

Spis treści

1	Rachunek λ bez typów	3
1.1	Wyrażenia λ	6
1.2	Redukcja	10
1.3	Model Scotta D_∞	16
1.4	Kodowanie typów danych	24
1.4.1	Algebraiczne typy danych	24
1.4.2	Proste typy wyliczeniowe	25
1.4.3	Pary w rachunku λ	26
1.4.4	Kodowanie rekurencji	27
1.4.5	Kodowanie Scotta typów rekursywnych	28
1.4.6	Kodowanie Churcha typów rekursywnych	29
1.4.7	Ogólny schemat kodowania Scotta typów ADT	29
1.5	Podsumowanie	30
2	Rachunek λ z typami prostymi	31
2.1	Typy proste	31
2.2	Typowanie	32
2.2.1	Rodzaje problemów	35
2.3	Własności	36
2.3.1	Uniwersalny polimorfizm	40
2.3.2	Silna normalizacja	40
2.4	Typy w stylu Churcha	45
2.4.1	Składnia	45
2.4.2	Typowanie	46
2.5	Podsumowanie	46
3	System Girarda/Reynoldsa	47
3.1	Termy zależne od typów	47
3.2	Typowanie	51
3.3	Redukcja	54
3.4	Podsumowanie	57

For a large class of cases of
the employment of the word
‘meaning’ – though not for all –
this word can be explained in this
way: the meaning of a word is its
use in the language. [Wit53]

L. Wittgenstein

The meaning of a proposition
is determined by (...) what counts
as a verification of it. [Mar96]

P. Martin-Löf

Wstęp

Pojęcia *funkcji* używa się na ogół mając na myśli jedno z dwóch znaczeń:

- (a) *funkcji* jako algorytmu, który zwraca wartość dla zadanego argumentu.
- (b) *funkcji* w rozumieniu teoriomnogościowym, jako zbiór par argument-wartość.

Ujęcie (a) nazywane jest *semantyką operacyjną*. Oddaje dynamiczny charakter procesu obliczania wartości funkcji jako ciągu wykonywanych w czasie elementarnych operacji na zadanym argumentcie. W kontekście teorii języków programowania przez operacje elementarne należy rozumieć wykonywanie podstawowych instrukcji procesora. W teorii obliczalności to samo rozumielibyśmy pod pojęciem *funkcji obliczalnej*, zaś algorytmiczny proces otrzymywania wartości nazwalibyśmy *efektywnym*.

Ujęcie (b) odpowiada rozumieniu funkcji jako ustalonego, statycznego zbioru przyporządkowań z którego możemy odczytać wartość. Przypisanie funkcjom takiego znaczenia nazywamy *semantyką denotacyjną*. Wymaga ono dostępu do pełnej informacji o funkcji. Niestety, spełnienie tego wymogu na ogół nie może być efektywne ze względu na złożoność pamięciową konieczną do przeprowadzenia takiego procesu (tzw. *memoizacji*).

1 Rachunek λ bez typów

Niech V będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych x, y, \dots (indeksowanych być może liczbami naturalnymi). Elementy takiego zbioru będziemy nazywali λ -zmiennymi. Ponieważ V jest potencjalnie nieskończony, zastrzegamy sobie możliwość wybierania w razie potrzeby wcześniej nie użytej zmiennej.

Definicja 1. (Zbiór $\tilde{\Lambda}$ pretermów) Zbiorem pretermów będziemy nazywali najmniejszy (w sensie mnogościowym) zbiór wyrażeń $\tilde{\Lambda}$ taki, że:

- (P1) Jeśli $x \in V$, to $x \in \tilde{\Lambda}$.
- (P2) Jeśli $M, N \in \tilde{\Lambda}$, to $(M N) \in \tilde{\Lambda}$.
- (P3) Jeśli $x \in V$ i $M \in \tilde{\Lambda}$, to $(\lambda x. M) \in \tilde{\Lambda}$.

Definicję 1 można równoznacznie wyrazić przy pomocy notacji Backusa-Naura. Wówczas ma ona następującą, zwięzłą postać:

$$\tilde{\Lambda} \leftarrow V \mid (\tilde{\Lambda} \tilde{\Lambda}) \mid (\lambda V. \tilde{\Lambda})$$

Powiemy, że dwa λ -termy są *syntaktycznie równe*, jeśli rozumiane jako ciągi znaków są identyczne. Równość syntaktyczną będziemy oznaczali znakiem \equiv .

Elementy $\tilde{\Lambda}$ będziemy oznaczali literami L, M, N, P, Q, R i ich wariantami z górnymi lub dolnymi indeksami. Wyrażenia postaci (P2) nazywamy *aplikacjami* M do N . Symbol λ występujący w (P3) nazywamy λ -abstraktorem, zaś wyrażenia powstałe przez zastosowanie tej reguły to λ -abstrakcje. W wyrażeniu postaci $(\lambda x. M)$ preterm M jest w *zasięgu* λ -abstraktora, a zmienna x jest przez niego *związana*. Ponadto, będziemy stosowali następujące konwencje notacyjne:

- najbardziej zewnętrzne nawiasy będą pomijane,
- aplikacja wiąże lewostronnie; wyrażenia postaci $(PQ)R$ będą zapisywane w postaci PQR ,
- λ -abstrakcja wiąże prawostronnie: $\lambda x_1. (\lambda x_2. P)$ zapisujemy $\lambda x_1. \lambda x_2. P$,
- następujące po sobie λ -abstrakcje postaci $\lambda x_1. \lambda x_2. \dots \lambda x_n. P$ zapisujemy pod wspólnym λ -abstraktorem: $\lambda x_1 x_2 \dots x_n. P$.
- n -krotną aplikację $P \in \tilde{\Lambda}$ do siebie zapisujemy skrótowo: $P^n \equiv \underbrace{P P \dots P}_{n\text{-razy}}$

Przykład 1. Podajmy kilka przykładów λ -pretermów pogrupowanych ze względu na ich konstrukcję.

- (P1): x, y, z .
- (P2): $xx, yx, x(xz),$
 $(\lambda x. (xz))y, y(\lambda x. (xz)), (\lambda x. x)(\lambda x. x)$.

(P3): $\lambda x. (x z), \lambda y z. x, \lambda x. (\lambda x. (x x))$.

Podwyrażenia λ -pretermu mogą być wzajemnie identyczne i występować wielokrotnie. Obserwację tę ujmuje następująca definicja.

Definicja 2. (Multizbiór Sub podtermów pretermu)

- (1) $\text{Sub}(x) = \{x\}$
- (2) $\text{Sub}(MN) = \text{Sub}(M) \cup \text{Sub}(N) \cup \{MN\}$
- (3) $\text{Sub}(\lambda x. M) = \text{Sub}(M) \cup \{\lambda x. M\}$

Elementy multizbioru $\text{Sub}(M)$ nazywamy *podtermami* M . Jeśli L jest podtermem M , ale $L \neq M$, to L nazywamy podtermem *właściwym*.

Przykład 2. Podtermy wybranych λ -pretermów.

- (a) $\text{Sub}(\lambda x. x x) = \{(\lambda x. x x)^1, (x x)^1, x^2\}$
- (b) $\text{Sub}((\lambda x. x x) (\lambda x. x x)) =$
 $= \{((\lambda x. x x) (\lambda x. x x))^1, (\lambda x. x x)^2, (x x)^2, x^4\}$

W powyższych przykładach użyliśmy standardowej notacji w górnym indeksie umieszczając krotność występowania elementu.

Definicja 3. (Zbiór FV zmiennych wolnych) Dla dowolnego pretermu M określamy zbiór $\text{FV}(M)$ *zmiennych wolnych* w M w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \text{FV}(x) &= \{x\} \\ \text{FV}(\lambda x. P) &= \text{FV}(P) \setminus \{x\} \\ \text{FV}(PQ) &= \text{FV}(P) \cup \text{FV}(Q) \end{aligned}$$

Jesli $\text{FV}(M) = \emptyset$, to mówimy, że M jest *domknięty* lub nazywamy M *kombinatorem*.

Przykład 3. (a) $\text{FV}(\lambda x. x y) = \{y\}$

(b) $\text{FV}(x (\lambda x. x y)) = \{x, y\}$

(c) $\text{FV}(\lambda x y z. x y) = \emptyset$

Definicja 4. (Podstawienie) Dla dowolnych $M, N \in \tilde{\Lambda}$ i $x \in V$ przez $N[x/N]$ oznaczamy rezultat podstawienia termu N za wszystkie wolne wystąpienia zmiennej x w M , o ile w rezultacie podstawienia nie zostaną związane żadne zmienne wolne występujące w N . W takim wypadku:

(S1) $x[x/N] = N$

- (S2) $y[x/N] = y$, o ile $x \neq y$
(S3) $(PQ)[x/N] = P[x/N]Q[x/N]$
(S4) $(\lambda y. P)[x/N] = \lambda y. P[x/N]$, gdzie $x \neq y$ i $y \notin \text{FV}(N)$
(S5) $(\lambda x. P)[x/N] = \lambda x. P$

Lemat 1. (O podstawieniu) Niech $M, N, L \in \tilde{\Lambda}$ i niech ponadto $x \neq y$ oraz $x \notin \text{FV}(L)$. Wówczas

$$M[x/N][y/L] \equiv M[y/L][x/N[y/L]]. \quad (1)$$

Dowód. Dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem M . Rozważmy następujące przypadki:

- i) M jest zmienną. Wówczas:
- a. Jeśli $M \equiv x$, to obie strony (1) po podstawieniu są postaci $N[y/L]$.
 - b. Jeśli $M \equiv y$, to ponieważ $x \neq y$ i $x \notin \text{FV}(M)$, po wykonaniu podstawienia po lewej stronie (1) otrzymujemy $M[x/N][y/L] \equiv L$. Ponieważ $x \notin \text{FV}(L)$, to po wykonaniu podstawienia po prawej stronie widzimy, że obydwie strony są identyczne.
 - c. Jeśli $M \equiv z$ i $z \neq x$ oraz $z \neq y$, to obydwie strony (1) są identyczne.
- ii) $M \equiv PQ$ dla pewnych $P, Q \in \tilde{\Lambda}$. Wówczas korzystając z założenia indukcyjnego wnosimy, że

$$\begin{aligned} P[x/N][y/L] &= P[y/L][x/N[y/L]], \\ Q[x/N][y/L] &= Q[y/L][x/N[y/L]]. \end{aligned}$$

Mając na względzie (S3) widzimy, że twierdzenie zachodzi i w tym przypadku.

- iii) Jeśli $M \equiv \lambda z. P$ oraz $z \equiv x$ lub $z \equiv y$, to z (S'5) widzimy, że obydwie strony (1) są identyczne. Przypuśćmy, że $z \neq x$ i $z \neq y$ i $z \notin \text{FV}(L)$. Wówczas na podstawie założenia indukcyjnego mamy:

$$\begin{aligned} (\lambda z. P)[x/N][y/L] &= \lambda z. P[x/N][y/L] = \\ &= \lambda z. P[y/L][x/N[y/L]] = \\ &= (\lambda z. P)[y/L][x/N[y/L]]. \end{aligned}$$

□

Wniosek 1. Jeśli $M[x/y]$ jest określone i $y \notin \text{FV}(M)$, to $M[x/y][y/x]$ jest określone oraz $M[x/y][y/x] = M$.

Dowód. Mając na uwadze Lemat 4 dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem M . □

1.1 Wyrażenia λ

Na ogół chcielibyśmy utożsamiać pretermy, które różnią się wyłącznie zmiennymi związanymi, tak jak w przypadku wyrażeń $\lambda x. zx$ i $\lambda y. zy$. W takim wypadku powiemy o nich, że są swoimi α -wariantami lub że są ze sobą w relacji α -konwersji.

Definicja 5. (α -konwersja) Relacją $=_\alpha$ (α -konwersji) nazywamy najmniejszy w sensie mnogościowym praporządek na $\tilde{\Lambda}$ taki, że

- ($\alpha 1$) Jeśli $y \notin \text{FV}(M)$ oraz $M[x/y]$ jest określone,
to $\lambda x. M =_\alpha \lambda y. M[x/y]$
- ($\alpha 2$) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla dowolnego $x \in V$ zachodzi $\lambda x. M =_\alpha \lambda x. N$
- ($\alpha 3$) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla dowolnego $Z \in \tilde{\Lambda}$ zachodzi $MZ =_\alpha NZ$
- ($\alpha 4$) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla dowolnego $Z \in \tilde{\Lambda}$ zachodzi $ZM =_\alpha ZN$

Przykład 4.

$$\begin{aligned} \lambda xy. x(xy) &\equiv \lambda x. (\lambda y. x(xy)) \\ &\equiv_\alpha \lambda x. (\lambda z. x(xz)) \\ &\equiv_\alpha \lambda v. (\lambda z. v(vz)) \\ &\equiv \lambda vz. v(vz). \end{aligned}$$

Wniosek 2. Relacja $=_\alpha$ jest relacją równoważności.

Dowód. Wystarczy, że pokażemy, że relacja $=_\alpha$ jest symetryczna. Dowód przebiega przez indukcję względem Definicji 5. Rozważmy następujące przypadki:

- i) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji zwrotności $=_\alpha$, to $M \equiv N$, a zatem również $N \equiv M$. Stąd $N =_\alpha M$.
- ii) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji przechodniości $=_\alpha$, to istnieje $L \in \tilde{\Lambda}$ takie, że $M =_\alpha L$ i $L =_\alpha N$. Wówczas z założenia indukcyjnego $N =_\alpha L$ i $L =_\alpha M$. Z przechodniości relacji $=_\alpha$ otrzymujemy spodziewaną tezę.
- iii) Przypuśćmy, że $M =_\alpha N$ w konsekwencji ($\alpha 1$) dla $M \equiv \lambda x. M'$ i $N \equiv \lambda y. M'[x/y]$. Ponieważ $x \notin \text{FV}(M'[x/y])$, to ze względu na Wniosek 1 mamy, że $M'[x/y][y/x] = M'$. Zatem, na podstawie ($\alpha 1$):

$$\lambda y. M'[x/y] =_\alpha \lambda x. M'[x/y][y/x].$$

- iv) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji ($\alpha 2$), gdzie $M = \lambda x. M'$ i $N = \lambda x. N'$ dla $M' =_\alpha N'$, to z założenia indukcyjnego $N' =_\alpha M'$ i w konsekwencji ($\alpha 2$) mamy, że $N =_\alpha M$.

v) Jeśli $M =_{\alpha} N$ w konsekwencji $(\alpha 3)$ dla $M \equiv M'Z$ i $N \equiv N'Z$ takich, że $M' =_{\alpha} N'$, to z założenia indukcyjnego oczywiście $N' =_{\alpha} M'$, a zatem z $(\alpha 3)$ $N =_{\alpha} M$.

vi) Jeśli $M =_{\alpha} N$ w konsekwencji $(\alpha 3)$, to postępujemy jak w przypadku (v). \square

Definicja 6. (Zbiór Λ λ -termów) Każdą klasę abstrakcji relacji $=_{\alpha}$ nazywamy λ -termem. Zbiór wszystkich λ -termów Λ to zbiór ilorazowy relacji α -konwersji:

$$\Lambda = \{[M]_{=\alpha} \mid M \in \tilde{\Lambda}\}$$

Konwencja. Wprowadzamy następujące konwencje notacyjne:

$$\begin{aligned} x &= [x]_{=\alpha}, \\ PQ &= [M'N']_{=\alpha}, \text{ gdzie } M = [M']_{=\alpha} \text{ i } N = [N']_{=\alpha}, \\ \lambda x. M &= [\lambda x. M']_{=\alpha}, \text{ gdzie } N = [N']_{=\alpha}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 1. *Każdy $M \in \Lambda$ ma jedną z poniższych postaci:*

- (1) $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n. y N_1 \dots N_m$, gdzie $n, m \geq 0$ i $y \in V$
- (2) $M \equiv \lambda x_1 \dots x_n. (\lambda y. N_0) N_1 \dots N_m$, gdzie $n \geq 0$ i $m \geq 1$

O λ -termach postaci (1) i (2) mówimy, że są w *czołowej postaci normalnej* (HNF, ang. *head normal form*) albo w *słabej czołowej postaci normalnej* (WHNF, ang. *weak head normal form*), odpowiednio.

Dowód. Z definicji λ -term M jest albo zmienną, albo aplikacją postaci PQ , albo abstrakcją postaci $(\lambda x. P)$. Wówczas mamy następujące przypadki:

- i) Jeśli M jest zmienną, to wówczas M jest postaci (1).
- ii) Jeśli M jest aplikacją, to wówczas $M \equiv P_0 P_1 \dots P_m$, gdzie P_0 nie jest aplikacją. Wówczas M jest postaci (1) albo postaci (2) dla $n = 0$, w zależności od tego czy P_0 jest zmienną (wówczas jest to przypadek (1)) czy abstrakcją (wówczas jest to przypadek (2)).
- iii) Jeśli M jest abstrakcją, to wówczas $M \equiv \lambda x_1 x_2 \dots x_m. P_0 P_1 \dots P_n$, gdzie P_0 abstrakcją już nie jest. Wówczas P_0 jest albo zmienną (przypadek (1)) albo aplikacją (przypadek (2)). \square

Przykład 5. $\lambda x. (\lambda y. y) M$ jest w postaci WHNF, ale nie jest w postaci HNF, ponieważ zawiera redeks czołowy $(\lambda y. y)M$.

Na zbiór Λ przenoszą się pojęcia podtermu, zmiennych wolnych i operacji podstawienia definiowane uprzednio dla pretermów.

Definicja 7. (Multizbiór Sub podtermów λ -termu) Dla dowolnego λ -termu $M = [M']_{=\alpha}$ określamy

$$\text{Sub}(M) = \text{Sub}(M'),$$

gdzie $\text{Sub}(M')$ jest multizbiorem podwyrażeń pretermu M' zdefiniowanym w myśl Definicji 2.

Definicja 8. (Zbiór zmiennych wolnych FV) Dla dowolnego λ -termu $M = [M']_{=\alpha}$ określamy zbiór $\text{FV}(M)$ *zmiennych wolnych* w M

$$\text{FV}(M) = \text{FV}(M'),$$

gdzie $\text{FV}(M')$ jest zbiorem zmiennych wolnych pretermu M' zdefiniowanym w myśl Definicji 3.

Definicja 9. (Podstawienie) Niech $M = [M']_{=\alpha}$ i $N = [N']_{=\alpha}$ i niech $M'[x/N']$ będzie określone w myśl Definicji 4. Wówczas

$$M[x/N] = [M'[x/N']]_{=\alpha}.$$

Operacja podstawienia wymaga jednak pewnej delikatności. Rozważmy następującą relację:

$$\lambda x. zx =_{\alpha} \lambda y. zy$$

Zauważmy, że traktując podstawienie w sposób naiwny, mamy, że $(\lambda x. zx)[z/x] \neq_{\alpha} (\lambda y. zy)[z/x]$, a więc tracimy pożądaną własność niezmienniczości α -konwersji względem podstawienia. Stąd w Definicji 4 wymóg, aby podstawienie nie prowadziło do uszczuplenia zbioru zmiennych wolnych. Alternatywnym rozwiązaniem jest określenie podstawienia, które wprowadzałoby do wyrażenia nową zmienną i prowadziło w konsekwencji do abstrahowania po wcześniej nie występujących zmiennych:

$$(\lambda x. M)[y/N] = \lambda x'. M[x/x'][y/N],$$

w przypadku, gdy $x \neq y$, gdzie $x' \notin \text{FV}(M)$ i $x' \notin \text{FV}(N)$. Rozstrzygnięcie takie przytacza się w [HS08]. Po uwzględnieniu odpowiednich modyfikacji, Definicja 4 przyjmuje następującą postać:

Definicja 4'. (*Podstawienie'*)

$$(S'1) \quad x[x/N] = N$$

$$(S'2) \quad y[x/N] = y, \text{ o ile } x \neq y$$

$$(S'3) \quad (PQ)[x/N] = P[x/N]Q[x/N]$$

$$(S'4) \quad (\lambda x. P)[x/N] = \lambda x. P$$

(S'5) $(\lambda y. P)[x/N] = \lambda y. P$, jeśli $x \notin \text{FV}(P)$

(S'6) $(\lambda y. P)[x/N] = \lambda y. P[x/N]$, gdzie $x \in \text{FV}(P)$ i $y \notin \text{FV}(N)$

(S'7) $(\lambda y. P)[x/N] = \lambda z. P[y/z][x/N]$, gdzie $x \in \text{FV}(P)$ i $y \in \text{FV}(N)$

przy czym w (S'7) wymagamy, aby zmienna z nie występowała wcześniej w termach N i P jako zmienna wolna, zaś dla (S'5)-(S'7) dodatkowo $y \neq x$.

