Spis treści

For a large class of cases of the employment of the word 'meaning' – though not for all – this word can be explained in this way: the meaning of a word is its use in the language. [Wit53]

L. Wittgenstein

The meaning of a proposition is determined by (...) what counts as a verification of it. [Mar96]

P. Martin-Löf

Wstęp

Pojęcia *funkcji* używa się na ogół mając na myśli jedno z dwóch znaczeń:

(a) *funkcji* jako algorytmu, który zwraca wartość dla zadanego argumentu.

(b) *funkcji* w rozumieniu teoriomnogościowym, jako zbior par argument-wartość.

Ujęcie (a) nazywane jest *semantyką operacyjną*. Oddaje dynamiczny charakter procesu obliczania wartości funkcji jako ciągu wykonywanych w czasie elementarnych operacji na zadanym argumencie. W kontekście teorii języków programowania przez operacje elementarne należy rozumieć wykonywanie podstawowych instrukcji procesora. W teorii obliczalności to samo rozumielibyśmy pod pojęciem *funkcji obliczalnej*, zaś algorytmiczny proces otrzymywania wartości nazwalibyśmy *efektywnym*.

Ujęcie (b) odpowiada rozumieniu funkcji jako ustalonego, statycznego zbioru przyporządkowań z którego możemy odczytać wartość. Przypisanie funkcjom takiego znaczenia nazywamy semantyką *denotacyjną*. Wymaga ono dostępu do pełnej informacji o funkcji. Niestety, spełnienie tego wymogu na ogół nie może być efektywne ze względu na złożoność pamięciową konieczną do przeprowadzenia takiego procesu (tzw. *memoizacji*).

1 Rachunek λ bez typów

Niech V będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych $x, y, \ldots$ (indeksowanych być może liczbami naturalnymi). Elementy takiego zbioru będziemy nazywali λ-*zmiennymi.* Ponieważ V jest potencjalnie nieskończony, zastrzegamy sobie możliwość wybierania w razie potrzeby wcześniej nie użytej zmiennej.

Definicja 1. (Zbiór $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ pretermów) Zbiorem pretermów będziemy nazywali najmniejszy (w sensie mnogościowym) zbiór wyrażeń $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ taki, że:

(P1) Jeśli $x \in V$, to $x \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$.

(P2) Jeśli $M, N \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$, to $(M\,N) \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$.

(P3) Jeśli $x \in V$ i $M \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$, to $(\lambda x.\, M) \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$.

Definicję 1 można równoznacznie wyrazić przy pomocy notacji Backusa-Naura. Wówczas ma ona następującą, zwięzłą postać:

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}} \;\leftarrow\; V \mid (\tilde{\mathbf{\Lambda}}\,\tilde{\mathbf{\Lambda}}) \mid (\lambda V.\, \tilde{\mathbf{\Lambda}})$$

Powiemy, że dwa λ-termy są *syntaktycznie równe*, jeśli rozumiane jako ciągi znaków są identyczne. Równość syntaktyczną będziemy oznaczali znakiem $\equiv$.

Elementy $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ będziemy oznaczali literami L, M, N, P, Q, R i ich wariantami z górnymi lub dolnymi indeksami. Wyrażenia postaci (P2) nazywamy *aplikacjami* M do N. Symbol λ występujący w (P3) nazywamy λ-*abstraktorem*, zaś wyrażenia powstałe przez zastosowanie tej reguły to λ-*abstrakcje.* W wyrażeniu postaci $(\lambda x.\, M)$ preterm M jest w *zasięgu* λ-abstraktora, a zmienna x jest przez niego *związana.* Ponadto, będziemy stosowali następujące konwencje notacyjne:

- *najbardziej zewnętrzne nawiasy bedą pomijane,*
- *aplikacja wiąże lewostronnie; wyrażenia postaci* $(PQ)R$ *będą zapisywane w postaci* PQR,
- λ-*abstrakcja wiaże prawostronnie:* $\lambda x_1.\, (\lambda x_2.\, P)$ *zapisujemy* $\lambda x_1.\, \lambda x_2.\, P$,
- *następujące po sobie* λ-*abstrakcje postaci* $\lambda x_1.\, \lambda x_2.\, \ldots \lambda x_n.\, P$ *zapisujemy pod wspólnym* λ-*abstraktorem:* $\lambda x_1\, x_2\, \ldots\, x_n.\, P$.
- n-*krotną aplikację* $P \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ *do siebie zapisujemy skrótowo:* $P^n \equiv \underbrace{P\,P\, \ldots\, P}_{n\text{-}razy}$

Przykład 1. Podajmy kilka przykładów λ-pretermów pogrupowanych ze względu na ich konstrukcję.

(P1): $x,\ y,\ z.$

(P2): $x\,x,\ y\,x,\ x\,(x\,z),$
$(\lambda x.\, (xz))y,\ y\,(\lambda x.\, (x\,z)),\ (\lambda x.\, x)\,(\lambda x.\, x).$

(P3): $\lambda x.\,(x\,z),\ \lambda yz.\,x,\ \lambda x.\,(\lambda x.\,(x\,x))$.

Podwyrażenia λ-pretermu mogą być wzajemnie identyczne i występować wielokrotnie. Obserwację tę ujmuje następująca definicja.

Definicja 2. (Multizbiór Sub podtermów pretermu)

(1) $\mathrm{Sub}(x) = \{x\}$

(2) $\mathrm{Sub}(MN) = \mathrm{Sub}(M) \cup \mathrm{Sub}(N) \cup \{M\,N\}$

(3) $\mathrm{Sub}(\lambda x.\,M) = \mathrm{Sub}(M) \cup \{\lambda x.\,M\}$

Elementy multizbioru $\mathrm{Sub}(M)$ nazywamy *podtermami* M. Jeśli L jest podtermem M, ale $L \not\equiv M$, to L nazywamy podtermem *właściwym.*

Przykład 2. Podtermy wybranych λ-pretermów.

$$
\begin{array}{ll}
\text{(a)} & \mathrm{Sub}\,(\lambda x.\,x\,x) = \left\{(\lambda x.\,x\,x)^1,\ (x\,x)^1,\ x^2\right\} \\
\text{(b)} & \mathrm{Sub}\,((\lambda x.\,x\,x)\ (\lambda x.\,x\,x)) = \\
 & \quad = \left\{((\lambda x.\,x\,x)\,(\lambda x.\,x\,x))^1,\ (\lambda x.\,x\,x)^2,\ (x\,x)^2,\ x^4\right\}
\end{array}
$$

W powyższych przykładach użyliśmy standardowej notacji w górnym indeksie umieszczając krotność występowania elementu.

Definicja 3. (Zbiór FV zmiennych wolnych) Dla dowolnego pretermu M określamy zbiór $\mathrm{FV}(M)$ *zmiennych wolnych* w M w następujący sposób:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{FV}(x) &= \{x\} \\
\mathrm{FV}(\lambda x.\,P) &= \mathrm{FV}(P) \setminus \{x\} \\
\mathrm{FV}(PQ) &= \mathrm{FV}(P) \cup \mathrm{FV}(Q)
\end{aligned}
$$

Jesli $\mathrm{FV}(M) = \varnothing$, to mówimy, że M jest *domknięty* lub nazywamy M *kombinatorem.*

Przykład 3. (a) $\mathrm{FV}(\lambda x.\,x\,y) = \{y\}$

(b) $\mathrm{FV}(x\,(\lambda x.\,x\,y)) = \{x,\ y\}$

(c) $\mathrm{FV}(\lambda xyz.\,xy) = \varnothing$

Definicja 4. (Podstawienie) Dla dowolnych M, N $\in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ i $x \in V$ przez $N[x/N]$ oznaczamy rezultat podstawienia termu N za wszystkie wolne wystąpienia zmiennej x w M, o ile w rezultacie podstawienia nie zostaną związane żadne zmienne wolne występujące w N. W takim wypadku:

(S1) $x[x/N] = N$

(S2) $y[x/N] = y$, o ile $x \not\equiv y$

(S3) $(PQ)[x/N] = P[x/N]\,Q[x/N]$

(S4) $(\lambda y.\, P)[x/N] = \lambda y.\, P[x/N]$, gdzie $x \not\equiv y$ i $y \notin \mathrm{FV}(N)$

(S5) $(\lambda x.\, P)[x/N] = \lambda x.\, P$

Lemat 1. *(O podstawieniu) Niech M, N, $L \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ i niech ponadto $x \not\equiv y$ oraz $x \notin \mathrm{FV}(L)$. Wówczas*

$$M[x/N][y/L] \equiv M[y/L]\,[x/N\,[y/L]]\,. \tag{1}$$

Dowód. Dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem M. Rozważmy następujące przypadki:

i) M jest zmienną. Wówczas:

   a. Jeśli $M \equiv x$, to obie strony (1) po podstawieniu są postaci $N[y/L]$.

   b. Jeśli $M \equiv y$, to ponieważ $x \not\equiv y$ i $x \notin \mathrm{FV}(M)$, po wykonaniu podstawienia po lewej stronie (1) otrzymujemy $M[x/N][y/L] \equiv L$. Ponieważ $x \notin \mathrm{FV}(L)$, to po wykonaniu podstawienia po prawej stronie widzimy, że obydwie strony są identyczne.

   c. Jeśli $M \equiv z$ i $z \not\equiv x$ oraz $z \not\equiv y$, to obydwie strony (1) sa identyczne.

ii) $M \equiv PQ$ dla pewnych P, $Q \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$. Wówczas korzystając z założenia indukcyjnego wnosimy, że

$$P[x/N][y/L] = P[y/L]\,[x/N\,[y/L]]\,,$$
$$Q[x/N][y/L] = Q[y/L]\,[x/N\,[y/L]]\,.$$

Mając na względzie (S3) widzimy, że twierdzenie zachodzi i w tym przypadku.

iii) Jeśli $M \equiv \lambda z.\, P$ oraz $z \equiv x$ lub $z \equiv y$, to z (S'5) widzimy, że obydwie strony (1) sa identyczne. Przypuśćmy, że $z \not\equiv x$ i $z \not\equiv y$ i $z \notin \mathrm{FV}(L)$. Wówczas na podstawie założenia indukcyjnego mamy:

$$\begin{aligned}(\lambda z.\, P)[x/N][y/L] &= \lambda z.\, P[x/N][y/L] = \\ &= \lambda z.\, P[y/L][x/N[y/L]] = \\ &= (\lambda z.\, P)[y/L][x/N[y/L]].\end{aligned}$$

□

Wniosek 1. *Jesli $M[x/y]$ jest określone i $y \notin \mathrm{FV}(M)$, to $M[x/y][y/x]$ jest określone oraz $M[x/y][y/x] = M$.*

Dowód. Mając na uwadze Lemat 4 dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem M. □

1.1 Wyrażenia λ

Na ogół chcielibyśmy utożsamiać pretermy, które różnią się wyłącznie zmiennymi związanymi, tak jak w przypadku wyrażeń $\lambda x.\, zx$ i $\lambda y. zy$. W takim wypadku powiemy o nich, że są swoimi *α-wariantami* lub że są ze sobą w relacji *α-konwersji.*

Definicja 5. (α-konwersja) Relacją $=_\alpha$ (α-konwersji) nazywamy najmniejszy w sensie mnogościowym praporządek na $\tilde{\mathbf{\Lambda}}$ taki, że

