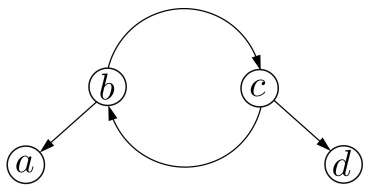
Definicja 1. Niech $\to$ będzie relacją binarną w zbiorze A.

(CR) Powiemy, że $\to$ ma *własność Churcha-Rossera*, jeśli dla dowolnych a, b, $c \in A$ takich, że $a \to^* b$ oraz $a \to^* c$ istnieje $d \in A$ takie, że $b \to^* d$ i $c \to^* d$.

(WCR) Powiemy, że $\to$ ma *słabą własność Churcha-Rossera*, jesli dla dowolnych $a, b, c \in A$ takich, że $a \to b$ oraz $a \to c$ istnieje $d \in A$ takie, że $b \to^* d$ i $c \to^* d$.

Uwaga. Rozważmy następujący graf skierowany, w którym krawdzie odpowiadają relacji $\to$ w zbiorze $\{a, b, c, d\}$:



Widzimy, że relacja $\to$ ma własnosność WCR, ale nie ma własności CR.

Definicja 2. (Postać normalna) Powiemy, że $x \in A$ jest *redukowalny*, jeśli istnieje $y \in A$ takie, że $x \to y$. W przeciwnym wypadku powiemy, że x jest w *postaci normalnej* i będziemy pisali $x \in \mathrm{NF}$.

Element $y \in A$ nazywamy *postacią normalną* $x \in A$, jesli $x \to^* y$ i $y \in \mathrm{NF}$. Jeśli y jest postacią normalną x i y jest jedyną postacią normalną x, to piszemy $x \downarrow y$. W przeciwnym wypadku, czyli jeśli istnieją $y, z \in \mathrm{NF}, y \neq z$ takie, że $x \to^* y$ i $x \to^* z$, powiemy, że x jest *niejednoznaczny*.

Definicja 3. (Własność silnej normalizacji) Powiemy, że relacja $\to$ jest *silnie normalizowalna* (ma własność SN, od ang. *strong normalizable*), jeśli nie istnieje nieskończony ciąg redukcji $a_0 \to a_1 \to a_2 \to \dots$

Twierdzenie 1. *(Lemat Newmana) Niech $\to$ bedzie relacją binarną mającą własność SN. Jeśli $\to$ ma własność WCR, to $\to$ ma własność CR.*

Dowód. Niech $\to$ będzie relacją binarną na A o własności SN i WCR. Ponieważ $\to$ jest SN, to każdy a jest normalizowalny.

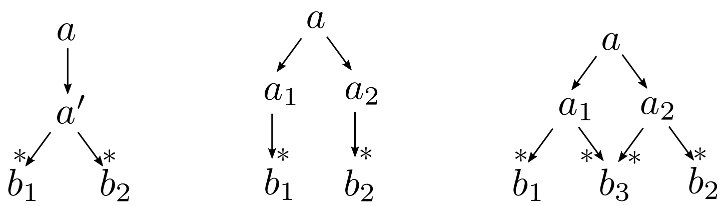
Jeśli A nie zawiera elementów niejednoznacznych, to twierdzenie zachodzi w sposób trywialny. Przypuśćmy, że $a \in A$ jest niejednoznaczny. Twierdzimy, że istnieje $a' \in A$ taki, że $a \to a'$ i a' jest niejednoznaczny. Niech $b_1, b_2 \in \mathrm{NF}$, $b_1 \neq b_2$ i $a \to^* b_1$ oraz $a \to^* b_2$. Ponieważ $b_1 \neq b_2$, to istnieją a_1, $a_2 \in A$ takie, że:

$$a \to a_1 \to^* b_1 \quad \text{oraz} \quad a \to a_2 \to^* b_2$$

Jeśli $a_1 = a_2$, to $a' = a_1 = a_2$ i wystarczy wybrać $a' = a_1$. Jeśli jednak $a_1 \neq a_2$, to z własności WCR istnieje $b_3 \in A$ taka, że $a_1 \to^* b_3$ oraz $a_2 \to^* b_3$. Z własności SN możemy przyjąć, że b_3 jest w postaci normalnej. Zachodzą więc dwa przypadki:

i) $a_1 = a_2$. Wówczas wystarczy ustalić $a' = a_1$ albo $a' = a_2$ (Rysunek **??**).

ii) $a_1 \neq a_2$ (Rysunek **??**). Wówczas z WCR istnieje $b_3 \in A$ takie, że $a_1 \to^* b_3$ oraz $a_2 \to^* b_3$ (Rysunek **??**). Przypuśćmy, że $b_3 \in \mathrm{NF}$. Ponieważ $b_1 \neq b_3$, to $b_3 \neq b_1$ lub $b_3 \neq b_2$, zatem możemy wybrać $a' = a_1$ albo $a' = a_2$.



(a) (b) (c)

Rysunek 1: Warianty konstruowania redukcji.

Stosując powyższe rozumowanie do a' otrzymujemy kolejny element niejednoznaczny. a zatem możemy skontruować nieskończony ciąg redukcji, wbrew założeniu, że relacja $\to$ jest SN. Zatem A nie zawiera elementów niejednoznacznych. $\square$