ze względu na wynikające zeń problemy natury złożonościowej [KPJ14], ma obecnie wyłącznie walory edukacyjne, dlatego w dalszej części pracy pokażemy tzw. kodowanie Scotta. Jest ona interesująca ze względu na praktyczną możliwość reprezentacji algebraicznych typów danych (ADT, ang. *Algebraic Data Types*<sup>6</sup>) znanych ze współczesnych języków funkcyjnych [Jan13], pozwalając tym samym zaimplementować te konstrukcje w dowolnym języku, w którym dostępne są wyrażenia  $\lambda$ . Fakt, że każdy typ danych można zastąpić tym sposobem odpowiadającą mu funkcją, wskazuje na metodę konstruowania prostych języków funkcyjnych [JKP06] oraz na uniwersalność rachunku  $\lambda$  jako języka przejściowego dla kompilatorów języków funkcyjnych [PL92, Rozdział 3]. Druga z tych idei znajduje dziś bardzo praktyczne zastosowanie w przypadku Systemu F – rozszerzenia rachunku  $\lambda$ , który będzie tematem Rozdziału 3 – i kompilatora GHC języka Haskell.

<sup>6</sup>Nie należy mylić z *Abstract Data Types*.

### 1.6.1 Algebraiczne typy danych

Algebraiczne typy danych są podstawowym środkiem służącym do określania struktur danych we współczesnych funkcyjnych językach programowania. Na potrzeby prezentacji poszczególnych kodowań posłużymy się intuicjami o ADT zbudowanymi na gruncie następujących definicji w języku Haskell:

```
data Boolean      = True
                  | False
data Tuple a b    = Tuple a b
data Temperature = Fahrenheit Int
                  | Celsius Int
data Maybe a      = Nothing
                  | Just a
data Nat          = Zero
                  | Succ Nat
data List t       = Nil
                  | Cons t (List t)
```

Definicja typu rozpoczynają się od słowa kluczowego `data`<sup>7</sup> po którym występuje *konstruktor typu*. Na wzór notacji BNF, typy przyjmują jedną z wartości oddzielonych znakiem ”|”. Każda z wartości składa się z *konstruktora wartości* i ewentualnie występujących po nim *parametrów typowych*. Zauważmy, że umożliwia to rekurencyjnie konstruowanie typów, tak jak w wypadku `Nat` i `List`.

Pokażemy, że algebraiczne typy danych możemy reprezentować w zwięzły sposób w rachunku  $\lambda$  bez typów. Przedstawione tutaj koncepcje w zaskakujący sposób przenoszą się do bardziej złożonych typowanych systemów rachunku  $\lambda$ .

### 1.6.2 Proste typy wyliczeniowe

Typy wyliczeniowe to typy, które reprezentują możliwe warianty przyjmowanej wartości. Najprostrzym nietrywialnym przykładem takiego typu jest `Boolean`. Ma on dwa konstruktory wartości: `True`, `False`. Praca z tego rodzaju typami wymaga mechanizmu dopasowywania wzorców (ang. *pattern-matching*) [PL92, Rozdział IV], który pozwala na wybór częściowej definicji funkcji w zależności od zadanego konstruktora wartości. Ponieważ w rachunku  $\lambda$  wyrażenia nie mają typów

---

<sup>7</sup>Dyskusja ta ma na celu wyłącznie ustalenie uwagi; świadomi jesteśmy niuansów związanych z określaniem synonimów typów lub definiowaniem typów przy pomocy słowa kluczowego `newtype`.

(lub, przyjmując perspektywę systemów z typami: wszystkie wyrażenia mają jeden, ten sam typ), interesowało nas będzie nie bezpośrednio kodowanie typu, ale kodowanie mechanizmu, który odpowiada za dopasowywanie wzorców. Posłużmy się znowu przykładem z języka Haskell i określmy funkcję odpowiadającą wykonaniu instrukcji warunkowej:

```
if True  a b = a
if False a b = b
```

gdzie `True` i `False` są wartościami typu `Boolean`. Właśnie ze względu na nie, mechanizm dopasowywania wzorca wybiera odpowiednią implementację instrukcji warunkowej. Ten sam efekt osiągnęlibyśmy kodując `True` i `False` w rachunku  $\lambda$  w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\text{True} &\equiv \lambda ab. a \\ \text{False} &\equiv \lambda ab. b\end{aligned}$$

Wówczas funkcję `if` możemy reprezentować wyrażeniem  $\text{if} \equiv \lambda cte. cte$  lub jego  $\eta$ -reduktem:  $\lambda c. c$ .

### 1.6.3 Pary w rachunku $\lambda$

Parą nazywamy każdy nierekurencyjny typ, który posiada jeden konstruktor wartości parametryzowany przez dwa typy. W takim wypadku potrzebujemy dwóch projekcji zwracających odpowiednio pierwszy i drugi element pary. Przykładem takiego typu jest `Tuple`. Mamy wówczas:

```
fst (Tuple a b) = a
snd (Tuple a b) = b
```

Tego rodzaju typy możemy reprezentować przez domknięcie. Standardowym sposobem reprezentacji pary w rachunku  $\lambda$  jest:

$$\text{Tuple} \equiv \lambda abf. fab$$

Używając wyrażenia `let`, powyższą reprezentację możemy przepisać w postaci:

$$\text{let } a = a \text{ } b = b \text{ in } f$$

Aplikując `Tuple` tylko do dwóch termów (*domykając* term `Tuple`) otrzymujemy reprezentację pary. Argument  $f$  nazywamy *kontynuacją*, gdyż aplikując  $(\text{Tuple } x \ y)$  dla dowolnych  $x, y \in \Lambda$  do pewnego  $f \in \Lambda$ , w

konsekwencji  $x$  i  $y$  zostają zaaplikowane do  $f$ . Zauważmy, że wówczas reprezentacja **fst** i **snd** ma postać:

$$\begin{aligned}\text{fst} &\equiv \lambda t. t(\lambda ab. a) \\ \text{snd} &\equiv \lambda t. t(\lambda ab. b)\end{aligned}$$

**Przykład 12.** Wprowadzone konstrukcje pozwalają nam na definicję skończonych (w sensie liczby konstruktorów) typów. Rozważmy następujące przykłady:

a) Konstruktory wartości typu **Maybe** możemy reprezentować przez

$$\begin{aligned}\text{Nothing} &\equiv \lambda nj. n \\ \text{Just} &\equiv \lambda anj. ja\end{aligned}$$

Rozważmy następującą funkcję:

```
maybe :: b -> (a -> b) -> Maybe a -> b
maybe n _ Nothing = n
maybe _ f (Just x) = f x
```

Odpowiadająca jej reprezentacja to

$$\text{maybe} \equiv \lambda bft. tb(\lambda a. fa)$$

b) Rozważmy następującą funkcję

```
fromTemperature :: Temperature -> Int
fromTemperature (Fahrenheit a) = a
fromTemperature (Celsius a) = a
```

Ustalając reprezentację konstruktorów **Fahrenheit** i **Celsius**:

$$\begin{aligned}\text{Fahrenheit} &\equiv \lambda tfc. ft \\ \text{Celsius} &\equiv \lambda tfc. ct\end{aligned}$$

otrzymujemy reprezentację funkcji **fromTemperature** postaci:

$$\text{fromTemperature} \equiv \lambda t. t(\lambda f. f)(\lambda c. c)$$

#### 1.6.4 Kodowanie rekurencji

Rozważmy następującą funkcję dodawania liczb Peano w języku Haskell:

```
add Zero    m = m
add (Succ n) m = Succ (add n m)
```

Funkcję tę możemy wyrazić w rachunku  $\lambda$  przy pomocy kodowania Scotta w następujący sposób:

$$\text{add}_0 \equiv \lambda n m. n m (\lambda n. \text{Succ}(\text{add}_0 n m))$$

Formalizm rachunku  $\lambda$  nie pozwala na określanie nowych nazw i rekurencyjne odnoszenie się przez nie do nich samych. Standardową techniką w rachunku  $\lambda$  do określania funkcji w ten sposób jest użycie operatora punktu stałego  $Y$ . Przypomnijmy:

$$Y \equiv \lambda f. (\lambda x. (f(xx))\lambda x. (f(xx))).$$

Wówczas określamy

$$\text{add}_Y \equiv Y (\lambda a n m. n m (\lambda n. \text{Succ}(a n m)))$$

Mając na uwadze możliwość przeprowadzenia powyższej konstrukcji przy użyciu rekurencji, będziemy dopuszczali w notacji odnoszenie się wprowadzanych  $\lambda$ -termów do nich samych.

#### 1.6.5 Kodowanie Scotta typów rekursywnych

Stosując metody kodowania prostych typów wyliczeniowych i par, łatwo odnajdujemy reprezentację konstruktorów wartości dla typów `Nat` i `List`:

$$\begin{array}{ll} \text{Zero} \equiv \lambda z s. z & \text{Nil} \equiv \lambda n c. n \\ \text{Succ} \equiv \lambda n z s. s n & \text{Cons} \equiv \lambda x x_s n c. c x x_s \end{array}$$

Zwróćmy uwagę, że konstruktory `Nat` i `Maybe` są swoimi  $\alpha$ -konwersami. Podobieństwo nie jest przypadkowe: na poziomie typów konstrukcja `Maybe` jest odpowiednikiem brania następnika. Określając dodatkowo  $\text{Void} \equiv \lambda x. x$  jako element neutralny działania łącznego, otrzymujemy na poziomie typów strukturę półpierścienia z działaniem mnożenia określoną przez konstrukcję par i działaniem dodawania określonego przez konstrukcję typów wyliczeniowych. Stąd algebraiczne typy danych biorą swoją nazwę.

Z łatwością możemy określić teraz operacje brania poprzednika, głowy i ogona listy, odpowiednio:

$$\begin{aligned}\text{pred} &\equiv \lambda n. n \text{ undef } (\lambda m. m) \\ \text{head} &\equiv \lambda x_s. x_s \text{ undef } (\lambda x_s. x) \\ \text{tail} &\equiv \lambda x_s. \text{undef } (\lambda x_s. x_s)\end{aligned}$$

gdzie `undef` jest stałą o którą rozszerzamy rachunek  $\lambda$  celem sygnalizowania błędnej aplikacji.

Celem lepszego porównania kodowania Churcha i Scotta podamy reprezentacje funkcji `foldl` dla typu `Nat`. Określmy:

$$\begin{aligned}\text{foldl } f \ x \ \text{Zero} &= x \\ \text{foldl } f \ x \ (\text{Succ } n) &= f \ (\text{foldl } f \ x \ n)\end{aligned}$$

`foldl` może być przy pomocy kodowania Scotta zapisane jako

$$\text{foldl} \equiv \lambda f \ x \ n. n \ x \ (\lambda n. (\text{foldl } f \ x \ n))$$

Ogólnie, przy pomocy `foldl` wyabstrahowujemy pojęcie tzw. rekursji od strony ogona (ang. *tail recursion*), w teorii obliczalności nazywane rekursją prostą lub, popularnie, zwijaniem od lewej. Operator `foldl` spełnia następującą własność [Hut99]

$$f = \text{foldl } \varphi \ a \iff \begin{cases} f \ \text{Zero} = a \\ f \ (\text{Succ } n) = \varphi \ (f \ n) \end{cases} \quad (3)$$

### 1.6.6 Kodowanie Churcha typów rekursywnych

Przedstawimy teraz klasyczny sposób kodowania typów po raz pierwszy zaprezentowany dla liczb naturalnych przez A. Churcha w [Chu41]. Różni się on od kodowania Scotta tylko w przypadku typów rekursywnych, w pozostałych przypadkach obydwa kodowania dają te same rezultaty. Typ `Nat` ma dwa konstruktory: `Zero` i `Succ`. W kodowaniu Churcha reprezentujemy je w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\text{Zero}_{Ch} &\equiv \lambda f \ x. x \\ \text{Succ}_{Ch} &\equiv \lambda n \ f \ x. f \ (n \ f \ x)\end{aligned}$$

Wyrażenia będące skutkiem konsekwentnej aplikacji `Succ` do `Zero` w literaturze popularnie nazywa się *liczebnikami Churcha* i oznacza na-

stępująco:

$$\begin{aligned}\bar{1} &\equiv \text{Succ}_{Ch} \text{Zero}_{Ch} =_{\beta} \lambda f x. f x \\ \bar{2} &\equiv \text{Succ}_{Ch} \text{Succ}_{Ch} \text{Zero}_{Ch} =_{\beta} \lambda f x. f f x \\ &\vdots \\ \bar{n} &\equiv \text{Succ}_{Ch}^n \text{Zero}_{Ch} =_{\beta} \lambda f x. f^n x\end{aligned}$$

Liczba naturalna  $n$  jest kodowana przez funkcję w której jej pierwszy argument jest aplikowany  $n$  razy do drugiego argumentu. Porównując je do kodowania Scotta widzimy, że różnica polega na aplikowaniu do kontynuacji termu  $(n f x)$  w przypadku brania następnika. Da się pokazać [Hin05], że liczebniki Churcha są w istocie operacją `foldl` na argumentach `Succ` i `Zero`. Istotnie, niech  $\text{nat} \equiv \lambda c. c \text{ Succ Zero}$ . Wówczas  $\text{nat } \bar{n} =_{\beta} \bar{n}$ . Z tego powodu kodowanie operacji na liczebnikach Churcha, lub ogólnie – funkcji opartych na rekursji prostej po zbiorze liczb naturalnych – jest wyjątkowo proste przy użyciu tej metody. Przykładowo, używając metody Churcha, operację dodawania kodujemy w następujący sposób:

$$\text{add}_{Ch} \equiv \lambda n m. n \text{ Succ}_{Ch} m$$

Dla porównania, używając kodowania Scotta:

$$\text{add}_S \equiv \lambda n m. \text{foldl Succ } n m$$

### 1.6.7 Ogólny schemat kodowania Scotta typów ADT

W ogólnym przypadku, mając następującą definicję ADT:

```
data type_constructor t1 t2 ... tk = C1 t11 ... t1n1
                                     | C2 t21 ... t2n2
                                     ...
                                     | Cm tm1 ... tmnm
```

dla  $m, n \in \mathbb{N}$ , wiążemy z nią reprezentację każdego z konstruktorów:

$$\begin{aligned}C_1 &\equiv \lambda t_{11} t_{12} \dots t_{1n_1} f_1 f_2 \dots f_m. f_1 t_{11} t_{12} \dots t_{1n_1} \\ C_2 &\equiv \lambda t_{21} t_{22} \dots t_{2n_2} f_1 f_2 \dots f_m. f_2 t_{21} t_{22} \dots t_{2n_2} \\ &\vdots \\ C_m &\equiv \lambda t_{m1} t_{m2} \dots t_{mn_m} f_1 f_m \dots f_m. f_1 t_{m1} t_{m2} \dots t_{mn_m}\end{aligned}$$

Wówczas następującą definicję częściową funkcji  $f$ :



$$\begin{aligned} f \text{ (C1 } v_{11} \dots v_{1n_1}) &= y_1 \\ \dots & \\ f \text{ (Cm } v_{m1} \dots v_{mn_m}) &= y_m \end{aligned}$$

kodujemy przy za pomocą następującego  $\lambda$ -termu:

$$\begin{aligned} \lambda x. x (\lambda v_{11} \dots v_{1n_1}. y_1) \\ \vdots \\ (\lambda v_{m1} \dots v_{mn_m}. y_m) \end{aligned}$$

gdzie  $y_i$  są kodowaniami Scotta  $y_i$  dla  $i \in \mathbb{N}$ .

