

# 1 Rachunek $\lambda$

Niech  $V$  będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych  $x, y, \dots$  (indeksowanych być może liczbami naturalnymi). Elementy takiego zbioru będziemy nazywali  $\lambda$ -zmiennymi. Ponieważ  $V$  jest potencjalnie nieskończony, zastrzegamy sobie możliwość wybierania w razie potrzeby wcześniej nie użytej zmiennej.

**Definicja 1.** (Zbiór  $\tilde{\Lambda}$  pretermów) Zbiorem pretermów będziemy nazywali najmniejszy (w sensie mnogościowym) zbiór wyrażeń  $\tilde{\Lambda}$  taki, że:

- (P1) Jeśli  $x \in V$ , to  $x \in \tilde{\Lambda}$ .
- (P2) Jeśli  $M, N \in \tilde{\Lambda}$ , to  $(M N) \in \tilde{\Lambda}$ .
- (P3) Jeśli  $x \in V$  i  $M \in \tilde{\Lambda}$ , to  $(\lambda x. M) \in \tilde{\Lambda}$ .

Definicję 1 można równoznacznie wyrazić przy pomocy notacji Backusa-Naura. Wówczas ma ona następującą, zwięzłą postać:

$$\tilde{\Lambda} \leftarrow V \mid (\tilde{\Lambda} \tilde{\Lambda}) \mid (\lambda V. \tilde{\Lambda})$$

Elementy  $\tilde{\Lambda}$  będziemy oznaczali literami  $L, M, N, P, Q, R$  i ich wariantami z górnymi lub dolnymi indeksami. Wyrażenia postaci (P2) nazywamy *aplikacjami*  $M$  do  $N$ . Symbol  $\lambda$  występujący w (P3) nazywamy  $\lambda$ -abstraktorem, zaś wyrażenia powstałe przez zastosowanie tej reguły to  $\lambda$ -abstrakcje. W wyrażeniu postaci  $(\lambda x. M)$  preterm  $M$  jest w *zasięgu*  $\lambda$ -abstraktora, a zmienna  $x$  jest przez niego *związana*. Ponadto, będziemy stosowali następujące konwencje notacyjne:

- *najbardziej zewnętrzne nawiasy będą pomijane*,
- *aplikacja wiąże lewostronnie; wyrażenia postaci  $(PQ)R$  będą zapisywane w postaci  $PQR$ ,*
- *$\lambda$ -abstrakcja wiąże prawostronnie:  $\lambda x_1. (\lambda x_2. P)$  zapisujemy  $\lambda x_1. \lambda x_2. P$ ,*
- *następujące po sobie  $\lambda$ -abstrakcje postaci  $\lambda x_1. \lambda x_2. \dots \lambda x_n. P$  zapisujemy pod wspólnym  $\lambda$ -abstraktorem:  $\lambda x_1 x_2 \dots x_n. P$ .*

Powiemy, że dwa  $\lambda$ -termy są *syntaktycznie równe*, jeśli rozumiane jako ciągi znaków są identyczne. Równość syntaktyczną będziemy oznaczali znakiem  $\equiv$ .

**Przykład 1.** Podajmy kilka przykładów  $\lambda$ -pretermów pogrupowanych ze względu na ich konstrukcję.

- (P1):  $x, y, z$ .
- (P2):  $xx, yx, x(xz),$   
 $(\lambda x. (xz))y, y(\lambda x. (xz)), (\lambda x. x)(\lambda x. x).$
- (P3):  $\lambda x. (xz), \lambda yz. x, \lambda x. (\lambda x. (xx)).$

Podwyrażenia  $\lambda$ -pretermu mogą być wzajemnie identyczne i występować wielokrotnie. Obserwację tę ujmuje następująca definicja.

**Definicja 2.** (Multizbiór Sub podtermów pretermu)

- (1)  $\text{Sub}(x) = \{x\}$
- (2)  $\text{Sub}(MN) = \text{Sub}(M) \cup \text{Sub}(N) \cup \{MN\}$
- (3)  $\text{Sub}(\lambda x. M) = \text{Sub}(M) \cup \{\lambda x. M\}$

Elementy multizbioru  $\text{Sub}(M)$  nazywamy *podtermami*  $M$ . Jeśli  $L$  jest podtermem  $M$ , ale  $L \neq M$ , to  $L$  nazywamy podtermem *właściwym*.

