# 1 Rachunek $\lambda$

Niech $V$ będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych $x$, $y$, ... (indeksowanych być może liczbami naturalnymi). Elementy takiego zbioru będziemy nazywali $\lambda$-*zmiennymi.* Ponieważ $V$ jest potencjalnie nieskończony, zastrzegamy sobie możliwość wybierania w razie potrzeby wcześniej nie użytej zmiennej.

**Definicja 1.** (Zbiór $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ pretermów) Zbiorem pretermów będziemy nazywali najmniejszy (w sensie mnogościowym) zbiór wyrażeń $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ taki, że:

(P1) Jeśli $x \in V$, to $x \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$.

(P2) Jeśli $M$, $N \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$, to $(M\,N) \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$.

(P3) Jeśli $x \in V$ i $M \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$, to $(\lambda x.\, M) \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$.

Definicję 1 można równoznacznie wyrazić przy pomocy notacji Backusa-Naura. Wówczas ma ona następującą, zwięzłą postać:

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} \leftarrow V \mid (\tilde{\mathbf{\Lambda}}\,\tilde{\mathbf{\Lambda}}) \mid (\lambda V.\, \tilde{\mathbf{\Lambda}})$$

Powiemy, że dwa $\lambda$-termy są *syntaktycznie równe*, jeśli rozumiane jako ciągi znaków są identyczne. Równość syntaktyczną będziemy oznaczali znakiem $\equiv$.

Elementy $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ będziemy oznaczali literami $L$, $M$, $N$, $P$, $Q$, $R$ i ich wariantami z górnymi lub dolnymi indeksami. Wyrażenia postaci (P2) nazywamy *aplikacjami* $M$ do $N$. Symbol $\lambda$ występujący w (P3) nazywamy $\lambda$-*abstraktorem*, zaś wyrażenia powstałe przez zastosowanie tej reguły to $\lambda$-*abstrakcje.* W wyrażeniu postaci $(\lambda x.\, M)$ preterm $M$ jest w *zasięgu* $\lambda$-abstraktora, a zmienna $x$ jest przez niego *związana.* Ponadto, będziemy stosowali następujące konwencje notacyjne:

- *najbardziej zewnętrzne nawiasy bedą pomijane,*
- *aplikacja wiąże lewostronnie; wyrażenia postaci* $(PQ)R$ *będą zapisywane w postaci* $PQR$,
- $\lambda$-*abstrakcja wiaże prawostronnie:* $\lambda x_1.\,(\lambda x_2.\,P)$ *zapisujemy* $\lambda x_1.\,\lambda x_2.\,P$,
- *następujące po sobie* $\lambda$-*abstrakcje postaci* $\lambda x_1.\,\lambda x_2.\,\ldots\lambda x_n.\,P$ *zapisujemy pod wspólnym* $\lambda$-*abstraktorem:* $\lambda x_1\,x_2\,\ldots\,x_n.\,P$.
- *n-krotną aplikację* $P \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ *do siebie zapisujemy skrótowo:* $P^n \equiv \underbrace{P\,P\ \ldots\ P}_{n\text{-}razy}$

**Przykład 1.** Podajmy kilka przykładów $\lambda$-pretermów pogrupowanych ze względu na ich konstrukcję.

(P1): $x,\ y,\ z.$

(P2): $x\,x,\ y\,x,\ x\,(x\,z),$
$(\lambda x.\,(xz))y,\ y\,(\lambda x.\,(x\,z)),\ (\lambda x.\,x)\,(\lambda x.\,x).$

(P3): $\lambda x.\,(x\,z),\ \lambda yz.\,x,\ \lambda x.\,(\lambda x.\,(x\,x))$.

Podwyrażenia $\lambda$-pretermu mogą być wzajemnie identyczne i występować wielokrotnie. Obserwację tę ujmuje następująca definicja.

**Definicja 2.** (Multizbiór Sub podtermów pretermu)

(1) $\mathrm{Sub}(x) = \{x\}$

(2) $\mathrm{Sub}(MN) = \mathrm{Sub}(M) \cup \mathrm{Sub}(N) \cup \{M\,N\}$

(3) $\mathrm{Sub}(\lambda x.\,M) = \mathrm{Sub}(M) \cup \{\lambda x.\,M\}$

Elementy multizbioru $\mathrm{Sub}(M)$ nazywamy *podtermami* $M$. Jeśli $L$ jest podtermem $M$, ale $L \not\equiv M$, to $L$ nazywamy podtermem *właściwym*.

**Przykład 2.** Podtermy wybranych $\lambda$-pretermów.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} & \mathrm{Sub}\,(\lambda x.\,x\,x) = \left\{(\lambda x.\,x\,x)^1,\ (x\,x)^1,\ x^2\right\} \\ \text{(b)} & \mathrm{Sub}\,((\lambda x.\,x\,x)\ (\lambda x.\,x\,x)) = \\ & \quad = \left\{((\lambda x.\,x\,x)\,(\lambda x.\,x\,x))^1,\ (\lambda x.\,x\,x)^2,\ (x\,x)^2,\ x^4\right\} \end{array}$$

W powyższych przykładach użyliśmy standardowej notacji w górnym indeksie umieszczając krotność występowania elementu.

**Definicja 3.** (Zbiór FV zmiennych wolnych) Dla dowolnego pretermu $M$ określamy zbiór $\mathrm{FV}(M)$ *zmiennych wolnych* w $M$ w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \mathrm{FV}(x) &= \{x\} \\ \mathrm{FV}(\lambda x.\,P) &= \mathrm{FV}(P) \setminus \{x\} \\ \mathrm{FV}(PQ) &= \mathrm{FV}(P) \cup \mathrm{FV}(Q) \end{aligned}$$

Jesli $\mathrm{FV}(M) = \varnothing$, to mówimy, że $M$ jest *domknięty* lub nazywamy $M$ *kombinatorem.*

**Przykład 3.** (a) $\mathrm{FV}(\lambda x.\,x\,y) = \{y\}$

(b) $\mathrm{FV}(x\,(\lambda x.\,x\,y)) = \{x,\ y\}$

(c) $\mathrm{FV}(\lambda xyz.\,xy) = \varnothing$

**Definicja 4.** (Podstawienie) Dla dowolnych M, N $\in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ i $x \in V$ przez $N[x/N]$ oznaczamy rezultat podstawienia termu $N$ za wszystkie wolne wystąpienia zmiennej $x$ w $M$, o ile w rezultacie podstawienia nie zostaną związane żadne zmienne wolne występujące w $N$. W takim wypadku:

(S1) $x[x/N] = N$

(S2) $y[x/N] = y$, o ile $x \not\equiv y$

(S3) $(PQ)[x/N] = P[x/N]\,Q[x/N]$

(S4) $(\lambda y.\,P)[x/N] = \lambda y.\,P[x/N]$, gdzie $x \not\equiv y$ i $y \notin \mathrm{FV}(N)$

(S5) $(\lambda x.\,P)[x/N] = \lambda x.\,P$

**Lemat 1.** *(O podstawieniu) Niech $M$, $N$, $L \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ i niech ponadto $x \not\equiv y$ oraz $x \notin \mathrm{FV}(L)$. Wówczas*

$$M[x/N][y/L] \equiv M[y/L]\,[x/N\,[y/L]]\,. \tag{1}$$

**Dowód.** Dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem $M$. Rozważmy następujące przypadki:

i) $M$ jest zmienną. Wówczas:

  a. Jeśli $M \equiv x$, to obie strony (1) po podstawieniu są eostaci $N[y/L]$.