## 1.7 Podsumowanie

Istotą rachunku  $\lambda$  bez typów jest uchwycenie pojęcia aplikacji argumentu do funkcji. Kodując selektor `if` dla typu `Boolean` w 1.6.2 zauważmy, że nic nie powstrzymuje nas przed zaaplikowaniem do wyrażenia `if` dowolnego  $\lambda$ -termu. Analogiczna sytuacja ma miejsce, gdy określamy operacje na reprezentacji liczb naturalnych. Widzimy, że w ramach tak zakrojonego systemu nie mamy możliwości uchwycenia które rezultaty są sensowne. Jak przekonamy się w Rozdziale 2, problem ten eliminuje w pewnym stopniu rozszerzenie systemu rachunku  $\lambda$  o typy wyrażeń. Wówczas aplikacja argumentu do funkcji wymaga wcześniejszej *weryfikacji* typu, zaś typy argumentów oraz rezultatu funkcji są z góry określone (z dokładnością do podstawienia). Niestety, w rezultacie otrzymujemy system w którym wiele sensownych wyrażeń możliwych do zbudowania w rachunku  $\lambda$  nie jest poprawnych. W dziedzinie projektowania języków programowania pożądane zaś są bogate systemy typów, które jednocześnie nie ograniczają ekspresji (lub mówiąc bardziej obrazowo: pozwalają na określenie większej ilości poprawnie zbudowanych programów, ograniczając ilość tych błędnych).

## 2 Rachunek $\lambda$ z typami prostymi

### 2.1 Typy proste

Niech  $U$  będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych  $p, q, \dots$  (być może indeksowanych liczbami naturalnymi), które będziemy nazywali *zmiennymi typowymi*.

**Definicja 37.** (Typy proste) *Typami prostymi* będziemy określali najmniejszy w sensie mnogościowym zbiór wyrażeń taki, że:

- (S1) Jeśli  $p$  jest zmienną typową, to  $p$  jest typem prostym.
- (S2) Jeśli  $\sigma$  i  $\tau$  są typami prostymi, to  $(\sigma \rightarrow \tau)$  jest typem prostym.

Zmienne typowe nazywa się w literaturze niekiedy *stałymi typowymi*<sup>8</sup>. Typy proste zbudowane tylko wedle reguły (S1) nazywamy typami *atomowymi*, zaś wyrażenia zbudowe wedle reguły (S2) – typami *funkcyjnymi*. Zbiór typów prostych określony w myśl powyższej definicji będziemy oznaczali przez  $\mathbb{T}$ . Definicję 37 można równoznacznie wyrazić przy pomocy notacji Backusa-Naura. Wówczas ma ona następującą, zwięzłą postać:

$$\mathbb{T} \leftarrow U \mid (\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T})$$

Późniejsze litery alfabetu greckiego ( $\sigma, \tau, \rho, \dots$ ), być może z indeksami, będą służyły nam za zmienne metasyntaktyczne do oznaczania typów prostych. Dla lepszej czytelności będziemy pomijali najbardziej zewnętrzne nawiasy. Konstruktor typu  $\rightarrow$  wiąże prawostronnie; oznacza to, że typy  $\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho$  oraz  $\sigma \rightarrow (\tau \rightarrow \rho)$  będziemy uznawali za tożsame.

Zauważmy, że obiekty skonstruowane w myśl Definicji 37 mają strukturę drzewa binarnego. Wysokość takiego drzewa będziemy nazywali *stopniem* typu.

**Definicja 38.** (Stopień typu) Stopniem typu nazywamy następująco określoną funkcję  $\delta: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \delta(p) &= 0, \text{ gdzie } p \text{ jest typem atomowym,} \\ \delta(\sigma \rightarrow \tau) &= 1 + \max(\delta(\sigma), \delta(\tau)). \end{aligned}$$

**Definicja 39.** (Stwierdzenie, deklaracja, kontekst, sąd)

---

<sup>8</sup>Ta raczej nieszczęśliwa konwencja podkreśla fakt, że abstrakcja nie może odbywać się po zmiennych typowych.

- (1) *Stwierdzeniem* (ang. *statement*) nazywamy każdy napis postaci  $M : \sigma$ , gdzie  $M \in \mathbf{\Lambda}$  i  $\sigma \in \mathbb{T}$ . W stwierdzeniu  $M : \sigma$   $\lambda$ -term  $M$  nazwamy *podmiotem* (ang. *subject*), zaś  $\sigma$  – *predykatem*<sup>9</sup>.
- (2) *Deklaracją* (ang. *declaration*) nazywamy każde stwierdzenie w którym podmiot jest zmienną termową.
- (3) *Kontekstem* (ang. *context*) nazywamy skończony liniowo uporządkowany zbiór (*listę*) deklaracji, w którym wszystkie podmioty są wzajemnie różne.
- (4) *Sądem* (ang. *judgement*) nazywamy każdy napis postaci  $\Gamma \vdash M : \sigma$ , gdzie  $\Gamma$  jest kontekstem, zaś  $M : \sigma$  – stwierdzeniem.

**Definicja 40.** (1) Jeśli  $\Gamma = (x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n)$ , to liniowo uporządkowany zbiór  $\text{dom } \Gamma = (x_1, \dots, x_n)$  nazywamy *dziedzina* kontekstu  $\Gamma$ , zaś  $\text{rg } \Gamma$  – *zakresem* kontekstu  $\Gamma$  oraz

$$\begin{aligned}\text{dom } \Gamma &= \{M \in \mathbf{\Lambda} \mid (x : \sigma) \in \Gamma\}, \\ \text{rg } \Gamma &= \{\sigma \in \mathbb{T} \mid (x : \sigma) \in \Gamma\}.\end{aligned}$$

- (2) Kontekst  $\Gamma'$  nazywamy *podkontekstem*  $\Gamma$  i piszemy  $\Gamma' \subseteq \Gamma$ , jeśli wszystkie deklaracje występujące w  $\Gamma'$  występują również w  $\Gamma$  z zachowaniem tego samego porządku.
- (3) Kontekst  $\Gamma'$  nazywamy *permutacją* kontekstu  $\Gamma$ , jeśli wszystkie deklaracje w  $\Gamma'$  występują w  $\Gamma$  i odwrotnie.
- (4) Jeśli  $\Gamma$  jest kontekstem i  $\Phi$  jest zbiorem  $\lambda$ -zmiennych, wówczas *projekcją*  $\Gamma$  na  $\Phi$  (symbolicznie  $\Gamma \upharpoonright \Phi$ ) nazywamy podkontekst  $\Gamma'$  kontekstu  $\Gamma$  taki, że  $\text{dom } \Gamma' = (\text{dom } \Gamma) \cap \Phi$
- (5) Dla kontekstów  $\Gamma = (x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_m)$  i  $\Gamma' = (y_1 : \rho_1, \dots, y_n : \rho_n)$  takich, że  $\text{dom}(\Gamma) \cap \text{dom}(\Gamma') = \emptyset$  *konkatenacją*  $\Gamma$  i  $\Gamma'$  nazywamy kontekst

$$\Gamma \# \Gamma' = (x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_m, y_1 : \rho_1, \dots, y_n : \rho_n).$$

**Przykład 13.** Niech  $\Gamma \equiv (y : \sigma, x_1 : \rho_1, x_2 : \rho_2, z : \tau, x_3 : \rho_3)$ . Wówczas:

- (1)  $\text{dom } \Gamma = (y, x_1, x_2, z, x_3)$ .
- (2)  $\emptyset \subseteq (x_1 : \rho_1, z : \tau) \subseteq \Gamma$
- (3)  $(x_1 : \rho_1, x_2 : \rho_2, x_3 : \rho_3, y : \sigma, z : \tau)$  jest permutacją  $\Gamma$ .
- (4)  $\Gamma \upharpoonright \{z, u, x_1\} = (x_1 : \rho_1, z : \tau)$ .

---

<sup>9</sup>Nazwy te historycznie sięgają prac nad semantyką formalną języków naturalnych R. Montague'a.

## 2.2 Typowanie

Wprowadzamy następujące reguły wyprowadzania typu (relacji typowości):

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash x : \sigma \text{ (var),} \qquad \text{jeśli } x : \sigma \in \Gamma, \\[10pt] \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (MN) : \tau} \text{ (app),} \\[10pt] \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x. M) : \sigma \rightarrow \tau} \text{ (abs).} \end{array}$$

W systemie tym mamy do czynienia z wyraźnym podziałem na obiekty dwóch rodzajów:  $\lambda$ -termy i typy.  $\lambda$ -termy możemy przekształcać dwoma dualnymi operacjami:  $\lambda$ -abstrakcją i aplikacją. Rezultat operacji zależy od wyboru zmiennej wolnej, którą chcemy wyabstrahować z termu albo wyboru termu, który chcemy zaaplikować do innego termu, odpowiednio. Dlatego mówimy, że w rachunku  $\lambda$  z typami prostymi termy *zależą* od termów. Ponieważ abstrahowanie przebiega wyłącznie po zbiorze  $\lambda$ -zmiennych, mówimy, że zależność (abstrakcja) jest *pierwszego rzędu*.

**Definicja 41.** (Typowość)

Mówimy, że  $\lambda$ -term  $M$  jest typu  $\sigma$  w kontekście  $\Gamma$ , jeśli istnieje skończone drzewo sądów spełniające poniższe warunki:

- (D1) W korzeniu drzewa znajduje się sąd  $\Gamma \vdash M : \sigma$ .
- (D2) Liście są *aksjomatami*, czyli sądami postaci  $\Gamma \vdash x : \sigma$ .
- (D3) Każdego rodzica można otrzymać z jego dzieci przez zastosowanie któregoś z reguł wyprowadzania typu.

Tak określony obiekt będziemy nazywali *wyprowadzeniem* typu dla  $M$  (w kontekście  $\Gamma$ ) i pisali  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$ . O sądzie  $\Gamma \vdash M : \sigma$  będziemy wówczas mówili, że jest *wyprowadzalny*.

**Przykład 14.** (a) Niech  $\Gamma = (x : \sigma, y : \tau)$ . Pokażemy, że  $K = \lambda xy. x$  ma typ  $\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma$ . Istotnie,

$$\begin{array}{c} \frac{x : \sigma, y : \tau \vdash x : \sigma}{x : \sigma \vdash \lambda y. x : \tau \rightarrow \sigma} \text{ (abs)} \\ \vdash \lambda xy. x : \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma \text{ (abs)} \end{array}$$

(b) Niech  $\Gamma = (x : \tau \rightarrow \rho, y : \sigma \rightarrow \tau, z : \sigma)$ . Wówczas:

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \vdash x : \tau \rightarrow \rho \quad \frac{\Gamma \vdash y : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash z : \sigma}{\Gamma \vdash yz : \tau} \text{ (app)}}{\Gamma \vdash x(yz) : \rho} \text{ (app)} \\
\frac{\Gamma \vdash x(yz) : \rho}{x : \tau \rightarrow \sigma, y : \sigma \rightarrow \rho \vdash \lambda z. x(yz) : \sigma \rightarrow \rho} \text{ (abs)} \\
\frac{x : \tau \rightarrow \sigma, y : \sigma \rightarrow \rho \vdash \lambda z. x(yz) : \sigma \rightarrow \rho}{x : \tau \rightarrow \rho \vdash \lambda yz. x(yz) : (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho} \text{ (abs)} \\
\frac{x : \tau \rightarrow \rho \vdash \lambda yz. x(yz) : (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho}{\vdash \lambda xyz. x(yz) : (\tau \rightarrow \rho) \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho} \text{ (abs)}
\end{array}$$

(c) Nie wszystkie  $\lambda$ -termy są typowalne. Niech  $\omega \equiv (\lambda x. xx)$  i przypuśćmy, że  $\omega$  ma typ  $\sigma$  w kontekście  $\Gamma$ . Zauważmy, że wówczas w  $x : \sigma \rightarrow \sigma \in \Gamma$ . Ponieważ  $\omega$  zawiera w sobie podterm  $(xx)$ , to w wyprowadzeniu musiał on zostać otrzymany przez zastosowanie reguły (app). Wówczas  $x : \sigma \in \Gamma$  i  $x : \sigma \rightarrow \sigma \in \Gamma$ , co nie jest możliwe, bo wszystkie deklaracje w  $\Gamma$  muszą mieć różne podmioty.