Uwaga 1. Każde podstawienie $[x/N]$ jest funkcją z $\mathbf{\Lambda} \rightarrow \mathbf{\Lambda}$, gdzie $x \in V$ i $N \in \mathbf{\Lambda}$ są dowolnymi parametrami. Zbiór S podstawień ma strukturę monoidu z działaniem składania

$$M([x_2/N_2] \circ [x_1/N_1]) = (M[x_1/N_1])[x_2/N_2] \equiv M[x_1/N_1][x_2/N_2]$$

dla dowolnych $[x_1/N_1], [x_2/N_2] \in S$, o ile S posiada element neutralny ι taki, że

$$M\iota = M, \text{ gdzie } [x/x] = \iota \text{ dla dowolnego } x \in V.$$

W literaturze znajdujemy mnogość propozycji, które w ten czy inny sposób starają się ułatwić rzeczywistą implementację podstawienia. Na szczególną uwagę zasługują tutaj tak zwane *indeksy de Bruijna*. Zaproponowana przez N. G. de Bruijna w [Bru72] notacja eliminuje bezpośrednie występowanie symboli zmiennych w λ -termach, zastępując je liczbą naturalną wyrażającą głębokość zagnieżdżenia odpowiedniej λ -abstrakcji przez którą jest związana, przykładowo:

$$\lambda f. (\lambda x. (f(xx))\lambda x. (f(xx))) \equiv_{deBruijn} \lambda(\lambda 2(11))\lambda 2(11)$$

Historycznie wiąże się ta notacja z jego pracami nad systemem komputerowo wspomagane dowodzenia twierdzeń AUTOMATH. Rozwiązanie takie, podobnie jak w przypadku tzw. logik kombinatorów (np. rachunku SKI), eliminuje konieczność utożsamiania termów przez α -konwersję, ale istotnie zmniejsza ich czytelność.

Szerszy komentarz dotyczący dotychczasowych prób uchwycenia operacji podstawienia można prześledzić w [Alt02]. Nasze rozważania opierają się w tej materii przeważająco na [SU06]. Technika definiowania λ -termów jako klas α -konwersji są na ogół w literaturze pomijane.

Definicja 10. (Podstawienie jednoczesne) Dla dowolnego $M \in \mathbf{\Lambda}$, ciągu λ -zmiennych \vec{x} i ciągu λ -termów \vec{N} określamy:

$$(\vec{s}1) \ x_i[\vec{x}/\vec{N}] = N_i \text{ dla } i \in \mathbb{N}.$$

$$(\vec{s}2) \ y[\vec{x}/\vec{N}] = y \text{ o ile dla dowolnego } i \in \mathbb{N}, y \neq x_i.$$

$$(\vec{s}3) \ (PQ)[\vec{x}/\vec{N}] = P[\vec{x}/\vec{N}]Q[\vec{x}/\vec{N}]$$

$$(\vec{s}4) \ (\lambda y. P)[\vec{x}/\vec{N}] = \lambda y. P[\vec{x}/\vec{N}], \text{ jeśli } y \neq x_i \text{ dla wszystkich } i \in \mathbb{N} \text{ i } y \notin \bigcup_{i \in \mathbb{N}} \text{FV}(N_i)$$

Konwencja. Jeśli $N_i \equiv x_i$ dla wszystkich poza skończenie wieloma $i_1, i_2, \dots, i_n \in \mathbb{N}$, to $[x_{i_1}/N_{i_1}, x_{i_2}/N_{i_2}, \dots, x_{i_n}/N_{i_n}] \equiv [\vec{x}/\vec{N}]$.

Przykład 6. Zauważmy, że podstawienia w myśl Definicji 4 i Definicji 10 mogą, ale nie muszą, prowadzić do różnych rezultatów.

$$\begin{array}{ll} \text{a)} & (xy)[y/x][x/u] = uu, \\ & (xy)[y/x, x/u] = ux. \\ \text{b)} & (\lambda x. yx)[x/y][y/z] = \lambda x. zx, \\ & (\lambda x. yx)[x/y, y/z] = \lambda x. zx. \end{array}$$

1.2 Redukcja

Sens obliczeniowy λ -termom nadajemy przez określenie na Λ operacji β - i η -redukcji. Pożądane jest, żeby operacje te wykonywane na podtermach pozostawały w zgodzie ze strukturą całego λ -termu.

Definicja 11. (Relacja zgodna) Relację binarną \mathcal{R} na zbiorze Λ nazywamy *zgodną*, jeśli dla dowolnych $M, N, P \in \Lambda$ zachodzą następujące warunki:

- (c1) Jeśli $M\mathcal{R}N$, to $(\lambda x. M)\mathcal{R}(\lambda x. N)$ dla dowolnej λ -zmiennnej x .
- (c2) Jeśli $M\mathcal{R}N$, to $(MP)\mathcal{R}(NP)$.
- (c3) Jeśli $M\mathcal{R}N$, to $(PM)\mathcal{R}(PN)$.

Przez *domknięcie relacji* \mathcal{R}_1 będziemy rozumieli najmniejszą (w sensie mnogościowym) relację \mathcal{R}_2 taką, że $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$. Z pewnego rodzaju domknięciami, ze względu na ich szczególną rolę, wiążemy następującą notację:

- (a) Przez \mathcal{R}^+ oznaczamy przechodnie domknięcie relacji \mathcal{R} .
- (b) Przez \mathcal{R}^* oznaczamy zwrotnie domknięcie relacji \mathcal{R}^+ .
- (c) Przez $=_{\mathcal{R}}$ oznaczamy symetryczne domknięcie relacji \mathcal{R}^* .

Dla lepszego zrozumienia powyższych operacji warto zauważyć, że (b) wyznacza praporządek, który w odniesieniu do redukcji określonych na Λ można rozumieć jako graf skierowany (w przypadku Λ być może nieskończony) w którym krawędzie odpowiadają możliwym krokom obliczenia, zaś (c) – kongruencję, która znów w szczególnym odniesieniu do λ -termów, będzie dokonywała podziału w Λ ze względu na rezultat obliczenia.

Definicja 12. Niech \rightarrow będzie relacją binarną w zbiorze A .

(CR) Powiemy, że \rightarrow ma *własność Churcha-Rossera*, jeśli dla dowolnych $a, b, c \in A$ takich, że $a \rightarrow^* b$ oraz $a \rightarrow^* c$ istnieje $d \in A$ takie, że $b \rightarrow^* d$ i $c \rightarrow^* d$. Innymi słowy, przemienny jest diagram:



(WCR) Powiemy, że \rightarrow ma *słabą własność Churcha-Rossera*, jeśli dla dowolnych $a, b, c \in A$ takich, że $a \rightarrow b$ oraz $a \rightarrow c$ istnieje $d \in A$ takie, że $b \rightarrow^* d$ i $c \rightarrow^* d$. Innymi słowy, przemienny jest diagram:



Rysunek 1: Rozważmy graf skierowany, w którym krawędzie odpowiadają relacji \rightarrow w zbiorze $\{a, b, c, d\}$. Widzimy, że relacja \rightarrow ma własność WCR, ale nie ma własności CR.

Definicja 13. (Postać normalna) Powiemy, że $x \in A$ jest *redukowalny*, jeśli istnieje $y \in A$ takie, że $x \rightarrow y$. W przeciwnym wypadku powiemy, że x jest w *postaci normalnej* i będziemy pisali $x \in \text{NF}$.

Element $y \in A$ nazywamy *postacią normalną* $x \in A$, jeśli $x \rightarrow^* y$ i $y \in \text{NF}$. Jeśli y jest postacią normalną x i y jest jedyną postacią normalną x , to piszemy $x \downarrow y$. W przeciwnym wypadku, czyli jeśli istnieją $y, z \in \text{NF}, y \neq z$ takie, że $x \rightarrow^* y$ i $x \rightarrow^* z$, powiemy, że x jest *niejednoznaczny*.

Definicja 14. Niech \rightarrow będzie relacją binarną na zbiorze A .

(WN) Powiemy, że relacja \rightarrow jest *słabo normalizująca*, jeśli dla dowolnego $a \in A$ istnieje $a' \in \text{NF}$ taki, że $a \rightarrow^* a'$. W takim wypadku o $a \in A$ będziemy mówili, że jest *słabo normalizowalny* i pisali $a \in \text{WN}$.

(SN) Powiemy, że relacja \rightarrow jest *silnie normalizująca*, jeśli nie istnieje nieskończony ciąg relacji $a_0 \rightarrow a_1 \rightarrow a_2 \rightarrow \dots$. W takim wypadku o $a \in A$ będziemy mówili, że jest *silnie normalizowalny* i pisali $a \in \text{SN}$.

Twierdzenie 2. (Lemat Newmana) Niech \rightarrow będzie relacją binarną mającą własność SN. Jeśli \rightarrow ma własność WCR, to \rightarrow ma własność CR.

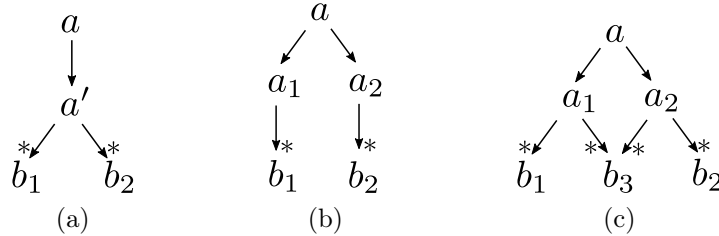
Dowód. Niech \rightarrow będzie relacją binarną na A o własności SN i WCR. Ponieważ \rightarrow jest SN, to każdy a jest normalizowalny.

Jeśli A nie zawiera elementów niejednoznacznych, to twierdzenie zachodzi w sposób trywialny. Przypuśćmy, że $a \in A$ jest niejednoznaczny. Twierdzimy, że istnieje $a' \in A$ taki, że $a \rightarrow a'$ i a' jest niejednoznaczny. Niech $b_1, b_2 \in \text{NF}$, $b_1 \neq b_2$ i $a \rightarrow^* b_1$ oraz $a \rightarrow^* b_2$. Ponieważ $b_1 \neq b_2$, to istnieją $a_1, a_2 \in A$ takie, że:

$$a \rightarrow a_1 \rightarrow^* b_1 \quad \text{oraz} \quad a \rightarrow a_2 \rightarrow^* b_2$$

Jeśli $a_1 = a_2$, to $a' = a_1 = a_2$ i wystarczy wybrać $a' = a_1$. Jeśli jednak $a_1 \neq a_2$, to z własności WCR istnieje $b_3 \in A$ taka, że $a_1 \rightarrow^* b_3$ oraz $a_2 \rightarrow^* b_3$. Z własności SN możemy przyjąć, że b_3 jest w postaci normalnej. Zachodzą więc dwa przypadki:

- i) $a_1 = a_2$. Wówczas wystarczy ustalić $a' = a_1$ albo $a' = a_2$ (Rysunek 2a).
- ii) $a_1 \neq a_2$ (Rysunek 2b). Wówczas z WCR istnieje $b_3 \in A$ takie, że $a_1 \rightarrow^* b_3$ oraz $a_2 \rightarrow^* b_3$ (Rysunek 2c). Przypuśćmy, że $b_3 \in \text{NF}$. Ponieważ $b_1 \neq b_3$, to $b_3 \neq b_1$ lub $b_3 \neq b_2$, zatem możemy wybrać $a' = a_1$ albo $a' = a_2$.



Rysunek 2: Warianty konstruowania redukcji.

Stosując powyższe rozumowanie do a' otrzymujemy kolejny element niejednoznaczny. a zatem możemy skonstruować nieskończony ciąg redukcji, wbrew założeniu, że relacja \rightarrow jest SN. Zatem A nie zawiera elementów niejednoznacznych. \square

Definicja 15. (β -redukcja) β -redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zgodną na Λ relację binarną \rightarrow_β taką, że

$$(\lambda x. M)N \rightarrow_\beta M[x/N].$$

β -redekami będziemy nazywali wyrażenia postaci $(\lambda x. M)N$, zaś rezultat ich β -redukcji w postaci termu $M[x/N]$ – β -reduktem. Przez \rightarrow_β^+ , \rightarrow_β^* , $=_\beta$ oznaczamy odpowiednie domknięcia relacji β -redukcji. Symbolem \leftarrow_β oznaczać będziemy relację odwrotną do β -redukcji, zaś przez \leftrightarrow_β jej symetryczne domknięcie.

Ciągiem β -redukcji nazywamy każdy skończony lub nieskończony ciąg λ -termów M_0, M_1, \dots taki, że $M_0 \rightarrow_\beta M_1 \rightarrow_\beta \dots$

Relację $=_\beta$ nazywamy β -konwersją. Zauważmy, że $M =_\beta N$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg λ -termów $M \equiv M_0, M_1, \dots, M_n \equiv N$ taki, że $M_i \rightarrow_\beta M_{i+1}$ lub $M_{i+1} \rightarrow_\beta M_i$ dla $0 \leq i < n$.

Przykład 7. Wszystkie pary λ -termów ze zbioru

$$\{(\lambda x. (\lambda y. yx) z) v, (\lambda y. yv) z, (\lambda x. zx) v, zv\}$$

są swoimi β -konwersami. Mamy:

$$\begin{aligned} (\lambda y. yv) z &\rightarrow_\beta zv \leftarrow_\beta (\lambda x. zx) v, \\ (\lambda y. yv) z &\leftarrow_\beta (\lambda x. (\lambda y. yx) z) v \rightarrow_\beta (\lambda x. zx) v. \end{aligned}$$

Lemat 2. Dla dowolnych $N, Q \in \mathbf{\Lambda}$, jeśli $N[y/Q] \in \text{SN}_\beta$, to $N \in \text{SN}_\beta$. Jeśli dodatkowo $y \in \text{FV}(N)$, to także $Q \in \text{SN}_\beta$.

Dowód. Dowód przeprowadzamy przez indukcję względem definicji 4'. □

Konwencja. Składnię rachunku λ często rozszerza się o wyrażenia let pozwalające konstruować β -redeksy w czytelny sposób. Rozszerzenie ma następującą postać:

$$\text{let } x=N \text{ in } M \equiv (\lambda x. M)N$$

Jest to przykład tzw. *cukru syntaktycznego*, czyli wtórnych rozszerzeń języka, które ułatwiają jego użycie. Wyrażenia let w których $M \equiv \lambda y. M'$ dla pewnego $M' \in \mathbf{\Lambda}$ nazywamy *domknięciami*¹ (ang. *closure*). Nieformalnie, pozwalają one na przypisywanie wartości zmiennym o tzw. *zakresie leksykalnym*.

Definicja 16. (Strategia redukcji) Strategią redukcji nazywamy każde odwzorowanie $S : \mathbf{\Lambda} \rightarrow \mathbf{\Lambda}$ postaci

$$S(M) = \begin{cases} M, & \text{jeśli } M \in \text{NF}_\beta, \\ M', & \text{jeśli } M \rightarrow_\beta M'. \end{cases}$$

Strategię S nazywamy *normalizującą*, jeśli dla każdego $M \in \text{WN}_\beta$ istnieje $i \in \mathbb{N}$ takie, że $F^i(M) \equiv \underbrace{F(F(\dots(F(M))\dots))}_{i\text{-razy}} \in \text{NF}_\beta$.

¹Idiom ten w literaturze poświęconej językom programowania z rodziny Lisp powszechnie występuje pod nazwą wyrażen *let-over-lambda*.

Przykład 8. (a) Oznaczmy $Y \equiv \lambda f. (\lambda x. (f(xx)) \lambda x. (f(xx)))$ i niech F będzie dowolnym λ -termem. Wówczas otrzymujemy nieskończony ciąg redukcji postaci

$$\begin{aligned}
YF &\equiv (\lambda f. (\lambda x. (f(xx)) \lambda x. (f(xx)))) F \\
&\rightarrow_{\beta} (\lambda x. F(xx)) \lambda x. F(xx) \\
&\rightarrow_{\beta} F((\lambda x. F(xx)) \lambda x. F(xx)) \\
&\rightarrow_{\beta} F(\underbrace{F((\lambda x. F(xx)) \lambda x. F(xx))}_{=_{\beta} YF}) \\
&\rightarrow_{\beta} \dots
\end{aligned}$$

Y nazywamy *kombinatorem punktu stałego*. Widzimy, że relacja β -redukcji w rachunku λ nie jest ani słabo, ani silnie normalizująca.

- (b) Niech $\Omega \equiv (\lambda x. xx)(\lambda x. xx)$. Ω jest β -redexem, którego redukcja prowadzi do ponownego otrzymania termu Ω i w konsekwencji do stałego ciągu redukcji postaci:

$$\Omega \rightarrow_{\beta} \Omega \rightarrow_{\beta} \Omega \rightarrow_{\beta} \dots$$

- (c) Niech $\Delta \equiv \lambda x. xxx$. Wówczas:

$$\Delta\Delta \rightarrow_{\beta} \Delta\Delta\Delta \rightarrow_{\beta} \Delta\Delta\Delta\Delta \rightarrow_{\beta} \dots$$

Ponownie, ponieważ każda redukcja powoduje wydłużenie termu, $\Delta\Delta$ nie ma postaci normalnej i w konsekwencji każdy powstały ciąg redukcji termu $\Delta\Delta$ jest nieskończony.

- (d) Redukcja λ -termu posiadającego więcej niż jeden redex może prowadzić do różnych (choć β -równoważnych) reduktów. Zależy to od wyboru strategii redukcji. Rozważmy następujący term: $(\lambda u. v) \Omega$. Konsekwentne redukowanie podtermu Ω prowadzić musi do niekończącego się stałego ciągu redukcji

$$(\lambda u. v) \Omega \rightarrow_{\beta} (\lambda u. v) \Omega \rightarrow_{\beta} \dots$$

Wybierając strategię polegającą na aplikacji Ω do $(\lambda u. v)$ otrzymujemy natychmiastowo redex w postaci normalnej.

Definicja 17. (η -redukcja) η -redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zgodną na Λ relację binarną \rightarrow_{η} taką, że

$$\lambda x. Mx \rightarrow_{\eta} M, \text{ o ile } x \notin \text{FV}(M).$$

η -redukcja pozwala na pominięcie niczego nie wnoszącej λ -abstrakcji. Operację odwrotną nazywamy η -abstrakcją, zaś λ -termy będące w którejkolwiek z tych relacji nazywamy η -konwersami. Operacja ta nie ma wpływu na rezultat obliczenia, jedynie optymalizuje zapis λ -termów i stąd ma duże znaczenie stylistyczne w programowaniu funkcyjnym.

Przykład 9. Przypuśćmy, że $(+1) \in \mathbf{\Lambda}$. Wówczas $\lambda x.((+1)x) =_{\eta} (+1)$.

Widzieliśmy, że β -redukcja może prowadzić do uzyskania rezultatu lub nie. Fakt 1 i następujące po nim Wniosek 3 i Wniosek 4 stwierdzają, że jeśli tylko mamy pewność, że λ -term ma postać normalną, to jest ona wyznaczona jednoznacznie i doprowadzi nas do niej każda strategia normalizująca. Fakt 1 to klasyczne twierdzenie, którego dowód można znaleźć w [Bar84, Rozdział 3.2] i ze względu na jego obszerność pozwalamy sobie go pominąć.

Fakt 1. (*Twierdzenie Churcha-Rossera*). β -redukcja ma własność CR.

Wniosek 3. Jeśli $M =_{\beta} N$, to istnieje $L \in \mathbf{\Lambda}$ takie, że $M \rightarrow_{\beta}^* L$ i $N \rightarrow_{\beta}^* L$.

Dowód. Niech $M, N \in \mathbf{\Lambda}$ będą takie, że $M =_{\beta} N$. Wówczas istnieje ciąg λ -termów $M_0, M_1, \dots, M_{n-1}, M_n$ taki, że

$$M_0 \leftrightarrow_{\beta} M_1 \leftrightarrow_{\beta} \dots \leftrightarrow_{\beta} M_{n-1} \leftrightarrow_{\beta} M_n,$$

gdzie $M_0 \equiv M$ i $M_n \equiv N$. Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem n . Rozważmy następujące przypadki:

- (1) Jeśli $n = 0$, to $M \equiv N$. Ustalając $L \equiv M (\equiv N)$ w oczywisty sposób $M \rightarrow_{\beta}^* L$ i $N \rightarrow_{\beta}^* L$.
- (2) Jeśli $n = k > 0$, to istnieje $M_{k-1} \in \mathbf{\Lambda}$ takie, że

$$M \equiv M_0 \leftrightarrow_{\beta} M_1 \leftrightarrow_{\beta} \dots \leftrightarrow_{\beta} M_{k-1} \leftrightarrow_{\beta} M_k \equiv N$$

Z założenia indukcyjnego wiemy, że istnieje $L' \in \mathbf{\Lambda}$ takie, że $M_0 \rightarrow_{\beta}^* L'$ i $M_{k-1} \rightarrow_{\beta}^* L'$. Ponieważ \leftrightarrow_{β} jest symetryczna, rozważmy osobno przypadki $M_{k-1} \rightarrow_{\beta} M_k$ i $M_k \rightarrow_{\beta} M_{k-1}$.

