

1 Rachunek λ z typami prostymi

1.1 Typy proste

Niech U będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych p, q, \dots (być może indeksowanych liczbami naturalnymi), które będziemy nazywali *zmiennymi typowymi*.

Definicja 1. (Typy proste)

Typami prostymi będziemy określali najmniej w sensie mnogościowym zbiór wyrażeń taki, że:

T1. Jeśli p jest zmienną typową, to p jest typem prostym.

T2. Jeśli τ i σ są typami prostymi, to $(\tau \rightarrow \sigma)$ jest typem prostym.

Typy proste zbudowane tylko wedle reguły T1 nazywamy typami *atomowymi*, zaś wyrażenia zbudowane wedle reguły T2 – typami *funkcyjnymi*. Zbiór typów prostych określony w myśl powyższej definicji będziemy oznaczali przez \mathbf{T}_{\rightarrow} .

Późniejsze litery alfabetu greckiego, tj. $\sigma, \tau, \rho, \dots$ będą służyły nam za zmienne metasyntaktyczne do oznaczania typów prostych. Dla lepszej czytelności będziemy pomijali najbardziej zewnętrzne nawiasy. Konstruktor typu \rightarrow jest prawostronnie łączny, co oznacza, że typy $\tau \rightarrow \sigma \rightarrow \theta$ oraz $\tau \rightarrow (\sigma \rightarrow \theta)$ będziemy uznawali za tożsame.

Typy proste ujęte Definicją 1 mają strukturę drzewa binarnego. Wysokość takiego drzewa będziemy nazywali *stopniem* typu. Precyzyjnie ujmując to pojęcie poniższa definicja.

Definicja 2. (Stopień typu)

Stopniem typu nazywamy funkcję $\delta : \mathbf{T}_{\rightarrow} \longrightarrow \mathbb{N}$ taką, że

$$\begin{aligned}\delta(p) &= 0, \text{ gdzie } p \text{ jest typem atomowym,} \\ \delta(\tau \rightarrow \sigma) &= 1 + \max(\delta(\tau), \delta(\sigma)).\end{aligned}$$

1.2 Pseudotermy

Niech V będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych x, y, \dots (indeksowanych być może liczbami naturalnymi). Elementy takiego zbioru będziemy nazywali *λ -zmiennymi*.

Definicja 3. (Pseudo-pretermy)

Pseudo-pretermami będziemy nazywali najmniej (w sensie mnogościowym) zbiór $\tilde{\Lambda}_{\mathbf{T}}$ taki, że:

P1. Jeśli $x \in V$, to $x \in \tilde{\Lambda}_T$.

P2. Jeśli $M \in \tilde{\Lambda}_T$ i $N \in \tilde{\Lambda}_T$, to $(MN) \in \tilde{\Lambda}_T$.

P3. Dla dowolnych $x \in V$, $\sigma \in \mathbf{T}_\rightarrow$, $M \in \tilde{\Lambda}_T$ mamy, że $(\lambda x^\sigma. M) \in \tilde{\Lambda}_T$.

Wyrażenia postaci P2 nazywamy *aplikacjami* M do N , zaś wyrażenia postaci P3 – *λ -abstrakcjami*, gdzie o wszystkich podtermach termu M mówi się, że są w *zasięgu* λ -abstraktora, zaś o λ -zmiennej x mówi się, że jest nim *związana*.

Za zmienne metasyntaktyczne wybieramy duże litery alfabetu łacińskiego M, N, \dots . Podobnie jak w podrozdziale 1.1 stosujemy konwencję o opuszczaniu najbardziej zewnętrznych nawiasów. Aplikacja termów jest łączna lewostronnie, co oznacza, że będziemy utożsamiali wyrażenia MNP oraz $(MN)P$.