(α1) Jeśli $y \notin \mathrm{FV}(M)$ oraz $M[x/y]$ jest określone, to $\lambda x.\, M \;=_\alpha\; \lambda y.\, M[x/y]$

(α2) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla dowolnego $x \in V$ zachodzi $\lambda x.\, M =_\alpha \lambda x.\, N$

(α3) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla dowolnego $Z \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ zachodzi $MZ =_\alpha NZ$

(α4) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla dowolnego $Z \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ zachodzi $ZM =_\alpha ZN$

Przykład 4.

$$\begin{aligned} \lambda xy.\, x(xy) &\equiv \lambda x.\, (\lambda y.\, x(xy)) \\ &\equiv_\alpha \lambda x.\, (\lambda z.\, x(xz)) \\ &\equiv_\alpha \lambda v.\, (\lambda z.\, v(vz)) \\ &\equiv \lambda vz.\, v(vz). \end{aligned}$$

Wniosek 2. *Relacja $=_\alpha$ jest relacją równoważności.*

Dowód. Wystarczy, że pokażemy, że relacja $=_\alpha$ jest symetryczna. Dowód przebiega przez indukcję względem Definicji 5. Rozważmy następujące przypadki:

i) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji zwrotności $=_\alpha$, to $M \equiv N$, a zatem również $N \equiv M$. Stąd $N =_\alpha M$.

ii) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji przechodniości $=_\alpha$, to istnieje $L \in \tilde{\mathbf{\Lambda}}$ takie, że $M =_\alpha L$ i $L =_\alpha N$. Wówczas z założenia indukcyjnego $N =_\alpha L$ i $L =_\alpha M$. Z przechodniości relacji $=_\alpha$ otrzymujemy spodziewaną tezę.

iii) Przypuśćmy, że $M =_\alpha N$ w konsekwencji (α1) dla $M \equiv \lambda x.\, M'$ i $N \equiv \lambda y.\, M'[x/y]$. Ponieważ $x \notin \mathrm{FV}(M'[x/y])$, to ze względu na Wniosek 1 mamy, że $M'[x/y][y/x] = M'$. Zatem, na podstawie (α1):

$$\lambda y.\, M'[x/y] =_\alpha \lambda x.\, M'[x/y][y/x].$$

iv) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji (α2), gdzie $M = \lambda x.\, M'$ i $N = \lambda x.\, N'$ dla $M' =_\alpha N'$, to z założenia indukcyjnego $N' =_\alpha M'$ i w konsekwencji (α2) mamy, że $N =_\alpha M$.

v) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji (α3) dla $M \equiv M'Z$ i $N \equiv N'Z$ takich, że $M' =_\alpha N'$, to z założenia indukcyjnego oczywiście $N' =_\alpha M'$, a zatem z (α3) $N =_\alpha M$.

vi) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji (α3), to postępujemy jak w przypadku (v). □

Definicja 6. (Zbiór $\mathbf{\Lambda}$ λ-termów) Każdą klasę abstrakcji relacji $=_\alpha$ nazywamy λ-termem. Zbiór wszystkich λ-termów $\mathbf{\Lambda}$ to zbiór ilorazowy relacji α-konwersji:

$$\mathbf{\Lambda} = \left\{ [M]_{=_\alpha} \mid M \in \tilde{\mathbf{\Lambda}} \right\}$$

Konwencja. Wprowadzamy następujące konwencje notacyjne:

$$\begin{aligned} &x = [x]_{=_\alpha}, \\ &PQ = [M'N']_{=_\alpha}, \text{ gdzie } M = [M']_{=_\alpha} \text{ i } N = [N']_{=_\alpha}, \\ &\lambda x.\, M = [\lambda x.\, M']_{=_\alpha}, \text{ gdzie } N = [N']_{=_\alpha}. \end{aligned}$$

Twierdzenie 1. *Każdy $M \in \mathbf{\Lambda}$ ma jedną z poniższych postaci:*

(1) $M \equiv \lambda x_1 \ldots x_n.\ y\, N_1 \ldots N_m$, *gdzie* $n, m \geq 0$ *i* $y \in \mathrm{V}$

(2) $M \equiv \lambda x_1 \ldots x_n.\ (\lambda y.\ N_0)\, N_1 \ldots N_m$, *gdzie* $n \geq 0$ *i* $m \geq 1$

O λ-termach postaci (1) i (2) mówimy, że są w *czołowej postaci normalnej* (HNF, ang. *head normal form*) albo w *słabej czołowej postaci normalnej* (WHNF, ang. *weak head normal form*), odpowiednio.

Dowód. Z definicji λ-term M jest albo zmienną, albo aplikacją postaci PQ, albo abstrakcją postaci $(\lambda x.\, P)$. Wówczas mamy nastepujące przypadki:

i) Jeśli M jest zmienną, to wówczas M jest postaci (1).

ii) Jeśli M jest aplikacją, to wówczas $M \equiv P_0 P_1 \ldots P_m$, gdzie P_0 nie jest aplikacją. Wówczas M jest postaci (1) albo postaci (2) dla $n = 0$, w zależności od tego czy P_0 jest zmienną (wówczas jest to przypadek (1)) czy abstrakcją (wówczas jest to przypadek (2)).

iii) Jeśli M jest abstrakcją, to wówczas $M \equiv \lambda x_1\, x_2 \ldots x_m.\ P_0\, P_1 \ldots P_n$, gdzie P_0 abstrakcją już nie jest. Wówczas P_0 jest albo zmienną (przypadek (1)) albo aplikacją (przypadek (2)). □

Przykład 5. $\lambda x.(\lambda y.\, y)\, M$ jest w w postaci WHNF, ale nie jest w postaci HNF, ponieważ zawiera redeks czołowy $(\lambda y.\, y)M$.

Na zbiór $\mathbf{\Lambda}$ przenoszą się pojęcia podtermu, zmiennych wolnych i operacji podstawienia definiowane uprzednio dla pretermów.

Definicja 7. (Multizbiór Sub podtermów λ-termu) Dla dowolnego λ-termu $M = [M']_{=_\alpha}$ okreslamy

$$\mathrm{Sub}(M) = \mathrm{Sub}(M'),$$

gdzie $\mathrm{Sub}(M')$ jest multizbiorem podwyrażeń pretermu M' zdefiniowanym w myśl Definicji 2.

Definicja 8. (Zbiór zmiennych wolnych FV) Dla dowolnego λ-termu $M = [M']_{=_\alpha}$ określamy zbiór $\mathrm{FV}(M)$ *zmiennych wolnych* w M

$$\mathrm{FV}(M) = \mathrm{FV}(M'),$$

gdzie $\mathrm{FV}(M')$ jest zbiorem zmiennych wolnych pretermu M' zdefiniowanym w myśl Definicji 3.

Definicja 9. (Podstawienie) Niech $M = [M']_{=_\alpha}$ i $N = [N']_{=_\alpha}$ i niech $M'[x/N']$ będzie określone w myśl Definicji 4. Wówczas

$$M[x/N] = [M'[x/N']]_{=_\alpha}.$$

Operacja podstawienia wymaga jednak pewnej delikatności. Rozważmy następującą relację:

$$\lambda x.\, zx =_\alpha \lambda y.\, zy$$

Zauważmy, że traktując podstawienie w sposób naiwny, mamy, że $(\lambda x.\, zx)[z/x] \neq_\alpha (\lambda y.\, zy)[z/x]$, a więc tracimy pożądaną własność niezmienniczości α-konwersji względem podstawienia. Stąd w Definicji 4 wymóg, aby podstawienie nie prowadziło do uszczuplenia zbioru zmiennych wolnych. Alternatywnym rozwiązaniem jest określenie podstawienia, które wprowadzałoby do wyrażenia nową zmienną i prowadziło w konsekwencji do abstrahowania po wcześniej nie występujacych zmiennych:

$$(\lambda x.\, M)[y/N] = \lambda x'.\, M[x/x'][y/N],$$

w przypadku, gdy $x \not\equiv y$, gdzie $x' \notin \mathrm{FV}(M)$ i $x' \notin \mathrm{FV}(N)$. Rozstrzygnięcie takie przytacza się w [HS08]. Po uwzględneniu odpowiednich modyfikacji, Definicja 4 przyjmuje następującą postać:

Definicja 4'. *(Podstawienie')*

(S'1) $x[x/N] = N$

(S'2) $y[x/N] = y,$ *o ile* $x \not\equiv y$

(S'3) $(PQ)[x/N] = P[x/N]\, Q[x/N]$

(S'4) $(\lambda x.\, P)[x/N] = \lambda x.\, P$

(S'5) $(\lambda y.\, P)[x/N] = \lambda y.\, P$, *jeśli* $x \notin \mathrm{FV}(P)$

(S'6) $(\lambda y.\, P)[x/N] = \lambda y.\, P[x/N]$, *gdzie* $x \in \mathrm{FV}(P)$ *i* $y \notin \mathrm{FV}(N)$

(S'7) $(\lambda y.\, P)[x/N] = \lambda z.\, P[y/z][x/N]$, *gdzie* $x \in \mathrm{FV}(P)$ *i* $y \in \mathrm{FV}(N)$

przy czym w (S'7) wymagamy, aby zmienna z nie występowała wcześniej w termach N i P jako zmienna wolna, zaś dla (S'5)-(S'7) dodatkowo $y \not\equiv x$.

Uwaga 1. Każde podstawienie $[x/N]$ jest funkcją z $\mathbf{\Lambda} \to \mathbf{\Lambda}$, gdzie $x \in V$ i $N \in \mathbf{\Lambda}$ są dowolnymi parametrami. Zbiór S podstawień ma strukturę monoidu z działaniem składania

$$M([x_2/N_2] \circ [x_1/N_1]) = (M[x_1/N_1])[x_2/N_2] \equiv M[x_1/N_1][x_2/N_2]$$

dla dowolnych $[x_1/N_1]$, $[x_2/N_2] \in S$, o ile S posiada element neutralny ι taki, że

$$M\iota = M, \text{ gdzie } [x/x] = \iota \text{ dla dowolnego } x \in V.$$

W literaturze znajdujemy mnogość propozycji, które w ten czy inny sposób starają się ułatwić rzeczywistą implementację podstawienia. Na szczególną uwagę zasługują tutaj tak zwane *indeksy de Bruijna*. Zaproponowana przez N. G. de Brujina w [Bru72] notacja eliminuje bezpośrednie występowanie symboli zmiennych w λ-termach, zastępując je liczbą naturalną wyrażającą głębokość zagnieżdżenia odpowiedniej λ-abstrakcji przez którą jest związana, przykładowo:

$$\lambda f.\, (\lambda x.\, (f(xx))\lambda x.\, (f(xx))) \equiv_{deBrujin} \lambda(\lambda 2(11))\lambda 2(11)$$

Historycznie wiąże się ta notacja z jego pracami nad systemem komputerowo wspomaganego dowodzenia twierdzeń AUTOMATH. Rozwiązanie takie, podobnie jak w przypadku tzw. logik kombinatorów (np. rachunku SKI), eliminuje konieczność utożsamiania termów przez α-konwersję, ale istotnie zmniejsza ich czytelność.