  b. Jeśli $M \equiv y$, to ponieważ $x \not\equiv y$ i $x \notin \mathrm{FV}(M)$, po wykonaniu podstawienia po lewej stronie (1) otrzymujemy $M[x/N][y/L] \equiv L$. Ponieważ $x \notin \mathrm{FV}(L)$, to po wykonaniu podstawienia po prawej stronie widzimy, że obydwie strony są identyczne.

  c. Jeśli $M \equiv z$ i $z \not\equiv x$ oraz $z \not\equiv y$, to obydwie strony (1) sa identyczne.

ii) $M \equiv PQ$ dla pewnych $P$, $Q \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$. Wówczas korzystając z hipotezy indukcyjnej wnosimy, że

$$P[x/N][y/L] \equiv P[y/L]\,[x/N\,[y/L]]\,,$$
$$Q[x/N][y/L] \equiv Q[y/L]\,[x/N\,[y/L]]\,.$$

Mając na względzie (S3) widzimy, że twierdzenie zachodzi i w tym przypadku.

iii) Jeśli $M \equiv \lambda z.\,P$ oraz $z \equiv x$ lub $z \equiv y$, to z (S'5) widzimy, że obydwie strony (1) sa identyczne. Przypuśćmy, że $z \not\equiv x$ i $z \not\equiv y$ i $z \notin \mathrm{FV}(L)$. Wówczas na podstawie hipotezy indukcyjnej mamy:

$$\begin{aligned}(\lambda z.\,P)[x/N][y/L] &= \lambda z.\,P[x/N][y/L] = \\ &= \lambda z.\,P[y/L][x/N[y/L]] = \\ &= (\lambda z.\,P)[y/L][x/N[y/L]].\end{aligned}$$

□

**Wniosek 1.** *Jesli $M[x/y]$ jest określone i $y \notin \mathrm{FV}(M)$, to $M[x/y][y/x]$ jest określone oraz $M[x/y][y/x] = M$.*

**Dowód.** Mając na uwadze Lemat 4 dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem $M$. □

## 1.1 Wyrażenia $\lambda$

Na ogół chcielibyśmy utożsamiać pretermy, które różnią się wyłącznie zmiennymi związanymi, tak jak w przypadku wyrażeń $\lambda x.\, zx$ i $\lambda y. zy$. W takim wypadku powiemy o nich, że są swoimi $\alpha$-*wariantami* lub że są ze sobą w relacji $\alpha$-*konwersji*.

**Definicja 5.** (Relacja $\alpha$-konwersji) Relacją $=_\alpha$ ($\alpha$-konwersji) nazywamy najmniejszy w sensie mnogościowym praporządek na $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ taki, że

($\alpha$1) Jeśli $y \notin \mathrm{FV}(M)$ oraz $M[x/y]$ jest określone, to $\lambda x.\, M \;=_\alpha\; \lambda y.\, M[x/y]$

($\alpha$2) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla dowolnego $x \in V$ zachodzi $\lambda x.\, M =_\alpha \lambda x.\, N$

($\alpha$3) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla dowolnego $Z \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ zachodzi $MZ =_\alpha NZ$

($\alpha$4) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla dowolnego $Z \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ zachodzi $ZM =_\alpha ZN$

**Przykład 4.**

$$\begin{aligned}\lambda xy.\, x(xy) &\equiv \lambda x.\, (\lambda y.\, x(xy)) \\ &\equiv_\alpha \lambda x.\, (\lambda z.\, x(xz)) \\ &\equiv_\alpha \lambda v.\, (\lambda z.\, v(vz)) \\ &\equiv \lambda vz.\, v(vz).\end{aligned}$$

**Wniosek 2.** *Relacja $=_\alpha$ jest relacją równoważności.*

**Dowód.** Wystarczy, że pokażemy, że relacja $=_\alpha$ jest symetryczna. Dowód przebiega przez indukcję względem Definicji 5. Rozważmy następujące przypadki:

i) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji zwrotności $=_\alpha$, to $M \equiv N$, a zatem również $N \equiv M$. Stąd $N =_\alpha M$.

ii) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji przechodniości $=_\alpha$, to istnieje $L \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ takie, że $M =_\alpha L$ i $L =_\alpha N$. Wówczas z hipotezy indukcyjnej $N =_\alpha L$ i $L =_\alpha M$. Z przechodniości relacji $=_\alpha$ otrzymujemy spodziewaną tezę.

iii) Przypuśćmy, że $M =_\alpha N$ w konsekwencji ($\alpha$1) dla $M \equiv \lambda x.\, M'$ i $N \equiv \lambda y.\, M'[x/y]$. Ponieważ $x \notin \mathrm{FV}(M'[x/y])$, to ze względu na Wniosek 1 mamy, że $M'[x/y][y/x] = M'$. Zatem, na podstawie ($\alpha$1):

$$\lambda y.\, M'[x/y] =_\alpha \lambda x.\, M'[x/y][y/x].$$

iv) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji ($\alpha$2), gdzie $M = \lambda x.\, M'$ i $N = \lambda x.\, N'$ dla $M' =_\alpha N'$, to z hipotezy indukcyjnej $N' =_\alpha M'$ i w konsekwencji ($\alpha$2) mamy, że $N =_\alpha M$.

v) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji ($\alpha$3) dla $M \equiv M'Z$ i $N \equiv N'Z$ takich, że $M' =_\alpha N'$, to z hipotezy indukcyjnej oczywiście $N' =_\alpha M'$, a zatem z ($\alpha$3) $N =_\alpha M$.

vi) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji ($\alpha$3), to postępujemy jak w przypadku (v). □

**Definicja 6.** (Zbiór $\mathbf{\Lambda}$ $\lambda$-termów) Każdą klasę abstrakcji relacji $=_\alpha$ nazywamy $\lambda$-termem. Zbiór wszystkich $\lambda$-termów $\mathbf{\Lambda}$ to zbiór ilorazowy relacji $\alpha$-konwersji:

$$\mathbf{\Lambda} = \left\{ [M]_{=_\alpha} \mid M \in \tilde{\mathbf{\Lambda}} \right\}$$

**Konwencja.** *Wprowadzamy następujące konwencje notacyjne:*

$$x = [x]_{=_\alpha},$$
$$PQ = [M'N']_{=_\alpha},\ \textit{gdzie}\ M = [M']_{=_\alpha}\ \textit{i}\ N = [N']_{=_\alpha},$$
$$\lambda x.\, M = [\lambda x.\, M']_{=_\alpha},\ \textit{gdzie}\ N = [N']_{=_\alpha}.$$

**Twierdzenie 1.** *Każdy $M \in \mathbf{\Lambda}$ ma jedną z poniższych postaci:*

*(1)* $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n.\ y\, N_1 \dots N_m$, *gdzie* $n, m \geq 0$ *i* $y \in \mathrm{V}$

*(2)* $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n.\ (\lambda y.\ N_0)\, N_1 \dots N_m$, *gdzie* $n \geq 0$ *i* $m \geq 1$

*O $\lambda$-termach postaci (1) mówimy, że są w* czołowej postaci normalnej *(HNF, ang.* head normal form*).*

**Dowód.** Z definicji $\lambda$-term $M$ jest albo zmienną, albo aplikacją postaci $PQ$, albo abstrakcją postaci $(\lambda x.\, P)$. Wówczas mamy nastepujące przypadki:

i) Jeśli $M$ jest zmienną, to wówczas $M$ jest postaci (1).

ii) Jeśli $M$ jest aplikacją, to wówczas $M \equiv P_0 P_1 \dots P_m$, gdzie $P_0$ nie jest aplikacją. Wówczas $M$ jest postaci (1) albo postaci (2) dla $n = 0$, w zależności od tego czy $P_0$ jest zmienną (wówczas jest to przypadek (1)) czy abstrakcja (wówczas jest to przypadek (2)).

iii) Jeśli $M$ jest abstrakcją, to wówczas $M \equiv \lambda x_1\, x_2 \dots x_m.\ P_0\, P_1 \dots P_n$, gdzie $P_0$ abstrakcją już nie jest. Wówczas $P_0$ jest ablo zmienną (przypadek (1)) albo aplikacją (przypadek (2)).