Definicja 4. (Zmienne wolne)

Dla pseudo-pretermu M określamy zbiór *termów wolnych* FV w następujący sposób:

$$\begin{aligned} FV(x) &= \{x\} \\ FV(\lambda x^\sigma. P) &= FV(P) \setminus \{x\} \\ FV(PQ) &= FV(P) \cup FV(Q) \end{aligned}$$

Jesli $FV(M) = \emptyset$, to mówimy, że M jest *zamknięty*.

Definicja 5. (Podstawienie)

Podstawieniem $[x/N]$ pseudo-pretermu N za λ -zmienną x w M nazwamy zdefiniowane następująco przekształcenie:

$$\begin{aligned} x[x/N] &= N, \\ y[x/N] &= y, && \text{o ile } x \neq y, \\ (PQ)[x/N] &= P[x/N] Q[x/N], \\ (\lambda y^\sigma. P)[x/N] &= \lambda y^\sigma. P[x/N], && \text{gdzie } x \neq y \text{ i } y \notin FV(N). \end{aligned}$$

Zachodzą następujące fakty:

Fakt 1. (a) Jeśli $x \notin FV(M)$, to $M[x/N]$ jest poprawnym podstawieniem i $M[x/N] = M$.

(b) Jeśli $M[x/N]$ jest poprawnym podstawieniem, to $y \in FV(M[x/N])$ wtw, gdy albo $y \in FV(M)$ i $x \neq y$, albo $y \in FV(N)$ i $x \in FV(M)$.

(c) Podstawienie $M[x/x]$ jest poprawne i $M[x/x] = M$.

(d) Jeśli $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem, to $M[x/y]$ ma tę samą długość, co M .

Fakt 2. Powiedzmy, że $M[x/N]$ jest poprawnym podstawieniem i $N[y/L]$ i $M[x/N][y/L]$ są poprawnymi podstawieniami, gdzie $x \neq y$. Jeśli $x \notin \text{FV}(L)$ lub $y \notin \text{FV}(M)$, to $M[y/L]$ i $M[y/L][x/N[y/L]]$ jest poprawnym podstawieniem oraz

$$M[x/N][y/L] = M[y/L][x/N[y/L]].$$

Fakt 3. Jeśli $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem i $y \notin \text{FV}(M)$, to $M[x/y][y/x]$ jest poprawnym podstawieniem oraz $M[x/y][y/x] = M$.

Definicja 6. (α -konwersja)

α -konwersją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zwrotną i przechodnią relację binarną $=_\alpha$ określoną na zbiorze pseudotermów $\tilde{\Lambda}_T$ spełniającą poniższe warunki:

- (a) Jeśli $y \notin \text{FV}(M)$ i $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem, to $\lambda x. M =_\alpha \lambda y. M[x/y]$.
- (b) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla każdej λ -zmiennnej x mamy $\lambda x. M =_\alpha \lambda x. N$.
- (c) Jeśli $M =_\alpha N$, to $MZ =_\alpha NZ$.
- (d) Jeśli $M =_\alpha N$, to $ZM =_\alpha ZN$.

Bez dowodu podajemy następujące twierdzenia:

Fakt 4. Relacja $=_\alpha$ jest symetryczna.

Fakt 5. $=_\alpha$ jest relacją równoważności.

Fakt 6. Jeśli $M =_\alpha N$, to $\text{FV}(M) = \text{FV}(N)$.

Dysponując powyższymi rozstrzygnięciami otrzymujemy wygodne utożsamienie pseudo-pretermów, które różnią się między sobą tylko zmiennymi związanymi.

Definicja 7. (Pseudotermy)

Klasy abstrakcji relacji α -konwersji nazywamy *pseudotermami*. Zbiór wszystkich pseudotermów oznaczamy następująco:

$$\Lambda_T = \{[M]_\alpha \mid M \in \tilde{\Lambda}_T\}$$

Nadużywając notacji będziemy odnosili się do pseudotermów tylko przez ich reprezentantów.