Szerszy komentarz dotyczący dotychczasowych prób uchwycenia operacji podstawienia można prześledzić w [Alt02]. Nasze rozważania opierają się w tej materii przeważająco na [SU06]. Technikalia definiowania λ-termow jako klas α-konwersji są na ogół w literaturze pomijane.

Definicja 10. (Podstawienie jednoczesne) Dla dowolnego $M \in \mathbf{\Lambda}$, ciągu λ-zmiennych $\vec{x}$ i ciągu λ-termów $\vec{N}$ określamy:

($\vec{s}1$) $x_i[\vec{x}/\vec{N}] = N_i$ dla $i \in \mathbb{N}$.

($\vec{s}2$) $y[\vec{x}/\vec{N}] = y$ o ile dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$, $y \not\equiv x_i$.

($\vec{s}3$) $(PQ)[\vec{x}/\vec{N}] = P[\vec{x}/\vec{N}]Q[\vec{x}/\vec{N}]$

($\vec{s}4$) $(\lambda y.\, P)[\vec{x}/\vec{N}] = \lambda y.\, P[\vec{x}/\vec{N}]$, jeśli $y \neq x_i$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$ i $y \notin \bigcup_{i \in \mathbb{N}} FV(N_i)$

Konwencja. Jeśli $N_i \equiv x_i$ dla wszystkich poza skończenie wieloma $i_1, i_2, \ldots, i_n \in \mathbb{N}$, to $[x_{i_1}/N_{i_1}, x_{i_2}/N_{i_2}, \ldots, x_{i_n}/N_{i_n}] \equiv [\vec{x}/\vec{N}]$.

Przykład 6. Zauważmy, że podstawienia w myśl Definicji 4 i Definicji 10 mogą, ale nie muszą, prowadzić do różnych rezultatów.

a) $(xy)[y/x][x/u] = uu,$
$(xy)[y/x, x/u] = ux.$

b) $(\lambda x.\, yx)[x/y][y/z] = \lambda x.\, zx,$
$(\lambda x.\, yx)[x/y, y/z] = \lambda x.\, zx.$

1.2 Redukcja

Sens obliczeniowy λ-termom nadajemy przez określenie na $\mathbf{\Lambda}$ operacji β- i η-redukcji. Pożądane jest, żeby operacje te wykonywane na podtermach pozostowały w *zgodzie* ze strukturą całego λ-termu.

Definicja 11. (Relacja zgodna) Relację binarną $\mathcal{R}$ na zbiorze $\mathbf{\Lambda}$ nazywamy *zgodną*, jeśli dla dowolnych M, N, $P \in \mathbf{\Lambda}$ zachodzą następujące warunki:

(c1) Jeśli $M \mathcal{R} N$, to $(\lambda x.\, M)\, \mathcal{R}\, (\lambda x.\, N)$ dla dowolnej λ-zmiennej x.

(c2) Jeśli $M \mathcal{R} N$, to $(MP)\, \mathcal{R}\, (NP)$.

(c3) Jeśli $M \mathcal{R} N$, to $(PM)\, \mathcal{R}\, (PN)$.

Przez *domknięcie relacji* $\mathcal{R}_1$ będziemy rozumieli najmniejszą (w sensie mnogościowym) relację $\mathcal{R}_2$ taką, że $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$. Z pewnego rodzaju domknięciami, ze względu na ich szczególną rolę, wiążemy następującą notację:

(a) Przez $\mathcal{R}^+$ oznaczamy przechodnie domknięcie relacji $\mathcal{R}$.

(b) Przez $\mathcal{R}^*$ oznaczamy zwrotnie domknięcie relacji $\mathcal{R}^+$.

(c) Przez $=_{\mathcal{R}}$ oznaczamy symetryczne domknięcie relacji $\mathcal{R}^*$.

Dla lepszego zrozumienia powyższych operacji warto zauważyć, że (b) wyznacza praporzadek, który w odniesieniu do redukcji określonych na $\mathbf{\Lambda}$ można rozumieć jako graf skierowany (w przypadku $\mathbf{\Lambda}$ być może nieskończony) w którym krawędzie odpowiadają możliwym krokom obliczenia, zaś (c) – kongruencję, która znów w szczególnym odniesieniu do λ-termów, będzie dokonywała podziału w $\mathbf{\Lambda}$ ze względu na rezultat obliczenia.

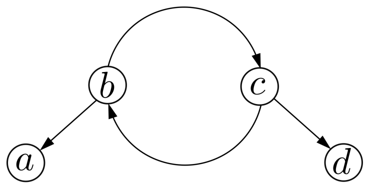
Definicja 12. Niech $\to$ będzie relacją binarną w zbiorze A.

(CR) Powiemy, że $\to$ ma *własność Churcha-Rossera*, jeśli dla dowolnych a, b, $c \in A$ takich, że $a \to^* b$ oraz $a \to^* c$ istnieje $d \in A$ takie, że $b \to^* d$ i $c \to^* d$. Innymi słowy, przemienny jest diagram:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r, "*"] \arrow[d, "*"'] & b \arrow[d, "*"] \\ c \arrow[r, "*"] & d \end{tikzcd}$$

(WCR) Powiemy, że $\to$ ma *słabą własność Churcha-Rossera*, jesli dla dowolnych a, b, $c \in A$ takich, że $a \to b$ oraz $a \to c$ istnieje $d \in A$ takie, że $b \to^* d$ i $c \to^* d$. Innymi słowy, przemienny jest diagram:

$$\begin{tikzcd} a \arrow[r] \arrow[d] & b \arrow[d, "*"] \\ c \arrow[r, "*"] & d \end{tikzcd}$$



Rysunek 1: Rozważmy graf skierowany, w którym krawędzie odpowiadają relacji $\to$ w zbiorze $\{a, b, c, d\}$. Widzimy, że relacja $\to$ ma własnosność WCR, ale nie ma własności CR.

Definicja 13. (Postać normalna) Powiemy, że $x \in A$ jest *redukowalny*, jeśli istnieje $y \in A$ takie, że $x \to y$. W przeciwnym wypadku powiemy, że x jest w *postaci normalnej* i będziemy pisali $x \in \mathrm{NF}$.

Element $y \in A$ nazywamy *postacią normalną* $x \in A$, jesli $x \to^* y$ i $y \in \mathrm{NF}$. Jeśli y jest postacią normalną x i y jest jedyną postacią normalną x, to piszemy $x \downarrow y$. W przeciwnym wypadku, czyli jeśli istnieją $y, z \in \mathrm{NF}, y \neq z$ takie, że $x \to^* y$ i $x \to^* z$, powiemy, że x jest *niejednoznaczny.*

Definicja 14. Niech $\to$ będzie relacją binarną na zbiorze A.

(WN) Powiemy, że relacja $\to$ jest *słabo normalizująca*, jeśli dla dowolnego $a \in A$ istnieje $a' \in \mathrm{NF}$ taki, że $a \to^* a'$. W takim wypadku o $a \in A$ będziemy mówili, że jest *słabo normalizowalny* i pisali $a \in \mathrm{WN}$.

(SN) Powiemy, że relacja $\to$ jest *silnie normalizująca*, jeśli nie istnieje nieskończony ciąg relacji $a_0 \to a_1 \to a_2 \to \ldots$. W takim wypadku o $a \in A$ będziemy mówili, że jest *silnie normalizowalny* i pisali $a \in \mathrm{SN}$.

Twierdzenie 2. *(Lemat Newmana) Niech $\to$ bedzie relacją binarną mającą własność SN. Jeśli $\to$ ma własność WCR, to $\to$ ma własność CR.*

Dowód. Niech $\to$ będzie relacją binarną na A o własności SN i WCR. Ponieważ $\to$ jest SN, to każdy a jest normalizowalny.

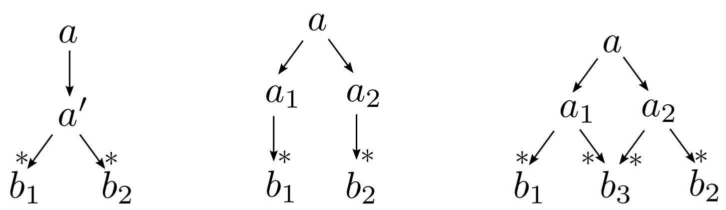
Jeśli A nie zawiera elementów niejednoznacznych, to twierdzenie zachodzi w sposób trywialny. Przypuśćmy, że $a \in A$ jest niejednoznaczny. Twierdzimy, że istnieje $a' \in A$ taki, że $a \to a'$ i a' jest niejednoznaczny. Niech $b_1, b_2 \in \mathrm{NF}$, $b_1 \neq b_2$ i $a \to^* b_1$ oraz $a \to^* b_2$. Ponieważ $b_1 \neq b_2$, to istnieją a_1, $a_2 \in A$ takie, że:

$$a \to a_1 \to^* b_1 \quad \text{oraz} \quad a \to a_2 \to^* b_2$$

Jeśli $a_1 = a_2$, to $a' = a_1 = a_2$ i wystarczy wybrać $a' = a_1$. Jeśli jednak $a_1 \neq a_2$, to z własności WCR istnieje $b_3 \in A$ taka, że $a_1 \to^* b_3$ oraz $a_2 \to^* b_3$. Z własności SN możemy przyjąć, że b_3 jest w postaci normalnej. Zachodzą więc dwa przypadki:

i) $a_1 = a_2$. Wówczas wystarczy ustalić $a' = a_1$ albo $a' = a_2$ (Rysunek 2a).

ii) $a_1 \neq a_2$ (Rysunek 2b). Wówczas z WCR istnieje $b_3 \in A$ takie, że $a_1 \to^* b_3$ oraz $a_2 \to^* b_3$ (Rysunek 2c). Przypuśćmy, że $b_3 \in \mathrm{NF}$. Ponieważ $b_1 \neq b_3$, to $b_3 \neq b_1$ lub $b_3 \neq b_2$, zatem możemy wybrać $a' = a_1$ albo $a' = a_2$.



(a) (b) (c)

Rysunek 2: Warianty konstruowania redukcji.

Stosując powyższe rozumowanie do a' otrzymujemy kolejny element niejednoznaczny. a zatem możemy skontruować nieskończony ciąg redukcji, wbrew założeniu, że relacja $\to$ jest SN. Zatem A nie zawiera elementów niejednoznacznych. □

Definicja 15. (β-redukcja) β-redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zgodną na $\mathbf{\Lambda}$ relację binarną $\to_\beta$ taką, że

$$(\lambda x.\, M)N \to_\beta M[x/N].$$

β-*redeksami* bedziemy nazywali wyrażenia postaci $(\lambda x.\, M)N$, zaś rezultat ich β-redukcji w postaci termu $M[x/N]$ – β-*reduktem*. Przez $\rightarrow^+_\beta$, $\rightarrow^*_\beta$, $=_\beta$ oznaczamy odpowiednie domknięcia relacji β-redukcji. Symbolem $\leftarrow_\beta$ oznaczać będziemy relację odwrotną do β-redukcji, zaś przez $\underset{\beta}{\leftrightarrow}$ jej symetryczne domknięcie.