*Uwaga.* Notacja dowodowa zaproponowana w Przykładzie 14 wprowadza wiele redundancji, która utrudnia zorientowanie się w dłuższych wyprowadzeniach, zaś zlinearyzowanie dowodów pozwala na notowanie kolejnych sądów w arbitralnym porządku. Nic nie stoi na przeszkodzie abyśmy ograniczyli się tylko do rozpatrywania wyprowadzeń, w których zależności pomiędzy sądami ustalają ścisły porządek częściowy, tzn. takich, że:

- żaden sąd nie poprzedza sam siebie (antyzwrotność),
- jeśli jeden sąd poprzedza drugi, to drugi nie poprzedza pierwszego (antysymetryczność),
- jeśli sąd  $J_k$  poprzedza  $J_l$  i  $J_l$  poprzedza  $J_m$ , to  $J_k$  poprzedza  $J_m$  (przechodność).

Taki charakter dowodów oddaje wariant notacji w postaci drzew wprowadzony przez Pravitz i proponowany w [HS08]. Powtarzanie się kontekstów eliminuje się w niej przez wprowadzanie każdej deklaracji do dowodu przed użyciem i wykreślanie jej po użyciu. W dalszej części pracy będziemy korzystać z analogicznej pod wieloma względami notacji Fitcha (tzw. notacji flagowej). Poniżej pokazujemy wyprowadzenia typu z Przykładu 14 w tej notacji.

(a)

1		$x : \sigma$	(var)
2		$y : \sigma$	(var)
3		$\lambda y. x : \tau \rightarrow \sigma : \sigma$	(abs) 1
4		$\lambda xy. x : \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma$	(abs) 3

(b)

1		$x : \tau \rightarrow \rho$	(var)
2		$y : \sigma \rightarrow \tau$	(var)
3		$z : \sigma$	(var)
4		$yz : \tau$	(app) 2 3
5		$x(yz) : \rho$	(app) 1 4
6		$\lambda z. x(yz) : \sigma \rightarrow \rho$	(abs) 5
7		$\lambda yz. x(yz) : (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho$	(abs) 6
8		$\lambda xyz. x(yz) : (\tau \rightarrow \rho) \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho$	(abs) 7

**Definicja 42.** (Poprawność, typowalność)  $\lambda$ -term  $M \in \mathbf{\Lambda}$  nazywamy *poprawnym* (ang. *legal*) lub *typowalnym* (ang. *typable*), jeśli istnieje wyprowadzenie  $\Gamma \vdash M : \rho$  dla pewnego kontekstu  $\Gamma$  i typu  $\rho \in \mathbb{T}$ .

### 2.2.1 Rodzaje problemów

W teorii typów spotykamy trzy rodzaje problemów dotyczące sądów:

1. *Problem typowalności* (ang. *well-typedness, typability*)

Polega na rozstrzygnięciu czy zadany term jest poprawny, czyli znalezieniu kontekstu oraz wyprowadzenia typu względem tego kontekstu dla zadanego termu. Symbolicznie:

$$? \vdash \text{term} : ?$$

Problem typowalności przy zadanym kontekście nazywamy problemem *przypisania typu* (ang. *type assignment*). Ma on następującą postać:

$$\text{kontekst} \vdash \text{term} : ?$$

2. *Problem weryfikacji typu* (ang. *type checking*)

Polega na sprawdzeniu czy term ma zadany typ względem danego kontekstu.

$$\text{kontekst} \stackrel{?}{\vdash} \text{term} : \text{typ}$$

3. *Problem inhabitacji* (ang. *inhabitation, term finding*)

Polega na skonstruowaniu termu (lub przynajmniej wykazaniu istnienia takiego termu), który miałby zadany typ względem danego kontekstu.

$$\text{kontekst} \vdash ? : \text{typ}$$

W wielu systemach problem typowości można sprowadzić do problemu weryfikacji typu. Istotnie, przypuśćmy, że  $M$  jest poprawnym termem i  $\text{FV}(M) = \{x_1, \dots, x_n\}$ . Zauważmy, że  $M$  jest typowalny, jeśli wyprowadzalny jest sąd

$$x_0 : p \vdash Kx_0(\lambda x_1 \dots x_n. M) : p,$$

gdzie  $p \in U$  jest zmienną typową, zaś kombinador  $K \equiv \lambda xy. x$ .

Wszystkie wymienione problemy są w rachunku  $\lambda$  z typami prostymi rozstrzygalne<sup>10</sup>, tzn. istnieją efektywnie obliczalne metody ich rozwiązywania. Czytelnika zainteresowanego szczegółami odsyłamy do [SU06, Twierdzenie 3.2.7] i [Bar92, Rozdział 4.4].

## 2.3 Własności

Przedstawimy teraz szereg lematów ustalających między innymi związki między rachunkiem  $\lambda$  bez typów wprowadzonym w Rozdziale 1, a rachunkiem  $\lambda$  z typami prostymi.

**Lemat 3.** (*O generowaniu*)

- (1) *Jeśli  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} x : \sigma$ , to  $x : \sigma \in \Gamma$ .*
- (2) *Jeśli  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} MN : \tau$ , to  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma \rightarrow \tau$  i  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} N : \sigma$  dla pewnego  $\sigma \in \mathbb{T}$ .*
- (3) *Jeśli  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} \lambda x. M : \tau$  i  $x \notin \text{dom } \Gamma$ , to  $\tau \equiv \tau_1 \rightarrow \tau_2$  oraz  $\Gamma, x : \tau_1 \vdash_{\mathbb{T}} N : \tau_2$ .*

---

<sup>10</sup>Nie jest to bynajmniej oczywiste dla innych systemów typów; za przykład wystarczy wziąć słynny wynik J. B. Wellsa [Wel99], który stwierdza, że problemy typowości i weryfikacji typu w Systemie F (w stylu Currego) są nierozstrzygalne. Stąd w praktyce uzasadnione jest zainteresowanie mniej ekspresywnymi systemami typów, np. systemem Hindleya-Milnera.

**Dowód.** Wynika natychmiast z postaci  $\lambda$ -termu.  $\square$

**Lemat 4.** *(O podtermie) Podterm poprawnego  $\lambda$ -termu jest poprawny.*

**Dowód.** Załóżmy, że sąd  $J : \Gamma \vdash M : \sigma$  jest wyprowadzalny. Dowód przebiega przez indukcję względem długości wyprowadzenia  $J$ . Rozważmy następujące przypadki:

- (a) Jeśli  $J$  jest konsekwencją reguły *var*, to  $\text{Sub}(M) = \{M\}$  (Definicja 2.1), a zatem teza jest trywialnie spełniona.
- (b) Jeśli  $J$  jest konsekwencją reguły *app*, to  $M \equiv PQ$  dla  $P, Q$  dla których twierdzenie zachodzi. Ponieważ  $\text{Sub}(M) = \text{Sub}(P) \cup \text{Sub}(Q) \cup \{PQ\}$  (Definicja 2.3), to teza również zachodzi.
- (c) Jeśli  $J$  jest konsekwencją reguły *abs*, to  $M \equiv \lambda x. P$  dla pewnego  $P$  dla którego twierdzenie zachodzi. Ponieważ  $\text{Sub}(\lambda x. M) = \text{Sub}(M) \cup \{\lambda x. M\}$ , (Definicja 2.5) to teza zachodzi również w tym przypadku.

$\square$

**Lemat 5.** *(O zmiennych wolnych) Jeśli sąd  $J : \Gamma \vdash L : \sigma$  jest wyprowadzalny, to  $\text{FV}(L) \subseteq \text{dom } \Gamma$ .*

**Dowód.** Prosty dowód przeprowadzamy przez indukcję względem długości wyprowadzenia sądu  $J$ . Rozważmy następujące przypadki:

- (a) Jeśli  $J$  jest konsekwencją reguły *var*, to  $L \equiv x$  dla pewnej  $\lambda$ -ziennej  $x$ . Wobec tego  $x : \sigma \in \Gamma$ , a zatem  $\text{FV}(x) \subseteq \text{dom } \Gamma$ .
- (b) Jeśli  $J$  jest konsekwencją reguły *app*, to  $J$  musi mieć postać  $\Gamma \vdash MN : \sigma$ . Z założenia indukcyjnego:  $\text{FV}(M) \subseteq \text{dom } \Gamma$  i  $\text{FV}(N) \subseteq \text{dom } \Gamma$ . Z Definicji 3:  $\text{FV}(MN) = \text{FV}(M) \cup \text{FV}(N)$ . Stąd  $\text{FV}(MN) \subseteq \text{dom } \Gamma$ .
- (c) Jeśli  $J$  jest konsekwencją reguły *abs*, to  $J$  musi mieć postać  $\Gamma \vdash \lambda x. M : \sigma$ . Z założenia indukcyjnego  $\text{FV}(M) \subseteq \text{dom } \Gamma$ . Ponieważ  $\text{FV}(\lambda x. M) = \text{FV}(M) \setminus \{x\} \subseteq \text{FV}(M)$  (z Definicji 3), to  $\text{FV}(M) \subseteq \text{dom } \Gamma$ .

$\square$

**Lemat 6.** *(1) Niech  $\Gamma'$  i  $\Gamma''$  będą kontekstami takimi, że  $\Gamma' \subseteq \Gamma''$ . Jeśli  $\Gamma' \vdash M : \sigma$ , to  $\Gamma'' \vdash M : \sigma$ .*

*(2) Jeśli  $\Gamma \vdash M : \sigma$ , to  $\Gamma \upharpoonright \text{FV}(M) \vdash M : \sigma$ .*



(3) Jeśli  $\Gamma \vdash M : \sigma$  i  $\Gamma'$  jest permutacją  $\Gamma$ , to  $\Gamma' \vdash M : \sigma$ .

**Dowód.** Dowody przebiegają przez indukcję względem długości wyprowadzenia. Czytelnika zainteresowanego szczegółami odsyłamy do [Bar92, Tw. 3.1.7].  $\square$

*Uwaga.* Zauważmy, że (6.(3)) rozluźnia konieczność eliminowania maksymalnej deklaracji z kontekstu przy stosowaniu reguły *abs*. W tekstach wprowadzających typy proste zazwyczaj przez kontekst rozumie się po prostu skończony zbiór wzajemnie różnych deklaracji [Bar92; SU06; HS08]. Ponieważ branie dowolnej permutacji listy nie wpływa na typowanie, to widzimy, że obydwa znaczenia możemy stosować zamiennie, bowiem jest to nic innego jak traktowanie kontekstu jako zbioru deklaracji.

**Lemat 7.** (O podstawieniu) Załóżmy, że

(a)  $\Gamma_1, x : \sigma, \Gamma_2 \vdash M : \rho$

(b)  $\Gamma_1 \vdash N : \sigma$

Wówczas  $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash M[x/N] : \rho$ .

**Dowód.** Niech  $\Gamma = \Gamma_1 \# \Gamma_2$ . Korzystając z części (3) Lematu 6 dowód przeprowadzimy przez indukcję względem długości wyprowadzenia  $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$ . Rozważmy następujące przypadki:

- (i) Jeśli  $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$  jest konsekwencją reguły *var*, to  $M \equiv x$ . Wówczas  $M[x/N] \equiv N$  i  $\rho \equiv \sigma$ . Teza zachodzi w oczywisty sposób.
- (ii)  $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$  jest konsekwencją reguły *app*. Wówczas  $M \equiv PQ$  i istnieją wyprowadzenia  $\Gamma, x : \sigma \vdash P : \tau \rightarrow \rho$  oraz  $\Gamma, x : \sigma \vdash Q : \tau$ . Z założenia indukcyjnego mamy, że  $\Gamma \vdash P[x/N] : \tau \rightarrow \rho$  oraz  $\Gamma \vdash Q[x/N] : \tau$ . Wówczas stosując regułę *app* mamy:

$$\frac{\Gamma \vdash P[x/N] : \tau \rightarrow \rho \quad \Gamma \vdash Q[x/N] : \tau}{\Gamma \vdash (P[x/N]Q[x/N]) : \rho} \text{ (app)},$$

Tezę otrzymujemy z faktu, że  $(PQ)[x/N] = P[x/N]Q[x/N]$ .

- (iii) Jeśli  $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$  jest konsekwencją reguły *abs*, to  $M \equiv \lambda y. P : \rho$  dla  $\rho \equiv \sigma \rightarrow \tau, y \notin x$ . Z założenia indukcyjnego istnieje wyprowadzenie  $\Gamma', y : \tau \vdash P[x/N] : \rho$ , gdzie  $\Gamma' = \Gamma \# (x : \sigma)$ . Wówczas, stosując regułę *abs* mamy:

$$\frac{\Gamma', y : \tau \vdash P[x/N] : \rho}{\Gamma' \vdash (\lambda y. P[x/N]) : \tau \rightarrow \rho} \text{ (abs)}$$

Ponieważ  $(\lambda y. P)[x/N] = \lambda y. P[x/N]$  oraz  $M \equiv \lambda y. P : \tau \rightarrow \rho$ , otrzymujemy tezę.

□

**Lemat 8.** (*Redukcja podmiotu*) Załóżmy, że

(i)  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$

(ii)  $M \rightarrow_{\beta}^* N$

Wówczas  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} N : \sigma$ .

**Dowód.** Pokażemy, że twierdzenie zachodzi dla jednego kroku redukcji  $\rightarrow_{\beta}$ . Dowód zwrotności jest trywialny, zaś aby pokazać przechodność wystarczy skorzystać z indukcji względem długości ciągu redukcji.

Niech  $M \rightarrow_{\beta} N$ . Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem długości wyprowadzenia  $\Gamma \vdash M : \sigma$ . Rozważmy następujące przypadki:

- (a)  $\Gamma \vdash M : \sigma$  jest konsekwencją reguły *var*. Wówczas  $M \equiv x$  dla pewnej  $\lambda$ -zmiennnej  $x \in V$ . Wówczas poprzednik nie jest spełniony, bowiem  $M$  nie da się zredukować. Zatem twierdzenie trywialnie zachodzi.
- (b)  $\Gamma \vdash M : \sigma$  jest konsekwencją reguły *app*. Wówczas  $M \equiv PQ$  oraz istnieją wyprowadzenia  $\Gamma \vdash P : \tau \rightarrow \sigma$  oraz  $\Gamma \vdash Q : \sigma$ . Ponadto zakładamy, że dla pewnych  $P', Q' \in \Lambda$  mamy  $P \rightarrow_{\beta} P'$  i  $Q \rightarrow_{\beta} Q'$ . Istnieją dwie możliwości redukcji  $M \rightarrow_{\beta} N$ :

- (1)  $N \equiv PQ'$ . Ponieważ  $\Gamma \vdash Q' : \sigma$  (założenie indukcyjne), to możemy zastosować regułę *app*:

$$\frac{\Gamma \vdash P : \tau \rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash Q' : \sigma}{\Gamma \vdash PQ' : \sigma} \text{ (app)},$$

Ponieważ  $N \equiv PQ'$ , to otrzymujemy tezę.