- (a) Jeśli $M_{k-1} \rightarrow_{\beta} M_k$, to tym bardziej $M_{k-1} \rightarrow_{\beta}^* M_k$. Ponieważ $M_{k-1} \rightarrow_{\beta}^* L'$, to korzystając Faktu 1 wnosimy, że istnieje $L \in \mathbf{\Lambda}$ taki, że $L' \rightarrow_{\beta}^* L$ i $M_k \rightarrow_{\beta}^* L$, czyli

$$\begin{array}{ccccc} M_0 & \longleftrightarrow & \dots & \longleftrightarrow & M_{k-1} & \longrightarrow & M_k \\ & \searrow^* & & \swarrow^* & & & \downarrow^* \\ & & L' & \xrightarrow{*} & & & L \end{array}$$

- (b) Jeśli $M_k \rightarrow_\beta M_{k-1}$, to ponieważ $M_{k-1} \rightarrow_\beta^* L'$, natychmiast otrzymujemy, że $M_k \rightarrow_\beta^* L'$. Ustalając $L \equiv L'$ otrzymujemy tezę.

□

Wniosek 4. (1) Jeśli N to postać normalna M , to $M \rightarrow_\beta^* N$.

(2) Każdy λ -term ma co najwyżej jedną postać normalną.

Dowód. (1) Przypuśćmy, że $N \in \text{NF}_\beta$ i $M =_\beta N$. Wówczas z Wniosku 3 istnieje L takie, że $M \rightarrow_\beta^* L$ i $N \rightarrow_\beta^* L$. Ponieważ $N \in \text{NF}_\beta$ i $N \rightarrow_\beta^* L$, to $N \equiv L$. Ponieważ $M \rightarrow_\beta^* L$, to $M \rightarrow_\beta^* N$.

(2) Przypuśćmy, że M ma dwie różne postaci normalne, N_1, N_2 . Wówczas z części (1) tego twierdzenia, $M \rightarrow_\beta^* N_1$ i $M \rightarrow_\beta^* N_2$. Z Faktu 1 istnieje $L \in \Lambda$ taki, że $N_1 \rightarrow_\beta^* L$ i $N_2 \rightarrow_\beta^* L$. Ponieważ $N_1, N_2 \in \text{NF}_\beta$, to $N_1 \equiv L \equiv N_2$.

□

1.3 Model Scotta D_∞

Wprowadzenie Ustalmy wpierw, że nie możemy naiwnie interpretować λ -termów jako funkcji i aplikacji argumentów do funkcji. Przypuśćmy bowiem, że w pewnej interpretacji $\llbracket M \rrbracket = f_M$, gdzie $f_M \in A \rightarrow B$ dla pewnych zbiorów A i B . Wówczas $\llbracket MM \rrbracket = f_M(f_M)$, a zatem $f_M \in A$. Oznacza to, że funkcja f_M jest elementem swojej własnej dziedziny, czyli istnieje nieskończony zstępujący ciąg zbiorów

$$A \times f(A) \supset A \times f(A) \times f(A) \supset A \times f(A) \times f(A) \times f(A) \supset \dots$$

Istnienie takiego ciągu narusza aksjomat ufundowania na gruncie aksjomatyki ZF, a to wyklucza możliwość określenia takich modeli.

Rozwiązanie Scotta polega na tym, aby zamiast próbować interpretować termy jako funkcje, przypisać im nieskończone ciągi funkcji postaci

$$\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots),$$

gdzie $\varphi \in D_\infty$ i $\varphi_n \in D_n$. Określając na takiej strukturze aplikację następująco

$$\varphi \bullet \psi = (\varphi_1(\psi_0), \varphi_2(\psi_1), \varphi_3(\psi_2), \dots),$$

widzimy, że samoaplikacja jest poprawnie określona:

$$\varphi \bullet \varphi = (\varphi_1(\varphi_0), \varphi_2(\varphi_1), \varphi_3(\varphi_2), \dots).$$

W rozdziale tym przybliżymy konstrukcję modelu Scotta D_∞ zgodnie z [HS08, Rozdział 16]. Ze względu na obszerność materiału zaprezentujemy wyłącznie konstrukcję modelu bezsyntaktycznego (ang. *syntax-free*).

Definicja 18 (Struktura aplikatywna). Parę (D, \bullet) , gdzie D jest zbiorem zawierającym przynajmniej dwa elementy i w którym symbol \bullet oznacza działanie binarne na D , nazywamy *strukturą aplikatywną*.

Konwencja. Ponieważ nie zakładamy, że działanie \bullet jest łączne, to celem ograniczenia ilości nawiasów przyjmijmy, że $a \bullet b \bullet c \bullet d \equiv ((a \bullet b) \bullet c) \bullet d$.

Definicja 19 (Ekstensjonalna równoważność). Niech (D, \bullet) będzie strukturą aplikatywną i niech $a, b \in D$. Określamy relację:

$$a \sim b \iff \forall d \in D (a \bullet d = b \bullet d).$$

Powiemy, że a jest *ekstensjonalnie równoważne* b , jeśli $a \sim b$.

Definicja 20. 1. Powiemy, że term M jest *kombinacją zmiennych*, jeśli $M \equiv x$ dla pewnej zmiennej x albo $M \equiv (PQ)$ dla pewnych kombinacji zmiennych P i Q .

2. Niech M będzie kombinacją zmiennych taką, że $FV(M) = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$. Względem M określamy funkcję $f_M : D^n \rightarrow D$ następującym wzorem:

$$f_M(d_1, d_2, \dots, d_n) = \begin{cases} d_k, & \text{jeśli } M \equiv x_k, \\ f_Q(d_1, d_2, \dots, d_n) \bullet f_P(d_1, d_2, \dots, d_n), & \text{jeśli } M \equiv (PQ). \end{cases}$$

3. Powiemy, że struktura aplikatywna (D, \bullet) jest *kombinatorycznie zupełna*, jeśli dla każdej kombinacji zmiennych M istnieje $a_M \in D$ taki, że dla wszystkich $d_1, d_2, \dots, d_n \in D$

$$a_M \bullet d_1 \bullet d_2 \bullet \dots \bullet d_n = f_M(d_1, d_2, \dots, d_n).$$

Definicja 21 (Model bezsyntaktyczny). Modelem bezsyntaktycznym rachunku λ nazywamy trójkę (D, \bullet, Λ) , gdzie $\mathbb{D} = (D, \bullet)$ jest strukturą aplikatywną, $\Lambda : D \rightarrow D$ i spełnione są poniższe własności:

- (a) \mathbb{D} jest kombinatorycznie zupełny.
- (b) $\Lambda(a) \sim a$ dla wszystkich $a \in D$.
- (c) Jeśli $a \sim b$, to $\Lambda(a) = \Lambda(b)$ dla wszystkich $a, b \in D$.
- (d) $\Lambda(a) = e \bullet a$ dla pewnego $e \in D$ i wszystkich $a \in D$.

Elementy teorii porządku Niech (D, \sqsubseteq) będzie zbiorem częściowo uporządkowanym. Powiemy, że $b \in D$ jest elementem *najmniejszym*, jeśli $b \sqsubseteq d$ dla wszystkich $d \in D$. Element ten, o ile istnieje, wyznaczony jest jednoznacznie i będziemy oznaczać go symbolem \perp . Niech $X \subset D$. *Ograniczeniem górnym* X nazywamy element $u \in D$ taki, że $x \sqsubseteq u$ dla wszystkich $x \in X$. *Kres górny* zbioru X nazywamy element $\ell \in D$ taki, że ℓ jest ograniczeniem górnym X i $\ell \sqsubseteq u$ dla wszystkich ograniczeń górnych u zbioru X . Element taki, o ile istnieje, będziemy oznaczali symbolem $\sqcup X$. Podzbiór $X \subset D$ nazywamy *skierowanym*, jeśli $X \neq \emptyset$ i dla dowolnych $x, y \in X$ istnieje $z \in X$ taki, że $x \sqsubseteq z$ i $y \sqsubseteq z$.

Definicja 22 (Zupełny porządek częściowy). Porządek częściowy (D, \sqsubseteq) taki, że

- (a) posiada element najmniejszy oraz
- (b) każdy skierowany podzbiór $X \subset D$ ma kres górny,

nazywamy *zupełnym porządkiem częściowym* (w skrócie: *cpo*).

Ustalmy, że jeśli D', D'', \dots są cpo, to odpowiadające im porządki częściowe będziemy notowali symbolami $\sqsubseteq', \sqsubseteq'', \dots$

Przykład 10. Ustalmy $\perp \notin \mathbb{N}$ i niech $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \cup \perp$. Określmy na \mathbb{N}^+ następującą relację:

$$a \sqsubseteq b \iff (a = \perp \wedge b \in \mathbb{N}) \vee a = b$$

\sqsubseteq jest oczywiście zwrotna, przechodnia i antysymetryczna. Widzimy, że \mathbb{N}^+ ma względem niej element najmniejszy (jest nim \perp) i oczywiście każdy podzbiór \mathbb{N}^+ jest skierowany.

Definicja 23 (Monotoniczność, ciągłość). Niech D i D' będą cpo i $\varphi : D \rightarrow D'$.

- (a) Powiemy, że φ jest *monotoniczna*, jeśli $\varphi(a) \sqsubseteq' \varphi(b)$ dla $a \sqsubseteq b$.
- (b) Powiemy, że φ jest *ciągła* (w sensie Scotta²), jeśli $\varphi(\sqcup X) = \sqcup \varphi(X)$ dla wszystkich skierowanych podzbioru $X \subseteq D$.

Symbolem $[D \rightarrow D']$ oznaczamy zbiór wszystkich funkcji ciągłych ze zbioru D do D' .

Uwaga. Zauważmy, że jeśli φ jest ciągła, to jest również monotoniczna. Istotnie, jeśli $a \sqsubseteq b$, to w szczególności $\{a, b\} \subseteq D$ jest skierowanym podzbiorem D . Wówczas $\sqcup \{a, b\} = b$ i ponieważ $\sqcup \varphi(\{a, b\}) = \varphi(\sqcup \{a, b\})$, to otrzymujemy, że $\varphi(a) \sqsubseteq \varphi(\sqcup \{a, b\}) = \varphi(b)$.

Twierdzenie 3. Jeśli D i D' są cpo, to $[D \rightarrow D']$ jest cpo.

²Funkcje te są ciągłe w topologicznym sensie względem topologii Scotta.

Dowód. Określmy na $[D \rightarrow D']$ relację \leq :

$$\varphi \leq \psi \iff \forall d \in D (\varphi(d) \sqsubseteq' \psi(d)),$$

Ponieważ D' jest cpo, to aby wykazać, że $[D \rightarrow D']$ ma element najmniejszy, wystarczy, że rozpatrzymy $\perp(d) = \perp'$ dla $d \in D$.

Niech teraz Φ będzie skierowanym podzbiorem $[D \rightarrow D']$. Wówczas dla wszystkich $d \in D$ zbiór $\{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\}$ jest skierowanym podzbiorem D' .

Istotnie, wybierzmy $y_1, y_2 \in \{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\}$. Wówczas dla pewnych $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ mamy, że $y_1 = \varphi_1(d)$ oraz $y_2 = \varphi_2(d)$. Ponieważ Φ jest skierowany, to istnieje φ_3 taki, że $\varphi_1 \sqsubseteq \varphi_3$ i $\varphi_2 \sqsubseteq \varphi_3$. Z monotoniczności funkcji ciągłych i faktu, że $d \sqsubseteq d$ widzimy, że $\{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\}$ jest skierowanym podzbiorem D' . Ponieważ zaś D' jest cpo, to dla każdego $d \in D$ istnieje kres górny $\{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\}$. Określmy więc funkcję $\Psi_\Phi : D \rightarrow D'$ następującym wzorem:

$$\Psi_\Phi(d) = \bigsqcup \Phi d,$$

gdzie $\Phi d = \{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\}$. Wystarczy teraz pokazać, że Ψ_Φ jest ciągła i jest kresem górnym zbioru Φ .

1. Pokażemy najpierw, że Ψ_Φ jest ciągła. Niech X będzie dowolnym skierowanym podzbiorem D . Wówczas:

$$\begin{aligned} \Psi_\Phi(\bigsqcup X) &= \bigsqcup \Phi(\bigsqcup X) \\ &= \bigsqcup \{\varphi(\bigsqcup X) \mid \varphi \in \Phi\} \\ &= \bigsqcup \{\bigsqcup \{\varphi(d) \mid d \in X\} \mid \varphi \in \Phi\} \\ &= \bigsqcup \left\{ \bigcup_{\varphi \in \Phi} \{\varphi(d) \mid d \in X\} \right\} \\ &= \bigsqcup \left\{ \bigcup_{\varphi \in \Phi} \bigcup_{d \in X} \{\varphi(d)\} \right\} = \bigsqcup \left\{ \bigcup_{d \in X} \bigcup_{\varphi \in \Phi} \{\varphi(d)\} \right\} \\ &= \bigsqcup \left\{ \bigcup_{d \in X} \{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\} \right\} \\ &= \bigsqcup \{\bigsqcup \{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\} \mid d \in X\} \\ &= \bigsqcup \{\bigsqcup \Phi d \mid d \in X\} = \bigsqcup \Psi_\Phi(X). \end{aligned}$$

2. Φ jest ograniczony w $[D \rightarrow D']$. Istotnie, przypuśćmy, że dla dowolnego $f \in [D \rightarrow D']$ istnieje $g \in \Phi$ taki, że $f \leq g$. Wówczas w szczególności $\Psi_\Phi \leq g$ i stąd również

$$\bigsqcup \Phi d \sqsubseteq' g(d) \quad \text{dla wszystkich } d \in D.$$

Ponieważ $g \in \Phi$, to $g(d) \subseteq \sqcup \{g(d) \mid g \in \Phi\} = \sqcup \Phi d$. Zatem Ψ_Φ jest ograniczeniem górnym Φ .

Przypuśćmy teraz, że Φ nie ma kresu górnego. Wówczas dla dowolnego ograniczenia górnego f zbioru Φ istnieje g takie, że $g \leq f$ i które jest również ograniczeniem górnym. Wówczas w szczególności mamy, że $g \leq \Psi_\Phi$, czyli dla dowolnego $d \in D$

$$g(d) \subseteq' \sqcup \Phi d \in D'.$$

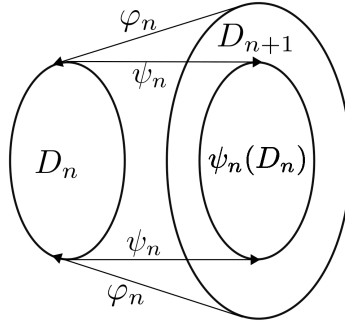
Ale $\sqcup \Phi d$ jest kresem górnym Φd (wykazaliśmy bowiem, że Φd jest skierowany, zaś D' jest cpo), a zatem $g(d)$ nie może być ograniczeniem Φd . Istnieje stąd $z \in \Phi d$ taki, że $g(d) \subseteq' z$. Wówczas istnieje $\tilde{\varphi} \in \Phi$ taki, że $z = \tilde{\varphi}(d)$ oraz $g(d) \subseteq' \tilde{\varphi}(d)$. Z dowolności d mamy, że $g \leq \tilde{\varphi}$. Zatem g nie jest ograniczeniem górnym Φ , co jest sprzeczne z założeniem. Stąd Ψ_Φ musi być kresem górnym Φ . \square

Wniosek 5. Dla danego cpo D_0 możemy skonstruować ciąg cpo $\{D_n\}_{n=0}^\infty$ określając $D_{n+1} = [D_n \rightarrow D_n]$ dla $n \geq 0$. Tak określony ciąg dla $D_0 = \mathbb{N}^+$ (patrz Przykład 10) nazywamy modelem Scotta.

Definicja 24 (Projekcja). Niech D i D' będą cpo. Projekcją z D' do D nazywamy parę (φ, ψ) funkcji $\varphi \in [D \rightarrow D']$, $\psi \in [D' \rightarrow D]$ takich, że

$$\psi \circ \varphi = I_D \quad \text{oraz} \quad \varphi \circ \psi \leq I_{D'} \quad (2)$$

gdzie przez I_D i $I_{D'}$ oznaczamy funkcję identycznościową na zbiorze D i D' , odpowiednio.



Rysunek 3: Projekcja (φ_n, ψ_n) z D_{n+1} do D_n

Okazuje się, że ciąg cpo $\{D_n\}_{n=0}^\infty$ skonstruowany w myśl Wniosku 5 można określić definiując dla każdego $n \in \mathbb{N}$ projekcję (φ_n, ψ_n) z D_{n+1} do D_n . Istotnie,

spróbujemy skonstruować taką rodzinę projekcji. Wybierzmy $d \in D_0$ i niech κ_d oznacza funkcję stałą

$$\kappa_d(c) = d \quad \text{dla wszystkich } c \in D_0.$$

Określmy $D_1 = [D_0 \rightarrow D_0]$. Ponieważ κ_d jest funkcją ciągłą, to $\kappa_d \in D_1$. Niech teraz

$$\begin{aligned} \varphi_0(d) &= \kappa_d \quad \text{dla wszystkich } d \in D_0, \\ \psi_0(c) &= c(\perp_0) \quad \text{dla wszystkich } c \in D_1, \end{aligned}$$

gdzie \perp_0 jest elementem najmniejszym D_0 . Widzimy, że $\varphi_0 : D_0 \rightarrow D_1$ i $\psi_0 : D_1 \rightarrow D_0$. Funkcje φ_0 i ψ_0 są ciągłe, zaś $\psi_0 \circ \varphi_0 = I_{D_0}$ (dowód pomijamy), zatem (φ_0, ψ_0) jest projekcją z D_1 do D_0 .

Dla $n > 0$ określamy teraz $\varphi_n : D_n \rightarrow D_{n+1}$ i $\psi_{n+1} : D_{n+1} \rightarrow D_n$ następującym wzorem:

$$\begin{aligned} \varphi_n(\sigma) &= \varphi_{n-1} \circ \sigma \circ \psi_{n-1} \quad \text{dla } \sigma \in D_n, \\ \psi_n(\tau) &= \psi_{n-1} \circ \varphi_{n-1} \quad \text{dla } \tau \in D_{n+1} \end{aligned}$$

Wówczas $\varphi_n \in [D_n \rightarrow D_{n+1}]$, $\psi_n \in [D_{n+1} \rightarrow D_n]$ i $\psi_n \circ \varphi_n = I_{D_n}$ oraz $\varphi_n \circ \psi_n \leq I_{D_{n+1}}$. [HS08, Lemat 16.28]. A zatem (φ_n, ψ_n) jest projekcją z D_{n+1} do D_n .

Ponieważ projekcje (φ_n, ψ_n) przenoszą nas tylko pomiędzy następującymi po sobie cpo w ciągu $\{D_n\}_{n=0}^\infty$, (Rysunek 3) określamy następujące złożenie pozwalające na projekcje między dowolnymi dwoma wyrazami ciągu.

Definicja 25. Dla $m, n \geq 0$ określamy $\varphi_{mn} : D_m \rightarrow D_n$ w następujący sposób:

$$\varphi_{mn} = \begin{cases} \varphi_{n-1} \circ \varphi_{n-2} \circ \dots \circ \varphi_{m+1} \circ \varphi_m, & \text{jeśli } m \leq n, \\ I_{D_n}, & \text{jeśli } m = n, \\ \psi_n \circ \psi_{n+1} \circ \dots \circ \psi_{m-2} \circ \psi_{m-1} & \text{jeśli } m \geq n. \end{cases}$$

Ponieważ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ para (φ_n, ψ_n) jest projekcją z D_{n+1} do D_n , to zachodzi następujący fakt.

Fakt 2 ([HS08, p. 16.33]). *Niech $m, n \geq 0$. Wówczas*

- (i) $\varphi_{mn} \in [D_m \rightarrow D_n]$,
- (ii) jeśli $m \leq n$, to $\varphi_{nm} \circ \varphi_{mn} = I_{D_m}$,
- (iii) jeśli $m > n$, to $\varphi_{nm} \circ \varphi_{mn} \leq I_{D_m}$,
- (iv) jeśli $m < n$, to $(\varphi_{mn}, \varphi_{nm})$ jest projekcją z D_n do D_m ,
- (v) jeśli $m < k < n$ lub $n < k < m$, to $\varphi_{kn} \circ \varphi_{mk} = \varphi_{mn}$.