Ciągiem β-redukcji nazywamy kazdy skończony lub nieskończony ciąg λ-termów M_0, M_1, ... taki, że $M_0 \rightarrow_\beta M_1 \rightarrow_\beta \ldots$

Relację $=_\beta$ nazywamy β-*konwersją*. Zauważmy, że $M =_\beta N$ wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje skończony ciąg λ-termów $M \equiv M_0$, M_1, ..., $M_n \equiv N$ taki, że $M_i \rightarrow_\beta M_{i+1}$ lub $M_{i+1} \rightarrow_\beta M_i$ dla $0 \leq i \leq n$.

Przykład 7. Wszystkie pary λ-termów ze zbioru

$$\{(\lambda x.\,(\lambda y.\, yx)\, z)\, v,\ (\lambda y.\, yv)\, z,\ (\lambda x.\, zx)\, v,\ zv\}$$

są swoimi β-konwersami. Mamy:

$$\begin{gathered}(\lambda y.\, yv)z \rightarrow_\beta zv\ \leftarrow_\beta (\lambda x.\, zx)v,\\ (\lambda y.\, yv)z \leftarrow_\beta (\lambda x.\,(\lambda y.\, yx)z)v \rightarrow_\beta (\lambda x.\, zx)v.\end{gathered}$$

Lemat 2. *Dla dowolnych $N, Q \in \mathbf{\Lambda}$, jeśli $N[y/Q] \in \mathrm{SN}_\beta$, to $N \in \mathrm{SN}_\beta$. Jeśli dodatkowo $y \in \mathrm{FV}(N)$, to także $Q \in \mathrm{SN}_\beta$.*

Dowód. Dowód przeprowadzamy przez indukcję względem definicji 4'. □

Konwencja. Składnię rachunku λ często rozszerza się o wyrażenia let pozwalające konstruować β-redeksy w czytelny sposób. Rozszerzenie ma następującą postać:

$$\text{let } x{=}N \text{ in } M \equiv (\lambda x.\, M)N$$

Jest to przykład tzw. *cukru syntaktycznego*, czyli wtórnych rozszerzeń języka, które ułatwiają jego użycie. Wyrażenia let w których $M \equiv \lambda y.M'$ dla pewnego $M' \in \mathbf{\Lambda}$ nazywamy *domknięciami*[1] (ang. *closure*). Nieformalnie, pozwalają one na przypisywanie wartości zmiennym o tzw. *zakresie leksykalnym.*

Definicja 16. (Strategia redukcji) Strategią redukcji nazywamy każde odwzorowanie $S : \mathbf{\Lambda} \rightarrow \mathbf{\Lambda}$ postaci

$$S(M) = \begin{cases} M, & \text{jeśli } M \in \mathrm{NF}_\beta,\\ M', & \text{jeśli } M \rightarrow_\beta M'.\end{cases}$$

Strategię S nazywamy *normalizującą*, jeśli dla każdego $M \in \mathrm{WN}_\beta$ istnieje $i \in \mathbb{N}$ takie, że $F^i(M) \equiv \underbrace{F(F(\ldots(F}_{i\text{-razy}}(M))\ldots)) \in \mathrm{NF}_\beta$.

[1]Idiom ten w literaturze poświęconej językom programowania z rodziny Lisp powszechnie występuje pod nazwą wyrażeń *let-over-lambda*.

Przykład 8. (a) Oznaczmy $\mathrm{Y} \equiv \lambda f.\,(\lambda x.\,(f(xx))\lambda x.\,(f(xx)))$ i niech F będzie dowolnym λ-termem. Wówczas otrzymujemy nieskończony ciąg redukcji postaci

$$\begin{aligned}
\mathrm{Y}F &\equiv (\lambda f.\,(\lambda x.\,(f(xx))\lambda x.\,(f(xx))))F \\
&\to_\beta (\lambda x.\,F(xx))\lambda x.\,F(xx) \\
&\to_\beta F((\lambda x.\,F(xx))\lambda x.\,F(xx)) \\
&\to_\beta F(\underbrace{F((\lambda x.\,F(xx))\lambda x.\,F(xx))}_{=_\beta \mathrm{Y}F}) \\
&\to_\beta \dots
\end{aligned}$$

Y nazywamy *kombinatorem punktu stałego*. Widzimy, że relacja β-redukcji w rachunku λ nie jest ani słabo, ani silnie normalizująca.

(b) Niech $\Omega \equiv (\lambda x.\ xx)(\lambda x.\ xx)$. Ω jest β-redeksem, którego redukcja prowadzi do ponownego otrzymania termu Ω i w konsekwencji do stałego ciągu redukcji postaci:

$$\Omega \to_\beta \Omega \to_\beta \Omega \to_\beta \dots$$

(c) Niech $\Delta \equiv \lambda x.\ xxx$. Wówczas:

$$\Delta\Delta \to_\beta \Delta\Delta\Delta \to_\beta \Delta\Delta\Delta\Delta \to_\beta \dots$$

Ponownie, ponieważ każda redukcja powoduje wydłużenie termu, $\Delta\Delta$ nie ma postaci normalnej i w konsekwencji każdy powstały ciąg redukcji termu $\Delta\Delta$ jest nieskończony.

(d) Redukcja λ-termu posiadającego więcej niż jeden redeks może prowadzić do różnych (choć β-równowaznych) reduktów. Zależy to od wyboru strategii redukcji. Rozważmy następujący term: $(\lambda u.\ v)\,\Omega$. Konsekwentne redukowanie podtermu Ω prowadzić musi do niekończącego się stałego ciągu redukcji

$$(\lambda u.\ v)\,\Omega \to_\beta (\lambda u.\ v)\,\Omega \to_\beta \dots$$

Wybierając strategię polegającą na aplikacji Ω do $(\lambda u.\ v)$ otrzymujemy natychmiastowo redeks w postaci normalnej.

Definicja 17. (η-redukcja) η-redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zgodną na $\mathbf{\Lambda}$ relację binarną $\to_\eta$ taką, że

$$\lambda x.\,Mx \to_\eta M, \text{ o ile } x \notin \mathrm{FV}(M).$$

η-redukcja pozwala na pominięcie niczego nie wnoszącej λ-abstrakcji. Operację odwrotną nazywamy *η-abstrakcją*, zaś λ-termy będące w którejkolwiek z tych relacji nazywamy *η-konwersami*. Operacja ta nie ma wpływu na rezultat obliczenia, jedynie optymializuje zapis λ-termów i stąd ma duże znaczenie stylistyczne w programowaniu funkcyjnym.

Przykład 9. Przypuśćmy, że $(+1) \in \mathbf{\Lambda}$. Wówczas $\lambda x.((+1)x) =_\eta (+1)$.

Widzieliśmy, że β-redukcja może prowadzić do uzyskania rezultatu lub nie. Fakt 1 i następujące po nim Wniosek 3 i Wniosek 4 stwierdzają, że jeśli tylko mamy pewność, że λ-term ma postać normalną, to jest ona wyznaczona jednoznacznie i doprowadzi nas do niej każda strategia normalizująca. Fakt 1 to klasyczne twierdzenie, którego dowód można znaleźć w [Bar84, Rozdział 3.2] i ze względu na jego obszerność pozwalamy sobie go pominąć.

Fakt 1. *(Twierdzenie Churcha-Rossera). β-redukcja ma własność CR.*

Wniosek 3. *Jeśli $M =_\beta N$, to istnieje $L \in \mathbf{\Lambda}$ takie, że $M \to_\beta^* L$ i $N \to_\beta^* L$.*

Dowód. Niech $M, N \in \mathbf{\Lambda}$ będą takie, że $M =_\beta N$. Wówczas istnieje ciąg λ-termów $M_0, M_1, \ldots, M_{n-1}, M_n$ taki, że

$$M_0 \underset{\beta}{\leftrightarrow} M_1 \underset{\beta}{\leftrightarrow} \ \ldots \ \underset{\beta}{\leftrightarrow} M_{n-1} \underset{\beta}{\leftrightarrow} M_n,$$

gdzie $M_0 \equiv M$ i $M_n \equiv N$. Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem n. Rozważmy następujące przypadki:

(1) Jeśli $n = 0$, to $M \equiv N$. Ustalając $L \equiv M (\equiv N)$ w oczywisty sposób $M \to_\beta^* L$ i $N \to_\beta^* L$.

(2) Jeśli $n = k > 0$, to istnieje $M_{k-1} \in \mathbf{\Lambda}$ takie, że

$$M \equiv M_0 \underset{\beta}{\leftrightarrow} M_1 \underset{\beta}{\leftrightarrow} \ \ldots \ \underset{\beta}{\leftrightarrow} M_{k-1} \underset{\beta}{\leftrightarrow} M_k \equiv N$$

Z założenia indukcyjnego wiemy, że istnieje $L' \in \mathbf{\Lambda}$ takie, że $M_0 \to_\beta^* L'$ i $M_{k-1} \to_\beta^* L'$. Ponieważ $\underset{\beta}{\leftrightarrow}$ jest symetryczna, rozważmy osobno przypadki $M_{k-1} \to_\beta M_k$ i $M_k \to_\beta M_{k-1}$.

(a) Jeśli $M_{k-1} \to_\beta M_k$, to tym bardziej $M_{k-1} \to_\beta^* M_k$. Ponieważ $M_{k-1} \to_\beta^* L'$, to korzystając Faktu 1 wnosimy, że istnieje $L \in \mathbf{\Lambda}$ taki, że $L' \to_\beta^* L$ i $M_k \to_\beta^* L$, czyli

$$\begin{tikzcd}
M_0 \arrow[r, leftrightarrow] \arrow[dr, "*"] & \ldots \arrow[r, leftrightarrow] & M_{k-1} \arrow[r] \arrow[dl, "*"'] & M_k \arrow[d, "*"] \\
& L' \arrow[rr, "*"] & & L
\end{tikzcd}$$

(b) Jeśli $M_k \to_\beta M_{k-1}$, to ponieważ $M_{k-1} \to_\beta^* L'$, natychmiast otrzymujemy, że $M_k \to_\beta^* L'$. Ustalając $L \equiv L'$ otrzymujemy tezę.

□

Wniosek 4. *(1) Jeśli N to postać normalna M, to $M \to_\beta^* N$.*

(2) Każdy λ-term ma co najwyżej jedną postać normalną.

Dowód. (1) Przypuśćmy, że $N \in \mathrm{NF}_\beta$ i $M =_\beta N$. Wówczas z Wniosku 3 istnieje L takie, że $M \to_\beta^* L$ i $N \to_\beta^* L$. Ponieważ $N \in \mathrm{NF}_\beta$ i $N \to_\beta^* L$, to $N \equiv L$. Ponieważ $M \to_\beta^* L$, to $M \to_\beta^* N$.

(2) Przypuśćmy, że M ma dwie różne postacie normalne, N_1, N_2. Wówczas z cześci (1) tego twierdzenia, $M \to_\beta^* N_1$ i $M \to_\beta^* N_2$. Z Faktu 1 istnieje $L \in \mathbf{\Lambda}$ taki, że $N_1 \to_\beta^* L$ i $N_2 \to_\beta^* L$. Ponieważ N_1, $N_2 \in \mathrm{NF}_\beta$, to $N_1 \equiv L \equiv N_2$.