- (2)  $N \equiv P'Q$ . Postępujemy analogicznie do przypadku (1)

- (c)  $\Gamma \vdash M : \sigma$  jest konsekwencją reguły *abs*. Wówczas  $M \equiv \lambda x. P$ , dla pewnych  $\rho, \tau \in \mathbb{T}$  mamy  $\sigma \equiv \rho \rightarrow \tau$  oraz istnieje wyprowadzenie sądu  $\Gamma, x : \rho \vdash P : \tau$ . Ponadto zakładamy, że dla pewnego  $P' \in \Lambda$  mamy  $P \rightarrow_{\beta} P'$ .  $\beta$ -redukcja  $M \rightarrow_{\beta} N$  musi prowadzić w tym wypadku do  $N \equiv \lambda x. P'$ . Ponieważ  $\Gamma, x : \rho \vdash P' : \tau$  (założenie indukcyjne), to możemy zastosować regułę *abs*:

$$\frac{\Gamma', x : \rho \vdash P' : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. P' : \rho \rightarrow \tau} \text{ (abs)}$$

Stąd teza.

□

**Lemat 9.** (Zachowawczość  $\eta$ -redukcji) Załóżmy, że

$$(i) \quad \Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$$

$$(ii) \quad M \rightarrow_{\eta}^* N$$

Wówczas  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} N : \sigma$ .

**Dowód.** Dowód przeprowadzamy analogicznie do Lematu 8. □

**Twierdzenie 6.** (Własność Churcha-Rossera) Relacja  $\rightarrow_{\beta}$  określona na typowalnych  $\lambda$ -termach ma własność CR.

**Dowód.** Wynika to bezpośrednio z Twierdzenia 1 i Lematu 8. □

### 2.3.1 Uniwersalny polimorfizm

Jak wspominaliśmy, istnieje kilka wariantów wprowadzania typów prostych. Przedstawiony w tym rozdziale rachunek powszechnie nazywany jest *stylem Currego*. Charakteryzuje go interesująca własność: poprawne termy mają jednoznacznie wyznaczony typ z dokładnością do podstawienia. Oznacza to, że zmienne występujące w typie każdego poprawnego termu są w istocie kwantyfikowane po zbiorze wszystkich typów prostych. Każdy taki typ nazywamy *typem (uniwersalnie parametrycznie) polimorficznym* zgodnie z klasyfikacją zaproponowaną w [CW85].

**Definicja 43.** (Podstawienie typu) Podstawienie typu  $\tau$  za zmienną typową  $p$  w typie  $\sigma$  nazywamy następującą funkcję :

$$\begin{aligned} p[p/\tau] &= \tau, \\ q[p/\tau] &= q, \text{ jeśli } q \neq p, \\ (\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)[p/\tau] &= \sigma_1[p/\tau] \rightarrow \sigma_2[p/\tau]. \end{aligned}$$

Jeśli  $\Gamma$  jest kontekstem, to przez  $\Gamma[p/\tau]$  oznaczamy podstawienie  $\tau$  za zmienną  $p$  dla wszystkich typów występujących w  $\Gamma$ .

**Lemat 10.** Jeśli  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$ , to  $\Gamma[p/\tau] \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma[p/\tau]$  dla dowolnego  $\tau \in \mathbb{T}$  i zmiennej  $p \in U$ .

**Dowód.** Dowód przebiega przez indukcję względem długości wyprowadzenia  $\Gamma \vdash M : \sigma$ . Szczegóły pomijamy.  $\square$

Mając na uwadze Lemat 10 możemy wnioskować o wielu własnościach funkcji reprezentowanych przez  $\lambda$ -termy tylko na podstawie typu. Na przykład typowi  $\sigma \rightarrow \sigma$  odpowiada dokładnie jeden (z dokładnością do  $\alpha$ -konwersji) term  $\lambda x. x$  i reprezentuje on funkcję identycznościową; typom  $\sigma \rightarrow \rho \rightarrow \sigma$  i  $\sigma \rightarrow \rho \rightarrow \rho$  odpowiednio przypisać możemy wyłącznie projekcje  $\text{fst}$  i  $\text{snd}$  (określone w 1.6.3), zaś typowi  $(\rho \rightarrow \tau) \rightarrow (\sigma \rightarrow \rho) \rightarrow \sigma \rightarrow \tau$  term  $\lambda g f x. g(fx)$  reprezentujący złożenie funkcji (Przykład 14 (b)), co do której wiemy z kolei, że jest łączna. Jest to wyraz ogólnej zależności: dysponując dowolnym typem polimorficznym otrzymujemy *twierdzenie za darmo* [Wad89] dotyczące termów, które mają ten typ.

### 2.3.2 Silna normalizacja

Pokażemy, że wszystkie typowalne  $\lambda$ -termy redukują się do postaci  $\beta$ -normalnej przez skończony ciąg  $\beta$ -redukcji. Oznacza to, że nie ma możliwości otrzymania nieskończonego ciągu  $\beta$ -redukcji, tak jak to miało miejsce w Przykładzie 8 (a) (b) i to bez względu na przyjętą strategię redukcji.

Ponieważ wszystkie  $\lambda$ -termy samoreplikujące się przy  $\beta$ -redukcji nie są typowalne, nie jest możliwe w rachunku  $\lambda$  z typami prostymi reprezentowanie rekurencyjnych typów ADT w myśl podrozdziału 1.6.4. Wynika to z faktu, że dodanie typów prostych do rachunku  $\lambda$  bez typów znacznie zmniejsza ekspresywność systemu, uniemożliwiając wyrażenie operacji rekursji prostej. Okazuje się, że stosując reprezentację Churcha dla liczb naturalnych i utożsamiając  $\lambda$ -termy za pomocą  $\beta$ -konwersji, rachunek  $\lambda$  z typami prostymi równoważny jest zbiorowi *wielomianów rozszerzonych* [Zak07]. Liczebnikom Churcha odpowiada wówczas typ postaci  $(\sigma \rightarrow \sigma) \rightarrow \sigma \rightarrow \sigma$  i możliwe jest określenie na nich dodawania i mnożenia.

Ponieważ wszystkie ciągi redukcji są w tym systemie skończone, to relacja  $\beta$ -konwersji jest rozstrzygalna, wystarczy bowiem sprowadzić jej argumenty do postaci normalnej<sup>11</sup>. Opracowany tutaj dowód pochodzi z [HS08, Dodatek A3]. Polega on na:

1. Konstrukcji interpretacji dla typów prostych: termów redukowalnych.

<sup>11</sup>Rodzi to jednak nietrywialne problemy natury złożonościowej [SU06, Rozdział 3.7].

2. Wykazaniu, że każdy term redukowalny jest silnie normalizowalny.
3. Wykazaniu, że każdy typowalny term jest redukowalny.

Rozumowanie przedstawione w tym dowodzie, tzw. *computability method* oryginalnie przypisywane W. Taitowi [Tai67], z odpowiednimi zmianami stosuje się w dowodach własności silnej normalizacji dla innych systemów typów [SU06, Podrozdział 11.5][GTL89, Rozdział 6].

**Definicja 44.** (Termy redukowalne) Niech  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$ . Powiemy, że  $M$  jest *redukowalny* (także *silnie obliczalny*), jeśli spełnia poniższe warunki:

- (R1) Jeśli  $\sigma$  jest zmienną typową, to  $M$  jest silnie normalizowalny. Określamy:

$$\llbracket \sigma \rrbracket = \text{SN}.$$

- (R2) Jeśli  $\sigma$  jest typem funkcyjnym postaci  $\sigma \equiv \rho \rightarrow \tau$ , to dla wszystkich termów redukowalnych  $N$  takich, że  $\Gamma' \vdash_{\mathbb{T}} MN : \tau$ ,  $MN$  jest redukowalny. Określamy:

$$\llbracket \rho \rightarrow \tau \rrbracket = \{M \mid \forall N (N \in \llbracket \rho \rrbracket) \implies MN \in \llbracket \tau \rrbracket\}.$$

**Lemat 11.** Niech  $\tau \in \mathbb{T}$  będzie dowolnym typem prostym. Wówczas:

- (1)  $\llbracket \tau \rrbracket \subseteq \text{SN}$ .
- (2) Jeśli  $N_1, N_2, \dots, N_k \in \text{SN}$ , to  $xN_1N_2 \dots N_k \in \llbracket \tau \rrbracket$ .

**Dowód.** Dowód przeprowadzimy przez indukcję strukturalną względem typu  $\tau$ . Mamy do rozważenia następujące dwa przypadki:

- (a)  $\tau$  jest zmienną typową.
  - (1) Wynika bezpośrednio z definicji  $\llbracket \tau \rrbracket \in \text{SN}$ .
  - (2) Niech  $N_1, N_2, \dots, N_k \in \text{SN}$ . Wówczas  $N_1, N_2, \dots, N_k \in \text{SN}$ . Z definicji  $\llbracket \tau \rrbracket$  mamy, że  $xN_1N_2 \dots N_k \in \llbracket \tau \rrbracket$ .
- (b) Przypuśćmy, że  $\tau = \sigma \rightarrow \rho$  oraz twierdzenie zachodzi dla  $\sigma$  i  $\rho$ .
  - (1) Niech  $M \in \llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket$  i niech  $x$  będzie dowolną  $\lambda$ -zmienną. Z części (2) założenia indukcyjnego mamy  $x \in \llbracket \sigma \rrbracket$ , zatem z definicji  $\llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket$  mamy  $Mx \in \llbracket \rho \rrbracket$ . Ponieważ z części (1) założenia indukcyjnego  $\llbracket \rho \rrbracket \in \text{SN}$ , to  $Mx \in \text{SN}$  i w konsekwencji  $\llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket \subseteq \text{SN}$ .

- (2) Niech  $P \in \llbracket \sigma \rrbracket$ . Wówczas z części (1) założenia indukcyjnego  $P \in \text{SN}$ . Chcemy pokazać, że  $xN_1N_2 \dots N_k \in \llbracket \rho \rrbracket$ . Z części (2) założenia indukcyjnego

$$xN_1N_2 \dots N_kN_{k+1} \in \llbracket \rho \rrbracket.$$

Ustalając  $N_{k+1} \equiv P$  otrzymujemy tezę.

□

**Lemat 12.** *Założmy, że:*

- (a)  $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \in \text{SN}$ ,
- (b)  $N_0 \in \text{SN}$ .

Wówczas  $(\lambda x. M)N_0N_1 \dots N_k \in \text{SN}$ .

**Dowód.** (Ad absurdum) Przypuśćmy, że  $P_0 \equiv (\lambda x. M)N_0N_1 \dots N_k \notin \text{SN}$ . Wówczas istnieje nieskończony ciąg redukcji

$$P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots$$

Każdy podterm  $\lambda$ -termu silnie normalizowalnego jest silnie normalizowalny. Ponieważ  $P_0 \equiv M[x/N_0]N_0N_1 \dots N_k \in \text{SN}$ , to  $M[x/N_0]$ ,  $N_0$ ,  $N_1$ ,  $\dots$ ,  $N_k \in \text{SN}$ . Na podstawie Lematu 2 mamy ponadto, że  $M \in \text{SN}$ . Wobec tego dla pewnego  $n \in \mathbb{N}$  redukcji ulega redekso czołowy:

$$P_n \equiv (\lambda x. M')N'_0N'_1 \dots N'_k \rightarrow_\beta M'[x/N'_0]N'_0N'_1 \dots N'_k \equiv P_{n+1},$$

gdzie  $M \rightarrow_\beta^* M'$  oraz  $N_i \rightarrow_\beta^* N'_i$  dla  $i \leq k$ . Ale skoro tak, to prawdą jest również, że  $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \rightarrow_\beta^* P_{n+1}$ , zaś  $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \in \text{SN}$ . Zatem  $P_{n+1} \in \text{SN}$ , co prowadzi do sprzeczności. □

**Lemat 13.** *Założmy, że:*

- (a)  $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \in \llbracket \tau \rrbracket$ ,
- (b)  $N_0 \in \text{SN}$ .

Wówczas  $(\lambda x. M)N_0N_1 \dots N_k \in \llbracket \tau \rrbracket$ .

**Dowód.** Dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem  $\tau$ . Rozważmy następujące przypadki:

- (a) Jeśli  $\tau$  jest zmienną typową, to  $\llbracket \tau \rrbracket = \text{SN}$ . Wobec tego problem sprowadza się do Lematu 12.

- (b) Przypuśćmy, że  $\tau \equiv \sigma \rightarrow \rho$  i niech  $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \in \llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket$ . Wybierzmy dowolny  $P \in \llbracket \sigma \rrbracket$ . Wówczas  $M[x/N_0]N_1 \dots N_k N_{k+1} \in \llbracket \rho \rrbracket$ . Z założenia indukcyjnego mamy jednak, że  $(\lambda x. M)N_0 N_1 \dots N_k N_{k+1} \in \llbracket \rho \rrbracket$ . Wystarczy więc przyjąć  $N_{k+1} \equiv P$  i z definicji  $\llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket$  mamy, że  $(\lambda x. M)N_0 N_1 \dots N_k \in \llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket$ .

