1 Rachunek λ

Niech V będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych $x,\ y,\ \ldots$ (indeksowanych być może liczbami naturalnymi). Elementy takiego zbioru będziemy nazywali λ-*zmiennymi*.

Definicja 1. (Zbiór $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ pretermów)
Zbiorem pretermów będziemy nazywali najmniejszy (w sensie mnogościowym) zbiór wyrażeń $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ taki, że:

P1. Jeśli $x \in V$, to $x \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$.

P2. Jeśli $M,\ N \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$, to $(M\,N) \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$.

P3. Jeśli $x \in V$ i $M \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$, to $(\lambda x.\, M) \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$.

Korzystając z notacji Backusa-Naura induktywną definicję 1 możemy równoznacznie wyrazić w postaci

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} \ \leftarrow\ V \quad | \quad (MN) \quad | \quad (\lambda V.\, \tilde{\mathbf{\Lambda}})$$

Wyrażenia postaci (P2) nazywamy *aplikacjami* M do N. Symbol λ występujący w (P3) nazywamy λ-*abstraktorem*, zaś wyrażenia powstałe przez zastosowanie tej reguły to λ-*abstrakcje*. W wyrażeniu postaci $(\lambda x.\, M)$ preterm M jest w *zasięgu* λ-abstraktora, a zmienna x jest przez niego *związana*. Ponadto, będziemy stosowali następujące konwencje notacyjne:

- najbardziej zewnętrzne nawiasy bedą pomijane,
- aplikacja wiąże lewostronnie; wyrażenia postaci $(PQ)R$ będą zapisywane w postaci PQR,
- λ-abstrakcja wiaże prawostronnie: $\lambda x_1.\,(\lambda x_2.\, P)$ zapisujemy $\lambda x_1.\,\lambda x_2.\, P$,
- następujące po sobie λ-abstrakcje postaci $\lambda x_1.\,(\lambda x_2.\, \ldots (\lambda x_n.\, P) \ldots)$ zapisujemy zbiorczo: $\lambda x_1\, x_2\, \ldots\, x_n.\, P$.

Przykład 1. (Konstrukcja λ-pretermów)
- Pretermy z regułą (P1) ostatnią regułą konstrukcji: x, y, z,
- : $x\,x,\ y\,x,\ x\,(x\,z)$,
- : $(\lambda x.(xz)), (\lambda y.(\lambda z.x)), (\lambda x.(\lambda x.(xx)))$,
- : $((\lambda x.(xz))y), (y(\lambda x.(xz))), ((\lambda x.x)(\lambda x.x))$.

Definicja 2. (Zbiór FV zmiennych wolnych)
Z dowolnym pretermem M wiążemy zbiór $FV(M)$ *zmiennych wolnych* w M określony w poniższy sposób:

$$\begin{aligned} \mathrm{FV}(x) &= \{x\} \\ \mathrm{FV}(\lambda x.\, P) &= \mathrm{FV}(P) \setminus \{x\} \\ \mathrm{FV}(PQ) &= \mathrm{FV}(P) \cup \mathrm{FV}(Q) \end{aligned}$$

Jesli $\mathrm{FV}(M) = \varnothing$, to mówimy, że M jest *domknięty*.

Definicja 3. (Podstawienie)
Podstawieniem $[x/N]$ pretermu N za λ-zmienną x w M nazwamy następująco zdefiniowane przekształcenie:

$$
\begin{aligned}
x[x/N] &= N, & \\
y[x/N] &= y, & \text{o ile } x \neq y, \\
(PQ)[x/N] &= P[x/N]\,Q[x/N], & \\
(\lambda y.\, P)[x/N] &= \lambda y.\, P[x/N], & \text{gdzie } x \neq y \text{ i } y \notin \mathrm{FV}(N).
\end{aligned}
$$

Zachodzą następujące fakty:

Fakt 1. *(a) Jeśli $x \notin \mathrm{FV}(M)$, to $M[x/N]$ jest poprawnym podstawieniem i $M[x/N] = M$.*

(b) Jeśli $M[x/N]$ jest poprawnym podstawieniem, to $y \in \mathrm{FV}(M[x/N]$ wtw, gdy albo $y \in \mathrm{FV}(M)$ i $x \neq y$, albo $y \in \mathrm{FV}(N)$ i $x \in \mathrm{FV}(M)$.

(c) Podstawienie $M[x/x]$ jest poprawne i $M[x/x] = M$.

(d) Jeśli $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem, to $M[x/y]$ ma tę samą długość, co M.

Dowód. □

Fakt 2. *Powiedzmy, że $M[x/N]$ jest poprawnym podstawieniem i $N[y/L]$ i $M[x/N][y/L]$ są poprawnymi podstawieniami, gdzie $x \neq y$. Jeśli $x \notin \mathrm{FV}(L)$ lub $y \notin \mathrm{FV}(M)$, to $M[y/L]$ i $M[y/L]\,[x/N[y/L]]$ jest poprawnym podstawieniem oraz*

$$M[x/N][y/L] = M[y/L][x/N[y/L]].$$

Dowód. □

Fakt 3. *Jesli $M[x/y]$ jest poprawnym postawieniem i $y \notin \mathrm{FV}(M)$, to $M[x/y][y/x]$ jest poprawnym podstawieniem oraz $M[x/y][y/x] = M$.*

Dowód. □