□

1.3 Model Scotta D_∞

Ustalmy wpierw, że nie możemy naiwnie interpretować λ-termów jako funkcji i aplikacji argumentów do funkcji. Przypuśćmy bowiem, że w pewnej interpretacji $[\![M]\!] = f_M$, gdzie $f_M \in A \to B$ dla pewnych zbiorów A i B. Wówczas $[\![MM]\!] = f_M(f_M)$, a zatem $f_M \in A$. Oznacza to, że funkcja f_M jest elementem swojej własnej dziedziny, czyli istnieje nieskończony zstępujący ciąg zbiorów

$$A \times f(A) \supset A \times f(A) \times f(A) \supset A \times f(A) \times f(A) \times f(A) \supset \dots$$

Istnienie takiego ciągu narusza aksjomat ufundowania na gruncie aksjomatyki ZF, a to wyklucza możliwość określenia takich modeli.

Rozwiązanie Scotta polega na tym, aby zamiast próbować interpretować termy jako funkcje, przypisać im nieskończone ciągi funkcji postaci

$$\varphi = (\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \dots),$$

gdzie $\varphi \in D_\infty$ i $\varphi_n \in D_n$. Określając na takiej strukturze aplikację następująco

$$\varphi \bullet \psi = (\varphi_1(\psi_0), \varphi_2(\psi_1), \varphi_3(\psi_2), \dots),$$

widzimy, że samoaplikacja jest poprawnie określona:

$$\varphi \bullet \varphi = (\varphi_1(\varphi_0), \varphi_2(\varphi_1), \varphi_3(\varphi_2), \dots).$$

W rozdziale tym przybliżymy konstrukcję modelu Scotta D_∞ zgodnie z [HS08, Rozdział 16]. Ze względu na obszerność i topologiczny charakter modelu szczegółowe wyprowadzenia będą elementarne lub zostaną pominięte.

Definicja 18 (Struktura aplikatywna)**.** Parę $(D, \bullet)$, gdzie D jest zbiorem zawierającym przynajmniej dwa elementy i w którym symbol $\bullet$ oznacza działanie binarne na D, nazywamy *strukturą aplikatywną*.

Definicja 19 (Ekstensjonala równoważność)**.** Niech $(D, \bullet)$ będzie strukturą aplikatywną i niech $a, b \in D$. Określamy relację:

$$a \sim b \quad \Leftrightarrow \quad \forall d \in D\, (a \bullet d = b \bullet d)\,.$$

Powiemy, że a jest *ekstensjonalnie równoważne* b, jeśli $a \sim b$.

Definicja 20.

1. Powiemy, że term M jest *kombinacją zmiennych*, jeśli $M \equiv x$ dla pewnej zmiennej x albo $M \equiv (PQ)$ dla pewnych kombinacji zmiennych P i Q.
2. Niech M będzie kombinacją zmiennych taką, że $\mathrm{FV}(M) = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Względem M określamy funkcję $f_M : D^n \to D$ następującym wzorem:

$$f_M(d_1, d_2, \ldots, d_n) = \begin{cases} d_k, & \text{jeśli } M \equiv x_k, \\ f_Q(d_1, d_2, \ldots, d_n) \bullet f_Q(d_1, d_2, \ldots, d_n), & \text{jeśli } M \equiv (PQ). \end{cases}$$

3. Powiemy, że struktura aplikatywna $(D, \bullet)$ jest *kombinatorycznie zupelna*, jeśli dla każdej kombinacji zmiennych M istnieje $a_M \in D$ taki, że dla wszystkich $d_1,d_2,\ldots,d_n \in D$

$$a_M \bullet d_1 \bullet d_2 \bullet \cdots \bullet d_n = f_M(d_1, d_2, \ldots, d_n).$$

Definicja 21 (Model bezsyntaktyczny)**.** Modelem bezsyntaktycznym rachunku λ nazywamy trójkę $(D, \bullet, \Lambda)$, gdzie $\mathbb{D} = (D, \bullet)$ jest strukturą aplikatywną, $\Lambda : D \to D$ i spełnione są poniższe własności:

(a) $\mathbb{D}$ jest kombinatorycznie zupełny.

(b) $\Lambda(a) \sim a$ dla wszystkich $a \in D$.

(c) Jeśli $a \sim b$, to $\Lambda(a) = \Lambda(b)$ dla wszystkich $a, b \in D$.

(d) $\Lambda(a) = e \bullet a$ dla pewnego $e \in D$ i wszystkich $a \in D$.

Elementy teorii porządku Niech $(D, \sqsubseteq)$ będzie zbiorem częściowo uporzadkowanym. Powiemy, że $b \in D$ jest elementem *najmniejszym*, jesli $b \sqsubseteq d$ dla wszystkich $d \in D$. Element ten, o ile istnieje, wyznaczony jest jednoznacznie i będziemy oznaczać go symbolem $\perp$. Niech $X \subset D$. *Ograniczeniem górnym* X nazywamy element $u \in D$ taki, że $x \sqsubseteq u$ dla wszystkich $x \in X$. *Kres górny* zbioru X nazywamy element

$\ell \in D$ taki, że ℓ jest ograniczeniem górnym X i $\ell \sqsubseteq u$ dla wszystkich ograniczeń górnych u zbioru X. Element taki, o ile istnieje, będziemy oznaczali symbolem $\bigsqcup X$. Podzbiór $X \subset D$ nazywamy *skierowanym*, jeśli $X \neq \varnothing$ i dla dowolnych $x, y \in X$ istnieje $z \in X$ taki, że $x \sqsubseteq z$ i $y \sqsubseteq z$.

Definicja 22 (Zupełny porządek częściowy)**.** Porządek częściowy $(D, \sqsubseteq)$ taki, że

(a) posiada element najmniejszy oraz

(b) każdy skierowany poddzbiór $X \subset D$ ma kres górny,

nazywamy *zupełnym porządkiem częściowym* (w skrócie: *cpo*).

Ustalmy, że jeśli D', D'', ... są cpo, to odpowiadające im porządki częściowe będziemy notowali symbolami $\sqsubseteq'$, $\sqsubseteq''$, ...

Przykład 10. Ustalmy $\perp \notin \mathbb{N}$ i niech $\mathbb{N}^+ = \mathbb{N} \cup \perp$. Określmy na $\mathbb{N}^+$ następującą relację:

$$a \sqsubseteq b \quad \Leftrightarrow \quad (a = \perp \ \wedge b \in \mathbb{N}) \ \vee \ a = b$$

$\sqsubseteq$ jest oczywiście zwrotna, przechodnia i antysymetryczna. Widzimy, że $\mathbb{N}^+$ ma względem niej element najmniejszy (jest nim $\perp$) i oczywiście każdy podzbiór $\mathbb{N}^+$ jest skierowany.

Definicja 23 (Monotoniczność, ciągłość)**.** Niech D i D' bedą cpo i $\varphi : D \to D'$.1

(a) Powiemy, że φ jest *monotoniczna*, jeśli $\varphi(a) \sqsubseteq' \varphi(b)$ dla $a \sqsubseteq b$.

(b) Powiemy, że φ jest *ciągła (w sensie Scotta*[2]), jeśli $\varphi(\bigsqcup X) = \bigsqcup \varphi(X)$ dla wszystkich skierowanych podzbioru $X \subseteq D$.

Symbolem $[D \to D']$ oznaczamy zbiór wszystkich funkcji ciągłych ze zbioru D do D'.

Uwaga. Zauważmy, że jeśli φ jest ciągła, to jest również monotoniczna. Istotnie, jeśli $a \sqsubseteq b$, to w szczególności $\{a, b\} \subseteq D$ jest skierowanym podzbiorem D. Wówczas $\bigsqcup\{a, b\} = b$ i ponieważ $\bigsqcup \varphi(\{a b\}) = \varphi(\bigsqcup\{a, b\})$, to otrzymujemy, że $\varphi(a) \sqsubseteq \varphi(\bigsqcup\{a, b\}) = \varphi(b)$.

Twierdzenie 3. *Jeśli D i D' są cpo, to $[D \to D']$ jest cpo.*

Dowód. Określmy na $[D \to D']$ relację $\preceq$:

$$\varphi \preceq \psi \quad \Leftrightarrow \quad \forall d \in D \, (\varphi(d) \sqsubseteq' \psi(d)) \, ,$$

[2]Funkcje te są ciągłe w topologicznym sensie względem topologii Scotta.

Ponieważ D' jest cpo, to aby wykazać, że $[D \to D']$ ma element najmniejszy, wystarczy, że rozpatrzymy $\perp(d) = \perp'$ dla $d \in D$.

Niech teraz Φ będzie skierowanym podzbiorem $[D \to D']$. Wówczas dla wszystkich $d \in D$ zbiór $\{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\}$ jest skierowanym podzbiorem D'.

Istotnie, wybierzmy $y_1, y_2 \in \{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\}$. Wówczas dla pewnych $\varphi_1, \varphi_2 \in \Phi$ mamy, że $y_1 = \varphi_1(d)$ oraz $y_2 = \varphi_2(d)$. Ponieważ Φ jest skierowany, to istnieje φ_3 taki, że $\varphi_1 \sqsubseteq \varphi_3$ i $\varphi_2 \sqsubseteq \varphi_3$. Z monotonicznośc funkcji ciągłych i faktu, że $d \sqsubseteq d$ widzimy, że $\{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\}$ jest skierowanym podzbiorem D'. Ponieważ zaś D' jest cpo, to dla każdego $d \in D$ istnieje kres górny $\{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\}$. Określmy więc funkcję $\Psi_\Phi : D \to D'$ następującym wzorem:

$$\Psi_\Phi(d) = \bigsqcup \Phi d,$$

gdzie $\Phi d = \{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\}$. Wystarczy teraz pokazać, że Ψ_Φ jest ciągla i jest kresem górnym zbioru Φ.

1. Pokażemy najpierw, że Ψ_Φ jest ciągła. Niech X będzie dowolnym skierowanym podzbiorem D. Wówczas:

$$\begin{aligned}
\Psi_\Phi(\bigsqcup X) &= \bigsqcup \Phi(\bigsqcup X) \\
&= \bigsqcup \{\varphi(\bigsqcup X) \mid \varphi \in \Phi\} \\
&= \bigsqcup \{\bigsqcup \{\varphi(d) \mid d \in X\} \mid \varphi \in \Phi\} \\
&= \bigsqcup \left\{ \bigcup_{\varphi \in \Phi} \{\varphi(d) \mid d \in X\} \right\} \\
&= \bigsqcup \left\{ \bigcup_{\varphi \in \Phi} \bigcup_{d \in X} \{\varphi(d)\} \right\} = \bigsqcup \left\{ \bigcup_{d \in X} \bigcup_{\varphi \in \Phi} \{\varphi(d)\} \right\} \\
&= \bigsqcup \left\{ \bigcup_{d \in X} \{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\} \right\} \\
&= \bigsqcup \{\bigsqcup \{\varphi(d) \mid \varphi \in \Phi\} \mid d \in X\} \\
&= \bigsqcup \{\bigsqcup \Phi d \mid d \in X\} = \bigsqcup \Psi_\Phi(X).
\end{aligned}$$

2. Φ jest ograniczony w $[D \to D']$. Istotnie, przypuśćmy, że dla dowolnego $f \in [D \to D']$ istnieje $g \in \Phi$ taki, że $f \leq g$. Wówczas w szczególności $\Psi_\Phi \leq g$ i stąd również

$$\bigsqcup \Phi d \sqsubseteq' g(d) \quad \text{dla wszystkich } d \in D.$$

Ponieważ $g \in \Phi$, to $g(d) \sqsubseteq \bigsqcup \{g(d) \mid g \in \Phi\} = \bigsqcup \Phi d$. Zatem Ψ_Φ jest ograniczeniem górnym Φ.