1.3 Typowalność

Definicja 8. (Kontekst)

Kontekstem nazywamy skończoną funkcję częściową $\Gamma : V \longrightarrow \mathbf{T}_\rightarrow$, czyli zbiór par postaci $\Gamma = \{x_1^{\tau_1}, \dots, x_n^{\tau_n}\}$, gdzie $(x_i^{\tau_i}) = (x_i, \tau_i)$ oraz $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$. Zbiór

$$\text{dom}(\Gamma) = \{x \in V \mid \exists \tau (x^\tau \in \Gamma)\}$$

nazywamy *dziedziną* kontekstu Γ , zaś

$$\text{rg}(\Gamma) = \{\tau \in \mathbf{T}_\rightarrow \mid \exists x (x^\tau \in \Gamma)\}$$

– *zakresem* kontekstu Γ . Piszemy:

- $x_1^{\tau_1}, x_2^{\tau_2}$ zamiast $\{x_1^{\tau_1}, x_2^{\tau_2}\}$, o ile $x_1^{\tau_1}$ i $x_2^{\tau_2}$ są różne,
- Γ, x^τ zamiast $\Gamma \cup \{x^\tau\}$, o ile $x^\tau \notin \Gamma$,
- Γ, Δ zamiast $\Gamma \cup \Delta$, o ile $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$.

Określimy teraz system przypisywania typów do pseudotermów w stylu dedukcji naturalnej. *Sekwentami* w tym systemie będziemy nazywali wyrażenia postaci $\Gamma \vdash M^\sigma$, gdzie $M \in \mathbf{A}_T$, $\sigma \in \mathbf{T}_\rightarrow$, zaś Γ jest pewnym kontekstem.

Wprowadzamy następujące reguły dowodzenia:

$$\frac{}{\Gamma, x^\tau \vdash x^\tau} \text{ (Var)}, \quad \frac{\Gamma, x^\varphi \vdash M^\psi}{\Gamma \vdash (\lambda x^\varphi. M)^\varphi \rightarrow \psi} \text{ (Abs)}, \quad \frac{\Gamma \vdash M^{\varphi \rightarrow \psi} \quad \Gamma \vdash N^\varphi}{\Gamma \vdash (MN)^\psi} \text{ (App)}.$$

Definicja 9. (Typowalność)

Mówimy, że pseudoterm M jest typu σ w kontekście Γ (jest *typowalny*), jeśli istnieje skończone drzewo sekwentów spełniające poniższe warunki:

1. W korzeniu drzewa znajduje się sekwent $\Gamma \vdash M^\sigma$.
2. Liście są *aksjomatami*, tj. sekwentami postaci $\Gamma, x^\sigma \vdash x^\sigma$.
3. Każdego rodzica można otrzymać z jego dzieci przez zastosowanie którejś z reguł wyprowadzania nowych sekwentów.

Tak określone drzewo będziemy nazywali *wyprowadzeniem* typu i pisali $\Gamma \vdash M^\sigma$. W danym kontekście każdy λ -term ma jednoznacznie przypisany typ, co stwierdza następujące twierdzenie:

Fakt 7. *Jeśli $\Gamma \vdash M^\sigma$ oraz $\Gamma \vdash M^\tau$, to $\sigma = \tau$.*

Definicja 10. (λ -termy)

Wszystkie typowalne pseudotermy w pewnym kontekście Γ nazywamy λ -termami (z typami prostymi w kontekście Γ).

Uwaga. λ -term w kontekście Γ_1 może nie być typowalny w innym kontekście Γ_2 .