**Przykład 2.** Podtermy wybranych  $\lambda$ -pretermów.

- (a)  $\text{Sub}(\lambda x. xx) = \{(\lambda x. xx)^1, (xx)^1, x^2\}$
- (b)  $\text{Sub}((\lambda x. xx)(\lambda x. xx)) =$   
 $= \{((\lambda x. xx)(\lambda x. xx))^1, (\lambda x. xx)^2, (xx)^2, x^4\}$

W powyższych przykładach użyliśmy standardowej notacji w górnym indeksie umieszczając krotność występowania elementu.

**Definicja 3.** (Zbiór FV zmiennych wolnych) Dla dowolnego pretermu  $M$  określamy zbiór  $\text{FV}(M)$  *zmiennych wolnych* w  $M$  w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\text{FV}(x) &= \{x\} \\ \text{FV}(\lambda x. P) &= \text{FV}(P) \setminus \{x\} \\ \text{FV}(PQ) &= \text{FV}(P) \cup \text{FV}(Q)\end{aligned}$$

Jeśli  $\text{FV}(M) = \emptyset$ , to mówimy, że  $M$  jest *domknięty* lub nazywamy  $M$  *kombinatorem*.

**Przykład 3.** (a)  $\text{FV}(\lambda x. xy) = \{y\}$

(b)  $\text{FV}(x(\lambda x. xy)) = \{x, y\}$

(c)  $\text{FV}(\lambda xyz. xy) = \emptyset$

**Definicja 4.** (Podstawienie) Dla dowolnych  $M, N \in \tilde{\mathbf{A}}$  i  $x \in V$  przez  $N[x/N]$  oznaczamy rezultat podstawienia termu  $N$  za wszystkie wolne wystąpienia zmiennej  $x$  w  $M$ , o ile w rezultacie podstawienia nie zostaną związane żadne zmienne wolne występujące w  $N$ . W takim wypadku *podstawienie* jest przekształceniem pretermów określonym w następujący sposób:

$$(S1) \quad x[x/N] = N$$

- (S2)  $y[x/N] = y$ , o ile  $x \neq y$   
(S3)  $(PQ)[x/N] = P[x/N]Q[x/N]$   
(S4)  $(\lambda y. P)[x/N] = \lambda y. P[x/N]$ , gdzie  $x \neq y$  i  $y \notin \text{FV}(N)$   
(S5)  $(\lambda x. P)[x/N] = \lambda x. P$

Zauważmy, że jest to funkcja częściowa w zbiorze  $\tilde{\mathbf{A}} \times V \times \tilde{\mathbf{A}}$ . Powiemy, że  $M[x/N]$  jest *poprawnym podstawieniem*, jeśli podstawienie  $M[x/N]$  jest określone w myśl Definicji 4.

**Lemat 1.** (O podstawieniu) Niech  $M, N, L \in \tilde{\mathbf{A}}$  i niech ponadto  $x \neq y$  oraz  $x \notin \text{FV}(L)$ . Wówczas

$$M[x/N][y/L] \equiv M[y/L][x/N[y/L]]. \quad (1)$$

**Dowód.** Dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem  $M$ . Rozważmy następujące przypadki:

- i)  $M$  jest zmienną. Wówczas:
- a. Jeśli  $M \equiv x$ , to obie strony (1) po podstawieniu są postaci  $N[y/L]$ .
  - b. Jeśli  $M \equiv y$ , to ponieważ  $x \neq y$  i  $x \notin \text{FV}(M)$ , po wykonaniu podstawienia po lewej stronie (1) otrzymujemy  $M[x/N][y/L] \equiv L$ . Ponieważ  $x \notin \text{FV}(L)$ , to po wykonaniu podstawienia po prawej stronie widzimy, że obydwie strony są identyczne.
  - c. Jeśli  $M \equiv z$  i  $z \neq x$  oraz  $z \neq y$ , to obydwie strony (1) są identyczne.
- ii)  $M \equiv PQ$  dla pewnych  $P, Q \in \tilde{\mathbf{A}}$ . Wówczas korzystając z hipotezy indukcyjnej wnosimy, że

$$\begin{aligned} P[x/N][y/L] &\equiv P[y/L][x/N[y/L]], \\ Q[x/N][y/L] &\equiv Q[y/L][x/N[y/L]]. \end{aligned}$$

Mając na względzie (S'3) widzimy, że twierdzenie zachodzi i w tym przypadku.