Przypuśćmy teraz, że Φ nie ma kresu górnego. Wówczas dla dowolnego ograniczenia górnego f zbioru Φ istnieje g takie, że $g \leq f$ i które jest również ograniczeniem górnym. Wówczas w szczególności mamy, że $g \leq \Psi_\Phi$, czyli dla dowolnego $d \in D$

$$g(d) \sqsubseteq' \bigsqcup \Phi d \in D'.$$

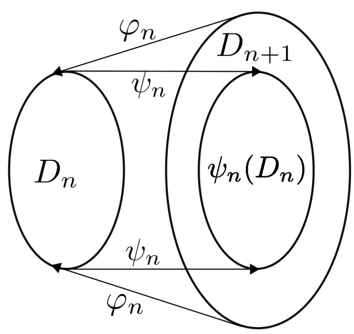
Ale $\bigsqcup \Phi d$ jest kresem górnym Φd (wykazaliśmy bowiem, że Φd jest skierowany, zaś D' jest cpo), a zatem $g(d)$ nie może być ograniczeniem Φd. Istnieje stąd $z \in \Phi d$ taki, że $g(d) \not\sqsubseteq' z$. Wówczas istnieje $\tilde{\varphi} \in \Phi$ taki, że $z = \tilde{\varphi}(d)$ oraz $g(d) \not\sqsubseteq' \tilde{\varphi}(d)$. Z dowolności d mamy, że $g \not\leq \tilde{\varphi}$. Zatem g nie jest ograniczeniem górnym Φ, co jest sprzeczne z założeniem. Stąd Ψ_Φ musi być kresem górnym Φ. □

Wniosek 5. *Dla danego cpo D_0 możemy skonstruować ciąg cpo $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ okreslając $D_{n+1} = [D_n \to D_n]$ dla $n \geq 0$. Tak określony ciąg dla $D_0 = \mathbb{N}^+$ (patrz Przykład 10) nazywamy modelem Scotta.*

Definicja 24 (Projekcja)**.** Niech D i D' będą cpo. *Projekcją* z D' do D nazywamy parę (φ, ψ) funkcji $\varphi \in [D \to D']$, $\psi \in [D' \to D]$ takich, że

$$\psi \circ \varphi = I_D \quad \text{oraz} \quad \varphi \circ \psi \leq I_{D'}, \tag{$*$}$$

gdzie przez I_D i $I_{D'}$ oznaczamy funkcję identycznościową na zbiorze D i D', odpowiednio.



Rysunek 3: Projekcja (φ_n, ψ_n) z D_{n+1} do D_n

.

Okazuje się, że ciąg cpo $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$ skonstruowany w myśl Wniosku 5 można określić definiując dla każdego $n \in \mathbb{N}$ projekcję (φ_n, ψ_n) z D_{n+1} do D_n. Istotnie, spróbujmy skonstruować taką rodzinę projekcji. Wybierzmy $d \in D_0$ i niech κ_d oznacza funkcję stałą

$$\kappa_d(c) = d \quad \text{dla wszystkich } c \in D_0.$$

Określmy $D_1 = [D_0 \to D_0]$. Ponieważ κ_d jest funkcją ciągłą, to $\kappa_d \in D_1$. Niech teraz

$$\begin{aligned} \varphi_0(d) &= \kappa_d \quad \text{dla wszystkich } d \in D_0, \\ \psi_0(c) &= c(\bot_0) \quad \text{dla wszystkich } c \in D_1, \end{aligned}$$

gdzie $\bot_0$ jest elementem najmniejszym D_0. Widzimy, że $\varphi_0 : D_0 \to D_1$ i $\psi_0 : D_1 \to D_0$. Funkcje φ_0 i ψ_0 są ciągłe, zaś $\psi_0 \circ \varphi_0 = I_{D_0}$ (dowód pomijamy), zatem (φ_0, ψ_0) jest projekcją z D_1 do D_0.

Dla $n > 0$ okreslamy teraz $\varphi_n : D_n \to D_{n+1}$ i $\psi_{n+1} : D_{n+1} \to D_n$ następującym wzorem:

$$\begin{aligned} \varphi_n(\sigma) &= \varphi_{n-1} \circ \sigma \circ \psi_{n-1} \quad \text{dla } \sigma \in D_n, \\ \psi_n(\tau) &= \psi_{n-1} \circ \varphi_{n-1} \qquad\qquad \text{dla } \tau \in D_{n+1} \end{aligned}$$

Wówczas $\varphi_n \in [D_n \to D_{n+1}]$, $\psi_n \in [D_{n+1} \to D_n]$ i $\psi_n \circ \varphi_n = I_{D_n}$ oraz $\varphi_n \circ \psi_n \leq I_{D_{n+1}}$. [HS08, Lemat 16.28]. A zatem (φ_n, ψ_n) jest projekcją z D_{n+1} do D_n.

Ponieważ projekcje (φ_n, ψ_n) przenoszą nas tylko pomiędzy następującymi po sobie cpo w ciągu $\{D_n\}_{n=0}^{\infty}$, (Rysunek 3) określamy następujące złożenie pozwalające na projekcje między dowolnymi dwoma wyrazami ciągu.

Definicja 25. Dla m, $n \geq 0$ określamy $\varphi_{mn} : D_m \to D_n$ w następujący sposób:

$$\varphi_{mn} = \begin{cases} \varphi_{n-1} \circ \varphi_{n-2} \circ \dots \varphi_{m+1} \circ \varphi_m, & \text{jeśli } m \leq n, \\ I_{D_n}, & \text{jeśli } m = n, \\ \psi_n \circ \psi_{n+1} \circ \dots \circ \psi_{m-2} \circ \psi_{m-1} & \text{jeśli } m \geq n. \end{cases}$$

Ponieważ dla każdego $n \in \mathbb{N}$ para (φ_n, ψ_n) jest projekcją z D_{n+1} do D_n, to zachodzi następujący fakt.

Fakt 2 ([HS08, Lemat 16.33])**.** *Niech* m, $n \geq 0$. *Wówczas*

(i) $\varphi_{mn} \in [D_m \to D_n]$,

(ii) jeśli $m \leq n$, *to* $\varphi_{nm} \circ \varphi_{mn} = I_{D_m}$,

(iii) jeśli $m > n$, *to* $\varphi_{nm} \circ \varphi_{mn} \leq I_{D_m}$,

(iv) jeśli $m < n$, *to* $(\varphi_{mn}, \varphi_{nm})$ *jest projekcją z* D_n *do* D_m,

(v) jeśli $m < k < n$ *lub* $n < k < m$, *to* $\varphi_{kn} \circ \varphi_{mk} = \varphi_{mn}$.

Konstrukcja D_∞ Mając zadane dwa cpo D, D' możemy zapytać czy istnieje włożenie jednego z nich w drugi. Zauważmy, że jeśli φ, ψ jest projekcją z D' do D, to ϕ jest włożeniem D w D' (w sensie topologii Scotta). Ciąg $\{D_n\}_{n=0}^\infty$ intuicyjnie przypomina więc wstępujący ciąg zbiorów.

Definicja 26. Niech D_∞ oznacza zbiór wszystkich nieskończonych ciągów postaci

$$d = (d_0, d_1, \dots)$$

takich, że dla wszystkich $n \geq 0$ mamy, że $d_n \in D_n$ oraz $\psi_n(d_{n+1}) = d_n$. Na zbiorze D_∞ określamy relację $\sqsubseteq$ w nastepujący sposób:

$$(d_0, d_1, \dots) \sqsubseteq (d'_0, d'_1, \dots) \quad \Leftrightarrow \quad \forall n \geq 0 \ (d_n \sqsubseteq d'_n)$$

Przez d_n oznaczać będziemy n-ty element ciągu d. Jeśli $X \subset D_\infty$, to okreslamy $X_n = \{d_n \mid d \in X\}$.

Przy powyższym określeniu D_∞ okazuje się być cpo.

Fakt 3 ([HS08, Lemat 16.36])**.** *(i) D_∞ jest cpo.*

(ii) D_∞ zawiera element najmniejszy $\bot = (\bot_0, \bot_1, \dots)$, gdzie przez $\bot_n$ oznaczamy najmniejszy element D_n.

(iii) Kres górny każdego skierowany zbioru $X \subset D_\infty$ ma postać

$$\bigsqcup X = (\bigsqcup X_0, \bigsqcup X_1, \dots)$$

Dodatkowo, określamy projekcję z D_∞ do D_n dla każdego $n \in \mathbb{N}$. Wymaga to oczywiście dowodu (patrz Fakt 4(i)), który pomijamy.

Definicja 27 (D_∞)**.** Dla $n \geq 0$ okreslamy funkcje $\varphi_{n\infty} : D_n \to D_\infty$ oraz $\varphi_{\infty n} : D_\infty \to D_n$, gdzie

$$\varphi_{n\infty}(d) = (\varphi_{n0}(d), \varphi_{n1}(d), \dots) \text{ dla } d \in D_n,$$
$$\varphi_{\infty n}(d) = d_n.$$

Określona para funkcji spełnia poniższy szereg własności.

Fakt 4 ([HS08, Lematy 16.38, 16.39, 16.42])**.** *Niech $m, n \geq 0$, $m \leq n$ i $a, b \in D_\infty$. Wówczas:*

(i) $(\varphi_{n\infty}, \varphi_{\infty n})$ jest projekcją z D_∞ do D_n,

(ii) $\varphi_{mn}(a_m) \sqsubseteq a_n$,

(iii) $\varphi_{m\infty}(a_m) \sqsubseteq \varphi_{n\infty}(a_n)$,

(iv) $a = \bigsqcup_{n\geq 0} \varphi_{n\infty}(a_n)$,,

(v) $\varphi_{n\infty}(a_{n+1}(b_n)) \sqsubseteq \varphi_{(n+1)\infty}(a_{n+2}(b_{n+1}))$.

(iii)

Definicja 28. Dla a, $b \in D_\infty$ określamy:

$$a \bullet b = \bigsqcup \{\varphi_{n\infty}(a_{n+1}(b_n)) \mid n \geq 0\} \qquad (*)$$

1.4 Kodowanie typów danych

Prosta składnia języka rachunku λ pozwala wyrazić zaskakująco wiele struktur danych reprezentując je i operacje na nich jako funkcje. Z tego powodu, stanowiąc inspirację dla wielu projektantów języków programowania, uchodzi za protoplastę rodziny języków funkcyjnych, chociaż bezpośrednio nie ma on praktycznego zastosowania w praktyce programistycznej. Rozwój tej legendy dobrze oddaje cykl klasycznych artykułów (tzw. *Lambda Papers*) zapoczątkowany przez dokumentację języka Scheme [SS75].