Przykład 1. Niech $\Gamma = \{x^\sigma, y^\tau\}$. Pokażemy, że $K = \lambda x^\sigma y^\tau. x$ ma typ $\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma$. Istotnie,

$$\frac{\frac{x^\sigma, y^\tau \vdash x^\sigma}{x^\sigma \vdash (\lambda y^\tau. x)^{\tau \rightarrow \sigma}} \text{ (Abs)}}{\vdash (\lambda x^\sigma \lambda y^\tau. x)^{\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma}} \text{ (Abs)}$$

Przykład 2. Niech $\Gamma = \{x^{\tau \rightarrow \rho}, y^{\sigma \rightarrow \tau}, z^\sigma\}$. Wówczas

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash z^\sigma \quad \Gamma \vdash y^{\sigma \rightarrow \tau}}{\Gamma \vdash yz^\tau} \text{ (App)} \quad \Gamma \vdash x^{\tau \rightarrow \rho}}{\Gamma \vdash x(yz)^\rho} \text{ (App)}}{\frac{\frac{x^{\tau \rightarrow \sigma}, y^{\sigma \rightarrow \rho} \vdash (\lambda z^\sigma. x(yz))^{\sigma \rightarrow \rho}}{x^{\tau \rightarrow \rho} \vdash (\lambda y^{\sigma \rightarrow \tau} \lambda z^\sigma. x(yz))^{\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho}} \text{ (Abs)}}{\vdash (\lambda x^{\tau \rightarrow \rho} \lambda y^{\sigma \rightarrow \tau} \lambda z^\sigma. x(yz))^{\tau \rightarrow \rho \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho}} \text{ (Abs)}}$$

Term $\lambda x^{\tau \rightarrow \rho} y^{\sigma \rightarrow \tau} z^\sigma. x(yz)$ odpowiada operacji złożenia funkcji. Co więcej, można wykazać że typ $(\tau \rightarrow \rho) \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho$ może mieć tylko i wyłącznie operacja złożenia [Wad89].

Uwaga. Widzimy, że wyprowadzanie typu odpowiada w gruncie rzeczy konstrukcji λ -termu. Mówiąc o λ -termach i nie podając żadnego związanego z nimi kontekstu Γ będziemy implícite zakładali, że istnieje pewien kontekst w którym są one typowalne.

Typ dowolnego λ -termu będziemy w ramach konwencji notowali używając adnotacji typowej umieszczonej w górnym indeksie. Dla przykładu, pisząc $(M^{\sigma \rightarrow \tau} N^\sigma)^\tau$ będziemy mieli na myśli, że ten λ -term jest w pewnym kontekście Γ typu τ .

Przykład 3. Nie wszystkie pseudotermy są typizowalne w rachunku λ z typami prostymi. Istotnie, przypuśćmy że $\omega = (\lambda x^{\sigma \rightarrow \sigma}. xx)$ jest typowalny. Wówczas dla kontekstu Γ mamy $x^{\sigma \rightarrow \sigma} \in \Gamma$. Ponieważ ω zawiera w sobie podterm (xx) , to w wyprowadzeniu musiał on zostać otrzymany przez zastosowanie reguły (App). Wówczas $x^\sigma \in \Gamma$ i $x^{\sigma \rightarrow \sigma} \in \Gamma$, co nie jest możliwe, bo Γ musiałby nie być prawidłowo określonym kontekstem.

Przykład 3 wskazuje, że rachunek λ z typami prostymi nie ma wystarczających środków wyrazu, aby definiować w nim funkcje rekurencyjne. W rachunku λ bez typów definicje takie są osiągalne za pomocą *kombinatorów punktu stałego*, które w rachunku λ z typami prostymi nie są typowalne.

1.4 Redukcja

Definicja 11. (Zgodność)

Relację R na zbiorze termów $\mathbf{\Lambda}_T$ nazywamy *zgodną*, jeśli dla $M, N, Z \in \mathbf{\Lambda}_T$ spełnia ona następujące warunki:

- i) Jeśli MRN , to $(\lambda x^\sigma. M)R(\lambda x^\sigma. N)$ dla dowolnych $x \in V$ i $\sigma \in T_\rightarrow$.
- ii) Jeśli MRN , to $(MZ)R(NZ)$.
- iii) Jeśli MRN , to $(ZM)R(ZN)$.

Przy powyższych ustaleniach *kongruencją* będziemy nazywali każdą zgodną relację równoważności na $\mathbf{\Lambda}_T$, zaś *redukcją* – każdą zgodną, zwrotną i przechodnią relację na $\mathbf{\Lambda}_T$.