- iii) Jeśli  $M \equiv \lambda z. P$  oraz  $z \equiv x$  lub  $z \equiv y$ , to z (S'5) widzimy, że obydwie strony (1) są identyczne. Przypuśćmy, że  $z \neq x$  i  $z \neq y$  i  $z \notin \text{FV}(L)$ . Wówczas na podstawie hipotezy indukcyjnej mamy:

$$\begin{aligned} (\lambda z. P)[x/N][y/L] &= \lambda z. P[x/N][y/L] = \\ &= \lambda z. P[y/L][x/N[y/L]] = \\ &= (\lambda z. P)[y/L][x/N[y/L]]. \end{aligned}$$

□

**Wniosek 1.** *Jeśli  $M[x/y]$  jest poprawnym podstawieniem i  $y \notin \text{FV}(M)$ , to  $M[x/y][y/x]$  jest poprawnym podstawieniem oraz  $M[x/y][y/x] = M$ .*

**Dowód.** Mając na uwadze Lemat 4 dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem  $M$ .  $\square$

## 1.1 Wyrażenia $\lambda$

Na ogół chcielibyśmy utożsamiać pretermy, które różnią się wyłącznie zmiennymi związanymi, tak jak w przypadku wyrażeń  $\lambda x. zx$  i  $\lambda y. zy$ . W takim wypadku powiemy o nich, że są swoimi  $\alpha$ -variantami lub że są ze sobą w relacji  $\alpha$ -konwersji.

**Definicja 5.** (Relacja  $\alpha$ -konwersji) Relacją  $=_\alpha$  ( $\alpha$ -konwersji) nazywamy najmniejszy w sensie mnogościowym praporządek na  $\tilde{\Lambda}$  taki, że

- ( $\alpha 1$ ) Jeśli  $y \notin \text{FV}(M)$  oraz  $M[x/y]$  jest poprawnym podstawieniem, to  $\lambda x. M =_\alpha \lambda y. M[x/y]$
- ( $\alpha 2$ ) Jeśli  $M =_\alpha N$ , to dla dowolnego  $x \in V$  zachodzi  $\lambda x. M =_\alpha \lambda x. N$
- ( $\alpha 3$ ) Jeśli  $M =_\alpha N$ , to dla dowolnego  $Z \in \tilde{\Lambda}$  zachodzi  $MZ =_\alpha NZ$
- ( $\alpha 4$ ) Jeśli  $M =_\alpha N$ , to dla dowolnego  $Z \in \tilde{\Lambda}$  zachodzi  $ZM =_\alpha ZN$

**Wniosek 2.** *Relacja  $=_\alpha$  jest relacją równoważności.*

**Dowód.** Wystarczy, że pokażemy, że relacja  $=_\alpha$  jest symetryczna. Dowód przebiega przez indukcję względem Definicji 5. Rozważmy następujące przypadki:

- i) Jeśli  $M =_\alpha N$  w konsekwencji zwrotności  $=_\alpha$ , to  $M \equiv N$ , a zatem również  $N \equiv M$ . Stąd  $N =_\alpha M$ .
- ii) Jeśli  $M =_\alpha N$  w konsekwencji przechodniości  $=_\alpha$ , to istnieje  $L \in \tilde{\Lambda}$  takie, że  $M =_\alpha L$  i  $L =_\alpha N$ . Wówczas z hipotezy indukcyjnej  $N =_\alpha L$  i  $L =_\alpha M$ . Z przechodniości relacji  $=_\alpha$  otrzymujemy spodziewaną tezę.
- iii) Przypuśćmy, że  $M =_\alpha N$  w konsekwencji ( $\alpha 1$ ) dla  $M \equiv \lambda x. M'$  i  $N \equiv \lambda y. M'[x/y]$ . Ponieważ  $x \notin \text{FV}(M'[x/y])$ , to ze względu na Wniosek 1 mamy, że  $M'[x/y][y/x] = M'$ . Zatem, na podstawie ( $\alpha 1$ ):

$$\lambda y. M'[x/y] =_\alpha \lambda x. M'[x/y][y/x].$$

- iv) Jeśli  $M =_\alpha N$  w konsekwencji ( $\alpha 2$ ), gdzie  $M = \lambda x. M'$  i  $N = \lambda x. N'$  dla  $M' =_\alpha N'$ , to z hipotezy indukcyjnej  $N' =_\alpha M'$  i w konsekwencji ( $\alpha 2$ ) mamy, że  $N =_\alpha M$ .

v) Jeśli  $M =_{\alpha} N$  w konsekwencji  $(\alpha 3)$  dla  $M \equiv M'Z$  i  $N \equiv N'Z$  takich, że  $M' =_{\alpha} N'$ , to z hipotezy indukcyjnej oczywiście  $N' =_{\alpha} M'$ , a zatem z  $(\alpha 3)$   $N =_{\alpha} M$ .

vi) Jeśli  $M =_{\alpha} N$  w konsekwencji  $(\alpha 3)$ , to postępujemy jak w przypadku (v).  $\square$