Na zbiór $\mathbf{\Lambda}$ przenoszą się pojęcia podtermu, zmiennych wolnych i operacji podstawienia definiowane uprzednio dla pretermów.

**Definicja 7.** (Multizbiór Sub podtermów $\lambda$-termu) Dla dowolnego $\lambda$-termu $M = [M']_{=_\alpha}$ okreslamy

$$\mathrm{Sub}(M) = \mathrm{Sub}(M'),$$

gdzie $\mathrm{Sub}(M')$ jest multizbiorem podwyrażeń pretermu $M'$ zdefiniowanym w myśl Definicji 2.

**Definicja 8.** (Zbiór zmiennych wolnych FV) Dla dowolnego $\lambda$-termu $M = [M']_{=_\alpha}$ określamy zbiór $\mathrm{FV}(M)$ *zmiennych wolnych* w $M$

$$\mathrm{FV}(M) = \mathrm{FV}(M'),$$

gdzie $\mathrm{FV}(M')$ jest zbiorem zmiennych wolnych pretermu $M'$ zdefiniowanym w myśl Definicji 3.

**Definicja 9.** (Podstawienie) Niech $M = [M']_{=_\alpha}$ i $N = [N']_{=_\alpha}$ i niech $M'[x/N']$ będzie określone w myśl Definicji 4. Wówczas

$$M[x/N] = [M'[x/N']]_{=_\alpha}.$$

Operacja podstawienia wymaga jednak pewnej delikatności. Rozważmy następującą relację:

$$\lambda x.\, zx =_\alpha \lambda y.\, zy$$

Zauważmy, że traktując podstawienie w sposób naiwny, mamy, że $(\lambda x.\, zx)[z/x] \neq_\alpha (\lambda y.\, zy)[z/x]$, a więc tracimy pożądaną własność niezmienniczości $\alpha$-konwersji względem podstawienia. Stąd w Definicji 4 wymóg, aby podstawienie nie prowadziło do uszczuplenia zbioru zmiennych wolnych. Alternatywnym rozwiązaniem jest określenie podstawienia, które wprowadzałoby do wyrażenia nową zmienną i prowadziło w konsekwencji do abstrahowania po wcześniej nie występujacych zmiennych:

$$(\lambda x.\, M)[y/N] = \lambda x'.\, M[x/x'][y/N],$$

w przypadku, gdy $x \not\equiv y$, gdzie $x' \notin \mathrm{FV}(M)$ i $x' \notin \mathrm{FV}(N)$. Rozstrzygnięcie takie przytacza się w [HS08]. Po uwzględneniu odpowiednich modyfikacji, Definicja 4 przyjmuje następującą postać:

**Definicja 4'.** *(Podstawienie')*

*(S'1)* $x[x/N] = N$

*(S'2)* $y[x/N] = y$, *o ile* $x \not\equiv y$

*(S'3)* $(PQ)[x/N] = P[x/N]\,Q[x/N]$

*(S'4)* $(\lambda x.\, P)[x/N] = \lambda x.\, P$

*(S'5)* $(\lambda y.\, P)[x/N] = \lambda y.\, P$, *jeśli* $x \notin \mathrm{FV}(P)$

*(S'6)* $(\lambda y.\, P)[x/N] = \lambda y.\, P[x/N]$, *gdzie* $x \in \mathrm{FV}(P)$ *i* $y \notin \mathrm{FV}(N)$

*(S'7)* $(\lambda y.\, P)[x/N] = \lambda z.\, P[y/z][x/N]$, *gdzie* $x \in \mathrm{FV}(P)$ *i* $y \in \mathrm{FV}(N)$

*przy czym w (S'7) wymagamy, aby zmienna $z$ nie występowała wcześniej w termach $N$ i $P$ jako zmienna wolna, zaś dla (S'5)-(S'7) dodatkowo $y \not\equiv x$.*

*Uwaga* 1. Każde podstawienie $[x/N]$ jest funkcją z $\mathbf{\Lambda} \to \mathbf{\Lambda}$, gdzie $x \in V$ i $N \in \mathbf{\Lambda}$ są dowolnymi parametrami. Zbiór $S$ podstawień ma strukturę monoidu z działaniem składania

$$M([x_2/N_2] \circ [x_1/N_1]) = (M[x_1/N_1])[x_2/N_2] \equiv M[x_1/N_1][x_2/N_2]$$

dla dowolnych $[x_1/N_1]$, $[x_2/N_2] \in S$, o ile $S$ posiada element neutralny $\iota$ taki, że

$$M\iota = M, \text{ gdzie } [x/x] = \iota \text{ dla dowolnego } x \in V.$$

W literaturze znajdujemy mnogość propozycji, które w ten czy inny sposób starają się ułatwić rzeczywistą implementację podstawienia. Na szczególną uwagę zasługują tutaj tak zwane *indeksy de Bruijna*. Zaproponowana przez N. G. de Brujina w [Bru72] notacja eliminuje bezpośrednie występowanie symboli zmiennych w $\lambda$-termach, zastępując je liczbą naturalną wyrażającą głębokość zagnieżdżenia odpowiedniej $\lambda$-abstrakcji przez którą jest związana, przykładowo:

$$\lambda f.\,(\lambda x.\,(f(xx))\lambda x.\,(f(xx))) \equiv_{deBrujin} \lambda(\lambda 2(11))\lambda 2(11)$$

Historycznie wiąże się ta notacja z jego pracami nad systemem komputerowo wspomaganego dowodzenia twierdzeń AUTOMATH. Rozwiązanie takie, podobnie jak w przypadku tzw. logik kombinatorów, eliminuje konieczność utożsamiania termów przez $\alpha$-konwersję, ale istotnie zmniejsza ich czytelność.

Szerszy komentarz dotyczący dotychczasowych prób uchwycenia operacji podstawienia można prześledzić w [Alt02]. Nasze rozważania opierają się w tej materii przeważająco na [SU06]. Samo podejście do definiowania $\lambda$-termow przez operację $\alpha$-konwersji nie jest powszechne w literaturze przedmiotu. Analogiczną konstrukcję należałoby powtarzać wprowadzając każdy kolejny system, dlatego w dalszej części tej pracy będziemy poprzestawali na nieformalnym traktowaniu wyrażeń danego systemu jako odpowiednich klas $\alpha$-konwersji.

**Definicja 10.** (Podstawienie jednoczesne) Dla dowolnego $M \in \mathbf{\Lambda}$, ciągu $\lambda$-zmiennych $\vec{x}$ i ciągu $\lambda$-termów $\vec{N}$ określamy:

($\vec{s}1$) $x_i[\vec{x}/\vec{N}] = N_i$ dla $i \in \mathbb{N}$.

($\vec{s}2$) $y[\vec{x}/\vec{N}] = y$ o ile dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$, $y \not\equiv x_i$.