Konstrukcja D_∞ Mając zadane dwa cpo D, D' możemy zapytać czy istnieje włożenie jednego z nich w drugi. Zauważmy, że jeśli φ, ψ jest projekcją z D' do D , to ϕ jest włożeniem D w D' (w sensie topologii Scotta). Ciąg $\{D_n\}_{n=0}^\infty$ intuicyjnie przypomina więc wstępujący ciąg zbiorów.

Definicja 26. Niech D_∞ oznacza zbiór wszystkich nieskończonych ciągów postaci

$$d = (d_0, d_1, \dots)$$

takich, że dla wszystkich $n \geq 0$ mamy, że $d_n \in D_n$ oraz $\psi_n(d_{n+1}) = d_n$. Na zbiorze D_∞ określamy relację \sqsubseteq w następujący sposób:

$$(d_0, d_1, \dots) \sqsubseteq (d'_0, d'_1, \dots) \iff \forall n \geq 0 (d_n \sqsubseteq d'_n)$$

Przez d_n oznaczać będziemy n -ty element ciągu d . Jeśli $X \subset D_\infty$, to określamy $X_n = \{d_n \mid d \in X\}$.

Przy powyższym określeniu D_∞ okazuje się być cpo.

Fakt 3 ([HS08, p. 16.36]). (i) D_∞ jest cpo.

(ii) D_∞ zawiera element najmniejszy $\perp = (\perp_0, \perp_1, \dots)$, gdzie przez \perp_n oznaczamy najmniejszy element D_n .

(iii) Kres górny każdego skierowanego zbioru $X \subset D_\infty$ ma postać

$$\bigsqcup X = (\bigsqcup X_0, \bigsqcup X_1, \dots)$$

Dodatkowo, określamy projekcję z D_∞ do D_n dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wymaga to oczywiście dowodu (patrz Fakt 4(i)), który pomijamy.

Definicja 27 (D_∞). Dla $n \geq 0$ określamy funkcje $\varphi_{n\infty} : D_n \rightarrow D_\infty$ oraz $\varphi_{\infty n} : D_\infty \rightarrow D_n$, gdzie

$$\begin{aligned} \varphi_{n\infty}(d) &= (\varphi_{n0}(d), \varphi_{n1}(d), \dots) \text{ dla } d \in D_n, \\ \varphi_{\infty n}(d) &= d_n. \end{aligned}$$

Określona para funkcji spełnia poniższy szereg własności.

Fakt 4 ([HS08, pp. 16.38, 16.39, 16.42]). Niech $m, n \geq 0$, $m \leq n$ i $a, b \in D_\infty$. Wówczas:

- (i) $(\varphi_{n\infty}, \varphi_{\infty n})$ jest projekcją z D_∞ do D_n ,
- (ii) $\varphi_{mn}(a_m) \sqsubseteq a_n$,
- (iii) $\varphi_{m\infty}(a_m) \sqsubseteq \varphi_{n\infty}(a_n)$,

$$(iv) \ a = \sqcup_{n \geq 0} \varphi_{n\infty}(a_n),,$$

$$(v) \ \varphi_{n\infty}(a_{n+1}(b_n)) \sqsubseteq \varphi_{(n+1)\infty}(a_{n+2}(b_{n+1})).$$

Zauważmy, że $\varphi_{n\infty}$ jest izomorficznym włożeniem D_n w D_∞ . Oznacza to, że każdy element $a \in D_n$ możemy utożsamiać z odpowiednim $\varphi_{n\infty}(a) \in D_\infty$. Biorąc $a \in D_\infty$ i stosując tę odpowiedniość jako konwencję notacyjną, na podstawie 4(iii) mamy, że

$$a_0 \sqsubseteq a_1 \sqsubseteq a_2 \sqsubseteq a_3 \sqsubseteq \dots,$$

zaś na podstawie 4(iv):

$$a = \sqcup \{a_0, a_1, a_2, a_3, \dots\}.$$

Zatem wyrazy $a_0, a_1, a_2, a_3, \dots$ możemy traktować jako kolejne przybliżenia elementu a . Zauważmy, że na podstawie Faktu (v) ciąg ten jest zawsze rosnący. Traktując nieformalnie D_∞ jako pewną przestrzeń informacji i w niej: element \perp jako brak informacji, zaś relację \sqsubseteq odczytując jako „więcej informacji”, kolejne przybliżenia możemy odczytać jako proces poznawczy prowadzący do stanu pełnej informacji o jakimś fakcie.

Fakty 4(iv) i 4(v) sugerują metodę określenia struktury aplikatywnej na D . Przypuśćmy bowiem, że $a, b \in D_\infty$. Wówczas dla każdego $n \in \mathbb{N}$ wyrazy a_n i b_n są przybliżeniami a i b , odpowiednio. Ponieważ $a_{n+1} \in D_{n+1} = [D_n \rightarrow D_n]$, to $a_{n+1}(b_n)$ jest określony. A zatem $a_{n+1}(b_n)$ jest pewnym przybliżeniem aplikacji a do b . Widzimy jednocześnie, że rozwiązuje to problem samoaplikacji wymieniony na wstępie.

Definicja 28. Dla $a, b \in D_\infty$ określamy:

$$a \bullet b = \sqcup \{\varphi_{n\infty}(a_{n+1}(b_n)) \mid n \geq 0\}$$

Zauważmy, że na podstawie Faktu 4(v) D_∞ jest łańcuchem, a zatem zbiorem skierowanym. Ponieważ D_∞ jest cpo, to supremum takiego zbioru zawsze istnieje. Zatem działanie \bullet jest poprawnie określone. Dowód, że operacja ta nie wyprowadza poza zbiór funkcji ciągłych pomijamy.

Podamy teraz następujące Fakty:

Fakt 5 ([HS08, p. 14.29]). *Struktura aplikatywna (D, \bullet) jest kombinatorycznie zupełna wtedy i tylko wtedy, gdy istnieją takie $k, s \in D$, że dla wszystkich $a, b, c \in D$ mamy:*

$$k \bullet a \bullet b = a \quad \text{oraz} \quad s \bullet a \bullet b \bullet c = a \bullet c \bullet (b \bullet c).$$

Fakt 6 ([HS08, p. 15.30]). *Niech (D, \bullet) będzie kombinatorycznie zupełną strukturą aplikatywną taką, że dla dowolnych $a, b \in D$ jeśli $a \sim b$, to $a = b$. Określmy $\Lambda(a) = a$ dla wszystkich $a \in D$. Wówczas (D, \bullet, Λ) jest modelem bezsyntaktycznym.*

Określmy teraz:

$$\begin{aligned} k &= (\perp_0, I_{D_0}, k_2, k_3, \dots), \\ s &= (\perp_0, I_{D_0}, \psi_2(s_3), s_3, s_4, \dots). \end{aligned}$$

Okazuje się [HS08, Tw. 16.51, 16.53], że $k, s \in D_\infty$ oraz, że dla dowolnych $a, b, c \in D_\infty$ mamy

$$k \bullet a \bullet b = a \quad \text{oraz} \quad s \bullet a \bullet b \bullet c = a \bullet c \bullet (b \bullet c).$$

1.4 Kodowanie typów danych

Prosta składnia języka rachunku λ pozwala wyrazić zaskakująco wiele struktur danych reprezentując je i operacje na nich jako funkcje. Z tego powodu, stanowiąc inspirację dla wielu projektantów języków programowania, uchodzi za protoplastę rodziny języków funkcyjnych, chociaż bezpośrednio nie ma on praktycznego zastosowania w praktyce programistycznej. Rozwój tej legendy dobrze oddaje cykl klasycznych artykułów (tzw. *Lambda Papers*) zapoczątkowany przez dokumentację języka Scheme [SS75].

Najpopularniejszym sposobem reprezentacji danych przez funkcje w rachunku λ oparty jest na kodowaniu liczb Peano za pomocą tzw. liczebników Churcha. Metoda ta, ze względu na wynikające z niej problemy natury złożonościowej [KPJ14], ma obecnie wyłącznie walory edukacyjne, dlatego w dalszej części pracy pokażemy tzw. kodowanie Scotta. Jest ona interesująca ze względu na praktyczną możliwość reprezentacji algebraicznych typów danych (ADT³) znanych ze współczesnych języków funkcyjnych [Jan13], pozwalając tym samym zaimplementować te konstrukcje na przykład w paradygmacie imperatywnym. Fakt, że każdy typ danych można zastąpić tym sposobem odpowiadającą mu funkcją, wskazuje na metodę konstruowania prostych języków funkcyjnych [JKP06] oraz na uniwersalność rachunku λ jako języka przejściowego dla kompilatorów języków funkcyjnych [PL92, Rozdział 3].

1.4.1 Algebraiczne typy danych

Algebraiczne typy danych są podstawowym środkiem służącym do określania struktur danych współczesnych funkcyjnych językach programowania. Na potrzeby prezentacji poszczególnych kodowań posłużymy się intuicjami o ADT zbudowanymi na gruncie następujących definicji w języku Haskell:

³Skrót od angielskojęzycznego *Algebraic Data Types*; nie należy mylić z *Abstract Data Types*.


```

data Boolean      = True
                  | False
data Tuple a b    = Tuple a b
data Temperature = Fahrenheit Int
                  | Celsius Int
data Maybe a      = Nothing
                  | Just a
data Nat          = Zero
                  | Succ Nat
data List t       = Nil
                  | Cons t (List t)

```

Definicja typu rozpoczyna się od słowa kluczowego `data`⁴ po którym występuje *konstruktor typu*. Na wzór notacji BNF, typy przyjmują jedną z *wartości* oddzielonych znakiem "|". Każda z wartości składa się z *konstruktora wartości* i ewentualnie występujących po nim *parametrów typowych*. Zauważmy, że umożliwia to rekurencyjnie konstruowanie typów, tak jak w wypadku `Nat` i `List`.

Pokażemy, że algebraiczne typy danych możemy reprezentować w zwięzły sposób w rachunku λ bez typów. Przedstawione tutaj koncepcje w zaskakujący sposób przenoszą się do bardziej złożonych typowanych systemów rachunku λ .

1.4.2 Proste typy wyliczeniowe

Typy wyliczeniowe to typy, które reprezentują możliwe warianty przyjmowanej wartości. Najprostrzym nietrywialnym przykładem takiego typu jest `Boolean`. Ma on dwa konstruktory wartości: `True`, `False`. Praca z tego rodzaju typami wymaga mechanizmu dopasowywania wzorców (ang. *pattern-matching*) [PL92, Rozdział IV], który pozwala na wybór częściowej definicji funkcji w zależności od zadanego konstruktora wartości. Ponieważ w rachunku λ wyrażenia nie mają typów (lub, przyjmując perspektywę systemów z typami: wszystkie wyrażenia mają jeden, ten sam typ), interesowało nas będzie nie bezpośrednio kodowanie typu, ale kodowanie mechanizmu, który odpowiada za dopasowywanie wzorców. Posłużmy się znowu przykładem z języka Haskell i określmy funkcję odpowiadającą wykonaniu instrukcji warunkowej:

```

if True  a b = a
if False a b = b

```

gdzie `True` i `False` są wartościami typu `Boolean`. Właśnie ze względu na nie, mechanizm dopasowywania wzorca wybiera odpowiednią implementację instrukcji

⁴Dyskusja ta ma na celu wyłącznie ustalenie uwagi; świadomi jesteśmy niuansów związanych z określaniem synonimów typów lub definiowaniem typów przy pomocy słowa kluczowego `newtype`.

warunkowej. Ten sam efekt osiągnęlibyśmy kodując `True` i `False` w rachunku λ w następujący sposób:

$$\text{True} \equiv \lambda ab. a$$

$$\text{False} \equiv \lambda ab. b$$

Wówczas funkcję `if` możemy reprezentować wyrażeniem $\text{if} \equiv \lambda cte. cte$ lub jego η -reduktem: $\lambda c. c$.

1.4.3 Pary w rachunku λ

Parą nazywamy każdy nierekurencyjny typ, który posiada jeden konstruktor wartości parametryzowany przez dwa typy. W takim wypadku potrzebujemy dwóch projekcji zwracających odpowiednio pierwszy i drugi element pary. Przykładem takiego typu jest `Tuple`. Mamy wówczas:

$$\text{fst } (\text{Tuple } a \ b) = a$$

$$\text{snd } (\text{Tuple } a \ b) = b$$

Tego rodzaju typy możemy reprezentować przez domknięcie. Standardowym sposobem reprezentacji pary w rachunku λ jest:

$$\text{Tuple} \equiv \lambda abf. fab$$

Używając wyrażen let, powyższą reprezentację możemy przepisać w postaci:

$$\text{let } a = a \ b = b \text{ in } f$$

Aplikując `Tuple` tylko do dwóch termów (*domykając* term `Tuple`) otrzymujemy reprezentację pary. Argument f nazywamy *kontynuacją*, gdyż aplikując $(\text{Tuple } x \ y)$ dla dowolnych $x, y \in \Lambda$ do pewnego $f \in \Lambda$, w konsekwencji x i y zostają zaaplikowane do f . Zauważmy, że wówczas reprezentacja `fst` i `snd` ma postać:

$$\text{fst} \equiv \lambda t. t(\lambda ab. a)$$

$$\text{snd} \equiv \lambda t. t(\lambda ab. b)$$

Przykład 11. Wprowadzone konstrukcje pozwalają nam na definicję skończonych (w sensie liczby konstruktorów) typów. Rozważmy następujące przykłady:

a) Konstruktory wartości typu `Maybe` możemy reprezentować przez

$$\text{Nothing} \equiv \lambda nj. n$$

$$\text{Just} \equiv \lambda anj. ja$$

Rozważmy następującą funkcję:

```

maybe :: b -> (a -> b) -> Maybe a -> b
maybe n _ Nothing = n
maybe _ f (Just x) = f x

```

Odpowiadająca jej reprezentacja to

$$\text{maybe} \equiv \lambda b f t. tb(\lambda a. fa)$$

b) Rozważmy następującą funkcję

```

fromTemperature :: Temperature -> Int
fromTemperature (Fahrenheit a) = a
fromTemperature (Celsius a) = a

```

Ustalając reprezentację konstruktorów `Fahrenheit` i `Celsius`:

$$\text{Fahrenheit} \equiv \lambda t f c. ft$$

$$\text{Celsius} \equiv \lambda t f c. ct$$

otrzymujemy reprezentację funkcji `fromTemperature` postaci:

$$\text{fromTemperature} \equiv \lambda t. t(\lambda f. f)(\lambda c. c)$$

1.4.4 Kodowanie rekurencji

Rozważmy następującą funkcję dodawania liczb Peano w języku Haskell:

```

add Zero m = m
add (Succ n) m = Succ (add n m)

```

Funkcję tę możemy wyrazić w rachunku λ przy pomocy kodowania Scotta w następujący sposób:

$$\text{add}_0 \equiv \lambda n m. nm (\lambda n. \text{Succ}(\text{add}_0 n m))$$

Formalizm rachunku λ nie pozwala na okресlanie nowych nazw i rekurencyjne odnoszenie się przez nie do nich samych. Standardową techniką w rachunku λ do określania funkcji w ten sposób jest użycie operatora punktu stałego Y . Przypomnijmy:

$$Y \equiv \lambda f. (\lambda x. (f(x)) \lambda x. (f(x)))$$

Wówczas określamy

$$\text{add}_Y \equiv Y (\lambda a n m. nm (\lambda n. \text{Succ}(a n m)))$$

Mając na uwadze możliwość przeprowadzenia powyższej konstrukcji przy użyciu rekurencji, będziemy dopuszczali w notacji odnoszenie się wprowadzanych λ -termów do nich samych.

1.4.5 Kodowanie Scotta typów rekursywnych

Stosując metody kodowania prostych typów wyliczeniowych i par, łatwo odnajdujemy reprezentację konstruktorów wartości dla typów **Nat** i **List**:

$$\begin{aligned} \text{Zero} &\equiv \lambda z s. z & \text{Nil} &\equiv \lambda n c. n \\ \text{Succ} &\equiv \lambda n z s. s n & \text{Cons} &\equiv \lambda x x_s n c. c x x_s \end{aligned}$$

Zwróćmy uwagę, że konstruktory **Nat** i **Maybe** są swoimi α -konwersami. Podobieństwo nie jest przypadkowe: na poziomie typów konstrukcja **Maybe** jest odpowiednikiem brania następnika. Określając dodatkowo $\text{Void} \equiv \lambda x. x$ jako element neutralny działania łącznego, otrzymujemy na poziomie typów strukturę półpierścienia z działaniem mnożenia określoną przez konstrukcję par i działaniem dodawania określonego przez konstrukcję typów wyliczeniowych. Stąd algebraiczne typy danych biorą swoją nazwę.

Z łatwością możemy określić teraz operacje brania poprzednika, głowy i ogona listy, odpowiednio:

$$\begin{aligned} \text{pred} &\equiv \lambda n. n \text{ undef } (\lambda m. m) \\ \text{head} &\equiv \lambda x_s. x_s \text{ undef } (\lambda x_s. x) \\ \text{tail} &\equiv \lambda x_s. \text{undef } (\lambda x_s. x_s) \end{aligned}$$

gdzie undef jest stałą o którą rozszerzamy rachunek λ celem sygnalizowania błędnej aplikacji.

Celem lepszego porównania kodowania Churcha i Scotta podamy reprezentacje funkcji foldl dla typu **Nat**. Określmy:

$$\begin{aligned} \text{foldl } f \ x \ \text{Zero} &= x \\ \text{foldl } f \ x \ (\text{Succ } n) &= f \ (\text{foldl } f \ x \ n) \end{aligned}$$

foldl może być przy pomocy kodowania Scotta zapisane jako

$$\text{foldl} \equiv \lambda f x n. n x (\lambda n. (\text{foldl } f \ x \ n))$$

Ogólnie, przy pomocy foldl wyabstrahowujemy pojęcie tzw. rekursji od strony ogona (ang. *tail recursion*), w teorii obliczalności nazywane rekursją prostą lub, popularnie, zwiżaniem od lewej. Operator foldl spełnia następującą własność [Hut99]

$$f = \text{foldl } \varphi \ a \iff \begin{cases} f \ \text{Zero} = a \\ f \ (\text{Succ } n) = \varphi \ (f \ n) \end{cases} \quad (3)$$

1.4.6 Kodowanie Churcha typów rekursywnych

Przedstawimy teraz klasyczny sposób kodowania typów po raz pierwszy zaprezentowany dla liczb naturalnych przez A. Churcha w [Chu41]. Różni się on od kodowania Scotta tylko w przypadku typów rekursywnych, w pozostałych przypadkach obydwa kodowania dają te same rezultaty. Typ `Nat` ma dwa konstruktory: `Zero` i `Succ`. W kodowaniu Churcha reprezentujemy je w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\text{Zero}_{Ch} &\equiv \lambda f x. x \\ \text{Succ}_{Ch} &\equiv \lambda n f x. f (n f x)\end{aligned}$$

Wyrażenia będące skutkiem konsekwentnej aplikacji `Succ` do `Zero` w literaturze popularnie nazywa się *liczebnikami Churcha* i oznacza następująco:

$$\begin{aligned}\bar{1} &\equiv \text{Succ}_{Ch} \text{Zero}_{Ch} =_{\beta} \lambda f x. f x \\ \bar{2} &\equiv \text{Succ}_{Ch} \text{Succ}_{Ch} \text{Zero}_{Ch} =_{\beta} \lambda f x. f f x \\ &\vdots \\ \bar{n} &\equiv \text{Succ}_{Ch}^n \text{Zero}_{Ch} =_{\beta} \lambda f x. f^n x\end{aligned}$$

Liczba naturalna n jest kodowana przez funkcję w której jej pierwszy argument jest aplikowany n razy do drugiego argumentu. Porównując je do kodowania Scotta widzimy, że różnica polega na aplikowaniu do kontynuacji termu $(n f x)$ w przypadku brania następnika. Da się pokazać [HIN05], że liczebniki Churcha są w istocie operacją `foldl` na argumentach `Succ` i `Zero`. Istotnie, niech $\text{nat} \equiv \lambda c. c \text{Succ Zero}$. Wówczas $\text{nat } \bar{n} =_{\beta} \bar{n}$. Z tego powodu kodowanie operacji na liczebnikach Churcha, lub ogólnie – funkcji opartych na rekursji prostej po zbiorze liczb naturalnych – jest wyjątkowo proste przy użyciu tej metody. Przykładowo, używając metody Churcha, operację dodawania kodujemy w następujący sposób:

$$\text{add}_{Ch} \equiv \lambda n m. n \text{Succ}_{Ch} m$$

Dla porównania, używając kodowania Scotta:

$$\text{add}_S \equiv \lambda n m. \text{foldl Succ } n m$$

1.4.7 Ogólny schemat kodowania Scotta typów ADT

W ogólnym przypadku, mając następującą definicję ADT:

```
data type_constructor t1 t2 ... tk = C1 t11 ... t1n1
                                   | C2 t21 ... t2n2
                                   ...
                                   | Cm tm1 ... tnm
```

dla $m, n \in \mathbb{N}$, wiążemy z nią reprezentację każdego z konstruktorów:

$$\begin{aligned} C_1 &\equiv \lambda t_{11} t_{12} \dots t_{1n_1} f_1 f_2 \dots f_m. f_1 t_{11} t_{12} \dots t_{1n_1} \\ C_2 &\equiv \lambda t_{21} t_{22} \dots t_{2n_2} f_1 f_2 \dots f_m. f_2 t_{21} t_{22} \dots t_{2n_2} \\ &\vdots \\ C_m &\equiv \lambda t_{m1} t_{m2} \dots t_{mn_m} f_1 f_m \dots f_m. f_1 t_{m1} t_{m2} \dots t_{mn_m} \end{aligned}$$

Wówczas następującą definicję częściową funkcji f :

$$\begin{aligned} f \text{ (C1 } v_{11} \dots v_{1n_1}) &= y_1 \\ &\dots \\ f \text{ (Cm } v_{m1} \dots v_{mn_m}) &= y_m \end{aligned}$$

kodujemy przy za pomocą następującego λ -termu:

$$\begin{aligned} \lambda x. x (\lambda v_{11} \dots v_{1n_1}. y_1) \\ \vdots \\ (\lambda v_{m1} \dots v_{mn_m}. y_m) \end{aligned}$$

gdzie y_i są kodowaniami Scotta y_i dla $i \in \mathbb{N}$.