**Definicja 6.** (Zbiór  $\Lambda$   $\lambda$ -termów) Każdą klasę abstrakcji relacji  $=_{\alpha}$  nazywamy  $\lambda$ -termem. Zbiór wszystkich  $\lambda$ -termów  $\Lambda$  to zbiór ilorazowy relacji  $\alpha$ -konwersji:

$$\Lambda = \{[M]_{=_{\alpha}} \mid M \in \tilde{\Lambda}\}$$

**Konwencja.** Wprowadzamy następujące konwencje notacyjne:

$$\begin{aligned} x &= [x]_{=_{\alpha}}, \\ PQ &= [M'N']_{=_{\alpha}}, \text{ gdzie } M = [M']_{=_{\alpha}} \text{ i } N = [N']_{=_{\alpha}}, \\ \lambda x. M &= [\lambda x. M']_{=_{\alpha}}, \text{ gdzie } N = [N']_{=_{\alpha}}. \end{aligned}$$

Na zbiór  $\Lambda$  przenoszą się pojęcia podtermu, zmiennych wolnych i operacji podstawienia definiowane uprzednio dla pretermów. Operacja podstawienia wymaga jednak pewnej delikatności. Rozważmy następującą relację:

$$\lambda x. zx =_{\alpha} \lambda y. zy$$

Zauważmy, że traktując operację podstawienia w sposób naiwny, otrzymujemy, że  $(\lambda x. zx)[z/x] \neq_{\alpha} (\lambda y. zy)[z/x]$ , a więc tracimy porządaną własność niezmienniczości  $\alpha$ -konwersji względem podstawienia. Stąd w Definicji 4 wymóg, aby poprawne podstawienie nie prowadziło do uszczuplenia zbioru zmiennych wolnych. Precyzyjniejszym rozwiązaniem jest określenie podstawienia, które prowadziłoby do abstrachowania po wcześniej nie występujących zmiennych, czyli

$$(\lambda x. M)[y/N] = \lambda x'. M[x/x'] [y/N],$$

w przypadku, gdy  $x \neq y$ , gdzie  $x' \notin \text{FV}(M)$  i  $x' \notin \text{FV}(N)$ . Rozstrzygnięcie takie przytacza się w [HS08]. Precyzyjnie tę rzecz ujmuje Definicja 4'.

**Definicja 4'.** (*Podstawienie'*)

- (S'1)  $x[x/N] \equiv N$
- (S'2)  $y[x/N] \equiv y$ , o ile  $x \neq y$
- (S'3)  $(PQ)[x/N] \equiv P[x/N]Q[x/N]$
- (S'4)  $(\lambda y. P)[x/N] \equiv \lambda y. P[x/N]$ , gdzie  $x \neq y$  i  $y \notin \text{FV}(N)$
- (S'5)  $(\lambda x. P)[x/N] \equiv \lambda x. P$

Szerszą dyskusję na ten temat można prześledzić w [Che13]. Nasze rozważania opierają się w tej materii przeważająco na [SU06]. Samo podejście do definiowania  $\lambda$ -termów przez operację  $\alpha$ -konwersji nie jest powszechne w literaturze przedmiotu. Analogiczną konstrukcję należałoby powtarzać wprowadzając każdy kolejny system, dlatego w dalszej części tej pracy będziemy poprzestawali na nieformalnym traktowaniu wyrażeń danego systemu jako odpowiednich klas  $\alpha$ -konwersji.

**Definicja 7.** (Multizbiór Sub podtermów  $\lambda$ -termu) Dla dowolnego  $\lambda$ -termu  $M = [M']_{=\alpha}$  określamy

$$\text{Sub}(M) = \text{Sub}(M'),$$

gdzie  $\text{Sub}(M')$  jest multizbiorem podwyrażeń pretermu  $M'$  zdefiniowanym w myśl Definicji 2.

**Definicja 8.** (Zbiór zmiennych wolnych FV) Dla dowolnego  $\lambda$ -termu  $M = [M']_{=\alpha}$  określamy zbiór  $\text{FV}(M)$  *zmiennych wolnych* w  $M$

$$\text{FV}(M) = \text{FV}(M'),$$

gdzie  $\text{FV}(M')$  jest zbiorem zmiennych wolnych pretermu  $M'$  zdefiniowanym w myśl Definicji 3.

**Definicja 9.** (Podstawienie) Niech  $M = [M']_{=\alpha}$  i  $N = [N']_{=\alpha}$  i niech  $M'[x/N']$  będzie poprawnym podstawieniem w myśl Definicji 4. Wówczas

$$M[x/N] = [M'[x/N']]_{=\alpha}.$$

Notowanie serii podstawień prędko staje się niezręczne, dlatego na gruncie Definicji 9 potrzebujemy określić nieco więcej cukru syntaktycznego.