($\vec{s}3$) $(PQ)[\vec{x}/\vec{N}] = P[\vec{x}/\vec{N}]Q[\vec{x}/\vec{N}]$

($\vec{s}4$) $(\lambda y.\,P)[\vec{x}/\vec{N}] = \lambda y.\,P[\vec{x}/\vec{N}]$, jeśli $y \neq x_i$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$ i $y \notin \bigcup_{i\in\mathbb{N}} FV(N_i)$

**Konwencja.** *Jeśli* $N_i \equiv x_i$ *dla wszystkich poza skończenie wieloma* $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$, *to* $[x_{i_1}/N_{i_1}, x_{i_2}/N_{i_2}, \ldots, x_{i_n}/N_{i_n}] \equiv [\vec{x}/\vec{N}]$.

**Przykład 5.** Zauważmy, że podstawienia w myśl Definicji 4 i Definicji 10 mogą, ale nie muszą, prowadzić do różnych rezultatów.

a) $(xy)[y/x][x/u] = uu,$
$(xy)[y/x, x/u] = ux.$

b) $(\lambda x.\, yx)[x/y][y/z] = \lambda x.\, zx,$
$(\lambda x.\, yx)[x/y, y/z] = \lambda x.\, zx.$

## 1.2 Redukcja

Sens obliczeniowy $\lambda$-termom nadajemy przez określenie na $\mathbf{\Lambda}$ operacji $\beta$- i $\eta$-redukcji. Pożądane jest, żeby operacje te wykonywane na podtermach pozostowały w *zgodzie* ze strukturą całego $\lambda$-termu.

**Definicja 11.** (Relacja zgodna) Relację binarną $\mathcal{R}$ na zbiorze $\mathbf{\Lambda}$ nazywamy *zgodną*, jeśli dla dowolnych $M$, $N$, $P \in \mathbf{\Lambda}$ zachodzą następujące warunki:

(c1) Jeśli $M\mathcal{R}N$, to $(\lambda x.\, M)\,\mathcal{R}\,(\lambda x.\, N)$ dla dowolnej $\lambda$-zmiennej $x$.

(c2) Jeśli $M\mathcal{R}N$, to $(MP)\,\mathcal{R}\,(NP)$.

(c3) Jeśli $M\mathcal{R}N$, to $(PM)\,\mathcal{R}\,(PN)$.

Przez *domknięcie relacji* $\mathcal{R}_1$ będziemy rozumieli najmniejszą (w sensie mnogościowym) relację $\mathcal{R}_2$ taką, że $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$. Z pewnego rodzaju domknięciami, ze względu na ich szczególną rolę, wiążemy następującą notację:

(a) Przez $\mathcal{R}^+$ oznaczamy przechodnie domknięcie relacji $\mathcal{R}$.

(b) Przez $\mathcal{R}^*$ oznaczamy zwrotnie domknięcie relacji $\mathcal{R}^+$.

(c) Przez $=_{\mathcal{R}}$ oznaczamy symetryczne domknięcie relacji $\mathcal{R}^*$.

Dla lepszego zrozumienia powyższych operacji warto zauważyć, że (b) wyznacza praporzadek, który w odniesieniu do redukcji określonych na $\mathbf{\Lambda}$ można rozumieć jako graf skierowany (w przypadku $\mathbf{\Lambda}$ być może nieskończony) w którym krawędzie odpowiadają możliwym krokom obliczenia, zaś (c) – kongruencję, która znów w szczególnym odniesieniu do $\lambda$-termów, będzie dokonywała podziału w $\mathbf{\Lambda}$ ze względu na rezultat obliczenia.

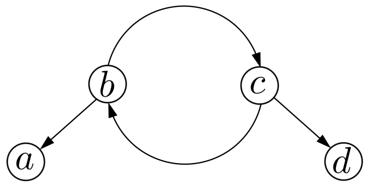
**Definicja 12.** Niech $\rightarrow$ będzie relacją binarną w zbiorze $A$.

(CR) Powiemy, że $\rightarrow$ ma *własność Churcha-Rossera*, jeśli dla dowolnych $a$, $b$, $c \in A$ takich, że $a \rightarrow^* b$ oraz $a \rightarrow^* c$ istnieje $d \in A$ takie, że $b \rightarrow^* d$ i $c \rightarrow^* d$. Innymi słowy, przemienny jest diagram:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "*"] \arrow[d, "*"'] & b \arrow[d, "*"] \\ c \arrow[r, "*"] & d \end{tikzcd}$$

(WCR) Powiemy, że $\to$ ma *słabą własność Churcha-Rossera*, jesli dla dowolnych $a, b, c \in A$ takich, że $a \to b$ oraz $a \to c$ istnieje $d \in A$ takie, że $b \to^* d$ i $c \to^* d$. Innymi słowy, przemienny jest diagram:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "*"] \arrow[d, "*"'] & b \arrow[d] \\ c \arrow[r] & d \end{tikzcd}$$




Rysunek 1: Rozważmy graf skierowany, w którym krawędzie odpowiadają relacji $\to$ w zbiorze $\{a, b, c, d\}$. Widzimy, że relacja $\to$ ma własnosność WCR, ale nie ma własności CR.

**Definicja 13.** (Postać normalna) Powiemy, że $x \in A$ jest *redukowalny*, jeśli istnieje $y \in A$ takie, że $x \to y$. W przeciwnym wypadku powiemy, że $x$ jest w *postaci normalnej* i będziemy pisali $x \in \mathrm{NF}$.

Element $y \in A$ nazywamy *postacią normalną* $x \in A$, jesli $x \to^* y$ i $y \in \mathrm{NF}$. Jeśli $y$ jest postacią normalną $x$ i $y$ jest jedyną postacią normalną $x$, to piszemy $x \downarrow y$. W przeciwnym wypadku, czyli jeśli istnieją $y, z \in \mathrm{NF}, y \neq z$ takie, że $x \to^* y$ i $x \to^* z$, powiemy, że $x$ jest *niejednoznaczny.*

**Definicja 14.** Niech $\to$ będzie relacją binarną na zbiorze $A$.

(WN) Powiemy, że relacja $\to$ jest *słabo normalizująca*, jeśli dla dowolnego $a \in A$ istnieje $a' \in \mathrm{NF}$ taki, że $a \to^* a'$. W takim wypadku o $a \in A$ będziemy mówili, że jest *silnie normalizowalny* i pisali $a \in \mathrm{WN}$.

(SN) Powiemy, że relacja $\to$ jest *silnie normalizująca*, jeśli nie istnieje nieskończony ciąg relacji $a_0 \to a_1 \to a_2 \to \ldots$. W takim wypadku o $a \in A$ będziemy mówili, że jest *słabo normalizowalny* i pisali $a \in \mathrm{SN}$.

**Twierdzenie 2.** *(Lemat Newmana) Niech $\to$ bedzie relacją binarną mającą własność SN. Jeśli $\to$ ma własność WCR, to $\to$ ma własność CR.*

**Dowód.** Niech $\to$ będzie relacją binarną na $A$ o własności SN i WCR. Ponieważ $\to$ jest SN, to każdy $a$ jest normalizowalny.