□

**Definicja 45.** Powiemy, że kontekst  $\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, x_2 : \sigma_2, \dots, x_n : \sigma_n\}$  spełnia stwierdzenie  $M : \sigma$  i będziemy pisali  $\Gamma \models M : \sigma$ , jeśli dla dowolnych  $N_1 \in \llbracket \sigma_1 \rrbracket, N_2 \in \llbracket \sigma_2 \rrbracket, \dots, N_n \in \llbracket \sigma_n \rrbracket$  mamy, że:

$$M[x_1/N_1, x_2/N_2, \dots, x_n/N_n] \in \llbracket \sigma \rrbracket.$$

**Lemat 14.** Jeśli  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \tau$ , to  $\Gamma \models M : \tau$ .

**Dowód.** Dowód będzie przebiegał przez indukcję względem wyprowadzenia  $\Gamma \vdash M : \tau$ . Niech  $\Gamma = (x_1 : \tau_1, x_2 : \tau_2, \dots, x_n : \tau_n)$  będzie kontekstem dla którego istnieje wyprowadzenie  $J : \Gamma \vdash M : \tau$ . Wybierzmy  $N_1 \in \llbracket \tau_1 \rrbracket, N_2 \in \llbracket \tau_2 \rrbracket, \dots, N_n \in \llbracket \tau_n \rrbracket$ . Rozważmy następujące przypadki:

- (a)  $J$  jest konsekwencją reguły *var*. Wówczas  $J$  jest postaci  $\Gamma \vdash x_i : \tau$  dla pewnego  $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$ , gdzie  $x_i : \tau \in \Gamma$ . Stąd  $M[\vec{x}/\vec{N}] = x_i[x_i/N_i] = N_i \in \llbracket \tau \rrbracket$ . Z dowolności  $N_i, \Gamma \models M : \tau$ .
- (b)  $J$  jest konsekwencją reguły *app*. Wówczas  $J$  jest postaci  $\Gamma \vdash PQ : \tau$ . Z założenia indukcyjnego istnieje  $\sigma \in \mathbb{T}$  takie, że  $\Gamma \models P : \sigma \rightarrow \tau$  i  $\Gamma \models Q : \sigma$ . Wobec tego  $P[\vec{x}/\vec{N}] \in \llbracket \sigma \rightarrow \tau \rrbracket$  i  $Q[\vec{x}/\vec{N}] \in \llbracket \sigma \rrbracket$ . Z definicji jednoczesnego podstawienia (Definicja 11) mamy:

$$PQ[\vec{x}/\vec{N}] = P[\vec{x}/\vec{N}]Q[\vec{x}/\vec{N}]$$

Z definicji  $\llbracket \sigma \rightarrow \tau \rrbracket$  wówczas  $M \in \llbracket \tau \rrbracket$ .

- (c)  $J$  jest konsekwencją reguły *abs*. Wówczas  $J$  jest postaci  $\Gamma \vdash \lambda y. P : \sigma \rightarrow \rho$ , gdzie  $y \notin \text{dom}\Gamma$ . Z założenia indukcyjnego mamy, że  $\Gamma, y : \sigma \models P : \rho$ . Oznacza to, że dla dowolnych  $N_1 \in \llbracket \tau_1 \rrbracket, N_2 \in \llbracket \tau_2 \rrbracket, \dots, N_n \in \llbracket \tau_n \rrbracket$  mamy

$$\forall N \in \llbracket \sigma \rrbracket (P[\vec{x}, y/\vec{N}, N] \in \llbracket \rho \rrbracket) \quad (*)$$

Ustalmy  $P' \equiv P[y/y'][\vec{x}/\vec{N}]$ , gdzie  $y' \notin \text{dom}\Gamma$  i  $y' \notin \text{FV}(N_i)$  dla  $i \in \mathbb{N}, 1 \leq i \leq n$ . Wówczas z (\*):

$$\forall N \in \llbracket \sigma \rrbracket (P'[y'/N] \in \llbracket \rho \rrbracket)$$

Ustalmy  $N_0 \in \llbracket \sigma \rrbracket$ . Wówczas z części (1) Lematu 11  $N_0 \in \text{SN}$ . Wobec tego z Lematu 13 wnioskujemy, że:

$$(\lambda y'. P') N_0 \in \llbracket \rho \rrbracket \quad (**)$$

Zauważmy teraz, że ponieważ  $\forall i \ y_i \notin \text{FV}(N_i)$

$$\begin{aligned} (\lambda y'. P') &= (\lambda y'. P[y/y'][\vec{x}/\vec{N}]) \\ &= (\lambda y'. P[y/y'])[\vec{x}/\vec{N}] = (\lambda y. P)[\vec{x}/\vec{N}] \end{aligned} \quad (***)$$

Z (\*\*) i (\*\*\*) otrzymujemy

$$((\lambda y. P)[\vec{x}/\vec{N}]) N_0 \in \llbracket \rho \rrbracket.$$

Ponieważ  $N_0 \in \llbracket \sigma \rrbracket$ , to z definicji  $\llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket$  mamy, że

$$(\lambda y. P)[\vec{x}/\vec{N}] \in \llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket.$$

Z dowolności  $\vec{N}$  otrzymujemy ostatecznie, że  $\Gamma \models \lambda y. P$ .

□

**Twierdzenie 7.** (*O silnej normalizacji*) Jeżeli  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \tau$ , to  $M \in \text{SN}_{\beta}$ .

**Dowód.** Na podstawie Lematu 14, jeśli  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \tau$ , to  $M \in \llbracket \tau \rrbracket$ . Stosując Lemat 11 otrzymujemy tezę. □

Natychmiast widzimy, że własność silnej normalizacji pociąga za sobą własność słabej normalizacji, dlatego pomijamy dowód tej drugiej.

## 2.4 Typy w stylu Churcha

Przypisanie typu  $\lambda$ -termowi rozpoczynamy zawsze od określenia typów dla  $\lambda$ -zmiennych. Zasadniczo możemy to rozwiązać na dwa sposoby:

1. Możemy przypisać unikalny typ każdej  $\lambda$ -zmiennnej przed jej wprowadzeniem. Takie podejście nazywamy *stylem Churcha* albo typowaniem *explicite*, ponieważ deklaracje typowe zmiennych występują jawnie w składni  $\lambda$ -termów. W konsekwencji w podejściu tym nie spotykamy problemu typowości. Stąd systemy w tym stylu nazywa się również systemami typowanymi (ang. *typed systems*).



2. Inny sposób polega na nie ustalaniu typów zmiennych. Składnia  $\lambda$ -termów nie ulega wówczas zmianie, zaś o typie rozstrzyga algorytm rekonstrukcji typu. Typy w tym stylu były przedmiotem Rozdziału 2. W literaturze powszechnie nazywa się to podejście *stylem Currego* albo typowaniem *implicite*, zaś systemy w takim stylu określa się systemami *przypisywania typu* (ang. *type assignment systems*).

Obydwa podejścia dają w rezultacie takie same systemy typów [SU06, Rozdział 3.4]. Rozwiązaniem kompromisowym jest tzw. typowanie w *stylu de Brujina*<sup>12</sup> [BDS13, 1A.33] w którym nie ustala się typu wszystkich zmiennych, jednak adnotacje typowe są częścią składni (tak jak w stylu Churcha) i zależą od ustalonego kontekstu.

Zaprezentujemy teraz alternatywną składnię oraz reguły wyprowadzania typów dla systemu typów prostych w stylu Churcha. Wszystkie określenia oraz twierdzenia występujące dotychczas w Rozdziale 2 mają swoje odpowiedniki dla systemu w stylu Churcha [NG14, Rozdział 2.10]. Wyjątek stanowi Lemat 10, który jest zastąpiony w tym systemie Lematem 15 o jednoznaczności typu.

### 2.4.1 Składnia

Zbiór typów  $\mathbb{T}$  definiujemy w myśl Definicji 37. Niech  $U, V$  będą przeliczalnie nieskończonymi zbiorami zmiennych przedmiotowych, odpowiednio: zmiennych typowych i ( $\lambda$ -zmiennych). Celem zdefiniowania  $\lambda$ -termów w stylu Churcha przeprowadzamy konstrukcję analogiczną do tej przedstawionej w Rozdziale 1: określamy zbiór pretermów  $\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}}$ , a następnie definiujemy  $\lambda$ -termy jako klasy abstrakcji  $\alpha$ -konwersji.

$$\begin{aligned}\mathbb{T} &\leftarrow U \mid (\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}) \\ \tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}} &\leftarrow V \mid (\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}} \tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}}) \mid (\lambda V : \mathbb{T}. \tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}})\end{aligned}$$

Zauważmy, że  $\lambda$ -termy w stylu Churcha różnią się od stylu Currego tylko w wypadku  $\lambda$ -abstrakcji. Z tą jedną modyfikacją definicje zbioru zmiennych wolnych, podstawienia,  $\beta$ - i  $\eta$ -redukcji, kontekstu i wyprowadzenia są analogiczne do tych z Rozdziałów 1 i 2.

---

<sup>12</sup>W [SU06] nazywa się to podejście *nieortodoksyjnym stylem Churcha*

## 2.4.2 Typowanie

$$\begin{array}{c}
\Gamma \vdash x : \sigma \text{ (var),} \qquad \text{jeśli } x : \sigma \in \Gamma, \\
\\
\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (MN) : \tau} \text{ (app),} \\
\\
\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma. M) : \sigma \rightarrow \tau} \text{ (abs).}
\end{array}$$

Zauważmy, że mając zadany kontekst, typ każdego poprawnego  $\lambda$ -termu jest jednoznacznie określony. Jest to istotna różnica, którą wprowadza styl Churcha. W systemach w stylu Currego termy poprawne są zamknięte ze względu na podstawienie typu. Własność, którą wyraża Lemat 15 zachodzi w nich z dokładnością do podstawienia.

**Lemat 15.** (*O jednoznaczności*) *Jeśli  $\Gamma \vdash M : \sigma$  i  $M \rightarrow_{\beta}^* N$ , to  $\Gamma \vdash N : \sigma$ .*

**Dowód.** Dowód przebiega przez indukcję względem długości wyprowadzenia  $\Gamma \vdash M : \sigma$ . Szczegóły pomijamy.  $\square$

**Przykład 15.** Zauważmy, że nie istnieje jeden typ dla reprezentacji funkcji identycznościowej. Jeśli *nat* jest stałą typową, którą reprezentujemy liczby naturalne, to identyczność na zbiorze liczb naturalnych będziemy reprezentowali termem  $\lambda x : \text{nat}. x$ , na zbiorze funkcji  $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $\lambda x : \text{nat} \rightarrow \text{nat}. x$  i tak dalej. Aby określić ogólną postać identyczności, musimy mieć możliwość abstrahować względem nie tylko zmiennych, ale także typów, czyli parametryzować postać termu typem w następujący sposób:

$$\lambda \sigma : *. \lambda x : \sigma. x,$$

gdzie symbolem  $*$  oznaczamy typ obiektów będących typami (szczegóły omówimy w Rozdziale 3). Własność tę (polimorfizm parametryczny) miał w pewnym sensie rachunek  $\lambda$  w stylu Currego (Podrozdział 2.3.1).

## 2.5 Podsumowanie

System typów, który był przedmiotem Rozdziału 2 jest najbardziej elementarnym przypadkiem typowanego rachunku  $\lambda$ <sup>13</sup>. W literaturze

<sup>13</sup>Patologicznym przypadkiem jest rachunek  $\lambda$  bez typów, jeśli przyjmiemy, że wszystkie wyrażenia mają w nim dokładnie jeden typ. Argument ten często podejmowany jest na rzecz statycznie typowanych języków programowania.

często spotyka się być może jeszcze prostszy, równoważny wariant typów prostych, w którym wszystkie typy buduje się wyłącznie z jednej stałej typowej. Pod pojęciem typów prostych rozumie się także szereg rozszerzeń przedstawionego przez nas systemu.

Mają one na ogół szczególny cel praktyczny: na przykład rozszerzenie o typ dla par umożliwiającą elegancką prezentację analogii między intuicjonistycznym rachunkiem zdań, typowanym rachunkiem  $\lambda$  i kategoriami kartezjańsko domkniętymi, znanej szerzej jako izomorfizm Currego-Howarda-Lambeka [GTL89, Rozdział 3.1]. Nie wpływa to jednak na samą istotę typowania, która polega na zależności termów od termów. Jak przekonamy się w Rozdziale 3 zależność tę można rozszerzyć, pozwalając typom na decydowanie o postaci termu.

### 3 System Girarda/Reynoldsa

W rozdziale tym przedstawimy tzw. rachunek  $\lambda$  drugiego rzędu w stylu Churcha. System ten wprowadzony został równolegle przez J.-Y. Girarda i J. C. Reynoldsa jako System F i w literaturze szerzej znany jest pod tą właśnie nazwą. Formalizuje on pojęcie polimorfizmu parametrycznego znanego z języków programowania.

#### 3.1 Termy zależne od typów

**Definicja 46.** (Typy  $\mathbb{T}2$ ) Niech  $\mathbb{V}$  będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych. Zmienne te będziemy nazywali *zmiennymi typowymi* i oznaczali literami alfabetu greckiego  $(\alpha, \beta, \gamma, \dots)$ . Zbiór typów  $\mathbb{T}2$  Systemu F określamy w notacji BNF następującym zapisem:

$$\mathbb{T}2 \leftarrow \mathbb{V} \mid (\mathbb{T}2 \rightarrow \mathbb{T}2) \mid (\Pi \mathbb{V} : *. \mathbb{T}2)$$

Za oznaczenia metazmiennych przebiegających zbiór typów  $\mathbb{T}2$  posłużą nam późniejsze litery alfabetu greckiego:  $\sigma, \tau, \rho, \dots$  lub następujące litery alfabetu łacińskiego:  $A, B, T$ .

**Definicja 47.** (Pretermy  $\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2}$ ) Niech  $V$  będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych. Zmienne te będziemy nazywali *zmiennymi termowymi* i oznaczali literami alfabetu łacińskiego  $(x, y, z, \dots)$ . Zbiór pretermów  $\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2}$  Systemu F określamy w notacji BNF następującym zapisem:

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2} \leftarrow V \mid (\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2} \tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2}) \mid (\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2} \mathbb{T}2) \mid (\lambda V : \mathbb{T}2. \tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2}) \mid (\lambda V : *. \tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2})$$

Wyrażenia postaci  $(\lambda V : *. \tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2})$  i  $(\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2} \mathbb{T}2)$  nazywamy *polimorficzną abstrakcją* i *polimorficzną aplikacją*, odpowiednio. O zmiennej (termowej lub typowej) występującej bezpośrednio po znaku  $\lambda$  powiemy, że jest związana.