**Definicja 10.** (Podstawienie jednoczesne) Dla dowolnego  $M \in \mathbf{\Lambda}$ , ciągu  $\lambda$ -zmiennych  $\vec{x}$  i ciągu  $\lambda$ -termów  $\vec{N}$  określamy:

- ( $\vec{s}1$ )  $x_i[\vec{x}/\vec{N}] = N_i$  dla  $i \in \mathbb{N}$ .
- ( $\vec{s}2$ )  $y[\vec{x}/\vec{N}] = y$  o ile dla dowolnego  $i \in \mathbb{N}$ ,  $y \neq x_i$ .
- ( $\vec{s}3$ )  $(PQ)[\vec{x}/\vec{N}] = P[\vec{x}/\vec{N}]Q[\vec{x}/\vec{N}]$
- ( $\vec{s}4$ )  $(\lambda y. P)[\vec{x}/\vec{N}] = \lambda y'. P[y/y'][\vec{x}/\vec{N}]$ , gdzie  $y'$  jest wcześniej nie występującą zmienną,  $y \neq x_i$  dla wszystkich  $i \in \mathbb{N}$  i  $y \notin \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{FV}(N_i)$ .

**Przykład 4.** Porównajmy następujące podstawienia:

- (a) Niech  $\vec{x} = id$  i niech  $\vec{N}$  będzie ciągiem stałym o wyrazie

## 1.2 Redukcja

Sens obliczeniowy  $\lambda$ -termom nadajemy przez określenie na  $\Lambda$  operacji  $\beta$ - i  $\eta$ -redukcji. Pożądane jest, żeby operacje te wykonywane na podtermach pozostowały w zgodzie ze strukturą całego  $\lambda$ -termu.

**Definicja 11.** (Relacja zgodna) Relację binarną  $\mathcal{R}$  na zbiorze  $\Lambda$  nazywamy *zgodną*, jeśli dla dowolnych  $M, N, P \in \Lambda$  zachodzą następujące warunki:

- (c1) Jeśli  $M\mathcal{R}N$ , to  $(\lambda x. M)\mathcal{R}(\lambda x. N)$  dla dowolnej  $\lambda$ -zmiennnej  $x$ .
- (c2) Jeśli  $M\mathcal{R}N$ , to  $(MP)\mathcal{R}(NP)$ .
- (c3) Jeśli  $M\mathcal{R}N$ , to  $(PM)\mathcal{R}(PN)$ .

Przez *domknięcie relacji*  $\mathcal{R}_1$  będziemy rozumieli najmniejszą (w sensie mnogościowym) relację  $\mathcal{R}_2$  taką, że  $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$ . Z pewnego rodzaju domknięciami, ze względu na ich szczególną rolę, wiążemy następującą notację:

- (a) Przez  $\mathcal{R}^+$  oznaczamy przechodnie domknięcie relacji  $\mathcal{R}$ .
- (b) Przez  $\mathcal{R}^*$  oznaczamy zwrotnie domknięcie relacji  $\mathcal{R}^+$ .
- (c) Przez  $=_{\mathcal{R}}$  oznaczamy symetryczne domknięcie relacji  $\mathcal{R}^*$ .

Dla lepszego zrozumienia powyższych operacji warto zauważyć, że (b) wyznacza praporzadek, który w odniesieniu do redukcji określonych na  $\Lambda$  można rozumieć jako graf skierowany (w przypadku  $\Lambda$  być może nieskończony) w którym krawędzie odpowiadają możliwym krokom obliczenia, zaś (c) – kongruencję, która znów w szczególnym odniesieniu do  $\lambda$ -termów, będzie dokonywała podziału w  $\Lambda$  ze względu na rezultat obliczenia.

**Definicja 12.** (Redukcja)

## Literatura

- [Che13] George Cherevichenko. “New definitions of contexts and free variables for lambda-calculi with explicit substitutions”. In: *CoRR* abs/1303.5039 (2013). arXiv: 1303.5039. URL: <http://arxiv.org/abs/1303.5039>.
- [HS08] J. Roger Hindley and Jonathan P. Seldin. *Lambda-Calculus and Combinators: An Introduction*. 2nd ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2008. ISBN: 0521898854, 9780521898850.
- [SU06] Morten Heine Sørensen and Pawel Urzyczyn. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, Volume 149 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics)*. New York, NY, USA: Elsevier Science Inc., 2006. ISBN: 0444520775.