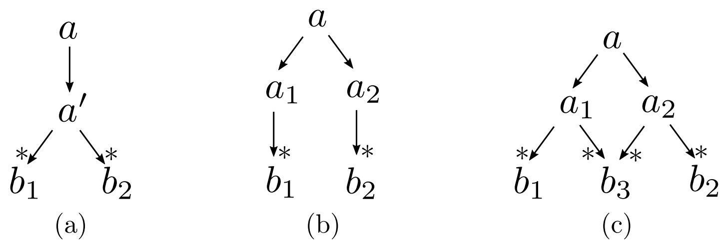
Jeśli $A$ nie zawiera elementów niejednoznacznych, to twierdzenie zachodzi w sposób trywialny. Przypuśćmy, że $a \in A$ jest niejednoznaczny. Twierdzimy, że istnieje $a' \in A$ taki, że $a \to a'$ i $a'$ jest niejednoznaczny. Niech $b_1, b_2 \in \mathrm{NF}$, $b_1 \neq b_2$ i $a \to^* b_1$ oraz $a \to^* b_2$. Ponieważ $b_1 \neq b_2$, to istnieją $a_1$, $a_2 \in A$ takie, że:

$$a \to a_1 \to^* b_1 \quad \text{oraz} \quad a \to a_2 \to^* b_2$$

Jeśli $a_1 = a_2$, to $a' = a_1 = a_2$ i wystarczy wybrać $a' = a_1$. Jeśli jednak $a_1 \neq a_2$, to z własności WCR istnieje $b_3 \in A$ taka, że $a_1 \to^* b_3$ oraz $a_2 \to^* b_3$. Z własności SN możemy przyjąć, że $b_3$ jest w postaci normalnej. Zachodzą więc dwa przypadki:

i) $a_1 = a_2$. Wówczas wystarczy ustalić $a' = a_1$ albo $a' = a_2$ (Rysunek 2a).

ii) $a_1 \neq a_2$ (Rysunek 2b). Wówczas z WCR istnieje $b_3 \in A$ takie, że $a_1 \to^* b_3$ oraz $a_2 \to^* b_3$ (Rysunek 2c). Przypuśćmy, że $b_3 \in \mathrm{NF}$. Ponieważ $b_1 \neq b_3$, to $b_3 \neq b_1$ lub $b_3 \neq b_2$, zatem możemy wybrać $a' = a_1$ albo $a' = a_2$.



Rysunek 2: Warianty konstruowania redukcji.

Stosując powyższe rozumowanie do $a'$ otrzymujemy kolejny element niejednoznaczny. a zatem możemy skontruować nieskończony ciąg redukcji, wbrew założeniu, że relacja $\to$ jest SN. Zatem $A$ nie zawiera elementów niejednoznacznych. $\square$

**Definicja 15.** ($\beta$-redukcja) $\beta$-redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zgodną na $\mathbf{\Lambda}$ relację binarną $\to_\beta$ taką, że

$$(\lambda x.\, M)N \to_\beta M[x/N].$$

*$\beta$-redeksami* bedziemy nazywali wyrażenia postaci $(\lambda x.\, M)N$, zaś rezultat ich $\beta$-redukcji w postaci termu $M[x/N]$ – *$\beta$-reduktem.*

*Ciągiem $\beta$-redukcji* nazywamy kazdy skończony lub nieskończony ciąg $\lambda$-termów $M_0$, $M_1$, … taki, że $M_0 \to_\beta M_1 \to_\beta \dots$

**Definicja 16.** (Strategia redukcji) Strategią redukcji nazywamy każde odwzorowanie $S : \mathbf{\Lambda} \to \mathbf{\Lambda}$ postaci

$$S(M) = \begin{cases} M, & \text{jeśli } M \in \mathrm{NF}_\beta, \\ M', & \text{jeśli } M \to_\beta M'. \end{cases}$$

Strategię $S$ nazywamy *normalizującą*, jeśli dla każdego $M \in \mathrm{WN}_\beta$ istnieje $i \in \mathbb{N}$ takie, że $F^i(M) \equiv \underbrace{F(F(\dots(F}_{i\text{-razy}}(M))\dots)) \in \mathrm{NF}_\beta$.

**Przykład 6.** (a) Oznaczmy $\mathrm{Y} \equiv \lambda f.\,(\lambda x.\,(f(xx))\lambda x.\,(f(xx)))$ i niech $F$ będzie dowolnym $\lambda$-termem. Wówczas otrzymujemy nieskończony ciąg redukcji postaci

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Y}F &\equiv (\lambda f.\,(\lambda x.\,(f(xx))\lambda x.\,(f(xx))))F \\
&\to_\beta (\lambda x.\,F(xx))\lambda x.\,F(xx) \\
&\to_\beta F((\lambda x.\,F(xx))\lambda x.\,F(xx)) \\
&\to_\beta F(\underbrace{F((\lambda x.\,F(xx))\lambda x.\,F(xx))}_{=_\beta \mathrm{Y}F}) \\
&\to_\beta \dots
\end{aligned}
$$

Y nazywamy *kombinatorem punktu stałego*. Widzimy, że relacja $\beta$-redukcji w rachunku $\lambda$ nie jest ani słabo, ani silnie normalizująca.

(b) Niech $\Omega \equiv (\lambda x.\ xx)(\lambda x.\ xx)$. $\Omega$ jest $\beta$-redeksem, którego redukcja prowadzi do ponownego otrzymania termu $\Omega$ i w konsekwencji do stałego ciągu redukcji postaci:

$$\Omega \to_\beta \Omega \to_\beta \Omega \to_\beta \dots$$

(c) Niech $\Delta \equiv \lambda x.\ xxx$. Wówczas:

$$\Delta\Delta \to_\beta \Delta\Delta\Delta \to_\beta \Delta\Delta\Delta\Delta \to_\beta \dots$$

Ponownie, ponieważ każda redukcja powoduje wydłużenie termu, $\Delta\Delta$ nie ma postaci normalnej i w konsekwencji każdy powstały ciąg redukcji termu $\Delta\Delta$ jest nieskończony.

(d) Redukcja $\lambda$-termu posiadającego więcej niż jeden redeks może prowadzić do różnych (choć $\beta$-równowaznych) reduktów. Zależy to od wyboru strategii redukcji. Rozważmy następujący term: $(\lambda u.\ v)\,\Omega$. Konsekwentne redukowanie podtermu $\Omega$ prowadzić musi do niekończącego się stałego ciągu redukcji

$$(\lambda u.\ v)\,\Omega \to_\beta (\lambda u.\ v)\,\Omega \to_\beta \dots$$

Wybierając strategię polegającą na aplikacji $\Omega$ do $(\lambda u.\ v)$ otrzymujemy natychmiastowo redeks w postaci normalnej.

**Definicja 17.** ($\eta$-redukcja) $\eta$-redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zgodną na $\mathbf{\Lambda}$ relację binarną $\to_\eta$ taką, że

$$\lambda x.\, Mx \to_\eta M, \text{ o ile } x \notin \mathrm{FV}(M).$$

$\eta$-redukcja pozwala na pominięcie niczego nie wnoszącej $\lambda$-abstrakcji. Operację odwrotną nazywamy *$\eta$-abstrakcją*, zaś $\lambda$-termy będące w którejkolwiek z tych relacji nazywamy *$\eta$-konwersami*. Operacja ta nie ma wpływu na rezultat obliczenia, jedynie optymializuje zapis $\lambda$-termów i stąd ma duże znaczenie stylistyczne w programowaniu funkcyjnym.

**Przykład 7.** Przypuśćmy, że $(+1) \in \mathbf{\Lambda}$. Wówczas $\lambda x.((+1)x) =_\eta (+1)$.

Widzieliśmy, że $\beta$-redukcja może prowadzić do uzyskania rezultatu lub nie. Fakt 1 i następujące po nim Wniosek 3 i Wniosek 4 stwierdzają, że jeśli tylko mamy pewność, że $\lambda$-term ma postać normalną, to jest ona wyznaczona jednoznacznie i doprowadzi nas do niej każda strategia normalizująca. Fakt 1 to klasyczne twierdzenie, którego dowód można znaleźć w [Bar92] i ze względu na jego obszerność pozwalamy sobie go pominąć.

