Izomorfizm Curry'ego-Howarda

Rafał Szczerski

2018
Październik

1 IPC($\to$)

1.1 Język elementarny

Definicja 1.

- Zbiorem Φ formuł IPC($\to$) nazywamy język generowany przez gramatykę

$$\begin{aligned}\Phi &:= \mathrm{V} \mid (\Phi \to \Phi) \mid \bot \\ \mathrm{V} &:= \mathrm{p} \mid \mathrm{V}'\end{aligned}$$

- Wyrażenia powstałe z produkcji V nazywamy *zmiennymi zdaniowymi*. Zmienne zdaniowe oraz $\bot$ są formułami *atomowymi*. Pozostałe wyrażenia nazywamy formułami *złożonymi*.
- W języku podmiotowym wprowadzamy następujące oznaczenia

$$\begin{aligned}\ulcorner\neg\varphi\urcorner &:= \ulcorner\varphi \to \bot\urcorner \\ \ulcorner\top\urcorner &:= \ulcorner\bot \to \bot\urcorner\end{aligned}$$

Konwencja.

1. *Zamiast* $\mathrm{p}', \mathrm{p}'', \mathrm{p}''', \ldots$ *używamy kolejno liter* $\mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r}, \ldots$
2. *Zmienne metasyntaktyczne oznaczamy późniejszymi literami greckiego alfabetu, tj.* $\varphi, \psi, \ldots$
3. $\to$ *jest łączna w prawo.*
4. $\neg$ *ma najwyższy priorytet,* $\to$ *– najniższy.*
5. *Pomijamy najbardziej zewnętrzne nawiasy.*

1.2 Implikacyjny fragment dedukcji naturalnej

Definicja 2.

- Wprowadzamy relację *wyprowadzalności* $\vdash \subset \mathcal{P}(\Phi) \times \Phi$ spełniającą poniższe reguły:

$$\Gamma, \varphi \vdash \varphi \ (\mathrm{Ax}), \qquad \frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \to \psi}\ (\to\mathrm{I}), \qquad \frac{\Gamma \vdash \varphi \to \psi \qquad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi}\ (\to\mathrm{E}).$$

  Każdy element relacji $\vdash$ nazywamy *sądem*.

- *Dowodem* sądu $\Gamma \vdash \varphi$ nazywamy skończone drzewo sądów spełniające poniższe warunki:

1. W korzeniu drzewa znajduje się sąd $\Gamma \vdash \varphi$.
2. Liście są *aksjomatami*, tj. sądami postaci $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$.
3. Każdego rodzica można otrzymać z jego dzieci przez zastosowanie którejś z reguł wyprowadzania nowych sądów.

Definicja 3. Dwójkę $(\Phi, \vdash)$ nazywamy *implikacyjnym fragmentem logiki intuicjonistycznej* i oznaczamy $\mathrm{NJ}(\rightarrow)$.

1.3 Semantyka

Twierdzenie 1. *(O pełności) System dedukcyjny* $\mathrm{NJ}(\rightarrow)$ *jest pełny względem modeli Kripkego.*

Literatura