1.5 Podsumowanie

Istotą rachunku λ bez typów jest uchwycenie pojęcia aplikacji argumentu do funkcji. Kodując selektor `if` dla typu `Boolean` w 1.4.2 zauważyliśmy, że nic nie powstrzymuje nas przed zaaplikowaniem do wyrażenia `if` dowolnego λ -termu. Analogiczna sytuacja ma miejsce, gdy określamy operacje na reprezentacji liczb naturalnych. Widzimy, że w ramach tak zakrojonego systemu nie mamy możliwości uchwycenia które rezultaty są sensowne. Jak przekonamy się w Rozdziale 2, problem ten eliminuje w pewnym stopniu rozszerzenie systemu rachunku λ o typy wyrażen. Wówczas aplikacja argumentu do funkcji wymaga wcześniejszej *weryfikacji* typu, zaś typy argumentów oraz rezultatu funkcji są z góry określone (z dokładnością do podstawienia). Niestety, w rezultacie otrzymujemy system w którym wiele sensownych wyrażen możliwych do zbudowania w rachunku λ nie jest poprawnych. Szukanie bogatych systemów typów, które jednocześnie nie ograniczałyby ekspresji (lub mówiąc bardziej obrazowo językiem informatyki: pozwalałyby na określenie większej ilości poprawnie zbudowanych programów ograniczając ilość tych błędnych) jest stale pojawiającym się tematem w dziedzinie teorii typów.

2 Rachunek λ z typami prostymi

2.1 Typy proste

Niech U będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych p, q, \dots (być może indeksowanych liczbami naturalnymi), które będziemy nazywali *zmiennymi typowymi*.

Definicja 29. (Typy proste) *Typami prostymi* będziemy określali najmniejszy w sensie mnogościowym zbiór wyrażeń taki, że:

- (S1) Jeśli p jest zmienną typową, to p jest typem prostym.
- (S2) Jeśli σ i τ są typami prostymi, to $(\sigma \rightarrow \tau)$ jest typem prostym.

Zmienne typowe nazywa się w literaturze niekiedy *statymi typowymi*⁵. Typy proste zbudowane tylko wedle reguły (S1) nazywamy typami *atomowymi*, zaś wyrażenia zbudowane wedle reguły (S2) – typami *funkcyjnymi*. Zbiór typów prostych określony w myśl powyższej definicji będziemy oznaczali przez \mathbb{T} . Definicję 29 można równoznacznie wyrazić przy pomocy notacji Backusa-Naura. Wówczas ma ona następującą, zwięzłą postać:

$$\mathbb{T} \leftarrow U \mid (\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T})$$

Późniejsze litery alfabetu greckiego ($\sigma, \tau, \rho, \dots$), być może z indeksami, będą służyły nam za zmienne metasyntaktyczne do oznaczania typów prostych. Dla lepszej czytelności będziemy pomijali najbardziej zewnętrzne nawiasy. Konstruktor typu \rightarrow wiąże prawostronnie; oznacza to, że typy $\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho$ oraz $\sigma \rightarrow (\tau \rightarrow \rho)$ będziemy uznawali za tożsame.

Zauważmy, że obiekty skonstruowane w myśl Definicji 29 mają strukturę drzewa binarnego. Wysokość takiego drzewa będziemy nazywali *stopniem* typu.

Definicja 30. (Stopień typu) Stopniem typu nazywamy następująco określoną funkcję $\delta: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \delta(p) &= 0, \text{ gdzie } p \text{ jest typem atomowym,} \\ \delta(\sigma \rightarrow \tau) &= 1 + \max(\delta(\sigma), \delta(\tau)). \end{aligned}$$

Definicja 31. (Stwierdzenie, deklaracja, kontekst, sąd)

- (1) *Stwierdzeniem* (ang. *statement*) nazywamy każdy napis postaci $M: \sigma$, gdzie $M \in \mathbf{\Lambda}$ i $\sigma \in \mathbb{T}$. W stwierdzeniu $M: \sigma$ λ -term M nazwamy *podmiotem* (ang. *subject*), zaś σ – *predykatem*⁶.

⁵Ta raczej nieszczęśliwa konwencja podkreśla fakt, że abstrakcja nie może odbywać się po zmiennych typowych.

⁶Nazwy te historycznie sięgają prac nad semantyką formalną języków naturalnych R. Montague’a.

- (2) *Deklaracją* (ang. *declaration*) nazywamy każde stwierdzenie w którym podmiot jest zmienną termową.
- (3) *Kontekstem* (ang. *context*) nazywamy skończony liniowo uporządkowany zbiór (*listę*) deklaracji, w którym wszystkie podmioty są wzajemnie różne.
- (4) *Sądem* (ang. *judgement*) nazywamy każdy napis postaci $\Gamma \vdash M : \sigma$, gdzie Γ jest kontekstem, zaś $M : \sigma$ – stwierdzeniem.

Definicja 32. (1) Jeśli $\Gamma = (x_1 : \sigma_1, \dots, x_n : \sigma_n)$, to liniowo uporządkowany zbiór $\text{dom } \Gamma = (x_1, \dots, x_n)$ nazywamy *dziedziną* kontekstu Γ , zaś $\text{rg } \Gamma$ – *zakresem* kontekstu Γ oraz

$$\begin{aligned}\text{dom } \Gamma &= \{M \in \mathbf{\Lambda} \mid (x : \sigma) \in \Gamma\}, \\ \text{rg } \Gamma &= \{\sigma \in \mathbb{T} \mid (x : \sigma) \in \Gamma\}.\end{aligned}$$

- (2) Kontekst Γ' nazywamy *podkontekstem* Γ i piszemy $\Gamma' \subseteq \Gamma$, jeśli wszystkie deklaracje występujące w Γ' występują również w Γ z zachowaniem tego samego porządku.
- (3) Kontekst Γ' nazywamy *permutacją* kontekstu Γ , jeśli wszystkie deklaracje w Γ' występują w Γ i odwrotnie.
- (4) Jeśli Γ jest kontekstem i Φ jest zbiorem λ -zmiennych, wówczas *projekcją* Γ na Φ (symbolicznie $\Gamma \upharpoonright \Phi$) nazywamy podkontekst Γ' kontekstu Γ taki, że $\text{dom } \Gamma' = (\text{dom } \Gamma) \cap \Phi$
- (5) Dla kontekstów $\Gamma = (x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_m)$ i $\Gamma' = (y_1 : \rho_1, \dots, y_n : \rho_n)$ takich, że $\text{dom}(\Gamma) \cap \text{dom}(\Gamma') = \emptyset$ *konkatenacją* Γ i Γ' nazywamy kontekst

$$\Gamma \# \Gamma' = (x_1 : \sigma_1, \dots, x_k : \sigma_m, y_1 : \rho_1, \dots, y_n : \rho_n).$$

Przykład 12. Niech $\Gamma \equiv (y : \sigma, x_1 : \rho_1, x_2 : \rho_2, z : \tau, x_3 : \rho_3)$. Wówczas:

- (1) $\text{dom } \Gamma = (y, x_1, x_2, z, x_3)$.
- (2) $\emptyset \subseteq (x_1 : \rho_1, z : \tau) \subseteq \Gamma$
- (3) $(x_1 : \rho_1, x_2 : \rho_2, x_3 : \rho_3, y : \sigma, z : \tau)$ jest permutacją Γ .
- (4) $\Gamma \upharpoonright \{z, u, x_1\} = (x_1 : \rho_1, z : \tau)$.

2.2 Typowanie

Wprowadzamy następujące reguły wyprowadzania typu (relacji typowości):

$$\begin{array}{c}
\Gamma \vdash x : \sigma \text{ (var),} \quad \text{jeśli } x : \sigma \in \Gamma, \\
\\
\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (MN) : \tau} \text{ (app),} \\
\\
\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x. M) : \sigma \rightarrow \tau} \text{ (abs).}
\end{array}$$

W systemie tym mamy do czynienia z wyraźnym podziałem na obiekty dwóch rodzajów: λ -termy i typy. λ -termy możemy przekształcać dwoma dualnymi operacjami: λ -abstrakcją i aplikacją. Rezultat operacji zależy od wyboru zmiennej wolnej, którą chcemy wyabstrahować z termu albo wyboru termu, który chcemy zaaplkować do innego termu, odpowiednio. Dlatego mówimy, że w rachunku λ z typami prostymi termy *zależą* od termów. Ponieważ abstrahowanie przebiega wyłącznie po zbiorze λ -zmiennych, mówimy, że zależność (abstrakcja) jest *pierwszego rzędu*.

Definicja 33. (Typowalność)

Mówimy, że λ -term M jest typu σ w kontekście Γ , jeśli istnieje skończone drzewo sądów spełniające poniższe warunki:

- (D1) W korzeniu drzewa znajduje się sąd $\Gamma \vdash M : \sigma$.
- (D2) Liście są *aksjomatami*, czyli sądami postaci $\Gamma \vdash x : \sigma$.
- (D3) Każdego rodzica można otrzymać z jego dzieci przez zastosowanie którejś z reguł wyprowadzania typu.

Tak określony obiekt będziemy nazywali *wyprowadzeniem* typu dla M (w kontekście Γ) i pisali $\Gamma \vdash_{\top} M : \sigma$. O sędzie $\Gamma \vdash M : \sigma$ będziemy wówczas mówili, że jest *wyprowadzalny*.

Przykład 13. (a) Niech $\Gamma = (x : \sigma, y : \tau)$. Pokażemy, że $K = \lambda xy. x$ ma typ $\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma$. Istotnie,

$$\begin{array}{c}
\frac{x : \sigma, y : \tau \vdash x : \sigma}{x : \sigma \vdash \lambda y. x : \tau \rightarrow \sigma} \text{ (abs)} \\
\frac{x : \sigma \vdash \lambda y. x : \tau \rightarrow \sigma}{\vdash \lambda xy. x : \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma} \text{ (abs)}
\end{array}$$

(b) Niech $\Gamma = (x : \tau \rightarrow \rho, y : \sigma \rightarrow \tau, z : \sigma)$. Wówczas:

$$\begin{array}{c}
\frac{\Gamma \vdash y : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash z : \sigma}{\Gamma \vdash yz : \tau} \text{ (app)} \\
\frac{\Gamma \vdash x : \tau \rightarrow \rho \quad \Gamma \vdash yz : \tau}{\Gamma \vdash x(yz) : \rho} \text{ (app)} \\
\frac{\Gamma \vdash x(yz) : \rho}{x : \tau \rightarrow \sigma, y : \sigma \rightarrow \rho \vdash \lambda z. x(yz) : \sigma \rightarrow \rho} \text{ (abs)} \\
\frac{x : \tau \rightarrow \sigma, y : \sigma \rightarrow \rho \vdash \lambda z. x(yz) : \sigma \rightarrow \rho}{x : \tau \rightarrow \rho \vdash \lambda yz. x(yz) : (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho} \text{ (abs)} \\
\frac{x : \tau \rightarrow \rho \vdash \lambda yz. x(yz) : (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho}{\vdash \lambda xyz. x(yz) : (\tau \rightarrow \rho) \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho} \text{ (abs)}
\end{array}$$

- (c) Nie wszystkie λ -termy są typowalne. Niech $\omega \equiv (\lambda x. xx)$ i przypuśćmy, że ω ma typ σ w kontekście Γ . Zauważmy, że wówczas w $x : \sigma \rightarrow \sigma \in \Gamma$. Ponieważ ω zawiera w sobie podterm (xx) , to w wyprowadzeniu musiał on zostać otrzymany przez zastosowanie reguły (app). Wówczas $x : \sigma \in \Gamma$ i $x : \sigma \rightarrow \sigma \in \Gamma$, co nie jest możliwe, bo wszystkie deklaracje w Γ muszą mieć różne podmioty.

Uwaga. Notacja dowodowa zaproponowana w Przykładzie 13 wprowadza wiele redundancji, która utrudnia zorientowanie się w dłuższych wyprowadzeniach, zaś zlinearyzowanie dowodów pozwala na notowanie kolejnych sądów w arbitralnym porządku. Nic nie stoi na przeszkodzie abyśmy ograniczyli się tylko do rozpatrywania wyprowadzeń, w których zależności pomiędzy sądami ustalają ścisły porządek częściowy, tzn. takich, że:

- żaden sąd nie poprzedza sam siebie (antyzwrotność),
- jeśli jeden sąd poprzedza drugi, to drugi nie poprzedza pierwszego (antysymetryczność),
- jeśli sąd J_k poprzedza J_l i J_l poprzedza J_m , to J_k poprzedza J_m (przechodźność).

Taki charakter dowodów oddaje wariant notacji w postaci drzew wprowadzony przez Pravitzą i proponowany w [HS08]. Powtarzanie się kontekstów eliminuje się w niej przez wprowadzanie każdej deklaracji do dowodu przed użyciem i wykreślanie jej po użyciu. W dalszej części pracy będziemy korzystać z analogicznej pod wieloma względami notacji Fitcha (tzw. notacji flagowej). Poniżej pokazujemy wprowadzenia typu z Przykładu 13 w tej notacji.

(a)

$$\begin{array}{lcl}
1 & \left| \begin{array}{l} x : \sigma \end{array} \right. & \text{(var)} \\
2 & \left| \begin{array}{l} \left| y : \sigma \right. \end{array} \right. & \text{(var)} \\
3 & \left| \begin{array}{l} \lambda y. x : \tau \rightarrow \sigma : \sigma \end{array} \right. & \text{(abs) 1} \\
4 & \lambda xy. x : \sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma & \text{(abs) 3}
\end{array}$$

(b)

1	$x : \tau \rightarrow \rho$	(var)
2	$y : \sigma \rightarrow \tau$	(var)
3	$z : \sigma$	(var)
4	$yz : \tau$	(app) 2 3
5	$x(yz) : \rho$	(app) 1 4
6	$\lambda z. x(yz) : \sigma \rightarrow \rho$	(abs) 5
7	$\lambda yz. x(yz) : (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho$	(abs) 6
8	$\lambda xyz. x(yz) : (\tau \rightarrow \rho) \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho$	(abs) 7

Definicja 34. (Poprawność, typowalność) λ -term $M \in \mathbf{\Lambda}$ nazywamy *poprawnym* (ang. *legal*) lub *typowalnym* (ang. *typable*), jeśli istnieje wyprowadzenie $\Gamma \vdash M : \rho$ dla pewnego kontekstu Γ i typu $\rho \in \mathbb{T}$.

2.2.1 Rodzaje problemów

W teorii typów spotykamy trzy rodzaje problemów dotyczące sądów:

1. *Problem typowalności* (ang. *well-typedness, typability*)

Polega na rozstrzygnięciu czy zadany term jest poprawny, czyli znalezieniu kontekstu oraz wyprowadzenia typu względem tego kontekstu dla zadanego termu. Symbolicznie:

$$? \vdash \text{term} : ?$$

Problem typowalności przy zadanym kontekście nazywamy problemem *przy-
pisania typu* (ang. *type assignment*). Ma on następującą postać:

$$\text{kontekst} \vdash \text{term} : ?$$

2. *Problem weryfikacji typu* (ang. *type checking*)

Polega na sprawdzeniu czy term ma zadany typ względem danego kontekstu.

$$\text{kontekst} \stackrel{?}{\vdash} \text{term} : \text{typ}$$

3. *Problem inhabitacji* (ang. *inhabitation, term finding*)

Polega na skonstruowaniu termu (lub przynajmniej wykazaniu istnienia takiego termu), który miałby zadany typ względem danego kontekstu.

$$\text{kontekst} \vdash ? : \text{typ}$$

W wielu systemach problem typowości można sprowadzić do problemu weryfikacji typu. Istotnie, przypuśćmy, że M jest poprawnym termem i $FV(M) = \{x_1, \dots, x_n\}$. Zauważmy, że M jest typowalny, jeśli wyprowadzalny jest sąd

$$x_0 : p \vdash Kx_0(\lambda x_1 \dots x_n. M) : p,$$

gdzie $p \in U$ jest zmienną typową, zaś kombinatory $K \equiv \lambda xy. x$.

Wszystkie wymienione problemy są w rachunku λ z typami prostymi są rozstrzygalne⁷, tzn. istnieją efektywnie obliczalne metody ich rozwiązywania. Czytelnika zainteresowanego szczegółami odsyłamy do [SU06, Twierdzenie 3.2.7] i [Bar92, Rozdział 4.4].

2.3 Własności

Przedstawimy teraz szereg lematów ustalających między innymi związki między rachunkiem λ bez typów wprowadzonym w Rozdziale 1, a rachunkiem λ z typami prostymi.

Lemat 3. (*O generowaniu*)

- (1) Jeśli $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} x : \sigma$, to $x : \sigma \in \Gamma$.
- (2) Jeśli $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} MN : \tau$, to $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma \rightarrow \tau$ i $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} N : \sigma$ dla pewnego $\sigma \in \mathbb{T}$.
- (3) Jeśli $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} \lambda x. M : \tau$ i $x \notin \text{dom } \Gamma$, to $\tau \equiv \tau_1 \rightarrow \tau_2$ oraz $\Gamma, x : \tau_1 \vdash_{\mathbb{T}} N : \tau_2$.

Dowód. Wynika natychmiast z postaci λ -termu. □

Lemat 4. (*O podtermie*) Podterm poprawnego λ -termu jest poprawny.

Dowód. Załóżmy, że sąd $J : \Gamma \vdash M : \sigma$ jest wyprowadzalny. Dowód przebiega przez indukcję względem długości wyprowadzenia J . Rozważmy następujące przypadki:

- (a) Jeśli J jest konsekwencją reguły *var*, to $\text{Sub}(M) = \{M\}$ (Definicja 2.1), a zatem teza jest trywialnie spełniona.
- (b) Jeśli J jest konsekwencją reguły *app*, to $M \equiv PQ$ dla P, Q dla których twierdzenie zachodzi. Ponieważ $\text{Sub}(M) = \text{Sub}(P) \cup \text{Sub}(Q) \cup \{PQ\}$ (Definicja 2.3), to teza również zachodzi.
- (c) Jeśli J jest konsekwencją reguły *abs*, to $M \equiv \lambda x. P$ dla pewnego P dla którego twierdzenie zachodzi. Ponieważ $\text{Sub}(\lambda x. M) = \text{Sub}(M) \cup \{\lambda x. M\}$, (Definicja 2.5) to teza zachodzi również w tym przypadku.

⁷Nie jest to bynajmniej oczywiste dla innych systemów typów; za przykład wystarczy wziąć słynny wynik J. B. Wellsa [Wel99], który stwierdza, że problemy typowości i weryfikacji typu w Systemie F są nierozstrzygalne. Stąd w praktyce uzasadnione jest zainteresowanie mniej ekspresywnymi systemami typów, np. systemem Hindleya-Milnera.

