Definicja 1. (Relacja zgodna) Relację binarną $\mathcal{R}$ na zbiorze G nazywamy *zgodną*, jeśli dla dowolnych M, N, $P \in G$ zachodzą następujące warunki:

(a) Jeśli $M\mathcal{R}N$

1 Rachunek λ

Niech V będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych x, y, $\ldots$ (indeksowanych być może liczbami naturalnymi). Elementy takiego zbioru będziemy nazywali λ-*zmiennymi.* Ponieważ V jest potencjalnie nieskończony, zastrzegamy sobie możliwość wybierania w razie potrzeby wcześniej nie użytej zmiennej.

Definicja 2. (Zbiór $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ pretermów) Zbiorem pretermów będziemy nazywali najmniejszy (w sensie mnogościowym) zbiór wyrażeń $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ taki, że:

(P1) Jeśli $x \in V$, to $x \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$.

(P2) Jeśli M, $N \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$, to $(M\,N) \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$.

(P3) Jeśli $x \in V$ i $M \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$, to $(\lambda x.\, M) \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$.

Definicję 2 można równoznacznie wyrazić przy pomocy notacji Backusa-Naura. Wówczas ma ona następującą, zwięzłą postać postać:

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} \leftarrow V \mid (\tilde{\mathbf{\Lambda}}\,\tilde{\mathbf{\Lambda}}) \mid (\lambda V.\,\tilde{\mathbf{\Lambda}})$$

Elementy $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ będziemy oznaczali literami L, M, N, P, Q, R i ich wariantami z górnymi lub dolnymi indeksami. Wyrażenia postaci (P2) nazywamy *aplikacjami* M do N. Symbol λ występujący w (P3) nazywamy λ-*abstraktorem*, zaś wyrażenia powstałe przez zastosowanie tej reguły to λ-*abstrakcje.* W wyrażeniu postaci $(\lambda x.\, M)$ preterm M jest w *zasięgu* λ-abstraktora, a zmienna x jest przez niego *związana.* Ponadto, będziemy stosowali następujące konwencje notacyjne:

– *najbardziej zewnętrzne nawiasy bedą pomijane,*
– *aplikacja wiąże lewostronnie; wyrażenia postaci* $(PQ)R$ *będą zapisywane w postaci* PQR*,*
– λ-*abstrakcja wiaże prawostronnie:* $\lambda x_1.\,(\lambda x_2.\,P)$ *zapisujemy* $\lambda x_1.\,\lambda x_2.\,P$*,*
– *następujące po sobie* λ-*abstrakcje postaci* $\lambda x_1.\,\lambda x_2.\,\ldots\lambda x_n.\,P$ *zapisujemy pod wspólnym* λ-*abstraktorem:* $\lambda x_1\,x_2\,\ldots\,x_n.\,P$*.*

Powiemy, że dwa λ-termy są *syntaktycznie równe*, jeśli rozumiane jako ciągi znaków są identyczne. Równość syntaktyczną będziemy oznaczali znakiem $\equiv$.

Przykład 1. Podajmy kilka przykładów λ-pretermów pogrupowanych ze względu na ich konstrukcję.

(P1): $x,\ y,\ z.$

(P2): $x\,x,\ y\,x,\ x\,(x\,z),$
$(\lambda x.\,(xz))y,\ y\,(\lambda x.\,(x\,z)),\ (\lambda x.\,x)\,(\lambda x.\,x).$

(P3): $\lambda x.\,(x\,z),\ \lambda yz.\,x,\ \lambda x.\,(\lambda x.\,(x\,x)).$

Podwyrażenia λ-pretermu mogą być wzajemnie identyczne i występować wielokrotnie. Obserwację tę ujmuje następująca definicja.

Definicja 3. (Multizbiór Sub podtermów)

(1) $\mathrm{Sub}(x) = \{x\}$

(2) $\mathrm{Sub}(MN) = \mathrm{Sub}(M) \cup \mathrm{Sub}(N) \cup \{M\,N\}$

(3) $\mathrm{Sub}(\lambda x.\,M) = \mathrm{Sub}(M) \cup \{\lambda x.\,M\}$

Elementy multizbioru $\mathrm{Sub}(M)$ nazywamy *podtermami* M. Jeśli L jest podtermem M, ale $L \not\equiv M$, to L nazywamy podtermem *właściwym.*