*Uwaga.* Zakładamy, że  $V \cap \mathbb{V} = \emptyset$ .

*Konwencja.* Stosujemy standardowe konwencje notacyjne:

- Opuuszczamy najbardziej zewnętrzne nawiasy,
- Aplikacja wiąże prawostronnie,
- Aplikacja i  $\rightarrow$  wiążą mocniej niż  $\lambda$ - i  $\Pi$ -abstrakcja,
- Kolejne  $\lambda$ - i  $\Pi$ -abstrakcje zmiennych tych samych typów mogą występować pod wspólnym znakiem i wiążą prawostronnie,

– Konstruktor typu  $\rightarrow$  wiąże prawostronnie.

Przykładowo:  $\Pi\alpha\beta : *. \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \equiv \Pi\alpha : *. (\Pi\beta : *. (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha))))$ .

Wyrażenia  $\lambda$  ( $\lambda$ -termy) w Systemie F to klasy abstrakcji  $\alpha$ -konwersji. Konstrukcja ta jest analogiczna do zaprezentowanej w Rozdziale 1.2. Za oznaczenia metazmiennych przebiegające zbiór wyrażeń Systemu F posłużą nam późniejsze litery alfabetu łacińskiego:  $M, N, P, \dots$

Oczywistemu rozszerzeniu ulega szereg pojęć z Rozdziału 2. Poniżej umieszczamy najistotniejsze z nich.

**Definicja 48.** (Zbiór FV zmiennych wolnych) Przez  $FV(M)$  oznaczamy zbiór wszystkich wolnych zmiennych termowych i typowych występujących w  $M \in \mathbf{\Lambda}_{T2}$ .

$$\begin{aligned} FV(x) &= x, \\ FV(\lambda x : \sigma. M) &= FV(\sigma) \cup (FV(M) \setminus \{x\}), \\ FV(MN) &= FV(M) \cup FV(N), \\ FV(\lambda\alpha : *. M) &= FV(M) \setminus \{\alpha\}, \\ FV(M\sigma) &= FV(M) \cup FV(\sigma). \end{aligned}$$

**Definicja 49.** (Multizbiór Sub podtermów pretermu)

- (1)  $\text{Sub}(x) = \{x\}$
- (2)  $\text{Sub}(MN) = \text{Sub}(M) \cup \text{Sub}(N) \cup \{M N\}$
- (3)  $\text{Sub}(M\sigma) = \text{Sub}(M) \cup \{M\sigma\}$
- (4)  $\text{Sub}(\lambda x : \alpha. M) = \text{Sub}(M) \cup \{\lambda x : \alpha. M\}$
- (5)  $\text{Sub}(\lambda\sigma : *. M) = \text{Sub}(M) \cup \{\lambda\sigma : *. M\}$

**Definicja 50.** (Podstawienie) Rozszerzamy definicję podstawienia o

reguły obejmujące zmienne typowe.

$$\begin{aligned}
x[x/P] &= P, \\
y[x/P] &= y, \\
(MN)[x/P] &= M[x/P]N[x/P], \\
(\lambda y : \sigma. M)[x/P] &= \lambda y : \sigma. M[x/P], \text{ gdzie } y \notin FV(P) \cup \{x\}, \\
(M\sigma)[x/P] &= M[x/P]\sigma, \\
(\lambda\beta : *. M)[x/P] &= \lambda\beta : *. M[x/P], \text{ gdzie } p \notin FV(P), \\
x[\alpha/\sigma] &= x, \\
(MN)[\alpha/\sigma] &= M[\alpha/\sigma]N[\alpha/\sigma], \\
(\lambda y : \sigma. M)[\alpha/\sigma] &= \lambda y : \sigma. M[\alpha/\sigma], \\
(M\rho)[\alpha/\sigma] &= M\rho[\alpha/\sigma], \\
(\lambda\beta : *. M)[\alpha/\sigma] &= \lambda\beta : *. M[\alpha/\sigma], \text{ gdzie } \beta \notin FV(\sigma) \cup \{\alpha\}.
\end{aligned}$$

**Definicja 51.** ( $\alpha$ -konwersja) Relacją  $=_\alpha$  ( $\alpha$ -konwersji) nazywamy najmniejszą w sensie mnogościowym zgodną relację równoważności na  $\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2}$  taką, że

- ( $\alpha$ 1)  $\lambda x : \sigma. M =_\alpha \lambda y : \sigma. M[x/y]$ , jeśli  $M[x/y]$  jest określone i  $y \notin FV(M)$ .
- ( $\alpha$ 2)  $\lambda\alpha : *. M =_\alpha \lambda\beta : *. M[\alpha/\beta]$ , jeśli  $\beta$  nie występuje w  $M$ .
- ( $\alpha$ 3)  $\Pi\alpha : *. M =_\alpha \Pi\beta : *. M[\alpha/\beta]$ , jeśli  $\beta$  nie występuje w  $M$ .

**Przykład 16.** Rozważmy następujące przykłady  $\alpha$ -konwertów:

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} \quad \lambda\alpha : *. \lambda x : \alpha. x =_\alpha & \text{b)} \quad \Pi\alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha =_\alpha \\
\lambda\beta : *. \lambda x : \beta. x =_\alpha & \Pi\beta : *. \beta \rightarrow \beta =_\alpha \\
\lambda\beta : *. \lambda y : \beta. y. & \Pi\beta : *. \beta \rightarrow \beta.
\end{array}$$

Odpowiednim modyfikacjom ulegają również pojęcia wprowadzone w Definicji 39 i Definicji 40.

**Definicja 52.** (Stwierdzenie, deklaracja)

1. Stwierdzeniem nazywamy każdy napis postaci  $M : \sigma$ , gdzie  $M \in \Lambda_{\mathbb{T}2}$  i  $\sigma \in \mathbb{T}2$  lub  $\sigma : *$ , gdzie  $\sigma \in \mathbb{T}2$ .
2. Deklaracją nazywamy każde stwierdzenie ze zmienną typową lub zmienną termową w miejscu podmiotu.

**Definicja 53.** ( $\lambda 2$ -kontekst, dziedzina, zakres)

(E1)  $\emptyset$  jest  $\lambda 2$ -kontekstem; oznaczamy go parą nawiasów  $()$  lub pomijamy, jeśli nie prowadzi to do niejednoznaczności.

(E2) Jeśli:

(a)  $\Gamma$  jest  $\lambda 2$ -kontekstem,

(b)  $\alpha \in \mathbb{V}$  jest zmienną typową taką, że  $\alpha \notin \text{dom}(\Gamma)$ ,

to  $\Gamma, \alpha : *$  jest  $\lambda 2$ -kontekstem, gdzie

$$\begin{aligned}\text{dom}(\Gamma, \alpha : *) &= (\text{dom}(\Gamma), \alpha), \\ \text{rg}(\Gamma, \alpha : *) &= \text{rg}(\Gamma) \cup \{*\}.\end{aligned}$$

(E3) Jeśli:

(a)  $\Gamma$  jest  $\lambda 2$ -kontekstem,

(b)  $\rho \in \mathbb{T}2$  jest typem takim, że  $\alpha \in \text{dom}(\Gamma)$  dla wszystkich  $\alpha \in \text{FV}(\rho)$ ,

(c)  $x \in V$  jest zmienną termową taką, że  $x \notin \text{dom} \Gamma$ ,

to  $\Gamma, x : \rho$  jest  $\lambda 2$ -kontekstem, gdzie

$$\begin{aligned}\text{dom}(\Gamma, x : \rho) &= (\text{dom}(\Gamma), x), \\ \text{rg}(\Gamma, x : \rho) &= \text{rg}(\Gamma) \cup \{\rho\}.\end{aligned}$$

$\text{dom}(\Gamma)$  i  $\text{rg}(\Gamma)$  nazywamy odpowiednio *dziedziną* i *zakresem*  $\lambda 2$ -kontekstu  $\Gamma$ .

Jeśli  $\Gamma = (a_{11} : a_{12}, \dots, a_{n1} : a_{n2})$  jest  $\lambda 2$ -kontekstem, to przez  $\Gamma[\alpha/\sigma]$  oznaczamy  $\lambda 2$ -kontekst, w którym jeśli  $a_{i1} \in V$ , to  $a_{i2}$  zamieniamy na  $x_{i2}[\alpha/\sigma]$  dla  $1 \leq i \leq n$ .

*Uwaga.* Zauważmy, że przy powyższych rozstrzygnięciach definicyjnych nie zachodzi odpowiednik Twierdzenia 6 (3): nie możemy rozpatrywać dowolnych permutacji kontekstów w sądach  $\Gamma \vdash M : T$ , ponieważ w myśl Definicji 53 deklaracje zmiennych termowych w poprawnie zbudowanych  $\lambda 2$ -kontekstach są uzależnione od poprzedzających je deklaracji typowych.

Naturalnie zachodzi natomiast Lemat 6 (1), który oznacza tyle, że w rozszerzonym kontekście jesteśmy w stanie wyprowadzić co najmniej tyle, ile w pierwotnym. Fakt ten wyraża Lemat 16.

**Lemat 16.** (*O zwiężaniu*) *Jeśli*

(a)  $\Gamma'$  i  $\Gamma''$  są kontekstami takimi, że  $\Gamma' \subseteq \Gamma''$

(b)  $\Gamma' \vdash M : \sigma$

to  $\Gamma'' \vdash M : \sigma$ .

**Dowód.** Dowód przeprowadzamy przez indukcję względem długości wyprowadzenia sądu. Szczegóły pomijamy  $\Gamma' \vdash M : \sigma$ .  $\square$

**Przykład 17.** (a)  $\emptyset$  jest  $\lambda 2$ -kontekstem na podstawie (E1).

(b)  $\alpha : *$  jest  $\lambda 2$ -kontekstem na podstawie (E2).

(c)  $\alpha : *, x : \alpha \rightarrow \alpha$  jest  $\lambda 2$ -kontekstem na podstawie (E3). Zauważmy, że deklaracja  $\alpha : *$  wysepjuje w kontekście przed  $x : \alpha \rightarrow \alpha$ .

(d)  $\alpha : *, x : \alpha \rightarrow \alpha, \beta : *$  jest  $\lambda 2$ -kontekstem na podstawie (E2).

(e)  $\Gamma \equiv (\alpha : *, x : \alpha \rightarrow \alpha, \beta : *, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$  jest  $\lambda 2$ -kontekstem na podstawie (E3). Wówczas  $\text{dom}(\Gamma) = (\alpha, x, \beta, y)$  i  $\text{rg}(\Gamma) = \{*, \alpha \rightarrow \alpha, \beta, (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta\}$ .

## 3.2 Typowanie

Wprowadzamy następujące reguły wyprowadzania typu:

(var)  $\Gamma \vdash x : \sigma$ , jeśli  $x : \sigma \in \Gamma$

(app) 
$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

(abs) 
$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma. M) : \sigma \rightarrow \tau}$$

(form)  $\Gamma \vdash B : *$ , jeśli  $B \in \mathbb{T}2$  i  $\text{FV}(B) \subseteq \text{rg } \Gamma$

(II-e) 
$$\frac{\Gamma \vdash M : (\Pi \alpha : *. A) \quad \Gamma \vdash B : *}{\Gamma \vdash MB : A[\alpha/B]}$$

(II-i) 
$$\frac{\Gamma, \alpha : * \vdash M : A}{\Gamma \vdash \lambda \alpha : *. M : \Pi \alpha : *. A}$$



**Definicja 54.** (Poprawność, typowalność) Powiemy, że term  $M \in \Lambda_{\mathbb{T}2}$  jest *poprawny* lub *typowalny*, jeśli istnieje  $\lambda 2$ -kontekst  $\Gamma$  i typ  $\rho \in \mathbb{T}2$  taki, że  $\Gamma \vdash M : \rho$ .

**Przykład 18.** (a) Niech  $\perp \equiv \Pi\sigma : *. \sigma$  i  $\Gamma = (\beta : *, x : \perp)$ .

$$\begin{array}{lcl}
1 & \left| \begin{array}{l} \beta : * \end{array} \right. & \text{(form)} \\
2 & \left| \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} x : \perp \end{array} \right. \end{array} \right. & \text{(var)} \\
3 & \left| \begin{array}{l} x\beta : \beta \end{array} \right. & \text{(\Pi-e) 2 1} \\
4 & \lambda\beta : *. x\beta : \underbrace{\Pi\beta : *. \beta}_{\perp} & \text{(\Pi-i) 3}
\end{array}$$

(b)  $\Gamma = (\beta : *, y : \beta, x : \perp)$ .

$$\begin{array}{lcl}
1 & \left| \begin{array}{l} \beta : * \end{array} \right. & \text{(form)} \\
2 & \left| \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} y : \beta \end{array} \right. \end{array} \right. & \text{(var)} \\
3 & \left| \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} x : \perp \end{array} \right. \end{array} \right. \end{array} \right. & \text{(var)} \\
4 & \left| \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} \lambda x : \perp . y : \perp \rightarrow \beta \end{array} \right. \end{array} \right. & \text{(abs) 2} \\
5 & \left| \begin{array}{l} \lambda y : \beta . x : \perp . y : \perp \rightarrow \beta \end{array} \right. & \text{(abs) 4} \\
6 & \lambda\beta : *. \lambda y : \beta . x : \perp . y : \Pi\beta : *. \perp \rightarrow \beta & \text{(\Pi-i) 1}
\end{array}$$

(c) Przykład 15 ilustrował, że typy proste nie pozwalają na określenie polimorficznej identyczności. W Systemie F nie sprawia to problemów.

$$\begin{array}{lcl}
1 & \left| \begin{array}{l} \alpha : * \end{array} \right. & \text{(form)} \\
2 & \left| \begin{array}{l} \left| \begin{array}{l} x : \alpha \end{array} \right. \end{array} \right. & \text{(var)} \\
3 & \left| \begin{array}{l} \lambda x : \alpha . x : \alpha \rightarrow \alpha \end{array} \right. & \text{(abs) 2} \\
4 & \lambda\alpha : *. \lambda x : \alpha . x : \Pi\alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha & \text{(\Pi-i) 3}
\end{array}$$

(d) W systemie Girarda/Reynoldsa możemy określić polimorficzne

liczebniki Churcha ustalając:

$$\begin{aligned}
\text{Nat} &\equiv \Pi\alpha : *. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \\
\bar{0} &\equiv \lambda\alpha : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha \ x : \alpha. x \\
\bar{1} &\equiv \lambda\alpha : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha \ x : \alpha. fx \\
&\vdots \\
\bar{n} &\equiv \lambda\alpha : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha \ x : \alpha. \underbrace{f \dots (fx)}_{n\text{-razy}}
\end{aligned}$$

Dla przykładu rozważmy typowanie  $\bar{2}$ :

1	$\alpha : *$	(form)
2	$f : \alpha \rightarrow \alpha$	(var)
3	$x : \alpha$	(var)
4	$fx : \alpha$	(app) 2 3
5	$f(fx) : \alpha$	(app) 2 1
6	$\lambda x : \alpha. f(fx) : \alpha \rightarrow \alpha$	(abs) 5
7	$\lambda f : \alpha \rightarrow \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$	(abs) 6
8	$\lambda\alpha : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx) : \underbrace{\Pi\alpha : *. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha}_{\text{Nat}}$	( $\Pi$ -i) 7

Za pomocą łatwej indukcji względem długości wyprowadzenia możemy przekonać się, że w istocie wszystkie polimorficzne liczebniki Churcha są typu Nat.