Definicja 12. (β -redukcja)

β -redukcją nazywamy najmniejsza w sensie mnogościowym *zgodną* relację binarną \longrightarrow_β określoną na zbiorze pseudotermów $\mathbf{\Lambda}_T$ za pomocą podstawienia

$$(\lambda x^\sigma. P)Q \longrightarrow_\beta P[x/Q].$$

β -redekami będziemy nazywali wyrażenia postaci $(\lambda x^\sigma. M)N$, zaś rezultat ich β -redukcji w postaci termu $M[x/N]$ – β -reduktem.

Nadużywając notacji, z każdym β -redeksem Δ postaci $(\lambda x^\tau. P^\rho)R$ będziemy wiązali jego *stopień* i pisali $\delta((\lambda x^\tau. P^\rho)R) = \delta(\tau \rightarrow \rho)$, gdzie występująca po prawej stronie równości δ jest określona w myśl Definicji 2. Dysponując tą konwencją możemy określić pojęcie stopnia dowolnego λ -termu, które będzie nam pomocne w określeniu jego złożoności.

Definicja 13. (stopień λ -termu)

Stopniem $d(M)$ λ -termu M nazywamy supremum zbioru stopni β -redekstów, które są zawarte w M , czyli

$$d(M) = \sup\{\delta(N) \mid N \text{ jest } \beta\text{-redeksem w } M\}.$$

Uwaga. Z każdym β -redeksem Δ związane są więc dwa rodzaje stopni: stopień $d(\Delta)$ jako λ -termu w myśl Definicji 13 i stopień β -redekstu $\delta(\Delta)$.

Lemat 1. *Niech M i N będą dowolnymi λ -termami w kontekście Γ takimi, że $x \in \text{FV}(M)$ i $x^\tau \in \Gamma$. Wówczas $d(M[x/N]) \leq \max\{d(M), d(N), \delta(\tau)\}$.*

Dowód.

Określamy następujące relacje:

- B1. \rightarrow_{β}^+ jest przechodnim domknięciem relacji \rightarrow_{β} w zbiorze pseudotermów Λ_T .
- B2. \rightarrow_{β}^* jest domknięciem przechodnio-zwrotnym w Λ_T relacji \rightarrow_{β} , a zatem jest *redukcją*.
- B3. $=_{\beta}$ jest najmniejszą relacją równoważności zawierającą relację \rightarrow_{β} , (czyli *kongruencją*).

Definicja 14. (Postać normalna)

Powiemy, że λ -term M jest w *postaci normalnej*, jeśli żadna z jego podformuł nie jest β -redeksem. Przez NF_{β} będziemy oznaczali zbiór wszystkich λ -termów w postaci normalnej.

Definicję postaci normalnej można ująć w alternatywny sposób, którą prezentujemy w postaci Faktu 8.

Fakt 8. M ma postać normalną, jeśli $M =_{\beta} N$ dla pewnego N , który jest w postaci normalnej.

Uwaga. Fakt, że $=_{\beta}$ jest relacją równoważności może rodzić pokusę, aby utożsamić ze sobą wszystkie postacie normalne danego λ -termu. Z Twierdzenia 4 wynika jednak, że jest to zupełnie zbędne, bowiem o ile tylko λ -term jest normalizowalny, to wiemy, że posiada dokładnie jedną postać normalną i każde takie utożsamienie byłoby trywialne.

Definicja 15. (η -redukcja)

η -redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) *zgodną* relację w Λ_T taką, że

$$\lambda x^{\sigma}. Mx \rightarrow_{\eta} M,$$

o ile $x \notin FV(M)$.

Zdefiniowane powyżej β - i η -redukcje zachowują typ, jak stwierdza Fakt 9. Własność ta pozwala sensownie mówić o redukcji λ -termów pomimo, że te relacje są zdefiniowane dla pseudotermów.