**Fakt 1.** *(Twierdzenie Churcha-Rossera). $\beta$-redukcja ma własność CR.*

**Wniosek 3.** *Jeśli $M =_\beta N$, to istnieje $L \in \mathbf{\Lambda}$ takie, że $M \to_\beta^* L$ i $N \to_\beta^* L$.*

**Dowód.** Niech $M, N \in \mathbf{\Lambda}$ będą takie, że $M =_\beta N$. Wówczas istnieje ciąg $\lambda$-termów $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}, M_n$ taki, że

$$M_0 \underset{\beta}{\leftrightarrow} M_1 \underset{\beta}{\leftrightarrow} \ldots \underset{\beta}{\leftrightarrow} M_{n-1} \underset{\beta}{\leftrightarrow} M_n,$$

gdzie $M_0 \equiv M$ i $M_n \equiv N$. Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem $n$. Rozważmy następujące przypadki:

(1) Jeśli $n = 0$, to $M \equiv N$. Ustalając $L \equiv M (\equiv N)$ w oczywisty sposób $M \to_\beta^* L$ i $N \to_\beta^* L$.

(2) Jeśli $n = k > 0$, to istnieje $M_{k-1} \in \mathbf{\Lambda}$ takie, że

$$M \equiv M_0 \underset{\beta}{\leftrightarrow} M_1 \underset{\beta}{\leftrightarrow} \ldots \underset{\beta}{\leftrightarrow} M_{k-1} \underset{\beta}{\leftrightarrow} M_k \equiv N$$

Z założenia indukcyjnego wiemy, że istnieje $L' \in \mathbf{\Lambda}$ takie, że $M_0 \to_\beta^* L'$ i $M_{k-1} \to_\beta^* L'$. Ponieważ $\underset{\beta}{\leftrightarrow}$ jest symetryczna, rozważmy osobno przypadki $M_{k-1} \to_\beta M_k$ i $M_k \to_\beta M_{k-1}$.

(a) Jeśli $M_{k-1} \to_\beta M_k$, to tym bardziej $M_{k-1} \to_\beta^* M_k$. Ponieważ $M_{k-1} \to_\beta^* L'$, to korzystając Faktu 1 wnosimy, że istnieje $L \in \mathbf{\Lambda}$ taki, że $L' \to_\beta^* L$ i $M_k \to_\beta^* L$, czyli

$$\begin{tikzcd}
M_0 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr, "*"] & \dots \arrow[r, leftrightarrow] & M_{k-1} \arrow[r] \arrow[dl, "*"'] & M_k \arrow[d, "*"] \\
& L' \arrow[rr, "*"] & & L
\end{tikzcd}$$

(b) Jeśli $M_k \to_\beta M_{k-1}$, to ponieważ $M_{k-1} \to_\beta^* L'$, natychmiast otrzymujemy, że $M_k \to_\beta^* L'$. Ustalając $L \equiv L'$ otrzymujemy tezę.

□

**Wniosek 4.** *(1) Jeśli $N$ to postać normalna $M$, to $M \to_\beta^* N$.*

*(2) Każdy $\lambda$-term ma co najwyżej jedną postać normalną.*

**Dowód.** □

## 1.3 Kodowanie typów danych

Prosta składnia języka rachunku $\lambda$ pozwala wyrazić zaskakująco wiele struktur danych reprezentując je i operacje na nich jako funkcje. Z tego powodu, stanowiąc inspirację dla wielu projektantów języków programowania, uchodzi za protoplastę rodziny języków funkcyjnych, chociaż bezpośrednio nie ma on praktycznego zastosowania w praktyce programistycznej. Rozwój tej legendy dobrze oddaje cykl klasycznych artykułów (tzw. *Lambda Papers*) zapoczątkowany przez dokumentację języka Scheme [SS75].

Najpopularniejszym sposobem reprezentacji danych przez funkcje w rachunku $\lambda$ oparty jest na kodowaniu liczb Peano za pomocą tzw. liczebników Churcha. Metoda ta, ze względu na wynikające zeń problemy natury złożonościowej [KPJ14], ma obecnie wyłącznie walory edukacyjne, dlatego w dalszej cześci pracy pokażemy tzw. kodowanie Scotta. Jest ona interesująca ze względu na praktyczną możliwość reprezentacji algebraicznych typów danych (ADT[1]) znanych ze współczesnych języków funkcyjnych [Jan13], pozwalając tym samym zaimplementować te konstrukcje na przykład w paradygmacie imperatywnym. Fakt, że każdy typ danych można zastąpić tym sposobem odpowiadającą mu funkcją, wskazuje na metodę konstruowania prostych języków funkcyjnych [JKP06] oraz na uniwersalność rachunku $\lambda$ jako języka przejściowego dla kompilatorów języków funkcyjnych [PL92, Rozdział 3].

[1]Skrót od angielskojęzycznego *Algebraic Data Types*; nie należy mylić z *Abstract Data Types*.

### 1.3.1 Algebraiczne typy danych

Algebraiczne typy danych są podstawowym środkiem współczesnych języków funkcyjnych do wyrażania struktur danych. Powstają one przy użyciu tzw. typów sumacyjnych i typów produktowych, jednak pojęcia te na gruncie formalnym będą szczegółowo omówione w późniejszej części pracy. Na potrzeby prezentacji poszczególnych kodowań wystarczą nam w tym rozdziale intuicje o ADT zbudowane na gruncie następujących definicji w języku Haskell:

```
data Boolean     = True
                 | False
data Tuple a b   = Tuple a b
data Temperature = Fahrenheit Int
                 | Celsius Int
data Maybe a     = Nothing
                 | Just a
data Nat         = Zero
                 | Succ Nat
data List t      = Nil
                 | Cons t (List t)
```

Definicja typu rozpoczynają się od słowa kluczowego `data`[2] po którym występuje *konstruktor typu*. Na wzór notacji BNF, typy przyjmują jedną z *wartości* odzielonych znakiem "|". Każda z wartości składa się z *konstruktora wartości* i ewentualnie występujących po nim *parametrów typowych*. Zauważmy, że umożliwia to rekurencyjnie konstruowanie typów, tak jak w wypadku `Nat` i `List`.

Pokażemy, że algebraiczne typy danych możemy reprezentować w zwięzły sposób w rachunku $\lambda$ bez typów. Przedstawione tutaj koncepcje w zaskakujący sposób przenoszą się do bardziej złożonych typowanych systemów rachunku $\lambda$.

### 1.3.2 Proste typy wyliczeniowe

Typy wyliczeniowe to typy, które reprezentują możliwe warianty przyjmowanej wartości. Najprostrzym nietrywialnym przykładem takiego typu jest `Boolean`. Ma on dwa konstruktory wartości: `True`, `False`. Praca z tego rodzaju typami wymaga mechanizmu dopasowywania wzorców (ang. *pattern-matching*) [PL92, Rozdział IV], który pozwala na wybór częściowej definicji funkcji w zależności od zadanego konstruktora wartości. Ponieważ w rachunku $\lambda$ wyrażenia nie mają typów (lub, przyjmując perspektywę systemów z typami: wszystkie wyrażenia mają jeden, ten

[2] Dyskusja ta ma na celu wyłącznie ustalenie uwagi; świadomi jesteśmy niuansów związanych z określaniem synonimów typów lub definiowaniem typów przy pomocy słowa kluczowego `newtype`.

sam typ), interesowało nas będzie nie bezpośrednie kodowanie typu, ale kodowanie mechanizmu, który odpowiada za dopasowywanie wzorców. Posłużmy się znowu przykładem z języka Haskell i określmy funkcję odpowiadającą wykonaniu instrukcji warunkowej:

```
if True  a b = a
if False a b = b
```

gdzie `True` i `False` są wartościami typu `Boolean`. Właśnie ze względu na nie, mechanizm dopasowywania wzorca wybiera odpowiednią implementację instrukcji warunkowej. Ten sam efekt osiągnęlibyśmy kodując `True` i `False` w rachunku $\lambda$ w następujący sposób:

$$\mathrm{True} \equiv \lambda ab.\, a$$
$$\mathrm{False} \equiv \lambda ab.\, b$$

Wówczas funkcję `if` możemy reprezentować wyrażeniem $\mathrm{if} \equiv \lambda cte.\, cte$ lub jego $\eta$-reduktem: $\lambda c.\, c$.