Najpopularniejszym sposobem reprezentacji danych przez funkcje w rachunku λ oparty jest na kodowaniu liczb Peano za pomocą tzw. liczebników Churcha. Metoda ta, ze względu na wynikające zeń problemy natury złożonościowej [KPJ14], ma obecnie wyłącznie walory edukacyjne, dlatego w dalszej cześci pracy pokażemy tzw. kodowanie Scotta. Jest ona interesująca ze względu na praktyczną możliwość reprezentacji algebraicznych typów danych (ADT[3]) znanych ze współczesnych języków funkcyjnych [Jan13], pozwalając tym samym zaimplementować te konstrukcje na przykład w paradygmacie imperatywnym. Fakt, że każdy typ danych można zastąpić tym sposobem odpowiadającą mu funkcją, wskazuje na metodę konstruowania prostych języków funkcyjnych [JKP06] oraz na uniwersalność rachunku λ jako języka przejściowego dla kompilatorów języków funkcyjnych [PL92, Rozdział 3].

1.4.1 Algebraiczne typy danych

Algebraiczne typy danych są podstawowym środkiem służącym do określania struktur danych współczesnych funkcyjnych językach programowania. Na potrzeby prezentacji poszczególnych kodowań posłużymy się intuicjami o ADT zbudowanymi na gruncie następujących definicji w języku Haskell:

```haskell
data Boolean     = True
                 | False
data Tuple a b   = Tuple a b
```

[3]Skrót od angielskojęzycznego *Algebraic Data Types*; nie należy mylić z *Abstract Data Types*.

```
data Temperature = Fahrenheit Int
                 | Celsius Int
data Maybe a     = Nothing
                 | Just a
data Nat         = Zero
                 | Succ Nat
data List t      = Nil
                 | Cons t (List t)
```

Definicja typu rozpoczynają się od słowa kluczowego `data`[4] po którym występuje *konstruktor typu*. Na wzór notacji BNF, typy przyjmują jedną z *wartości* odzielonych znakiem "|". Każda z wartości składa się z *konstruktora wartości* i ewentualnie występujących po nim *parametrów typowych*. Zauważmy, że umożliwia to rekurencyjnie konstruowanie typów, tak jak w wypadku `Nat` i `List`.

Pokażemy, że algebraiczne typy danych możemy reprezentować w zwięzły sposób w rachunku λ bez typów. Przedstawione tutaj koncepcje w zaskakujący sposób przenoszą się do bardziej złożonych typowanych systemów rachunku λ.

1.4.2 Proste typy wyliczeniowe

Typy wyliczeniowe to typy, które reprezentują możliwe warianty przyjmowanej wartości. Najprostrzym nietrywialnym przykładem takiego typu jest `Boolean`. Ma on dwa konstruktory wartości: `True`, `False`. Praca z tego rodzaju typami wymaga mechanizmu dopasowywania wzorców (ang. *pattern-matching*) [PL92, Rozdział IV], który pozwala na wybór częściowej definicji funkcji w zależności od zadanego konstruktora wartości. Ponieważ w rachunku λ wyrażenia nie mają typów (lub, przyjmując perspektywę systemów z typami: wszystkie wyrażenia mają jeden, ten sam typ), interesowało nas będzie nie bezpośrednie kodowanie typu, ale kodowanie mechanizmu, który odpowiada za dopasowywanie wzorców. Posłużmy się znowu przykładem z języka Haskell i określmy funkcję odpowiadającą wykonaniu instrukcji warunkowej:

```
if True  a b = a
if False a b = b
```

gdzie `True` i `False` są wartościami typu `Boolean`. Właśnie ze względu na nie, mechanizm dopasowywania wzorca wybiera odpowiednią implementację instrukcji warunkowej. Ten sam efekt osiągnęlibyśmy kodując `True` i `False` w rachunku λ w

[4] Dyskusja ta ma na celu wyłącznie ustalenie uwagi; świadomi jesteśmy niuansów związanych z określaniem synonimów typów lub definiowaniem typów przy pomocy słowa kluczowego `newtype`.

następujący sposób:

$$\begin{aligned}\text{True} &\equiv \lambda ab.\, a\\ \text{False} &\equiv \lambda ab.\, b\end{aligned}$$

Wówczas funkcję `if` możemy reprezentować wyrażeniem $\text{if} \equiv \lambda cte.\, cte$ lub jego η-reduktem: $\lambda c.\, c$.

1.4.3 Pary w rachunku λ

Parą nazywamy każdy nierekurencyjny typ, który posiada jeden konstruktor wartości parametryzowany przez dwa typy. W takim wypadku potrzebujemy dwóch projekcji zwracających odpowiednio pierwszy i drugi element pary. Przykładem takiego typu jest `Tuple`. Mamy wówczas:

```
fst (Tuple a b) = a
snd (Tuple a b) = b
```

Tego rodzaju typy możemy reprezentować przez domknięcie. Standardowym sposobem reprezentacji pary w rachunku λ jest:

$$\text{Tuple} \equiv \lambda abf.\, fab$$

Używając wyrażeń let, powyższą reprezentację możemy przepisać w postaci:

$$\text{let } a = a \ b = b \text{ in } f$$

Aplikując Tuple tylko do dwóch termów (*domykając* term Tuple) otrzymujemy reprezentację pary. Argument f nazywamy *kontynuacją*, gdyż aplikując (Tuple x y) dla dowolnych $x, y \in \mathbf{\Lambda}$ do pewnego $f \in \mathbf{\Lambda}$, w konsekwencji x i y zostają zaaplikowane do f. Zauważmy, że wówczas reprezentacja `fst` i `snd` ma postać:

$$\begin{aligned}\text{fst} &\equiv \lambda t.\, t(\lambda ab.\, a)\\ \text{snd} &\equiv \lambda t.\, t(\lambda ab.\, b)\end{aligned}$$

Przykład 11. Wprowadzone konstrukcje pozwalają nam na definicję skończonych (w sensie liczby konstruktorów) typów. Rozważmy następujące przykłady:

a) Konstruktory wartości typu `Maybe` możemy reprezentować przez

$$\begin{aligned}\text{Nothing} &\equiv \lambda nj.\, n\\ \text{Just} &\equiv \lambda anj.\, ja\end{aligned}$$

Rozważmy następującą funkcję:

```
maybe :: b -> (a -> b) -> Maybe a -> b
maybe n _ Nothing  = n
maybe _ f (Just x) = f x
```

Odpowiadająca jej reprezentacja to

$$\text{maybe} \equiv \lambda bft.\, tb(\lambda a.\, fa)$$

b) Rozważmy następującą funkcję

```
fromTemperature :: Temperature -> Int
fromTemperature (Fahrenheit a) = a
fromTemperature (Celsius a) = a
```

Ustalając reprezentację konstruktorów `Fahrenheit` i `Celsius`:

$$\text{Fahrenheit} \equiv \lambda tfc.\, ft$$
$$\text{Celsius} \equiv \lambda tfc.\, ct$$

otrzymujemy reprezentację funkcji `formTemperature` postaci:

$$\text{fromTemperature} \equiv \lambda t.\, t(\lambda f.\, f)(\lambda c.\, c)$$

1.4.4 Kodowanie rekurencji

Rozważmy następującą funkcję dodawania liczb Peano w języku Haskell:

```
add Zero     m = m
add (Succ n) m = Succ (add n m)
```

Funkcję tę możemy wyrazić w rachunku λ przy pomocy kodowania Scotta w następujący sposób:

$$\text{add}_0 \equiv \lambda nm.\, n\, m\, (\lambda n.\, \text{Succ}(\text{add}_0\, n\, m))$$

Formalizm rachunku λ nie pozwala na okreslanie nowych nazw i rekurencyjne odnoszenie się przez nie do nich samych. Standardową techniką w rachunku λ do określania funkcji w ten sposób jest użycie operatora punktu stałego Y. Przypomnijmy:

$$\text{Y} \equiv \lambda f.\, (\lambda x.\, (f(xx))\lambda x.\, (f(xx)))$$

Wówczas określamy

$$\text{add}_\text{Y} \equiv \text{Y}\, (\lambda a\, n\, m.\ nm\, (\lambda n.\ \text{Succ}(a\, n\, m)))$$

Mając na uwadze możliwość przeprowadzenia powyższej konstrukcji przy użyciu rekurencji, będziemy dopuszczali w notacji odnoszenie się wprowadzanych λ-termów do nich samych.

1.4.5 Kodowanie Scotta typów rekursywnych

Stosując metody kodowania prostych typów wyliczeniowych i par, łatwo odnajdujemy reprezentację konstruktorów wartości dla typów `Nat` i `List`:

$$\mathrm{Zero} \equiv \lambda z s.\, z \qquad \mathrm{Nil} \equiv \lambda n c.\, n$$
$$\mathrm{Succ} \equiv \lambda n z s.\, s n \qquad \mathrm{Cons} \equiv \lambda x\, x_s\, n\, c.\ c\, x\, x_s$$

Zwróćmy uwagę, że konstruktory Nat i Maybe są swoimi α-konwersami. Podobieństwo nie jest przypadkowe: na poziomie typów konstrukcja Maybe jest odpowiednikiem brania następnika. Określając dodatkowo Void $\equiv \lambda x.x$ jako element neutralny działania łącznego, otrzymujemy na poziomie typów strukturę półpierścienia z działaniem mnożenia okresloną przez konstrukcję par i dzałaniem dodawania określonego przez konstrukcję typów wyliczeniowych. Stąd algebraicze typy danych biorą swoją nazwę.

Z łatwością możemy określić teraz operacje brania poprzednika, głowy i ogona listy, odpowiednio:

$$\mathrm{pred} \equiv \lambda n.\, n\, \mathrm{undef}\, (\lambda m.\, m)$$
$$\mathrm{head} \equiv \lambda x_s.\, x_s\, \mathrm{undef}\, (\lambda x_s. x)$$
$$\mathrm{tail} \equiv \lambda x_s.\, \mathrm{undef}\, (\lambda x_s.\, x_s)$$

gdzie undef jest stałą o którą rozszerzamy rachunek λ celem sygnalizowania błędnej aplikacji.