Fakt 9. (O poprawności redukcji) Jeśli $\Gamma \vdash M^{\sigma}$ i $M \rightarrow_{\beta\eta}^* N$, to $\Gamma \vdash N^{\sigma}$.

1.5 Normalizacja

Powiemy, że λ -term M ma własność:

- (*słabej normalizacji*) (symbolicznie: $M \in WN_{\beta}$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg β -redukcji rozpoczynający się od M i kończący się termem w postaci normalnej N .
- (*silnej normalizacji*) (symbolicznie: $M \in SN_{\beta}$), jeśli wszystkie ciągi β -redukcji rozpoczynające się od M są skończone.

Uwaga. Z powyższego określenia widzimy, że własność SN_β pociąga za sobą własność WN_β .

Definicja 16. (Strategia redukcji)

Strategią redukcji nazywamy odwzorowanie $F : \Lambda_T \longrightarrow \Lambda_T$ takie, że $F(M) = M$, gdy M jest w postaci normalnej i $M \longrightarrow_\beta F(M)$ w przeciwnym wypadku. Mówimy, że strategia F jest *normalizująca*, jeśli dla każdego $M \in WN_\beta$ istnieje $i \in \mathbb{N}$ takie, że $F^i(M)$ jest w postaci normalnej.

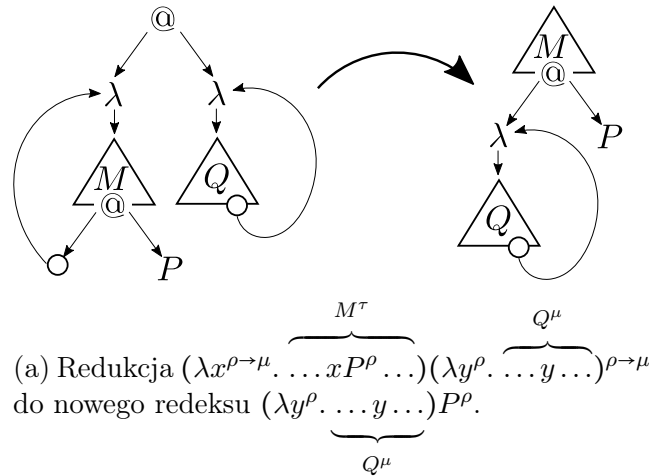
Twierdzenie 1. (Własność WN_β) *Wszystkie λ -terminy mają postać normalną.*

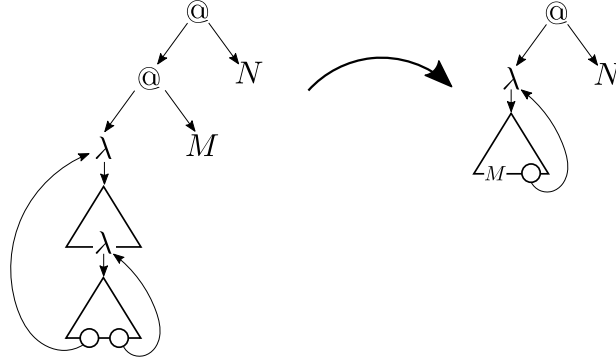
Dowód. Pokażemy, że dla dowolnego λ -termu M istnieje normalizująca strategia redukcji.

Przypuśćmy, że M nie jest w postaci normalnej. Oznaczmy przez δ_M maksymalny stopień redeksów występujących w M . Ponieważ wiele redeksów w M może mieć ten sam stopień δ_M , przez n_M oznaczmy liczbę wystąpień redeksów stopnia δ_M w M .