### 1.3.3 Pary w rachunku $\lambda$

Parą nazywamy każdy nierekurencyjny typ, który posiada jeden konstruktor wartości parametryzowany przez dwa typy. W takim wypadku potrzebujemy dwóch projekcji zwracających odpowiednio pierwszy i drugi element pary. Przykładem takiego typu jest `Tuple`. Mamy wówczas:

```
fst (Tuple a b) = a
snd (Tuple a b) = b
```

Tego rodzaju typy możemy reprezentować przez tak zwane *domknięcie* (ang. *closure*), czyli cześciową aplikację termu. Standardowym sposobem reprezentacji pary w rachunku $\lambda$ jest:

$$\mathrm{Tuple} \equiv \lambda abf.\, fab$$

Aplikując Tuple tylko do dwóch termów (*domykając* term Tuple) otrzymujemy reprezentację pary. Pozostały, trzeci argument $f$ nazywamy *kontynuacją*, gdyż aplikując $(\mathrm{Tuple}\ x\ y)$ dla dowolnych $x, y \in \mathbf{\Lambda}$ do pewnego $f \in \mathbf{\Lambda}$, w konsekwencji $x$ i $y$ zostają zaaplikowane do $f$. Zauważmy, że wówczas reprezentacja `fst` i `snd` ma postać:

$$\mathrm{fst} \equiv \lambda t.\, t(\lambda ab.\, a)$$
$$\mathrm{snd} \equiv \lambda t.\, t(\lambda ab.\, b)$$

**Przykład 8.** Wprowadzone konstrukcje pozwalają nam na definicję skończonych (w sensie liczby konstruktorów) typów. Rozważmy następujące przykłady:

a) Konstruktory wartości typu `Maybe` możemy reprezentować przez

$$\begin{aligned} \text{Nothing} &\equiv \lambda nj.\, n \\ \text{Just} &\equiv \lambda anj.\, ja \end{aligned}$$

Rozważmy następującą funkcję:

```
maybe :: b -> (a -> b) -> Maybe a -> b
maybe n _ Nothing  = n
maybe _ f (Just x) = f x
```

Odpowiadająca jej reprezentacja to

$$\text{maybe} \equiv \lambda bft.\, tb(\lambda a.\, fa)$$

b) Rozważmy następującą funkcję

```
fromTemperature :: Temperature -> Int
fromTemperature (Fahrenheit a) = a
fromTemperature (Celsius a) = a
```

Ustalając reprezentację konstruktorów `Fahrenheit` i `Celsius`:

$$\begin{aligned} \text{Fahrenheit} &\equiv \lambda tfc.\, ft \\ \text{Celsius} &\equiv \lambda tfc.\, ct \end{aligned}$$

otrzymujemy reprezentację funkcji `formTemperature` postaci:

$$\text{fromTemperature} \equiv \lambda t.\, t(\lambda f.\, f)(\lambda c.\, c)$$

### 1.3.4 Kodowanie rekurencji

Rozważmy następującą funkcję dodawania liczb Peano w języku Haskell:

```
add Zero     m = m
add (Succ n) m = Succ (add n m)
```

Funkcję tę możemy wyrazić w rachunku $\lambda$ przy pomocy kodowania Scotta w następujący sposób:

$$\text{add}_0 \equiv \lambda nm.\, n\, m\, (\lambda n.\, \text{Succ}(\text{add}_0\, n\, m))$$

Formalizm rachunku $\lambda$ nie pozwala na okreslanie nowych nazw i rekurencyjne odnoszenie się przez nie do nich samych. Standardową techniką w rachunku $\lambda$ do określania funkcji w ten sposób jest użycie operatora punktu stałego Y. Przypomnijmy:

$$\mathrm{Y} \equiv \lambda f.\,(\lambda x.\,(f(xx))\lambda x.\,(f(xx)))$$

Wówczas określamy

$$\mathrm{add}_{\mathrm{Y}} \equiv \mathrm{Y}\,(\lambda a\,n\,m.\ nm\,(\lambda n.\ \mathrm{Succ}(a\,n\,m)))$$

Mając na uwadze możliwość przeprowadzenia powyższej konstrukcji przy użyciu rekurencji, będziemy dopuszczali w notacji odnoszenie się wprowadzanych $\lambda$-termów do nich samych.

### 1.3.5 Kodowanie Scotta typów rekursywnych

Stosując metody kodowania prostych typów wyliczeniowych i par, łatwo odnajdujemy reprezentację konstruktorów wartości dla typów `Nat` i `List`:

$$\mathrm{Zero} \equiv \lambda zs.\,z \qquad \mathrm{Nil} \equiv \lambda nc.\,n$$
$$\mathrm{Succ} \equiv \lambda nzs.\,sn \qquad \mathrm{Cons} \equiv \lambda x\,x_s\,n\,c.\ c\,x\,x_s$$

Zwróćmy uwagę, że konstruktory Nat i Maybe są swoimi $\alpha$-konwersami. Podobieństwo nie jest przypadkowe: na poziomie typów konstrukcja Maybe jest odpowiednikiem brania następnika. Określając dodatkowo Void $\equiv \lambda x.x$ jako element neutralny działania łącznego, otrzymujemy na poziomie typów strukturę półpierścienia z działaniem mnożenia okresloną przez konstrukcję par i dzałaniem dodawania określonego przez konstrukcję typów wyliczeniowych. Stąd algebraicze typy danych biorą swoją nazwę.

Z łatwością możemy określić teraz operacje brania poprzednika, głowy i ogona listy, odpowiednio:

$$\mathrm{pred} \equiv \lambda n.\,n\,\mathrm{undef}\,(\lambda m.\,m)$$
$$\mathrm{head} \equiv \lambda x_s.\,x_s\,\mathrm{undef}\,(\lambda x_s.x)$$
$$\mathrm{tail} \equiv \lambda x_s.\,\mathrm{undef}\,(\lambda x_s.\,x_s)$$

gdzie undef jest stałą o którą rozszerzamy rachunek $\lambda$ celem sygnalizowania błędnej aplikacji.