Przykład 2. Podtermy wybranych λ-pretermów.

$$\begin{aligned}
&\text{(a)}\quad \mathrm{Sub}\,(\lambda x.\,x\,x) = \left\{(\lambda x.\,x\,x)^1,\ (x\,x)^1,\ x^2\right\}\\
&\text{(b)}\quad \mathrm{Sub}\,((\lambda x.\,x\,x)\ (\lambda x.\,x\,x)) =\\
&\qquad = \left\{((\lambda x.\,x\,x)\,(\lambda x.\,x\,x))^1,\ (\lambda x.\,x\,x)^2,\ (x\,x)^2,\ x^4\right\}
\end{aligned}$$

W powyższych przykładach użyliśmy standardowej notacji w górnym indeksie umieszczając krotność wystąpienia elementu.

Definicja 4. (Zbiór FV zmiennych wolnych) Dla dowolnego pretermu M określamy zbiór $\mathrm{FV}(M)$ *zmiennych wolnych* w M w następujący sposób:

$$\begin{aligned}
\mathrm{FV}(x) &= \{x\}\\
\mathrm{FV}(\lambda x.\,P) &= \mathrm{FV}(P) \setminus \{x\}\\
\mathrm{FV}(PQ) &= \mathrm{FV}(P) \cup \mathrm{FV}(Q)
\end{aligned}$$

Jesli $\mathrm{FV}(M) = \varnothing$, to mówimy, że M jest *domknięty* lub nazywamy M *kombinatorem.*

Przykład 3. (a) $\mathrm{FV}(\lambda x.\,x\,y) = \{y\}$

(b) $\mathrm{FV}(x\,(\lambda x.\,x\,y)) = \{x,\ y\}$

(c) $\mathrm{FV}(\lambda xyz.\,xy) = \varnothing$

Definicja 5. (Podstawienie) Dla dowolnych M, N $\in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ i $x \in V$ przez $N[x/N]$ oznaczamy rezultat podstawienia termu N za wszystkie wolne wystąpienia zmiennej x w M, o ile w rezultacie podstawienia nie zostaną związane żadne zmienne wolne występujące w N. W takim wypadku *podstawienie* jest przekształceniem pretermów określonym w następujący sposób:

(S1) $x[x/N] \equiv N$

(S2) $y[x/N] \equiv y,\;$ o ile $x \not\equiv y$

(S3) $(PQ)[x/N] \equiv P[x/N]\,Q[x/N]$

(S4) $(\lambda y.\,P)[x/N] \equiv \lambda y.\,P[x/N],\;$ gdzie $x \not\equiv y$ i $y \notin \mathrm{FV}(N)$

(S5) $(\lambda x.\,P)[x/N] \equiv \lambda x.\,P$

Zauważmy, że jest to funkcja częściowa w zbiorze $\tilde{\mathbf{\Lambda}} \times V \times \tilde{\mathbf{\Lambda}}$. Powiemy, że $M[x/N]$ jest *poprawnym podstawieniem*, jeśli podstawienie $M[x/N]$ jest określone w myśl Definicji 5.

Lemat 1. *(O podstawieniu) Niech* M, N, $L \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ *i niech ponadto* $x \not\equiv y$ *oraz* $x \notin \mathrm{FV}(L)$*. Wówczas*

$$M[x/N][y/L] \equiv M[y/L]\,[x/N\,[y/L]]\,. \tag{1}$$

Dowód. Dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem M. Rozważmy następujące przypadki:

i) M jest zmienną. Wówczas:

   a. Jeśli $M \equiv x$, to obie strony (1) po podstawieniu są postaci $N[y/L]$.

   b. Jeśli $M \equiv y$, to ponieważ $x \not\equiv y$ i $x \notin \mathrm{FV}(M)$, po wykonaniu podstawienia po lewej stronie (1) otrzymujemy $M[x/N][y/L] \equiv L$. Ponieważ $x \notin \mathrm{FV}(L)$, to po wykonaniu podstawienia po prawej stronie widzimy, że obydwie strony są identyczne.

   c. Jeśli $M \equiv z$ i $z \not\equiv x$ oraz $z \not\equiv y$, to obydwie strony (1) sa identyczne.

ii) $M \equiv PQ$ dla pewnych P, $Q \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$. Wówczas korzystając z hipotezy indukcyjnej wnosimy, że

$$P[x/N][y/L] \equiv P[y/L]\,[x/N\,[y/L]]\,,$$
$$Q[x/N][y/L] \equiv Q[y/L]\,[x/N\,[y/L]]\,.$$