(e) Typować możemy również polimorficzne złożenie funkcji.

1	$\gamma : *$	(form)
2	$\beta : *$	(form)
3	$\alpha : *$	(form)
4	$g : \beta \rightarrow \gamma$	(var)
5	$f : \alpha \rightarrow \beta$	(var)
6	$x : \alpha$	(var)
7	$fa : \beta$	(app) 5 6
8	$g(fa) : \gamma$	(app) 4 7
9	$\lambda x : \alpha. g(fa) : \alpha \rightarrow \gamma$	(abs) 8
10	$\lambda f : \alpha \rightarrow \beta x : \alpha. g(fa) :$ $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$	(abs) 9
11	$\lambda g : \beta \rightarrow \gamma f : \alpha \rightarrow \beta x : \alpha. g(fa) :$ $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$	(abs) 10
12	$\lambda \alpha : *. \lambda g : \beta \rightarrow \gamma f : \alpha \rightarrow \beta x : \alpha. g(fa) :$ $\Pi \alpha : *. (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$	(abs) 11
13	$\lambda \beta \alpha : *. \lambda g : \beta \rightarrow \gamma f : \alpha \rightarrow \beta x : \alpha. g(fa) :$ $\Pi \beta \alpha : *. (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$	(abs) 12
14	$\lambda \gamma \beta \alpha : *. \lambda g : \beta \rightarrow \gamma f : \alpha \rightarrow \beta x : \alpha. g(fa) :$ $\Pi \gamma \beta \alpha : *. (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$	(abs) 13

Jak widzimy procedura wyprowadzania typu odpowiada w istocie rekonstrukcji wyrażenia. Problem typowania w (ortodoksyjnym) stylu Churcha jest trywialny, gdyż zgodnie z Rozdziałem 2.4 założyliśmy, że mamy pełną informację typową o zmiennych przedmiotowych. Czytając wyprowadzenia od dołu do góry rekonstruujemy również kontekst. Mówimy, że składnia Systemu F w stylu Churcha *koduje typowanie*.

### 3.3 Redukcja

**Definicja 55.** ( $\beta$ -redukcja)  $\beta$ -redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zgodną na  $\Lambda_{\mathbb{T}2}$  relację binarną  $\rightarrow_\beta$  taką, że

$$\begin{aligned} (\lambda x : \sigma. M)N &\rightarrow_\beta M[x/N]. \\ (\lambda \alpha : *. M)T &\rightarrow_\beta M[\alpha/T] \end{aligned}$$

Lemat 17 (podobnie jak Lemat 15) zapewnia nas, że typ termu zachowuje się przy  $\beta$ -redukcji. Praktyczny sens tego twierdzenia polega na tym, że relacja posiadania tego samego typu jest zamknięta na  $\beta$ -konwersję i aby rozstrzygnąć o typie danego termu wystarczy, że znamy typ któregośkolwiek jego  $\beta$ -konwersu.

**Lemat 17.** (*O redukcji podmiotu*) Jeśli  $\Gamma \vdash M : \tau$  i  $M \rightarrow_\beta^* N$ , to  $\Gamma \vdash N : \tau$ .

**Dowód.** Dowód przeprowadzamy analogicznie do dowodu Lematu 8, przez indukcję względem długości wyprowadzenia sądu  $\Gamma \vdash M : \tau$ . Szczegóły pomijamy.  $\square$

**Przykład 19.** Wróćmy do Przykładu 18 (d). Wyprowadziliśmy w nim sąd:

$$\vdash \lambda\alpha : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx) : \Pi\alpha : *. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$$

Stosując lemat o zwięźaniu (Lemat 16), dla dowolnego  $\lambda 2$ -kontekstu  $\Gamma$  wyprowadzalny jest również sąd:

$$\Gamma \vdash \lambda\alpha : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx) : \Pi\alpha : *. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \quad (1)$$

Niech  $\Gamma$  będzie takim  $\lambda 2$ -kontekstem, że

$$\{\text{nat} : *, \text{zero} : \text{nat}, \text{succ} : \text{nat} \rightarrow \text{nat}\} \subseteq \Gamma,$$

gdzie przez  $\text{nat}$ ,  $\text{zero}$  i  $\text{succ}$  oznaczamy dowolnie wybrane zmienne termowe i typowe, odpowiednio. Stosując regułę ( $\Pi$ -e) do (1) i  $\Gamma \vdash \text{nat} : *$  otrzymujemy:

$$\Gamma \vdash \lambda f : \text{nat} \rightarrow \text{nat}. \lambda x : \text{nat}. f(fx) \text{ nat} : (\text{nat} \rightarrow \text{nat}) \rightarrow \text{nat} \rightarrow \text{nat} \quad (2)$$

Dalej, stosując regułę ( $\text{app}$ ) do (2) i  $\Gamma \vdash \text{succ} : \text{nat} \rightarrow \text{nat}$  mamy, że

$$\Gamma \vdash \lambda x : \text{nat}. f(fx) \text{ nat succ} : \text{nat} \rightarrow \text{nat} \quad (3)$$

Ponownie aplikując (3) do  $\Gamma \vdash \text{zero} : \text{nat}$  mamy:

$$\Gamma \vdash f(fx) \text{ nat succ zero} : \text{nat} \quad (4)$$

Na podstawie lematu o redukcji podmiotu (Lemat 17) widzimy, że każdy kolejny redukt w poniższym ciągu ma typ  $\text{nat}$ .

$$\begin{aligned} \lambda\alpha : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx) \text{ nat succ zero} &\rightarrow_\beta \\ \lambda f : \text{nat} \rightarrow \text{nat}. \lambda x : \text{nat}. f(fx) \text{ succ zero} &\rightarrow_\beta \\ (\lambda x : \text{nat}. \text{succ}(\text{succ } x)) \text{ zero} &\rightarrow_\beta \\ \text{succ}(\text{succ zero}) & \end{aligned}$$

Odpowiedniej modyfikacji ulega również pojęcie  $\eta$ -redukcji.

**Definicja 56.** ( $\eta$ -redukcja)  $\eta$ -redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zgodną na  $\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{T}2}$  relację binarną  $\rightarrow_\beta$  taką, że

$$\begin{aligned}\lambda x : \sigma. Mx &\rightarrow_\eta M, \\ \lambda \alpha : *. M\alpha &\rightarrow_\eta M.\end{aligned}$$

Zachodzi oczywiście również odpowiednik Lematu 9:

**Lemat 18.** (*Zachowawczość  $\eta$ -redukcji*) Jeśli  $\Gamma \vdash M : \tau$  i  $M \rightarrow_\eta^* N$ , to  $\Gamma \vdash N : \tau$ .

**Dowód.** Dowód przeprowadzamy przez indukcję względem długości wyprowadzenia sądu  $\Gamma \vdash M : \tau$ . Szczegóły pomijamy.  $\square$

**Przykład 20.** Zwróćmy ponownie uwagę na Przykład 18(a). Ponieważ  $\lambda\beta : *. x\beta \rightarrow_\eta x$ , to ze względu Lemat 18 wyprowadzalny jest również  $\Gamma \vdash x : \perp$ .

W odpowiednich wersjach zachodzą również Lemat 3 o generowaniu, Lemat 4 o podtermie, Lemat 5 o zmiennych wolnych i Lemat 7 o podstawieniu. We wszystkich przypadkach metoda dowodowa nie odbiega znacząco od odpowiedników z Rozdziałów 1 i 2.

Kolejnym ważnym twierdzeniem, które zachodzi dla Systemu F jest silna normalizacja  $\beta$ -redukcji.

**Twierdzenie 8.** (*O silnej normalizacji*) Jeżeli  $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \tau$ , to  $M \in \text{SN}_\beta$ .

**Dowód.** Metoda polegająca na naiwnym uogólnieniu dowodu z Rozdziału 2.3.2 przez interpretację typów polimorficznych jako zbioru wszystkich możliwych podstawień za zmienne typowe prowadzi do błędnego koła w definiowaniu. Interesujące rozwiązanie (metodę *kandydatów*) bazujące na wynikach z Rozdziału 2.3.2 pochodzące od J.-Y Girarda można znaleźć w [SU06, Rozdział 11.5] i [GTL89, Rozdział 6]. Szczegóły pomijamy.

**Wniosek.** Ponieważ wszystkie typowalne termy w Systemie F mają skończone ciągi redukcji, to kombinatory punktu stałego

$$\text{fix} : \Pi \alpha : *. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

nie jest typowalny w tym systemie.

Jako Fakt 8 przedstawimy własność Churcha-Rossera upewniającą nas, że  $\beta$ -redukcja, bez względu na przyjętą strategię, zawsze prowadzi do tych samych rezultatów, a zatem ma sens obliczeniowy. Fakt ten otrzymujemy jako wniosek z lematu Newmana (Twierdzenie 2), wykazując, że  $\beta$ -redukcja ma słabą własność Churcha-Rossera (WCR) [SU06, Twierdzenie 11.2.12].

**Fakt 8.** (*Własność Churcha-Rossera*) *Relacja  $\beta$ -redukcji ma własność CR.*

### 3.4 Język pośredni GHC

Języki programowania to narzędzia służące do reprezentowania pojęć i łączących je wzajemnie zależności w sposób umożliwiający efektywne tłumaczenie ich na język maszynowy. Myśleć można o nich jak o uproszczonych środkach komunikacji człowieka z maszyną.

GHC (ang. *Glasgow Haskell Compiler*) to otwartoźródłowy kompilator języka Haskell. Kompilatorem nazywamy program, którego zadaniem jest tłumaczenie kodu programu napisanego w danym języku (w *języku kodu źródłowego*) na kod w innym języku (*języku wyjściowym*) z zachowaniem własności programu wejściowego. GHC jest stosunkowo wyjątkowym kompilatorem, gdyż kompilację do kodu wyjściowego poprzedza w nim kompilacja do kodu *pośredniego*, który jest rozszerzonym wariantem Systemu F w stylu Churcha [Sul+07].

Język Haskell to polimorficzny statycznie typowany, leniwy, czysto funkcyjny język programowania. Leniwość odnosi się do strategii ewaluacji nakreślonej w Rozdziale 1.3.2. Funkcyjność języka polega na tym, że funkcje są w nim obiektami pierwszego rzędu, tzn. można z nich budować struktury danych i przysyłać jako argument tak jak pozostałe obiekty języka. Czystość oznacza ograniczenie efektów ubocznych: funkcje nie współdzielą stanu, zwracają tylko i wyłącznie wartość obliczenia.

**Statyczność** Określenie *statyczny* oznacza, że na etapie kompilacji do kodu wyjściowego wszystkie typy wyrażeń są ustalone właśnie na gruncie języka pośredniego. Jest to całkiem niezwykła kontynuacja wywodzącej się z lat '70 idei oparcia języków programowania na czystym rachunku  $\lambda$  wspomnianej w Rozdziale 1.6.

Rozważmy następujący przykładowy kod źródłowy w języku Haskell. Funkcja `comp` to polimorficzne złożenie funkcji.

```
module Fnord where
  comp = \g f x -> g (f x)
```

Przypomnijmy Przykład (e), którego rezultatem było następujące przypisanie typu:

$$\begin{aligned} \lambda\gamma\beta\alpha : *. \lambda g : \beta \rightarrow \gamma \ f : \alpha \rightarrow \beta \ x : \alpha. g(fa) : & \quad (\blacklozenge) \\ \Pi\gamma\beta\alpha : *. (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma & \end{aligned}$$

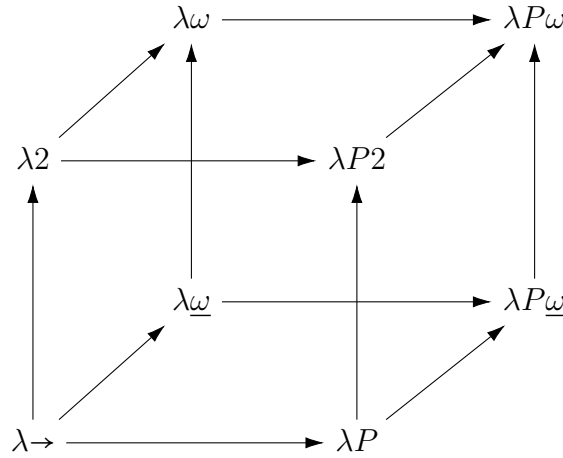
Rezultatem kompilacji powyższego programu za pomocą kompilatora `ghc` z dodatkowym argumentem `-ddump-simpl` jest następujący kod pośredni:

```
comp
  :: forall t_aqz t1_aqB t2_aqD.
    (t_aqz -> t1_aqB) -> (t2_aqD -> t_aqz) -> t2_aqD -> t1_aqB
comp =
  \ (@ t_aqz)
    (@ t1_aqB)
    (@ t2_aqD)
    (g_aqg :: t_aqz -> t1_aqB)
    (f_aqh :: t2_aqD -> t_aqz)
    (x_aqi :: t2_aqD) ->
    g_aqg (f_aqh x_aqi)
```

Pierwsza, druga i trzecia linia to rezultat przypisania typu. Symbolowi `forall` odpowiada symbol polimorficznej abstrakcji  $\Pi$ . Dalej widzimy ciało funkcji `comp`: symbol `\` odpowiada w nim  $\lambda$ -abstraktorowi, zaś symbol `@` wyróżnia zmienne typowe, które oznaczaliśmy symbolem `*`. Widzimy, że  $(\blacklozenge)$  i powyższy kod to dokładnie to samo.