□

Lemat 5. *(O zmiennych wolnych) Jeśli sąd $J : \Gamma \vdash L : \sigma$ jest wyprowadzalny, to $FV(L) \subseteq \text{dom } \Gamma$.*

Dowód. Prosty dowód przeprowadzamy przez indukcję względem długości wyprowadzenia sądu J . Rozważmy następujące przypadki:

- (a) Jeśli J jest konsekwencją reguły *var*, to $L \equiv x$ dla pewnej λ -zmiennnej x . Wobec tego $x : \sigma \in \Gamma$, a zatem $FV(x) \subseteq \text{dom } \Gamma$.
- (b) Jeśli J jest konsekwencją reguły *app*, to J musi mieć postać $\Gamma \vdash MN : \sigma$. Z założenia indukcyjnego: $FV(M) \subseteq \text{dom } \Gamma$ i $FV(N) \subseteq \text{dom } \Gamma$. Z Definicji 3: $FV(MN) = FV(M) \cup FV(N)$. Stąd $FV(MN) \subseteq \text{dom } \Gamma$.
- (c) Jeśli J jest konsekwencją reguły *abs*, to J musi mieć postać $\Gamma \vdash \lambda x. M : \sigma$. Z założenia indukcyjnego $FV(M) \subseteq \text{dom } \Gamma$. Ponieważ $FV(\lambda x. M) = FV(M) \setminus \{x\} \subseteq FV(M)$ (z Definicji 3), to $FV(M) \subseteq \text{dom } \Gamma$.

□

Lemat 6. *(1) Niech Γ' i Γ'' będą kontekstami takimi, że $\Gamma' \subseteq \Gamma''$. Jeśli $\Gamma' \vdash M : \sigma$, to $\Gamma'' \vdash M : \sigma$.*

(2) Jeśli $\Gamma \vdash M : \sigma$, to $\Gamma \upharpoonright FV(M) \vdash M : \sigma$.

(3) Jeśli $\Gamma \vdash M : \sigma$ i Γ' jest permutacją Γ , to $\Gamma' \vdash M : \sigma$.

Dowód. Dowody przebiegają przez indukcję względem długości wyprowadzenia. Czytelnika zainteresowanego szczegółami odsyłamy do [Bar92, Tw. 3.1.7]. □

Uwaga. Zauważmy, że (6.(3)) rozluźnia konieczność eliminowania maksymalnej deklaracji z kontekstu przy stosowaniu reguły *abs*. W tekstach wprowadzających typy proste zazwyczaj przez kontekst rozumie się po prostu skończony zbiór wzajemnie różnych deklaracji [Bar92; SU06; HS08]. Ponieważ branie dowolnej permutacji listy nie wpływa na typowanie, to widzimy, że obydwie znaczenia możemy stosować zamiennie, bowiem jest to nic innego jak traktowanie kontekstu jako zbioru deklaracji.

Lemat 7. *(O podstawieniu) Załóżmy, że*

(a) $\Gamma_1, x : \sigma, \Gamma_2 \vdash M : \rho$

(b) $\Gamma_1 \vdash N : \sigma$

Wówczas $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash M[x/N] : \rho$.

Dowód. Niech $\Gamma = \Gamma_1 \# \Gamma_2$. Korzystając z części (3) Lematu 6 dowód przeprowadzimy przez indukcję względem długości wyprowadzenia $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$. Rozważmy następujące przypadki:

- (i) Jeśli $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$ jest konsekwencją reguły *var*, to $M \equiv x$. Wówczas $M[x/N] \equiv N$ i $\rho \equiv \sigma$. Teza zachodzi w oczywisty sposób.
- (ii) $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$ jest konsekwencją reguły *app*. Wówczas $M \equiv PQ$ i istnieją wyprowadzenia $\Gamma, x : \sigma \vdash P : \tau \rightarrow \rho$ oraz $\Gamma, x : \sigma \vdash Q : \tau$. Z założenia indukcyjnego mamy, że $\Gamma \vdash P[x/N] : \tau \rightarrow \rho$ oraz $\Gamma \vdash Q[x/N] : \tau$. Wówczas stosując regułę *app* mamy:

$$\frac{\Gamma \vdash P[x/N] : \tau \rightarrow \rho \quad \Gamma \vdash Q[x/N] : \tau}{\Gamma \vdash (P[x/N]Q[x/N]) : \rho} \text{ (app)},$$

Tezę otrzymujemy z faktu, że $(PQ)[x/N] = P[x/N]Q[x/N]$.

- (iii) Jeśli $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$ jest konsekwencją reguły *abs*, to $M \equiv \lambda y. P : \rho$ dla $\rho \equiv \sigma \rightarrow \tau$, $y \neq x$. Z założenia indukcyjnego istnieje wyprowadzenie $\Gamma', y : \tau \vdash P[x/N] : \rho$, gdzie $\Gamma' = \Gamma \# (x : \sigma)$. Wówczas, stosując regułę *abs* mamy:

$$\frac{\Gamma', y : \tau \vdash P[x/N] : \rho}{\Gamma' \vdash (\lambda y. P[x/N]) : \tau \rightarrow \rho} \text{ (abs)}$$

Ponieważ $(\lambda y. P)[x/N] = \lambda y. P[x/N]$ oraz $M \equiv \lambda y. P : \tau \rightarrow \rho$, otrzymujemy tezę.

□

Lemat 8. (*Redukcja podmiotu*) Załóżmy, że

- (i) $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$
- (ii) $M \rightarrow_{\beta}^* N$

Wówczas $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} N : \sigma$.

Dowód. Pokażemy, że twierdzenie zachodzi dla jednego kroku redukcji \rightarrow_{β} . Dowód zwrotności jest trywialny, zaś aby pokazać przechodniość wystarczy skorzystać z indukcji względem długości ciągu redukcji.

Niech $M \rightarrow_{\beta} N$. Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem długości wyprowadzenia $\Gamma \vdash M : \sigma$. Rozważmy następujące przypadki:

- (a) $\Gamma \vdash M : \sigma$ jest konsekwencją reguły *var*. Wówczas $M \equiv x$ dla pewnej λ -zmiennnej $x \in V$. Wówczas poprzednik nie jest spełniony, bowiem M nie da się zredukować. Zatem twierdzenie trywialnie zachodzi.

(b) $\Gamma \vdash M : \sigma$ jest konsekwencją reguły *app*. Wówczas $M \equiv PQ$ oraz istnieją wyprowadzenia $\Gamma \vdash P : \tau \rightarrow \sigma$ oraz $\Gamma \vdash Q : \sigma$. Ponadto zakładamy, że dla pewnych $P', Q' \in \mathbf{\Lambda}$ mamy $P \rightarrow_\beta P'$ i $Q \rightarrow_\beta Q'$. Istnieją dwie możliwości redukcji $M \rightarrow_\beta N$:

(1) $N \equiv PQ'$. Ponieważ $\Gamma \vdash Q' : \sigma$ (założenie indukcyjne), to możemy zastosować regułę *app*:

$$\frac{\Gamma \vdash P : \tau \rightarrow \sigma \quad \Gamma \vdash Q' : \sigma}{\Gamma \vdash PQ' : \sigma} \text{ (app)},$$

Ponieważ $N \equiv PQ'$, to otrzymujemy tezę.

(2) $N \equiv P'Q$. Postępujemy analogicznie do przypadku (1)

(c) $\Gamma \vdash M : \sigma$ jest konsekwencją reguły *abs*. Wówczas $M \equiv \lambda x. P$, dla pewnych $\rho, \tau \in \mathbb{T}$ mamy $\sigma \equiv \rho \rightarrow \tau$ oraz istnieje wyprowadzenie sądu $\Gamma, x : \rho \vdash P : \tau$. Ponadto zakładamy, że dla pewnego $P' \in \mathbf{\Lambda}$ mamy $P \rightarrow_\beta P'$. β -redukcja $M \rightarrow_\beta N$ musi prowadzić w tym wypadku do $N \equiv \lambda x. P'$. Ponieważ $\Gamma, x : \rho \vdash P' : \tau$ (założenie indukcyjne), to możemy zastosować regułę *abs*:

$$\frac{\Gamma', x : \rho \vdash P' : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x. P' : \rho \rightarrow \tau} \text{ (abs)}$$

Stąd teza. □

Lemat 9. (Zachowawczość η -redukcji) Załóżmy, że

(i) $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$

(ii) $M \rightarrow_\eta^* N$

Wówczas $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} N : \sigma$.

Dowód. Dowód przeprowadzamy analogicznie do Lematu 8. □

Twierdzenie 4. (Własność Churcha-Rossera) Relacja \rightarrow_β określona na typowych λ -termach ma własność CR.

Dowód. Wynika to bezpośrednio z Twierdzenia 1 i Lematu 8. □

2.3.1 Uniwersalny polimorfizm

Istnieje wiele wariantów wprowadzania typów prostych. Przedstawiony w tym rozdziale rachunek powszechnie nazywany jest *stylem Currego*. Charakteryzuje go interesująca własność: poprawne termy mają jednoznacznie wyznaczony typ z dokładnością do podstawienia. Oznacza to, że zmienne występujące w typie każdego poprawnego termu są w istocie kwantyfikowane po zbiorze wszystkich typów prostych. Każdy taki typ nazywamy *typem (uniwersalnie parametrycznie) polimorficznym*.

Definicja 35. (Podstawienie typu) Podstawienie typu τ za zmienną typową p w typie σ nazywamy następującą funkcję :

$$\begin{aligned} p[p/\tau] &= \tau, \\ q[p/\tau] &= q, \text{ jeśli } q \neq p, \\ (\sigma_1 \rightarrow \sigma_2)[p/\tau] &= \sigma_1[p/\tau] \rightarrow \sigma_2[p/\tau]. \end{aligned}$$

Jeśli Γ jest kontekstem, to przez $\Gamma[p/\tau]$ oznaczamy podstawienie τ za zmienną p dla wszystkich typów występujących w Γ .

Lemat 10. Jeśli $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$, to $\Gamma[p/\tau] \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma[p/\tau]$ dla dowolnego $\tau \in \mathbb{T}$ i zmiennej $p \in U$.

Dowód. Dowód przebiega przez indukcję względem długości wyprowadzenia $\Gamma \vdash M : \sigma$. Szczegóły pomijamy. \square

Mając na uwadze Lemat 10 możemy wnioskować o wielu własnościach funkcji reprezentowanych przez λ -termy tylko na podstawie typu. Na przykład typowi $\sigma \rightarrow \sigma$ odpowiada dokładnie jeden (z dokładnością do α -konwersji) term $\lambda x.x$ i reprezentuje on funkcję identycznościową; typom $\sigma \rightarrow \rho \rightarrow \sigma$ i $\sigma \rightarrow \rho \rightarrow \rho$ odpowiednio przypisać możemy wyłącznie projekcje fst i snd (określone w 1.4.3), zaś typowi $(\rho \rightarrow \tau) \rightarrow (\sigma \rightarrow \rho) \rightarrow \sigma \rightarrow \tau$ term $\lambda g f x.g(fx)$ reprezentujący złożenie funkcji (Przykład 13 (b)), co do której wiemy z kolei, że jest łączna. Jest to wraz ogólnej zależności: dysponując dowolnym typem polimorficznym otrzymujemy *twierdzenie za darmo* [Wad89] dotyczące termów, które mają ten typ.

2.3.2 Silna normalizacja

Pokażemy, że wszystkie typowalne λ -termy redukują się do postaci β -normalnej przez skończony ciąg β -redukcji. Oznacza to, że nie ma możliwości otrzymania nieskończonego ciągu β -redukcji, tak jak to miało miejsce w Przykładzie 8 (a) (b) i to bez względu na przyjętą strategię redukcji.

Ponieważ wszystkie λ -termy samorepliujące się przy β -redukcji nie są typowalne, nie jest możliwe w rachunku λ z typami prostymi reprezentowanie rekurencyjnych typów ADT w myśl podrozdziału 1.4.4. Wynika to z faktu, że dodanie typów prostych do rachunku λ bez typów znacznie zmniejsza ekspresywność systemu, uniemożliwiając wyrażenie operacji rekursji prostej. Okazuje się, że stosując reprezentację Churcha dla liczb naturalnych i utożsamiając λ -termy za pomocą β -konwersji, rachunek λ z typami prostymi równoważny jest zbiorowi *wielomianów rozszerzonych* [Zak07]. Liczbnikom Churcha odpowiada wówczas typ postaci $(\sigma \rightarrow \sigma) \rightarrow \sigma \rightarrow \sigma$ i możliwe jest określenie na nich dodawania i mnożenia.

Ponieważ wszystkie ciągi redukcji są w tym systemie skończone, to relacja β -konwersji jest rozstrzygalna, wystarczy bowiem sprowadzić jej argumenty do postaci normalnej. Podejście to rodzi jednak nietrywialne problemy natury złożonościowej [SU06, Podrozdział 3.7].

Opracowany tutaj dowód pochodzi z [HS08, Dodatek A3]. Polega on na:

1. Konstrukcji interpretacji dla typów prostych: termów redukowalnych.
2. Wykazaniu, że każdy term redukowalny jest silnie normalizowalny.
3. Wykazaniu, że każdy typowalny term jest redukowalny.

Rozumowanie przedstawione w tym dowodzie, tzw. *computability method* oryginalnie przypisywane W. Taitowi [Tai67], z odpowiednimi zmianami stosuje się w dowodach własności silnej normalizacji dla innych systemów typów [SU06, Podrozdział 11.5].

Definicja 36. (Termy redukowalne) Niech $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$. Powiemy, że M jest *redukowalny* (także *silnie obliczalny*), jeśli spełnia poniższe warunki:

(R1) Jeśli σ jest zmienną typową, to M jest silnie normalizowalny. Określamy:

$$\llbracket \sigma \rrbracket = \text{SN}.$$

(R2) Jeśli σ jest typem funkcyjnym postaci $\sigma \equiv \rho \rightarrow \tau$, to dla wszystkich termów redukowalnych N takich, że $\Gamma' \vdash_{\mathbb{T}} MN : \tau$, MN jest redukowalny. Określamy:

$$\llbracket \rho \rightarrow \tau \rrbracket = \{M \mid \forall N (N \in \llbracket \rho \rrbracket) \implies MN \in \llbracket \tau \rrbracket\}.$$

Lemat 11. Niech $\tau \in \mathbb{T}$ będzie dowolnym typem prostym. Wówczas:

- (1) $\llbracket \tau \rrbracket \subseteq \text{SN}$.
- (2) Jeśli $N_1, N_2, \dots, N_k \in \text{SN}$, to $xN_1N_2 \dots N_k \in \llbracket \tau \rrbracket$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez indukcję strukturalną względem typu τ . Mamy do rozważenia następujące dwa przypadki:

(a) τ jest zmienną typową.

- (1) Wynika bezpośrednio z definicji $\llbracket \tau \rrbracket \in \text{SN}$.
- (2) Niech $N_1, N_2, \dots, N_k \in \text{SN}$. Wówczas $N_1, N_2, \dots, N_k \in \text{SN}$. Z definicji $\llbracket \tau \rrbracket$ mamy, że $xN_1N_2 \dots N_k \in \llbracket \tau \rrbracket$.

(b) Przypuśćmy, że $\tau = \sigma \rightarrow \rho$ oraz twierdzenie zachodzi dla σ i ρ .

- (1) Niech $M \in \llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket$ i niech x będzie dowolną λ -zmienną. Z części (2) założenia indukcyjnego mamy $x \in \llbracket \sigma \rrbracket$, zatem z definicji $\llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket$ mamy $Mx \in \llbracket \rho \rrbracket$. Ponieważ z części (1) założenia indukcyjnego $\llbracket \rho \rrbracket \in \text{SN}$, to $Mx \in \text{SN}$ i w konsekwencji $\llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket \subseteq \text{SN}$.
- (2) Niech $P \in \llbracket \sigma \rrbracket$. Wówczas z części (1) założenia indukcyjnego $P \in \text{SN}$. Chcemy pokazać, że $xN_1N_2 \dots N_k \in \llbracket \rho \rrbracket$. Z części (2) założenia indukcyjnego

$$xN_1N_2 \dots N_k N_{k+1} \in \llbracket \rho \rrbracket.$$

Ustalając $N_{k+1} \equiv P$ otrzymujemy tezę.

□

Lemat 12. *Założmy, że:*

- (a) $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \in \text{SN}$,
- (b) $N_0 \in \text{SN}$.

Wówczas $(\lambda x. M)N_0N_1 \dots N_k \in \text{SN}$.

Dowód. (Ad absurdum) Przypuśćmy, że $P_0 \equiv (\lambda x. M)N_0N_1 \dots N_k \notin \text{SN}$. Wówczas istnieje nieskończony ciąg redukcji

$$P_0 \rightarrow P_1 \rightarrow \dots$$

Każdy podterm λ -termu silnie normalizowalnego jest silnie normalizowalny. Ponieważ $P_0 \equiv M[x/N_0]N_0N_1 \dots N_k \in \text{SN}$, to $M[x/N_0], N_0, N_1, \dots, N_k \in \text{SN}$. Na podstawie Lematu 2 mamy ponadto, że $M \in \text{SN}$. Wobec tego dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ redukcji ulega redekso czołowy:

$$P_n \equiv (\lambda x. M')N'_0N'_1 \dots N'_k \rightarrow_\beta M'[x/N'_0]N'_0N'_1 \dots N'_k \equiv P_{n+1},$$

gdzie $M \rightarrow_\beta^* M'$ oraz $N_i \rightarrow_\beta^* N'_i$ dla $i \leq k$. Ale skoro tak, to prawdą jest również, że $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \rightarrow_\beta^* P_{n+1}$, zaś $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \in \text{SN}$. Zatem $P_{n+1} \in \text{SN}$, co prowadzi do sprzeczności. □

Lemat 13. *Założmy, że:*

- (a) $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \in \llbracket \tau \rrbracket$,
- (b) $N_0 \in \text{SN}$.

Wówczas $(\lambda x. M)N_0N_1 \dots N_k \in \llbracket \tau \rrbracket$.

Dowód. Dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem τ . Rozważmy następujące przypadki:

- (a) Jeśli τ jest zmienną typową, to $\llbracket \tau \rrbracket = \text{SN}$. Wobec tego problem sprowadza się do Lematu 12.
- (b) Przypuśćmy, że $\tau \equiv \sigma \rightarrow \rho$ i niech $M[x/N_0]N_1 \dots N_k \in \llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket$. Wybierzmy dowolny $P \in \llbracket \sigma \rrbracket$. Wówczas $M[x/N_0]N_1 \dots N_k N_{k+1} \in \llbracket \rho \rrbracket$. Z założenia indukcyjnego mamy jednak, że $(\lambda x. M)N_0N_1 \dots N_k N_{k+1} \in \llbracket \rho \rrbracket$. Wystarczy więc przyjąć $N_{k+1} \equiv P$ i z definicji $\llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket$ mamy, że $(\lambda x. M)N_0N_1 \dots N_k \in \llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket$.

□

Definicja 37. Powiemy, że kontekst $\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, x_2 : \sigma_2, \dots, x_n : \sigma_n\}$ spełnia stwierdzenie $M : \sigma$ i będziemy pisali $\Gamma \models M : \sigma$, jeśli dla dowolnych $N_1 \in \llbracket \sigma_1 \rrbracket$, $N_2 \in \llbracket \sigma_2 \rrbracket$, \dots , $N_n \in \llbracket \sigma_n \rrbracket$ mamy, że:

$$M[x_1/N_1, x_2/N_2, \dots, x_n/N_n] \in \llbracket \tau \rrbracket.$$

Lemat 14. Jeśli $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \tau$, to $\Gamma \models M : \tau$.

Dowód. Dowód będzie przebiegał przez indukcję względem wyprowadzenia $\Gamma \vdash M : \tau$. Niech $\Gamma = (x_1 : \tau_1, x_2 : \tau_2, \dots, x_n : \tau_n)$ będzie kontekstem dla którego istnieje wyprowadzenie $J : \Gamma \vdash M : \tau$. Wybierzmy $N_1 \in \llbracket \tau_1 \rrbracket$, $N_2 \in \llbracket \tau_2 \rrbracket$, \dots , $N_n \in \llbracket \tau_n \rrbracket$. Rozważmy następujące przypadki:

- (a) J jest konsekwencją reguły *var*. Wówczas J jest postaci $\Gamma \vdash x_i : \tau$ dla pewnego $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, gdzie $x_i : \tau \in \Gamma$. Stąd $M[\vec{x}/\vec{N}] = x_i[x_i/N_i] = N_i \in \llbracket \tau \rrbracket$. Z dowolności N_i , $\Gamma \models M : \tau$.
- (b) J jest konsekwencją reguły *app*. Wówczas J jest postaci $\Gamma \vdash PQ : \tau$. Z założenia indukcyjnego istnieje $\sigma \in \mathbb{T}$ takie, że $\Gamma \models P : \sigma \rightarrow \tau$ i $\Gamma \models Q : \sigma$. Wobec tego $P[\vec{x}/\vec{N}] \in \llbracket \sigma \rightarrow \tau \rrbracket$ i $Q[\vec{x}/\vec{N}] \in \llbracket \sigma \rrbracket$. Z definicji jednoczesnego podstawienia (Definicja 10) mamy:

$$PQ[\vec{x}/\vec{N}] = P[\vec{x}/\vec{N}]Q[\vec{x}/\vec{N}]$$

Z definicji $\llbracket \sigma \rightarrow \tau \rrbracket$ wówczas $M \in \llbracket \tau \rrbracket$.