Mając na względzie (S3) widzimy, że twierdzenie zachodzi i w tym przypadku.

iii) Jeśli $M \equiv \lambda z.\, P$ oraz $z \equiv x$ lub $z \equiv y$, to z (S5) widzimy, że obydwie strony (1) sa identyczne. Przypuśćmy, że $z \not\equiv x$ i $z \not\equiv y$ i $z \notin \mathrm{FV}(L)$. Wówczas na podstawie hipotezy indukcyjnej mamy:

$$\begin{aligned}(\lambda z.\, P)[x/N][y/L] &= \lambda z.\, P[x/N][y/L] = \\ &= \lambda z.\, P[y/L][x/N[y/L]] = \\ &= (\lambda z.\, P)[y/L][x/N[y/L]].\end{aligned}$$

□

Wniosek 1. *Jesli $M[x/y]$ jest poprawnym postawieniem i $y \notin \mathrm{FV}(M)$, to $M[x/y][y/x]$ jest poprawnym podstawieniem oraz $M[x/y][y/x] = M$.*

Dowód. Mając na uwadze Lemat 5 dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem M. □

1.1 Wyrażenia λ

Na ogół chcielibyśmy utożsamiać pretermy, które różnią się wyłącznie zmiennymi związanymi, tak jak w przypadku wyrażeń $\lambda x.\, zx$ i $\lambda y.zy$. W takim wypadku powiemy o nich, że są swoimi *α-wariantami* lub że są ze sobą w relacji *α-konwersji.*

Definicja 6. (Relacja α-konwersji) Relacją $=_\alpha$ (α-konwersji) nazywamy najmniejszy w sensie mnogościowym praporządek na $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ taki, że

(α1) Jeśli $y \notin \mathrm{FV}(M)$ oraz $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem, to $\lambda x.\, M \ =_\alpha\ \lambda y.\, M[x/y]$

(α2) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla dowolnego $x \in V$ zachodzi $\lambda x.\, M =_\alpha \lambda x.\, N$

(α3) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla dowolnego $Z \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ zachodzi $MZ =_\alpha NZ$

(α4) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla dowolnego $Z \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ zachodzi $ZM =_\alpha ZN$

Wniosek 2. *Relacja $=_\alpha$ jest relacją równoważności.*

Dowód. Wystarczy, że pokażemy, że relacja $=_\alpha$ jest symetryczna. Dowód przebiega przez indukcję względem Definicji 6. Rozważmy następujące przypadki:

i) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji zwrotności $=_\alpha$, to $M \equiv N$, a zatem również $N \equiv M$. Stąd $N =_\alpha M$.

ii) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji przechodniości $=_\alpha$, to istnieje $L \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ takie, że $M =_\alpha L$ i $L =_\alpha N$. Wówczas z hipotezy indukcyjnej $N =_\alpha L$ i $L =_\alpha M$. Z przechodniości relacji $=_\alpha$ otrzymujemy spodziewaną tezę.

iii) Przypuśćmy, że $M =_\alpha N$ w konsekwencji $(\alpha 1)$ dla $M \equiv \lambda x.\, M'$ i $N \equiv \lambda y.\, M'[x/y]$. Ponieważ $x \notin \mathrm{FV}(M'[x/y])$, to ze względu na Wniosek 1 mamy, że $M'[x/y][y/x] = M'$. Zatem, na podstawie $(\alpha 1)$:

$$\lambda y.\, M'[x/y] =_\alpha \lambda x.\, M'[x/y][y/x].$$

iv) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji $(\alpha 2)$, gdzie $M = \lambda x.\, M'$ i $N = \lambda x.\, N'$ dla $M' =_\alpha N'$, to z hipotezy indukcyjnej $N' =_\alpha M'$ i w konsekwencji $(\alpha 2)$ mamy, że $N =_\alpha M$.

v) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji $(\alpha 3)$ dla $M \equiv M'Z$ i $N \equiv N'Z$ takich, że $M' =_\alpha N'$, to z hipotezy indukcyjnej oczywiście $N' =_\alpha M'$, a zatem z $(\alpha 3)$ $N =_\alpha M$.

vi) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji $(\alpha 3)$, to postępujemy jak w przypadku (v). $\square$