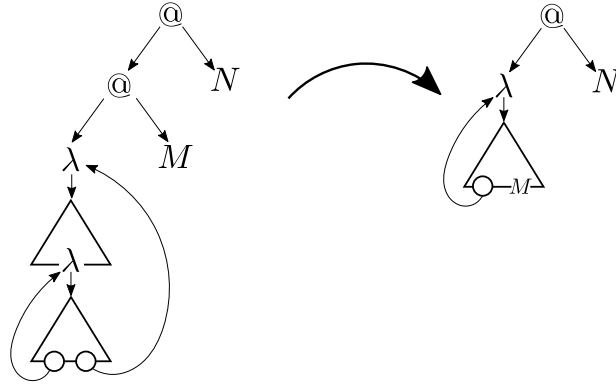
Niech Δ będzie β -redeksiem stopnia δ_M położonym w M najbardziej na prawo i niech M' będzie β -reduktem otrzymanym przez zredukowanie Δ . Zauważmy, że $n_M < n_{M'}$, gdyż Δ nie występuje już w M' , zaś β -redukcja Δ może prowadzić do powstania redeksów tylko mniejszego stopnia. Istotnie, ilość redeksów w M może zwiększyć się tylko na jeden z poniższych sposobów:

- i) powstanie nie występujących wcześniej redeksów.
- ii) powielenie już istniejących redeksów.

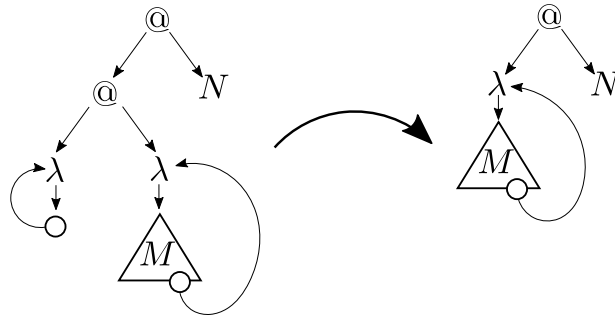




(b) Redukcja $(\lambda x^\tau y^\rho. \dots x \dots y \dots) M^\tau Q^\rho$ do nowego redeksu postaci $(\lambda y^\rho. \dots M^\tau \dots y \dots) Q^\rho$.



(c) Redukcja $(\lambda x^\tau y^\rho. \dots y \dots x \dots) M^\tau Q^\rho$ do nowego redeksu postaci $(\lambda y^\rho. \dots y \dots M^\tau \dots) Q^\rho$.



(d) Redukcja $(\lambda x^{\rho \rightarrow \mu}. x)(\lambda y^{\rho}. \overbrace{\dots y \dots}^{M^{\rho \rightarrow \mu}})N^{\rho}$ do nowego redeksu $(\lambda y^{\rho}. \underbrace{\dots y \dots}_{M^{\mu}})N^{\rho}$.

Rysunek 1: test

Powtarzając otrzymujemy więc λ -term w postaci normalnej. \square

Twierdzenie 2. (Własność SN_β) *Wszystkie λ -termy mają własność silnej normalizacji.*

- WCR: $\forall a, b, c \in A (a \longrightarrow b \wedge a \longrightarrow c) \rightarrow \exists d \in A (b \longrightarrow^* d \wedge c \longrightarrow^* d)$
- CR: $\forall a, b, c \in A (a \longrightarrow^* b \wedge a \longrightarrow^* c) \rightarrow \exists d \in A (b \longrightarrow^* d \wedge c \longrightarrow^* d)$

Twierdzenie 3. (Lemat Newmana) *Niech \rightarrow będzie relacją binarną spełniającą SN . Jeśli \rightarrow spełnia WCR, to spełnia CR.*

Dowód.

Twierdzenie 4. *Rachunek λ z typami prostymi ma własność Churcha-Rossera.*

Twierdzenie 5. (Własność SN_β) *Każdy λ -term w stylu Churcha własność silnej normalizacji.*

Dowód.

Literatura

- [Wad89] Philip Wadler. “Theorems for Free!” In: *Proceedings of the Fourth International Conference on Functional Programming Languages and Computer Architecture*. FPCA '89. Imperial College, London, United Kingdom: ACM, 1989, pp. 347–359. ISBN: 0-89791-328-0. DOI: 10.1145/99370.99404. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/99370.99404>.