- (c) J jest konsekwencją reguły *abs*. Wówczas J jest postaci $\Gamma \vdash \lambda y. P : \sigma \rightarrow \rho$, gdzie $y \notin \text{dom}\Gamma$. Z założenia indukcyjnego mamy, że $\Gamma, y : \sigma \models P : \rho$. Oznacza to, że dla dowolnych $N_1 \in \llbracket \tau_1 \rrbracket$, $N_2 \in \llbracket \tau_2 \rrbracket$, ..., $N_n \in \llbracket \tau_n \rrbracket$ mamy

$$\forall N \in \llbracket \sigma \rrbracket \left(P[\vec{x}, y/\vec{N}, N] \in \llbracket \rho \rrbracket \right) \quad (*)$$

Ustalmy $P' \equiv P[y/y'][\vec{x}/\vec{N}]$, gdzie $y' \notin \text{dom}\Gamma$ i $y' \notin \text{FV}(N_i)$ dla $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$. Wówczas z (*):

$$\forall N \in \llbracket \sigma \rrbracket \left(P'[y'/N] \in \llbracket \rho \rrbracket \right)$$

Ustalmy $N_0 \in \llbracket \sigma \rrbracket$. Wówczas z części (1) Lematu 11 $N_0 \in \text{SN}$. Wobec tego z Lematu 13 wnioskujemy, że:

$$(\lambda y'. P')N_0 \in \llbracket \rho \rrbracket \quad (**)$$

Zauważmy teraz, że ponieważ $\forall i \ y_i \notin \text{FV}(N_i)$

$$\begin{aligned} (\lambda y'. P') &= (\lambda y'. P[y/y'][\vec{x}/\vec{N}]) \\ &= (\lambda y'. P[y/y'])[\vec{x}/\vec{N}] = (\lambda y. P)[\vec{x}/\vec{N}] \end{aligned} \quad (***)$$

Z (**) i (***) otrzymujemy

$$((\lambda y. P)[\vec{x}/\vec{N}])N_0 \in \llbracket \rho \rrbracket.$$

Ponieważ $N_0 \in \llbracket \sigma \rrbracket$, to z definicji $\llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket$ mamy, że

$$(\lambda y. P)[\vec{x}/\vec{N}] \in \llbracket \sigma \rightarrow \rho \rrbracket.$$

Z dowolności \vec{N} otrzymujemy ostatecznie, że $\Gamma \models \lambda y. P$.

□

Twierdzenie 5. (*O silnej normalizacji*) Jeżeli $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \tau$, to $M \in \text{SN}_{\beta}$.

Dowód. Na podstawie Lematu 14, jeśli $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \tau$, to $M \in \llbracket \tau \rrbracket$. Stosując Lemat 11 otrzymujemy tezę. □

Natychmiast widzimy, że własność silnej normalizacji pociąga za sobą własność słabej normalizacji, dlatego pomijamy dowód tej drugiej.

2.4 Typy w stylu Churcha

Przypisanie typu λ -termowi rozpoczynamy zawsze od określenia typów dla λ -zmiennych. Zasadniczo możemy to rozwiązać na dwa sposoby:

1. Możemy przypisać unikalny typ każdej λ -zmiennej przed jej wprowadzeniem. Takie podejście nazywamy *stylem Churcha* albo typowaniem *explicite*, ponieważ deklaracje typowe zmiennych występują jawnie w składni λ -termów. W konsekwencji w podejściu tym nie spotykamy problemu typowalności. Stąd systemy w tym stylu nazywa się również systemami typowanymi (ang. *typed systems*).
2. Inny sposób polega na nie ustalaniu typów zmiennych. Składnia λ -termów nie ulega wówczas zmianie, zaś o typie rozstrzyga algorytm rekonstrukcji typu. Typy w tym stylu były przedmiotem Rozdziału 2. W literaturze powszechnie nazywa się to podejście *stylem Currego* albo typowaniem *implicit*, zaś systemy w takim stylu określa się systemami *przypisywania typu* (ang. *type assignment systems*).

Obydwa podejścia dają w rezultacie takie same systemy typów [SU06, Rozdział 3.4]. Rozwiązaniem kompromisowym jest tzw. typowanie w *stylu de Brujina*⁸ [BDS13, 1A.33] w którym nie ustala się typu wszystkich zmiennych, jednak adnotacje typowe są częścią składni (tak jak w stylu Churcha) i zależą od ustalonego kontekstu.

Zaprezentujemy teraz alternatywną składnię oraz reguły wyprowadzania typów dla systemu typów prostych w stylu Churcha. Wszystkie określenia oraz twierdzenia występujące dotychczas w Rozdziale 2 mają swoje odpowiedniki dla systemu w stylu Churcha [NG14, Rozdział 2.10]. Wyjątek stanowi Lemat 10, które jest zastąpione w tym systemie Lematem 15 o jednoznaczności typu.

2.4.1 Składnia

Zbiór typów \mathbb{T} definiujemy w myśl Definicji 29. Niech U, V będą przeliczalnie nieskończonymi zbiorami zmiennych przedmiotowych, odpowiednio: zmiennych typowych i (λ -zmiennych). Celem zdefiniowania λ -termów w stylu Churcha przeprowadzamy konstrukcję analogiczną do tej przedstawionej w Rozdziale 1: określamy zbiór pretermów $\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}}$, a następnie definiujemy λ -termy jako klasy abstrakcji α -konwersji.

$$\begin{aligned}\mathbb{T} &\leftarrow U \mid (\mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}) \\ \tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}} &\leftarrow V \mid (\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}} \tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}}) \mid (\lambda V : \mathbb{T}. \tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}})\end{aligned}$$

⁸W [SU06] nazywa się to podejście *nieortodoksyjnym stylem Churcha*

Zauważmy, że λ -termy w stylu Churcha różnią się od stylu Currego tylko w wypadku λ -abstrakcji. Z tą jedną modyfikacją definicje zbioru zmiennych wolnych, podstawienia, β - i η -redukcji, kontekstu i wyprowadzenia są analogiczne do tych z Rozdziałów 1 i 2.

2.4.2 Typowanie

$$\begin{array}{c} \Gamma \vdash x : \sigma \text{ (var),} \qquad \text{jeśli } x : \sigma \in \Gamma, \\[10pt] \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (MN) : \tau} \text{ (app),} \\[10pt] \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma. M) : \sigma \rightarrow \tau} \text{ (abs).} \end{array}$$

Zauważmy, że mając zadany kontekst, typ każdego poprawnego λ -termu jest jednoznacznie określony. Jest to istotna różnica, którą wprowadza styl Churcha. W systemach w stylu Currego termy poprawne są zamknięte ze względu na podstawienie typu. Własność, którą wyraża Lemat 15 zachodzi w nich z dokładnością do podstawienia.

Lemat 15. (*O jednoznaczności*) Jeśli $\Gamma \vdash M : \sigma$ i $M \rightarrow_{\beta}^* N$, to $\Gamma \vdash N : \sigma$.

Dowód. Dowód przebiega przez indukcję względem długości wyprowadzenia $\Gamma \vdash M : \sigma$. Szczegóły pomijamy. \square

Przykład 14. Zauważmy, że nie istnieje jeden typ dla reprezentacji funkcji identycznościowej. Jeśli *nat* jest stałą typową, którą reprezentujemy liczby naturalne, to identyczność na zbiorze liczb naturalnych będziemy reprezentowali termem $\lambda x : \text{nat}. x$, na zbiorze funkcji $\mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$, $\lambda x : \text{nat} \rightarrow \text{nat}. x$ i tak dalej. Aby określić ogólną postać identyczności, musimy móc abstrahować po zbiorze typów, czyli parametryzować postać termu typem.

$$\lambda \sigma : *. \lambda x : \sigma. x,$$

gdzie symbolem $*$ oznaczamy typ obiektów będących typami (szczegóły omówimy w Rozdziale 3). Własność tę (polimorfizm parametryczny) miał w pewnym sensie rachunek λ w stylu Currego (Podrozdział 2.3.1).

2.5 Podsumowanie

System typów, który był przedmiotem Rozdziału 2 jest najbardziej elementarnym przypadkiem typowanego rachunku λ ⁹. W literaturze często spotyka się być

⁹Patologicznym przypadkiem jest rachunek λ bez typów, jeśli przyjmiemy, że wszystkie wyrażenia mają w nim dokładnie jeden typ. Argument ten często podejmowany jest na rzecz statycznie

może jeszcze prostszy, równoważny wariant typów prostych, w którym wszystkie typy buduje się wyłącznie z jednej stałej typowej. Pod pojęciem typów prostych rozumie się także szereg rozszerzeń przedstawionego przez nas systemu.

Mają one na ogół szczególny cel praktyczny: na przykład rozszerzenie o typ dla par umożliwiającą elegancką prezentację analogii między intuicjonistycznym rachunkiem zdań, typowanym rachunkiem λ i kategoriami kartezjańsko domkniętymi, znanej szerzej jako izomorfizm Currego-Howarda-Lambeka [GTL89, Rozdział 3.1]. Nie wpływa to jednak na samą istotę typowania, która polega na zależności termów od termów. Jak przekonamy się w Rozdziale 3 zależność tę można rozszerzyć, pozwalając typom na decydowanie o postaci termu.

3 System Girarda/Reynoldsa

W rozdziale tym przedstawimy rachunek λ drugiego rzędu w stylu Churcha. System ten wprowadzony został przez J.-Y. Girarda jako System F i w literaturze szerzej znany jest pod tą nazwą.

3.1 Termy zależne od typów

Definicja 38. (Typy $\mathbb{T}2$) Niech \mathbb{V} będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych. Zmienne te będziemy nazywali *zmiennymi typowymi* i oznaczali literami alfabetu greckiego ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$). Zbiór typów $\mathbb{T}2$ Systemu F określamy w notacji BNF następującym zapisem:

$$\mathbb{T}2 \leftarrow \mathbb{V} \mid (\mathbb{T}2 \rightarrow \mathbb{T}2) \mid (\Pi \mathbb{V} : *. \mathbb{T}2)$$

Za oznaczenia metazmiennych przebiegających zbiorów typów $\mathbb{T}2$ posłużą nam późniejsze litery alfabetu greckiego: $\sigma, \tau, \rho, \dots$ lub następujące litery alfabetu łacińskiego: A, B, T .

Definicja 39. (Pretermy $\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2}$) Niech V będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych. Zmienne te będziemy nazywali *zmiennymi termowymi* i oznaczali literami alfabetu łacińskiego (x, y, z, \dots). Zbiór pretermów $\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2}$ Systemu F określamy w notacji BNF następującym zapisem:

$$\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2} \leftarrow V \mid (\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2} \tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2}) \mid (\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2} \mathbb{T}2) \mid (\lambda V : \mathbb{T}2. \tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2}) \mid (\lambda V : *. \tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2})$$

Wyrażenia postaci $(\lambda V : *. \tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2})$ i $(\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2} \mathbb{T}2)$ nazywamy *polimorficzną abstrakcją* i *polimorficzną aplikacją*, odpowiednio. O zmiennej (termowej lub typowej) występującej bezpośrednio po znaku λ powiemy, że jest związana.

typowanych języków programowania.

Uwaga. Zakładamy, że $V \cap \mathbb{V} = \emptyset$.

Konwencja. Stosujemy standardowe konwencje notacyjne:

- Opuszczamy najbardziej zewnętrzne nawiasy,
- Aplikacja wiąże prawostronnie,
- Aplikacja $i \rightarrow$ wiąże mocniej niż λ – i Π –abstrakcja,
- Kolejne λ – i Π –abstrakcje zmiennych tych samych typów mogą występować pod wspólnym znakiem i wiąże prawostronnie,
- Konstruktor typu \rightarrow wiąże prawostronnie.

Przykładowo: $\Pi\alpha\beta : *. \alpha \rightarrow \beta \rightarrow \alpha \equiv \Pi\alpha : *. (\Pi\beta : *. (\alpha \rightarrow (\beta \rightarrow \alpha)))$.

Wyrażenia λ (λ -termy) w Systemie F to klasy abstrakcji α -konwersji. Konstrukcja ta jest analogiczna do zaprezentowanej w Rozdziale 1.1. Za oznaczenia metazmiennych przebiegające zbiór wyrażeń Systemu F posłużą nam późniejsze litery alfabetu łacińskiego: M, N, P, \dots

Oczywistemu rozszerzeniu ulega szereg pojęć z Rozdziału 2. Poniżej umieszczamy najistotniejsze z nich.

Definicja 40. (Zbiór FV zmiennych wolnych) Przez $FV(M)$ oznaczamy zbiór wszystkich wolnych zmiennych termowych i typowych występujących w $M \in \Lambda_{T2}$.

$$\begin{aligned} FV(x) &= x, \\ FV(\lambda x : \sigma. M) &= FV(\sigma) \cup (FV(M) \setminus \{x\}), \\ FV(MN) &= FV(M) \cup FV(N), \\ FV(\lambda\alpha : *. M) &= FV(M) \setminus \{\alpha\}, \\ FV(M\sigma) &= FV(M) \cup FV(\sigma). \end{aligned}$$

Definicja 41. (Multizbiór Sub podtermów pretermu)

- (1) $Sub(x) = \{x\}$
- (2) $Sub(MN) = Sub(M) \cup Sub(N) \cup \{MN\}$
- (3) $Sub(M\sigma) = Sub(M) \cup \{M\sigma\}$
- (4) $Sub(\lambda x : \alpha. M) = Sub(M) \cup \{\lambda x : \alpha. M\}$
- (5) $Sub(\lambda\sigma : *. M) = Sub(M) \cup \{\lambda\sigma : *. M\}$

Definicja 42. (Podstawienie) Rozszerzamy definicję podstawienia o reguły obej-

mujące zmienne typowe.

$$\begin{aligned}
x[x/P] &= P, \\
y[x/P] &= y, \\
(MN)[x/P] &= M[x/P]N[x/P], \\
(\lambda y : \sigma. M)[x/P] &= \lambda y : \sigma. M[x/P], \text{ gdzie } y \notin FV(P) \cup \{x\}, \\
(M\sigma)[x/P] &= M[x/P]\sigma, \\
(\lambda \beta : *. M)[x/P] &= \lambda \beta : *. M[x/P], \text{ gdzie } \beta \notin FV(P), \\
x[\alpha/\sigma] &= x, \\
(MN)[\alpha/\sigma] &= M[\alpha/\sigma]N[\alpha/\sigma], \\
(\lambda y : \sigma. M)[\alpha/\sigma] &= \lambda y : \sigma. M[\alpha/\sigma], \\
(M\rho)[\alpha/\sigma] &= M\rho[\alpha/\sigma], \\
(\lambda \beta : *. M)[\alpha/\sigma] &= \lambda \beta : *. M[\alpha/\sigma], \text{ gdzie } \beta \notin FV(\sigma) \cup \{\alpha\}.
\end{aligned}$$

Definicja 43. (α -konwersja) Relacją $=_\alpha$ (α -konwersji) nazywamy najmniejszą w sensie mnogościowym zgodną relację równoważności na $\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}2}$ taką, że

- ($\alpha 1$) $\lambda x : \sigma. M =_\alpha \lambda y : \sigma. M[x/y]$, jeśli $M[x/y]$ jest określone i $y \notin FV(M)$.
- ($\alpha 2$) $\lambda \alpha : *. M =_\alpha \lambda \beta : *. M[\alpha/\beta]$, jeśli β nie występuje w M .
- ($\alpha 3$) $\Pi \alpha : *. M =_\alpha \Pi \beta : *. M[\alpha/\beta]$, jeśli β nie występuje w M .

Przykład 15. Rozważmy następujące przykłady α -konwertów:

$$\begin{array}{ll}
\text{a)} \quad \lambda \alpha : *. \lambda x : \alpha. x =_\alpha & \text{b)} \quad \Pi \alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha =_\alpha \\
\lambda \beta : *. \lambda x : \beta. x =_\alpha & \Pi \beta : *. \beta \rightarrow \beta =_\alpha \\
\lambda \beta : *. \lambda y : \beta. y. & \Pi \beta : *. \beta \rightarrow \beta.
\end{array}$$

Odpowiednim modyfikacjom ulegają również pojęcia wprowadzone w Definicji 31 i Definicji 32.

Definicja 44. (Stwierdzenie, deklaracja)

1. Stwierdzeniem nazywamy każdy napis postaci $M : \sigma$, gdzie $M \in \Lambda_{\mathbb{T}2}$ i $\sigma \in \mathbb{T}2$ lub $\sigma : *$, gdzie $\sigma \in \mathbb{T}2$.
2. Deklaracją nazywamy każde stwierdzenie ze zmienną typową lub zmienną termową w miejscu podmiotu.

Definicja 45. ($\lambda 2$ -kontekst, dziedzina, zakres)

(E1) \emptyset jest $\lambda 2$ -kontekstem; oznaczamy go parą nawiasów $()$ lub pomijamy, jeśli nie prowadzi to do niejednoznaczności.

(E2) Jeśli:

- (a) Γ jest $\lambda 2$ -kontekstem,
- (b) $\alpha \in \mathbb{V}$ jest zmienną typową taką, że $\alpha \notin \text{dom}(\Gamma)$,

to $\Gamma, \alpha : *$ jest $\lambda 2$ -kontekstem, gdzie

$$\begin{aligned}\text{dom}(\Gamma, \alpha : *) &= (\text{dom}(\Gamma), \alpha), \\ \text{rg}(\Gamma, \alpha : *) &= \text{rg}(\Gamma) \cup \{*\}.\end{aligned}$$

(E3) Jeśli:

- (a) Γ jest $\lambda 2$ -kontekstem,
- (b) $\rho \in \mathbb{T}2$ jest typem takim, że $\alpha \in \text{dom}(\Gamma)$ dla wszystkich $\alpha \in \text{FV}(\rho)$,
- (c) $x \in V$ jest zmienną termową taką, że $x \notin \text{dom} \Gamma$,

to $\Gamma, x : \rho$ jest $\lambda 2$ -kontekstem, gdzie

$$\begin{aligned}\text{dom}(\Gamma, x : \rho) &= (\text{dom}(\Gamma), x), \\ \text{rg}(\Gamma, x : \rho) &= \text{rg}(\Gamma) \cup \{\rho\}.\end{aligned}$$

$\text{dom}(\Gamma)$ i $\text{rg}(\Gamma)$ nazywamy odpowiednio *dziedziną* i *zakresem* $\lambda 2$ -kontekstu Γ .

Jesli $\Gamma = (a_{11} : a_{12}, \dots, a_{n1} : a_{n2})$ jest $\lambda 2$ -kontekstem, to przez $\Gamma[\alpha/\sigma]$ oznaczamy $\lambda 2$ -kontekst, w którym jesli $a_{i1} \in V$, to a_{i2} zamieniamy na $x_{i2}[\alpha/\sigma]$ dla $1 \leq i \leq n$.

Uwaga. Zauważmy, że przy powyższych rozstrzygnięciach definicyjnych nie zachodzi odpowiednik Twierdzenia 6 (3): nie możemy rozpatrywać dowolnych permutacji kontekstów w sądach $\Gamma \vdash M : T$, ponieważ w myśl Definicji 45 deklaracje zmiennych termowych w poprawnie zbudowanych $\lambda 2$ -kontekstach są uzależnione od poprzedzających je deklaracji typowych.

Naturalnie zachodzi natomiast Lemat 6 (1), który oznacza tyle, że w rozszerzonym kontekście jesteśmy w stanie wyprowadzić co najmniej tyle, ile w pierwotnym. Fakt ten wyraża Lemat 16.

Lemat 16. (*O zwięźaniu*) *Jeśli*

- (a) Γ' i Γ'' są kontekstami takimi, że $\Gamma' \subseteq \Gamma''$
- (b) $\Gamma' \vdash M : \sigma$

to $\Gamma'' \vdash M : \sigma$.