Celem lepszego porównania kodowania Churcha i Scotta podamy reprezentacje funkcji `foldl` dla typu `Nat`. Określmy:

```
foldl f x Zero     = x
foldl f x (Succ n) = f (foldl f x n)
```

`foldl` może być przy pomocy kodowania Scotta zapisane jako

$$\text{foldl} \equiv \lambda f\,x\,n.\; n\,x\,(\lambda n.\; (\text{foldl}\;\; f\;\; x\;\; n))$$

Ogólnie, przy pomocy `foldl` wyabstrahowujemy pojęcie tzw. rekursji od strony ogona (ang. *tail recrusion*), w teorii obliczalności nazywane rekursją prostą lub, popularnie, zwijaniem od lewej. Operator foldl spełnia następującą własność [Hut99]

$$f = \text{foldl}\;\varphi\;a \iff \begin{cases} f\;\text{Zero} \;=\; a \\ f\;(\text{Succ}\;n) = \varphi\;(f\;n) \end{cases} \tag{2}$$

### 1.3.6 Kodowanie Churcha typów rekursywnych

Przedstawimy teraz klasyczny sposób kodowania typów po raz pierwszy zaprezentowany dla liczb naturalnych przez A. Churcha w [Chu41]. Różni się on od kodowania Scotta tylko w przypadku typów rekursywnych, w pozostałych przypadkach obydwa kodowania dają te same rezultaty. Typ `Nat` ma dwa konstruktory: `Zero` i `Succ`. W kodowaniu Churcha reprezentujemy je w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \text{Zero}_{Ch} &\equiv \lambda f x.\, x \\ \text{Succ}_{Ch} &\equiv \lambda n f x.\, f\,(n\,f\,x) \end{aligned}$$

Wyrażenia będące skutkiem konsekwentnej aplikacji Succ do Zero w literaturze popularnie nazywa się *liczebnikami Churcha* i oznacza następująco:

$$\begin{aligned} \bar{1} &\equiv \text{Succ}_{Ch}\;\text{Zero}_{Ch} \;=_\beta\; \lambda f x.\, f x \\ \bar{2} &\equiv \text{Succ}_{Ch}\;\text{Succ}_{Ch}\;\text{Zero}_{Ch} \;=_\beta\; \lambda f x.\, f\,f\,x \\ &\vdots \\ \bar{n} &\equiv \text{Succ}^n_{Ch}\;\text{Zero}_{Ch} \;=_\beta\; \lambda f x.\, f^n\,x \end{aligned}$$

Liczba naturalna $n$ jest kodowana przez funkcję w której jej pierwszy argument jest aplikowany $n$ razy do drugiego argumentu. Porównując je do kodowania Scotta widzimy, że różnica polega na aplikowaniu do kontynuacji termu $(n\,f\,x)$ w przypadku brania następnika. Da się pokazać [HIN05], że liczebniki Churcha są w istocie operacją `foldl` na argumentach `Succ` i Zero. Istotnie, niech nat $\equiv \lambda c.\; c$ Succ Zero. Wówczas nat $\bar{n} =_\beta \bar{n}$. Z tego powodu kodowanie operacji na liczebnikach Churcha, lub ogólnie – funkcji opartych na rekursji prostej po zbiorze liczb naturalnych – jest wyjątkowo proste przy użyciu tej metody. Przykładowo, używając metody Churcha, operację dodawania kodujemy w następujący sposób:

$$\text{add}_{Ch} \equiv \lambda n\,m.\; n\;\text{Succ}_{Ch}\;m$$

Dla porównania, używając kodowania Scotta:

$$\text{add}_S \equiv \lambda n\,m.\; \text{foldl}\;\text{Succ}\;n\;m$$

### 1.3.7 Ogólny schemat kodowania Scotta typów ADT

W ogólnym przypadku, mając nastepującą definicję ADT:

```
data type_constructor t1 t2 ... tk = C1 t11 ... t1n1
                                   | C2 t21 ... t2n2
                                   ...
                                   | Cm tm1 ... tmnm
```

dla $m, n \in \mathbb{N}$, wiążemy z nią reprezentację każdego z konstruktorów:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}_1 &\equiv \lambda t_{11}\, t_{12} \ldots t_{1n_1}\, f_1\, f_2 \ldots f_m.\ f_1 t_{11} t_{12} \ldots t_{1n_1} \\
\mathrm{C}_2 &\equiv \lambda t_{21}\, t_{22} \ldots t_{2n_2}\, f_1\, f_2 \ldots f_m.\ f_2 t_{21} t_{22} \ldots t_{2n_2} \\
&\vdots \\
\mathrm{C_m} &\equiv \lambda t_{m1}\, t_{m2} \ldots t_{mn_m}\, f_1\, f_m \ldots f_m.\ f_1 t_{m1} t_{m2} \ldots t_{mn_m}
\end{aligned}
$$

Wówczas następującą definicję cześciową funkcji `f`:

```
f (C1 v11 ... v1n1) = y1
...
f (Cm vm1 ... vmnm) = ym
```

kodujemy przy za pomocą następujego $\lambda$-termu:

$$
\begin{aligned}
\lambda x.\ x\, &(\lambda v_{11} \ldots v_{1n_1}.\ y_1) \\
&\vdots \\
&(\lambda v_{m1} \ldots v_{mn_m}.\ y_m)
\end{aligned}
$$

gdzie $y_1$ są kodowaniami Scotta `yi` dla $i \in \mathbb{N}$.

# Literatura


[Alt02] Thorsten Altenkirch. "$\alpha$-conversion is easy". Under Revision. 2002. URL: https://www.cs.nott.ac.uk/~psztxa/publ/alpha-draft.pdf.

[Bar92] Henk (Hendrik Barendregt. "Lambda Calculi with Types". In: vol. 2. Jan. 1992, pp. 117–309. ISBN: 0198537611.

[Bru72] N.G. de Bruijn. "Lambda Calculus Notation with Nameless Dummies, a Tool for Automatic Formula Manipulation, with Application to the Church-Rosser Theorem". In: *Indagationes Mathematicae (Proceedings)* 75 (Dec. 1972), pp. 381–392. DOI: 10.1016/1385-7258(72)90034-0.

[Chu41] Alonzo Church. *The Calculi of Lambda-Conversion.* Princeton University Press, 1941.

[HIN05] RALF HINZE. "THEORETICAL PEARL Church numerals, twice!" In: *Journal of Functional Programming* 15.1 (2005), pp. 1–13. DOI: 10.1017/S0956796804005313.

[HS08] J. Roger Hindley and Jonathan P. Seldin. *Lambda-Calculus and Combinators: An Introduction.* 2nd ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2008. ISBN: 0521898854, 9780521898850.

[Hut99] Graham Hutton. "A Tutorial on the Universality and Expressiveness of Fold". In: *J. Funct. Program.* 9.4 (July 1999), pp. 355–372. ISSN: 0956-7968. DOI: 10.1017/S0956796899003500. URL: http://dx.doi.org/10.1017/S0956796899003500.

[Jan13] Jan Martin Jansen. "Programming in the λ-Calculus: From Church to Scott and Back". In: *Essays Dedicated to Rinus Plasmeijer on the Occasion of His 61st Birthday on The Beauty of Functional Code - Volume 8106.* Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013, pp. 168–180. ISBN: 978-3-642-40354-5. DOI: 10.1007/978-3-642-40355-2_12. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-40355-2_12.

[JKP06] Jan Martin Jansen, Pieter Koopman, and Rinus Plasmeijer. "Efficient Interpretation by Transforming Data Types and Patterns to Functions". In: Jan. 2006, pp. 73–90.

[KPJ14] Pieter Koopman, Rinus Plasmeijer, and Jan Martin Jansen. "Church Encoding of Data Types Considered Harmful for Implementations: Functional Pearl". In: *Proceedings of the 26Nd 2014 International Symposium on Implementation and Application of Functional Languages.* IFL '14. Boston, MA, USA: ACM, 2014, 4:1–4:12. ISBN: 978-1-4503-3284-2. DOI: 10.1145/2746325.2746330. URL: http://doi.acm.org/10.1145/2746325.2746330.

[PL92] Simon L. Peyton Jones and David R. Lester. *Implementing Functional Languages.* Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1992. ISBN: 0-13-721952-0.

[SS75] Gerald J. Sussman and Guy L. Steele Jr. *An Interpreter for Extended Lambda Calculus.* Tech. rep. Cambridge, MA, USA, 1975.

[SU06] Morten Heine Sørensen and Pawel Urzyczyn. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, Volume 149 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics).* New York, NY, USA: Elsevier Science Inc., 2006. ISBN: 0444520775.