Haskell jest *ślabo* typowanym językiem: kod źródłowy może być zupełnie pozbawiony deklaracji typowych (choć nie musi), zaś kompilacja przebiega przez proces przypisywania wyrażeniom typu<sup>14</sup>. Pod tym względem przypomina systemy w stylu Currego. Przypomnijmy jednak, że w Systemie F w tym stylu problem typowania jest nierozstrzygalny [Wel99]. Rewolucyjne okazuje się dopuszczenie myśli, że język pośredni może dysponować szerszą ekspresją niż język źródłowy. Wówczas dysponując tylko kompilatorem języka pośredniego (np. z wariantu Systemu F do kodu maszynowego), możemy zająć się tłumaczeniem być może uboższego (ale rozstrzygalnego) języka źródłowego na

<sup>14</sup>Może to prowadzić do nieporozumień. Na przykład język C jest *silnie* statycznie typowanym językiem, ale za typowanie odpowiada wyłącznie programista. Kod zostaje sprawdzony pod względem składni i kompilacja zaciera wszystkie deklaracje typowe.



Rysunek 6: Poszczególne systemy klasyfikacji H. Barendregta; kierunek krawędzi  $\rightarrow$  oznacza relację  $\subseteq$ .

język pośredni. Pozwala to też na swobodne eksperymentowanie z językami źródłowymi, mając jednocześnie pewność, że praca nigdy nie podda się próbie czasu i nie przyćmią jej w przyszłości być może bardziej ekspresywne systemy typów.

### 3.5 Podsumowanie

System F, który był przedmiotem Rozdziału 3 można umieścić na kanwie zaproponowanej przez H. P. Barendregta w [Bar92, Rozdział 5] klasyfikacji rozszerzeń rachunku  $\lambda$  z typami prostymi (tzw. *kostki*  $\lambda$ , Rysunek 6) w miejscu systemu  $\lambda 2$ .

Wszystkie części kostki  $\lambda$  są systemami w stylu Churcha. System  $\lambda \rightarrow$  to omawiany przez nas w Rozdziale 2 rachunek  $\lambda$  z typami prostymi. Jak widzieliśmy, rozszerzenie go o typy polimorficzne prowadzi do systemu  $\lambda 2$ .

System  $\lambda \underline{\omega}$  to rozszerzenie, w którym sama struktura typów jest podobna do typów prostych: typy zależą w nim od typów. Zaobserwujemy, że typy takie jak  $\beta \rightarrow \beta$ ,  $\gamma \rightarrow \gamma$ ,  $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma)$  itp. wszystkie mają tę samą strukturę postaci  $\Diamond \rightarrow \Diamond$ , gdzie  $\Diamond$  jest tym samym typem występującym po obu stronach  $\rightarrow$ . Wprowadzając operator abstrakcji względem  $\Diamond$  możemy w ramach systemu  $\lambda \underline{\omega}$  wyrazić *rodziny typów*:

$$\lambda \alpha : \alpha \rightarrow \alpha.$$

Wyrażenia takie nazywamy *konstruktorami typu*: po zaaplikowaniu do



nich typu uzyskujemy znowu typ.

**Przykład 21.** Rozważmy następujące redukcje:

$$\begin{aligned} (\lambda\alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha)\beta &\rightarrow_{\beta} \beta \rightarrow \beta, \\ (\lambda\alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha)\gamma &\rightarrow_{\beta} \gamma \rightarrow \gamma, \\ (\lambda\alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha)(\beta \rightarrow \gamma) &\rightarrow_{\beta} (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\beta \rightarrow \gamma). \end{aligned}$$

Typy konstruktorów typów nazywamy *gatunkami* (ang. *kind*). Zbiór wszystkich gatunków oznaczamy symbolem  $\square$ . Mają one następującą postać:

$$\square \leftarrow * \mid (\square \rightarrow \square)$$

Mamy więc  $* : \square$ ,  $* \rightarrow * : \square$ ,  $(* \rightarrow *) \rightarrow * \rightarrow *$  itp. Termy, które mają typ  $*$  nazywamy wówczas *konstruktorami właściwymi*. Łącznie, symbole  $*$  i  $\square$  nazywamy *rodzajami* (ang. *sort*).

System  $\lambda P$  rozszerza typy proste o abstrakcję umożliwiającą uzależnienie typów od termów. Typy takie mają postać  $\lambda x : A. M$ , gdzie  $M$  jest typem, a  $x$  zmienną typową.

Jak zauważył Barendregt, rozszerzenia  $\lambda 2$ ,  $\lambda \underline{\omega}$  i  $\lambda P$  są od siebie w pewnym sensie niezależne i można je ze sobą składać. Intuicję tę można sformalizować w ten sposób, aby wybierając tylko odpowiednią kombinację zależności, otrzymać odpowiadającą jej teorię [Bar91]. Ponieważ przybliżenie tego uogólnionego systemu wykracza poza zamierzony zakres tej pracy, prezentujemy tylko zestawienie systemów kostki  $\lambda$ .

0	$\lambda \rightarrow$	$(*, *)$			
1	$\lambda 2$	$(*, *)$	$(\square, *)$		
2	$\lambda P$	$(*, *)$		$(*, \square)$	
1+2	$\lambda P 2$	$(*, *)$	$(\square, *)$	$(*, \square)$	
3	$\lambda \underline{\omega}$	$(*, *)$			$(\square, \square)$
1+3	$\lambda \omega$	$(*, *)$	$(\square, *)$		$(\square, \square)$
2+3	$\lambda P \underline{\omega}$	$(*, *)$		$(*, \square)$	$(\square, \square)$
1+2+3	$\lambda C$	$(*, *)$	$(\square, *)$	$(*, \square)$	$(\square, \square)$

- $(*, *)$  - termy zależne od termów (typy funkcyjne),
- $(\square, *)$  - termy zależne od typów (typy polimorficzne),
- $(*, \square)$  - typy zależne od termów (typy zależne),
- $(\square, \square)$  - typy zależne od typów (rodziny typów, higher-kinded types).

## Literatura

- [Alt02] Thorsten Altenkirch. “ $\alpha$ -conversion is easy”. Under Revision. 2002. URL: <https://www.cs.nott.ac.uk/~psztxa/publ/alpha-draft.pdf>.
- [Bar84] H. P. Barendregt. *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*. Elsevier, 1984.
- [Bar91] Henk Barendregt. “Introduction to generalized type systems”. In: *Journal of Functional Programming* 1.2 (1991), pp. 125–154. DOI: 10.1017/S0956796800020025.
- [Bar92] H. P. Barendregt. “Lambda Calculi with Types”. In: vol. 2. Jan. 1992, pp. 117–309. ISBN: 0198537611.
- [BDS13] Henk Barendregt, Wil Dekkers, and Richard Statman. *Lambda Calculus with Types*. Perspectives in Logic. Cambridge University Press, 2013. DOI: 10.1017/CB09781139032636.
- [Bru72] N.G. de Bruijn. “Lambda Calculus Notation with Nameless Dummies, a Tool for Automatic Formula Manipulation, with Application to the Church-Rosser Theorem”. In: *Indagationes Mathematicae (Proceedings)* 75 (Dec. 1972), pp. 381–392. DOI: 10.1016/1385-7258(72)90034-0.
- [Chu41] Alonzo Church. *The Calculi of Lambda-Conversion*. Princeton University Press, 1941.
- [CW85] Luca Cardelli and Peter Wegner. “On Understanding Types, Data Abstraction, and Polymorphism”. In: *ACM Comput. Surv.* 17.4 (Dec. 1985), pp. 471–523. ISSN: 0360-0300. DOI: 10.1145/6041.6042. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/6041.6042>.
- [GTL89] Jean-Yves Girard, Paul Taylor, and Yves Lafont. *Proofs and Types*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 1989. ISBN: 0-521-37181-3.
- [Hin05] Ralf Hinze. “THEORETICAL PEARL Church Numerals, Twice!” In: *J. Funct. Program.* 15.1 (Jan. 2005), pp. 1–13. ISSN: 0956-7968. DOI: 10.1017/S0956796804005313. URL: <http://dx.doi.org/10.1017/S0956796804005313>.
- [HS08] J. Roger Hindley and Jonathan P. Seldin. *Lambda-Calculus and Combinators: An Introduction*. 2nd ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2008. ISBN: 0521898854, 9780521898850.

- [Hut99] Graham Hutton. “A Tutorial on the Universality and Expressiveness of Fold”. In: *J. Funct. Program.* 9.4 (July 1999), pp. 355–372. ISSN: 0956-7968. DOI: 10.1017/S0956796899003500. URL: <http://dx.doi.org/10.1017/S0956796899003500>.
- [Jan13] Jan Martin Jansen. “Programming in the  $\lambda$ -Calculus: From Church to Scott and Back”. In: *Essays Dedicated to Rinus Plasmeijer on the Occasion of His 61st Birthday on The Beauty of Functional Code - Volume 8106*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013, pp. 168–180. ISBN: 978-3-642-40354-5. DOI: 10.1007/978-3-642-40355-2\_12. URL: [https://doi.org/10.1007/978-3-642-40355-2\\_12](https://doi.org/10.1007/978-3-642-40355-2_12).
- [JKP06] Jan Martin Jansen, Pieter Koopman, and Rinus Plasmeijer. “Efficient Interpretation by Transforming Data Types and Patterns to Functions”. In: Jan. 2006, pp. 73–90.
- [JLP92] Peyton Jones, Simon L, and Simon Peyton Jones. “Implementing Lazy Functional Languages on Stock Hardware: The Spineless Tagless G-machine”. In: *Journal of Functional Programming* 2 (July 1992), pp. 127–202. URL: <https://www.microsoft.com/en-us/research/publication/implementing-lazy-functional-languages-on-stock-hardware-the-spineless-tagless-g-machine/>.
- [KPJ14] Pieter Koopman, Rinus Plasmeijer, and Jan Martin Jansen. “Church Encoding of Data Types Considered Harmful for Implementations: Functional Pearl”. In: *Proceedings of the 26Nd 2014 International Symposium on Implementation and Application of Functional Languages*. IFL ’14. Boston, MA, USA: ACM, 2014, 4:1–4:12. ISBN: 978-1-4503-3284-2. DOI: 10.1145/2746325.2746330. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/2746325.2746330>.
- [Mar96] P Martin Lof. “On the Meanings of the Logical Constants and the Justifications of the Logical Laws”. In: *Nordic Journal of Philosophical Logic* 1 (Jan. 1996).
- [NG14] Rob Nederpelt and Herman Geuvers. *Type Theory and Formal Proof: An Introduction*. Cambridge University Press, 2014. DOI: 10.1017/CB09781139567725.
- [Pey87] Simon L. Peyton Jones. *The Implementation of Functional Programming Languages (Prentice-Hall International Series in Computer Science)*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1987. ISBN: 013453333X.

- [PL92] Simon L. Peyton Jones and David R. Lester. *Implementing Functional Languages*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1992. ISBN: 0-13-721952-0.
- [Rin93] Marko van Eekelen Rinus Plasmeijer. *Functional Programming and Parallel Graph Rewriting*. Addison-Wesley, 1993. ISBN: 0471935670. URL: [https://clean.cs.ru.nl/Functional\\_Programming\\_and\\_Parallel\\_Graph\\_Rewriting](https://clean.cs.ru.nl/Functional_Programming_and_Parallel_Graph_Rewriting).
- [SS75] Gerald J. Sussman and Guy L. Steele Jr. *An Interpreter for Extended Lambda Calculus*. Tech. rep. Cambridge, MA, USA, 1975.
- [SU06] Morten Heine Sørensen and Pawel Urzyczyn. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, Volume 149 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics)*. New York, NY, USA: Elsevier Science Inc., 2006. ISBN: 0444520775.
- [Sul+07] Martin Sulzmann et al. “System F with Type Equality Coercions”. In: *Proceedings of the 2007 ACM SIGPLAN International Workshop on Types in Languages Design and Implementation*. TLDI ’07. Nice, Nice, France: ACM, 2007, pp. 53–66. ISBN: 1-59593-393-X. DOI: 10.1145/1190315.1190324. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/1190315.1190324>.
- [Tai67] W. W. Tait. “Intensional Interpretations of Functionals of Finite Type I”. In: *Journal of Symbolic Logic* 32.2 (1967), pp. 198–212. DOI: 10.2307/2271658.
- [Wad89] Philip Wadler. “Theorems for Free!” In: *Proceedings of the Fourth International Conference on Functional Programming Languages and Computer Architecture*. FPCA ’89. Imperial College, London, United Kingdom: ACM, 1989, pp. 347–359. ISBN: 0-89791-328-0. DOI: 10.1145/99370.99404. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/99370.99404>.
- [Wel99] J. B. Wells. “Typability and type checking in system F are equivalent and undecidable”. English. In: *Annals of Pure and Applied Logic* 98.1-3 (June 1999), pp. 111–156. ISSN: 0168-0072.
- [Wit53] Ludwig Wittgenstein. *Philosophical Investigations*. Wiley-Blackwell, 1953.

- [Zak07] Mateusz Zakrzewski. “Definable functions in the simply typed lambda-calculus”. In: *CoRR* abs/cs/0701022 (2007). arXiv: cs/0701022. URL: <http://arxiv.org/abs/cs/0701022>.