Dowód. Dowód przeprowadzamy przez indukcję względem długości wyprowadzenia sądu. Szczegóły pomijamy $\Gamma' \vdash M : \sigma$. \square

Przykład 16. (a) \emptyset jest $\lambda 2$ -kontekstem na podstawie (E1).

(b) $\alpha : *$ jest $\lambda 2$ -kontekstem na podstawie (E2).

(c) $\alpha : *, x : \alpha \rightarrow \alpha$ jest $\lambda 2$ -kontekstem na podstawie (E3). Zauważmy, że deklaracja $\alpha : *$ wysepuje w kontekście przed $x : \alpha \rightarrow \alpha$.

(d) $\alpha : *, x : \alpha \rightarrow \alpha, \beta : *$ jest $\lambda 2$ -kontekstem na podstawie (E2).

(e) $\Gamma \equiv (\alpha : *, x : \alpha \rightarrow \alpha, \beta : *, y : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta)$ jest $\lambda 2$ -kontekstem na podstawie (E3). Wówczas $\text{dom}(\Gamma) = (\alpha, x, \beta, y)$ i $\text{rg}(\Gamma) = \{*, \alpha \rightarrow \alpha, \beta, (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \beta\}$.

3.2 Typowanie

Wprowadzamy następujące reguły wyprowadzania typu:

$$\begin{array}{ll}
\text{(var)} & \Gamma \vdash x : \sigma, \quad \text{jeśli } x : \sigma \in \Gamma \\
\\
\text{(app)} & \frac{\Gamma \vdash M : \sigma \rightarrow \tau \quad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau} \\
\\
\text{(abs)} & \frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma. M) : \sigma \rightarrow \tau} \\
\\
\text{(form)} & \Gamma \vdash B : *, \quad \text{jeśli } B \in \mathbb{T}2 \text{ i } \text{FV}(B) \subseteq \text{rg } \Gamma \\
\\
\text{(\Pi-e)} & \frac{\Gamma \vdash M : (\Pi \alpha : *. A) \quad \Gamma \vdash B : *}{\Gamma \vdash MB : A[\alpha/B]} \\
\\
\text{(\Pi-i)} & \frac{\Gamma, \alpha : * \vdash M : A}{\Gamma \vdash \lambda \alpha : *. M : \Pi \alpha : *. A}
\end{array}$$

Definicja 46. (Poprawność, typowalność) Powiemy, że term $M \in \mathbf{\Lambda}_{\mathbb{T}2}$ jest *poprawny* lub *typowalny*, jeśli istnieje $\lambda 2$ -kontekst Γ i typ $\rho \in \mathbb{T}2$ taki, że $\Gamma \vdash M : \rho$.

Przykład 17. (a) Niech $\perp \equiv \Pi \sigma : *. \sigma$ i $\Gamma = (\beta : *, x : \perp)$.

1	$\beta : *$	(form)
2	$\mid x : \perp$	(var)
3	$x\beta : \beta$	(Π -e) 2 1
4	$\lambda\beta : *. x\beta : \underbrace{\Pi\beta : *. \beta}_{\perp}$	(Π -i) 3

(b) $\Gamma = (\beta : *, y : \beta, x : \perp)$.

1	$\beta : *$	(form)
2	$\mid y : \beta$	(var)
3	$\mid \mid x : \perp$	(var)
4	$\mid \lambda x : \perp . y : \perp \rightarrow \beta$	(abs) 2
5	$\lambda y : \beta x : \perp . y : \perp \rightarrow \beta$	(abs) 4
6	$\lambda\beta : *. \lambda y : \beta x : \perp . y : \Pi\beta : *. \perp \rightarrow \beta$	(Π -i) 1

(c) Przykład 14 ilustrował, że typy proste nie pozwalają na określenie polimorficznej identyczności. W Systemie F nie sprawia to problemów.

1	$\alpha : *$	(form)
2	$\mid x : \alpha$	(var)
3	$\lambda x : \alpha. x : \alpha \rightarrow \alpha$	(abs) 2
4	$\lambda\alpha : *. \lambda x : \alpha. x : \Pi\alpha : *. \alpha \rightarrow \alpha$	(Π -i) 3

(d) W systemie Girarda/Reynoldsa możemy określić polimorficzne liczebniki Churcha ustalając:

$$\begin{aligned}
\text{Nat} &\equiv \Pi\alpha : *. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \\
\bar{0} &\equiv \lambda\alpha : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha \ x : \alpha. x \\
\bar{1} &\equiv \lambda\alpha : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha \ x : \alpha. fx \\
&\vdots \\
\bar{n} &\equiv \lambda\alpha : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha \ x : \alpha. \underbrace{f \dots (fx)}_{\text{n-razy}}
\end{aligned}$$

Dla przykładu rozważmy typowanie $\bar{2}$:

1	$\alpha : *$	(form)
2	$f : \alpha \rightarrow \alpha$	(var)
3	$x : \alpha$	(var)
4	$fx : \alpha$	(app) 2 3
5	$f(fx) : \alpha$	(app) 2 1
6	$\lambda x : \alpha. f(fx) : \alpha \rightarrow \alpha$	(abs) 5
7	$\lambda f : \alpha \rightarrow \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx) : (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$	(abs) 6
8	$\lambda \alpha : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx) : \underbrace{\Pi \alpha : *. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha}_{\text{Nat}}$	(Π -i) 7

Za pomocą łatwej indukcji względem długości wyprowadzenia możemy przekonać się, że w istocie wszystkie polimorficzne liczebniki Churcha są typu Nat.

(e) Typować możemy również polimorficzne złożenie funkcji.

1	$\gamma : *$	(form)
2	$\beta : *$	(form)
3	$\alpha : *$	(form)
4	$g : \beta \rightarrow \gamma$	(var)
5	$f : \alpha \rightarrow \beta$	(var)
6	$x : \alpha$	(var)
7	$fa : \beta$	(app) 5 6
8	$g(fa) : \gamma$	(app) 4 7
9	$\lambda x : \alpha. g(fa) : \alpha \rightarrow \gamma$	(abs) 8
10	$\lambda f : \alpha \rightarrow \beta x : \alpha. g(fa) :$ $(\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$	(abs) 9
11	$\lambda g : \beta \rightarrow \gamma f : \alpha \rightarrow \beta x : \alpha. g(fa) :$ $(\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$	(abs) 10
12	$\lambda \alpha : *. \lambda g : \beta \rightarrow \gamma f : \alpha \rightarrow \beta x : \alpha. g(fa) :$ $\Pi \alpha : *. (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$	(abs) 11
13	$\lambda \beta \alpha : *. \lambda g : \beta \rightarrow \gamma f : \alpha \rightarrow \beta x : \alpha. g(fa) :$ $\Pi \beta \alpha : *. (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$	(abs) 12
14	$\lambda \gamma \beta \alpha : *. \lambda g : \beta \rightarrow \gamma f : \alpha \rightarrow \beta x : \alpha. g(fa) :$ $\Pi \gamma \beta \alpha : *. (\beta \rightarrow \gamma) \rightarrow (\alpha \rightarrow \beta) \rightarrow \alpha \rightarrow \gamma$	(abs) 13

Jak widzimy procedura wyprowadzania typu odpowiada w istocie rekonstrukcji wyrażenia. Problem typowania w (ortodoksyjnym) stylu Churcha jest trywialny, gdyż zgodnie z Rozdziałem 2.4 założyliśmy, że mamy pełną informację typową o zmiennych przedmiotowych. Czytając wyprowadzenia od dołu do góry rekonstruujemy również kontekst. Mówimy, że składnia Systemu F w stylu Churcha *koduje typowanie*.

3.3 Redukcja

Definicja 47. (β -redukcja) β -redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zgodną na Λ_{T2} relację binarną \rightarrow_β taką, że

$$\begin{aligned} (\lambda x : \sigma. M)N &\rightarrow_\beta M[x/N]. \\ (\lambda \alpha : *. M)T &\rightarrow_\beta M[\alpha/T] \end{aligned}$$

Lemat 17 (podobnie jak Lemat 15) zapewnia nas, że typ termu zachowuje się przy β -redukcji. Praktyczny sens tego twierdzenia polega na tym, że relacja posiadania tego samego typu jest zamknięta na β -konwersję i aby rozstrzygnąć o typie danego termu wystarczy, że znamy typ któregośkolwiek jego β -konwersa.

Lemat 17. (*O redukcji podmiotu*) Jeśli $\Gamma \vdash M : \tau$ i $M \rightarrow_{\beta}^* N$, to $\Gamma \vdash N : \tau$.

Dowód. Dowód przeprowadzamy analogicznie do dowodu Lematu 8, przez indukcję względem długości wyprowadzenia sądu $\Gamma \vdash M : \tau$. Szczegóły pomijamy. \square

Przykład 18. Wróćmy do Przykładu 17 (d). Wyprowadziliśmy w nim sąd:

$$\vdash \lambda\alpha : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx) : \Pi\alpha : *. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha$$

Stosując lemat o zwężaniu (Lemat 16), dla dowolnego $\lambda 2$ -kontekstu Γ wyprowadzalny jest również sąd:

$$\Gamma \vdash \lambda\alpha : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx) : \Pi\alpha : *. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha \rightarrow \alpha \quad (1)$$

Niech Γ będzie takim $\lambda 2$ -kontekstem, że

$$\{\text{nat} : *, \text{zero} : \text{nat}, \text{succ} : \text{nat} \rightarrow \text{nat}\} \subseteq \Gamma,$$

gdzie przez nat , zero i succ oznaczamy dowolnie wybrane zmienne termowe i typowe, odpowiednio. Stosując regułę (Π -e) do (1) i $\Gamma \vdash \text{nat} : *$ otrzymujemy:

$$\Gamma \vdash \lambda f : \text{nat} \rightarrow \text{nat}. \lambda x : \text{nat}. f(fx) \text{ nat} : (\text{nat} \rightarrow \text{nat}) \rightarrow \text{nat} \rightarrow \text{nat} \quad (2)$$

Dalej, stosując regułę (app) do (2) i $\Gamma \vdash \text{succ} : \text{nat} \rightarrow \text{nat}$ mamy, że

$$\Gamma \vdash \lambda x : \text{nat}. f(fx) \text{ nat succ} : \text{nat} \rightarrow \text{nat} \quad (3)$$

Ponownie aplikując (3) do $\Gamma \vdash \text{zero} : \text{nat}$ mamy:

$$\Gamma \vdash f(fx) \text{ nat succ zero} : \text{nat} \quad (4)$$

Na podstawie lematu o redukcji podmiotu (Lemat 17) widzimy, że każdy kolejny redukt w poniższym ciągu ma typ nat .

$$\begin{aligned} \lambda\alpha : *. \lambda f : \alpha \rightarrow \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx) \text{ nat succ zero} &\rightarrow_{\beta} \\ \lambda f : \text{nat} \rightarrow \text{nat}. \lambda x : \text{nat}. f(fx) \text{ succ zero} &\rightarrow_{\beta} \\ (\lambda x : \text{nat}. \text{succ}(\text{succ } x)) \text{ zero} &\rightarrow_{\beta} \\ \text{succ}(\text{succ zero}) & \end{aligned}$$

Odpowiedniej modyfikacji ulega również pojęcie η -redukcji.

Definicja 48. (η -redukcja) η -redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnożącym) zgodną na $\Lambda_{\mathbb{T}2}$ relację binarną \rightarrow_{β} taką, że

$$\begin{aligned}\lambda x : \sigma. Mx &\rightarrow_{\eta} M, \\ \lambda \alpha : *. M\alpha &\rightarrow_{\eta} M.\end{aligned}$$

Zachodzi oczywiście również odpowiednik Lematu 9:

Lemat 18. (*Zachowawczość η -redukcji*) Jeśli $\Gamma \vdash M : \tau$ i $M \rightarrow_{\eta}^* N$, to $\Gamma \vdash N : \tau$.

Dowód. Dowód przeprowadzamy przez indukcję względem długości wyprowadzenia sądu $\Gamma \vdash M : \tau$. Szczegóły pomijamy. \square

Przykład 19. Zwróćmy ponownie uwagę na Przykład 17(a). Ponieważ $\lambda\beta : *. x\beta \rightarrow_{\eta} x$, to ze względu Lemat 18 wyprowadzalny jest również $\Gamma \vdash x : \perp$.

W odpowiednich wersjach zachodzą również Lemat 3 o generowaniu, Lemat 4 o podtermie, Lemat 5 o zmiennych wolnych i Lemat 7 o podstawieniu. We wszystkich przypadkach metoda dowodowa nie odbiega znacząco od odpowiedników z Rozdziałów 1 i 2.

Kolejnym ważnym twierdzeniem, które zachodzi dla Systemu F jest silna normalizacja β -redukcji.

Twierdzenie 6. (*O silnej normalizacji*) Jeżeli $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \tau$, to $M \in \text{SN}_{\beta}$.

Dowód.

Wniosek. Ponieważ wszystkie typowalne termny w Systemie F mają skończone ciągi redukcji, to kombinatory punktu stałego

$$\text{fix} : \Pi \alpha : *. (\alpha \rightarrow \alpha) \rightarrow \alpha$$

nie jest typowalny w tym systemie.

Jako Fakt 7 przedstawimy własność Churcha-Rossera upewniającą nas, że β -redukcja, bez względu na przyjętą strategię, zawsze prowadzi do tych samych rezultatów, a zatem ma sens obliczeniowy. Fakt ten otrzymujemy jako wniosek z lematu Newmana 2, wykazując, że β -redukcja ma słabą własność Churcha-Rossera (WCR) [SU06, Twierdzenie 11.2.12].

Fakt 7. (*Własność Churcha-Rossera*) Relacja β -redukcji ma własność CR.

3.4 Podsumowanie

```

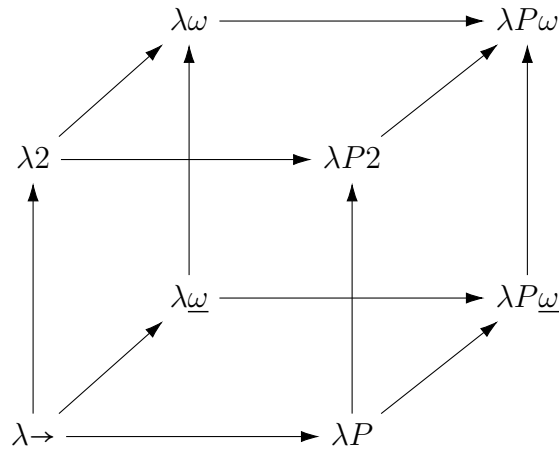
module Fnord where
  comp = \g f x -> g (f x)

comp
  :: forall t_aqz t1_aqB t2_aqD.
    (t_aqz -> t1_aqB) -> (t2_aqD -> t_aqz) -> t2_aqD -> t1_aqB

comp =
  \ (@ t_aqz)
    (@ t1_aqB)
    (@ t2_aqD)
    (g_aqg :: t_aqz -> t1_aqB)
    (f_aqh :: t2_aqD -> t_aqz)
    (x_aqi :: t2_aqD) ->
    g_aqg (f_aqh x_aqi)

```

Na kanwie zaproponowanej przez H. P. Barendregta w [Bar92, Rozdział 5] klasyfikacji rozszerzeń rachunku λ z typami prostymi (tzw. *kostki* λ , Rysunek 4), rozdział ten poświęcimy omówieniu wzajemnych zależności jakie mogą łączyć λ -termy i typy. Zajmować będziemy się wyłącznie systemami w stylu Churcha.



Rysunek 4: Poszczególne systemy klasyfikacji H. Barendregta; kierunek krawędzi \rightarrow oznacza relację \subseteq .

Literatura

- [Alt02] Thorsten Altenkirch. “ α -conversion is easy”. Under Revision. 2002. URL: <https://www.cs.nott.ac.uk/~psztxa/publ/alpha-draft.pdf>.
- [Bar84] H. P. Barendregt. *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*. Elsevier, 1984.
- [Bar92] H. P. Barendregt. “Lambda Calculi with Types”. In: vol. 2. Jan. 1992, pp. 117–309. ISBN: 0198537611.
- [BDS13] Henk Barendregt, Wil Dekkers, and Richard Statman. *Lambda Calculus with Types*. Perspectives in Logic. Cambridge University Press, 2013. DOI: 10.1017/CB09781139032636.
- [Bru72] N.G. de Bruijn. “Lambda Calculus Notation with Nameless Dummies, a Tool for Automatic Formula Manipulation, with Application to the Church-Rosser Theorem”. In: *Indagationes Mathematicae (Proceedings)* 75 (Dec. 1972), pp. 381–392. DOI: 10.1016/1385-7258(72)90034-0.
- [Chu41] Alonzo Church. *The Calculi of Lambda-Conversion*. Princeton University Press, 1941.
- [GTL89] Jean-Yves Girard, Paul Taylor, and Yves Lafont. *Proofs and Types*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 1989. ISBN: 0-521-37181-3.
- [HIN05] RALF HINZE. “THEORETICAL PEARL Church numerals, twice!” In: *Journal of Functional Programming* 15.1 (2005), pp. 1–13. DOI: 10.1017/S0956796804005313.
- [HS08] J. Roger Hindley and Jonathan P. Seldin. *Lambda-Calculus and Combinators: An Introduction*. 2nd ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2008. ISBN: 0521898854, 9780521898850.
- [Hut99] Graham Hutton. “A Tutorial on the Universality and Expressiveness of Fold”. In: *J. Funct. Program.* 9.4 (July 1999), pp. 355–372. ISSN: 0956-7968. DOI: 10.1017/S0956796899003500. URL: <http://dx.doi.org/10.1017/S0956796899003500>.
- [Jan13] Jan Martin Jansen. “Programming in the λ -Calculus: From Church to Scott and Back”. In: *Essays Dedicated to Rinus Plasmeijer on the Occasion of His 61st Birthday on The Beauty of Functional Code - Volume 8106*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013, pp. 168–180. ISBN: 978-3-642-40354-5. DOI: 10.1007/978-3-642-40355-2_12. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-40355-2_12.

- [JKP06] Jan Martin Jansen, Pieter Koopman, and Rinus Plasmeijer. “Efficient Interpretation by Transforming Data Types and Patterns to Functions”. In: Jan. 2006, pp. 73–90.
- [KPJ14] Pieter Koopman, Rinus Plasmeijer, and Jan Martin Jansen. “Church Encoding of Data Types Considered Harmful for Implementations: Functional Pearl”. In: *Proceedings of the 26Nd 2014 International Symposium on Implementation and Application of Functional Languages*. IFL ’14. Boston, MA, USA: ACM, 2014, 4:1–4:12. ISBN: 978-1-4503-3284-2. DOI: 10.1145/2746325.2746330. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/2746325.2746330>.
- [Mar96] P Martin Lof. “On the Meanings of the Logical Constants and the Justifications of the Logical Laws”. In: *Nordic Journal of Philosophical Logic* 1 (Jan. 1996).
- [NG14] Rob Nederpelt and Herman Geuvers. *Type Theory and Formal Proof: An Introduction*. Cambridge University Press, 2014. DOI: 10.1017/CB09781139567725.
- [PL92] Simon L. Peyton Jones and David R. Lester. *Implementing Functional Languages*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1992. ISBN: 0-13-721952-0.
- [SS75] Gerald J. Sussman and Guy L. Steele Jr. *An Interpreter for Extended Lambda Calculus*. Tech. rep. Cambridge, MA, USA, 1975.
- [SU06] Morten Heine Sørensen and Pawel Urzyczyn. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, Volume 149 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics)*. New York, NY, USA: Elsevier Science Inc., 2006. ISBN: 0444520775.
- [Tai67] W. W. Tait. “Intensional Interpretations of Functionals of Finite Type I”. In: *Journal of Symbolic Logic* 32.2 (1967), pp. 198–212. DOI: 10.2307/2271658.
- [Wad89] Philip Wadler. “Theorems for Free!” In: *Proceedings of the Fourth International Conference on Functional Programming Languages and Computer Architecture*. FPCA ’89. Imperial College, London, United Kingdom: ACM, 1989, pp. 347–359. ISBN: 0-89791-328-0. DOI: 10.1145/99370.99404. URL: <http://doi.acm.org/10.1145/99370.99404>.
- [Wel99] J. B. Wells. “Typability and type checking in system F are equivalent and undecidable”. English. In: *Annals of Pure and Applied Logic* 98.1-3 (June 1999), pp. 111–156. ISSN: 0168-0072.
- [Wit53] Ludwig Wittgenstein. *Philosophical Investigations*. Wiley-Blackwell, 1953.

- [Zak07] Mateusz Zakrzewski. “Definable functions in the simply typed lambda-calculus”. In: *CoRR* abs/cs/0701022 (2007). arXiv: cs/0701022. URL: <http://arxiv.org/abs/cs/0701022>.