Celem lepszego porównania kodowania Churcha i Scotta podamy reprezentacje funkcji `foldl` dla typu `Nat`. Określmy:

```
foldl f x Zero     = x
foldl f x (Succ n) = f (foldl f x n)
```

`foldl` może być przy pomocy kodowania Scotta zapisane jako

$$\mathrm{foldl} \equiv \lambda f\, x\, n.\ n\, x\, (\lambda n.\ (\mathrm{foldl}\ f\ x\ n))$$

Ogólnie, przy pomocy `foldl` wyabstrahowujemy pojęcie tzw. rekursji od strony ogona (ang. *tail recrusion*), w teorii obliczalności nazywane rekursją prostą lub, popularnie, zwijaniem od lewej. Operator foldl spełnia następującą własność [Hut99]

$$f = \mathrm{foldl}\ \varphi\ a \iff \begin{cases} f\ \mathrm{Zero} = a \\ f\ (\mathrm{Succ}\ n) = \varphi\ (f\ n) \end{cases} \tag{2}$$

1.4.6 Kodowanie Churcha typów rekursywnych

Przedstawimy teraz klasyczny sposób kodowania typów po raz pierwszy zaprezentowany dla liczb naturalnych przez A. Churcha w [Chu41]. Różni się on od kodowania Scotta tylko w przypadku typów rekursywnych, w pozostałych przypadkach obydwa kodowania dają te same rezultaty. Typ `Nat` ma dwa konstruktory: `Zero` i `Succ`. W kodowaniu Churcha reprezentujemy je w następujący sposób:

$$\begin{aligned} \mathrm{Zero}_{Ch} &\equiv \lambda f x.\, x \\ \mathrm{Succ}_{Ch} &\equiv \lambda n f x.\, f\,(n\, f\, x) \end{aligned}$$

Wyrażenia będące skutkiem konsekwentnej aplikacji Succ do Zero w literaturze popularnie nazywa się *liczebnikami Churcha* i oznacza następująco:

$$\begin{aligned} \bar{1} &\equiv \mathrm{Succ}_{Ch}\ \mathrm{Zero}_{Ch} \ =_\beta\ \lambda f x.\, f x \\ \bar{2} &\equiv \mathrm{Succ}_{Ch}\ \mathrm{Succ}_{Ch}\ \mathrm{Zero}_{Ch} \ =_\beta\ \lambda f x.\, f\, f\, x \\ &\vdots \\ \bar{n} &\equiv \mathrm{Succ}^n_{Ch}\ \mathrm{Zero}_{Ch} \ =_\beta\ \lambda f x.\, f^n\, x \end{aligned}$$

Liczba naturalna n jest kodowana przez funkcję w której jej pierwszy argument jest aplikowany n razy do drugiego argumentu. Porównując je do kodowania Scotta widzimy, że różnica polega na aplikowaniu do kontynuacji termu $(n\, f\, x)$ w przypadku brania następnika. Da się pokazać [HIN05], że liczebniki Churcha są w istocie operacją `foldl` na argumentach `Succ` i Zero. Istotnie, niech nat $\equiv \lambda c.\ c$ Succ Zero. Wówczas nat $\bar{n} =_\beta \bar{n}$. Z tego powodu kodowanie operacji na liczebnikach Churcha, lub ogólnie – funkcji opartych na rekursji prostej po zbiorze liczb naturalnych – jest wyjątkowo proste przy użyciu tej metody. Przykładowo, używając metody Churcha, operację dodawania kodujemy w następujący sposób:

$$\mathrm{add}_{Ch} \equiv \lambda n\, m.\ n\ \mathrm{Succ}_{Ch}\ m$$

Dla porównania, używając kodowania Scotta:

$$\mathrm{add}_S \equiv \lambda n\, m.\ \mathrm{foldl}\ \mathrm{Succ}\ n\ m$$

1.4.7 Ogólny schemat kodowania Scotta typów ADT

W ogólnym przypadku, mając nastepującą definicję ADT:

```
data type_constructor t1 t2 ... tk = C1 t11 ... t1n1
                                   | C2 t21 ... t2n2
                                   ...
                                   | Cm tm1 ... tmnm
```

dla $m, n \in \mathbb{N}$, wiążemy z nią reprezentację każdego z konstruktorów:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{C}_1 &\equiv \lambda t_{11}\, t_{12}\, \dots t_{1n_1}\, f_1\, f_2 \dots f_m.\ f_1 t_{11} t_{12} \dots t_{1n_1} \\
\mathrm{C}_2 &\equiv \lambda t_{21}\, t_{22}\, \dots t_{2n_2}\, f_1\, f_2 \dots f_m.\ f_2 t_{21} t_{22} \dots t_{2n_2} \\
&\vdots \\
\mathrm{C_m} &\equiv \lambda t_{m1}\, t_{m2}\, \dots t_{mn_m}\, f_1\, f_m \dots f_m.\ f_1 t_{m1} t_{m2} \dots t_{mn_m}
\end{aligned}
$$

Wówczas następującą definicję cześciową funkcji `f`:

```
f (C1 v11 ... v1n1) = y1
...
f (Cm vm1 ... vmnm) = ym
```

kodujemy przy za pomocą następujego λ-termu:

$$
\begin{aligned}
\lambda x.\ x\, &(\lambda v_{11} \dots v_{1n_1}.\ y_1) \\
&\vdots \\
&(\lambda v_{m1} \dots v_{mn_m}.\ y_m)
\end{aligned}
$$

gdzie y_1 są kodowaniami Scotta `yi` dla $i \in \mathbb{N}$.

1.5 Podsumowanie

Istotą rachunku λ bez typów jest uchwycenie pojęcia aplikacji argumentu do funkcji. Kodując selektor `if` dla typu `Boolean` w 1.4.2 zauważmy, że nic nie powstrzymuje nas przed zaaplikowaniem do wyrażenia `if` dowolnego λ-termu. Analogiczna sytuacja ma miejsce, gdy określamy operacje na reprezentacji liczb naturalnych. Widzimy, że w ramach tak zakrojonego systemu nie mamy możlwiości uchwycenia które rezultaty są sensowne. Jak przekonamy się w Rozdziale 2, problem ten eliminuje w pewnym stopniu rozszerzenie systemu rachunku λ o typy wyrażeń. Wówczas aplikacja argumentu do funkcji wymaga wcześniejszej *weryfikacji* typu, zaś typy argumentów oraz rezultatu funkcji są z góry określone (z dokładnością do podstawienia). Niestety, w rezultacie otrzymujemy system w którym wiele sensownych wyrażeń możliwych do zbudowania w rachunku λ nie jest poprawnych. Szukanie bogatych systemów typów, które jednocześnie nie ograniczałyby ekspresji (lub mówiąc bardziej obrazowo językiem informatyki: pozwalałyby na określenie większej ilości poprawnie zbudowanych programów ograniczając ilość tych błędnych) jest stale pojawiającym się tematem w dziedzinie teorii typów.

2 Rachunek λ z typami prostymi

2.1 Typy proste

Niech U będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych $p,\ q,\ \ldots$ (być może indeksowanych liczbami naturalnymi), które będziemy nazywali *zmiennymi typowymi*.

Definicja 29. (Typy proste) *Typami prostymi* będziemy określali najmniejszy w sensie mnogościowym zbiór wyrażeń taki, że:

(S1) Jeśli p jest zmienną typową, to p jest typem prostym.

(S2) Jeśli σ i τ są typami prostymi, to $(\sigma \to \tau)$ jest typem prostym.

Zmienne typowe nazywa się w literaturze niekiedy *stałymi typowymi*[5]. Typy proste zbudowane tylko wedle reguły (S1) nazywamy typami *atomowymi*, zaś wyrażenia zbudowe wedle reguły (S2) – typami *funkcyjnymi*. Zbiór typów prostych określony w myśl powyższej definicji będziemy oznaczali przez $\mathbb{T}$. Definicję 29 można równoznacznie wyrazić przy pomocy notacji Backusa-Naura. Wówczas ma ona następującą, zwięzłą postać:

$$\mathbb{T} \ \leftarrow\ U \mid (\mathbb{T} \to \mathbb{T})$$

Późniejsze litery alfabetu greckiego (σ, τ, ρ, $\ldots$), być może z indeksami, będą służyły nam za zmienne metasyntaktyczne do oznaczania typów prostych. Dla lepszej czytelności będziemy pomijali najbardziej zewnętrzne nawiasy. Konstruktor typu $\to$ wiąże prawostronnie; oznacza to, że typy $\sigma \to \tau \to \rho$ oraz $\sigma \to (\tau \to \rho)$ będziemy uznawali za tożsame.

Zauważmy, że obiekty skonstruowane w myśl Definicji 29 mają strukturę drzewa binarnego. Wysokość takiego drzewa będziemy nazywali *stopniem* typu.

Definicja 30. (Stopień typu) Stopniem typu nazywamy następująco określoną funkcję $\delta : \mathbb{T} \to \mathbb{N}$

$$\begin{aligned} \delta(p) &= 0,\ \text{gdzie } p \text{ jest typem atomowym,} \\ \delta(\sigma \to \sigma) &= 1 + \max\left(\delta(\sigma),\ \delta(\sigma)\right). \end{aligned}$$

Definicja 31. (Stwierdzenie, deklaracja, kontekst, sąd)

(1) *Stwierdzeniem* (ang. *statement*) nazywamy każdy napis postaci $M : \sigma$, gdzie $M \in \mathbf{\Lambda}$ i $\sigma \in \mathbb{T}$. W stwierdzeniu $M : \sigma$ λ-term M nazwamy *podmiotem* (ang. *subject*), zaś σ – *predykatem*[6].

[5] Ta raczej nieszczęśliwa konwencja podkreśla fakt, że abstrakcja nie może odbywać się po zmiennych typowych.

[6] Nazwy te historycznie sięgają prac nad semantyką formalną języków naturalnych R. Montague'a.

(2) *Deklaracją* (ang. *declaration*) nazywamy każde stwierdzenie w którym podmot jest zmienną termową.

(3) *Kontekstem* (ang. *context*) nazywamy skończony liniowo uporządkowany zbiór (*listę*) deklaracji, w którym wszystkie podmioty są wzajemnie różne.

(4) *Sądem* (ang. *judgement*) nazywamy kazdy napis postaci $\Gamma \vdash M : \sigma$, gdzie Γ jest kontekstem, zaś $M : \sigma$ – stwierdzeniem.

Definicja 32. (1) Jeśli $\Gamma = (x_1 : \sigma_1, \ldots, x_n : \sigma_n)$, to liniowo uporządkowany zbiór $\operatorname{dom}\Gamma = (x_1, \ldots, x_n)$ nazywamy *dziedziną* kontekstu Γ, zaś rg, Γ – zakresem kontekstu Γ oraz

$$\operatorname{dom}\Gamma = \{M \in \mathbf{\Lambda} \mid (x : \sigma) \in \Gamma\},$$
$$\operatorname{rg}\Gamma = \{\sigma \in \mathbb{T} \mid (x : \sigma) \in \Gamma\}.$$

(2) Kontekst Γ' nazywamy *podkontekstem* Γ i piszemy $\Gamma' \subseteq \Gamma$, jeśli wszystkie deklaracje występujące w Γ występują również w Γ z zachowaniem tego samego porządku.

(3) Kontekst Γ' nazywamy *permutacją* kontekstu Γ, jeśli wszystkie deklaracje w Γ' występują w Γ i odwrotnie.

(4) Jeśli Γ jest kontekstem i Φ jest zbiorem λ-zmiennych, wówczas *projekcją* Γ na Φ (symbolicznie $\Gamma \restriction \Phi$) nazywamy podkontekst Γ' kontekstu Γ taki, że $\mathrm{dom}\Gamma' = (\mathrm{dom}\Gamma) \cap \Phi$

(5) Dla kontekstów $\Gamma = (x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_m)$ i $\Gamma' = (y_1 : \rho_1, \ldots y_n : \rho_n)$ takich, że $\mathrm{dom}(\Gamma) \cap \mathrm{dom}(\Gamma') = \varnothing$ *konkatenacją* Γ i Γ' nazywamy kontekst

$$\Gamma + \Gamma' = (x_1 : \sigma_1, \ldots, x_k : \sigma_m, y_1 : \rho_1, \ldots y_n : \rho_n).$$

Przykład 12. Niech $\Gamma \equiv (y : \sigma, x_1 : \rho_1, x_2 : \rho_2, z : \tau, x_3 : \rho_3)$. Wówczas:

(1) $\operatorname{dom}\Gamma = (y, x_1, x_2, z, x_3)$.

(2) $\varnothing \subseteq (x_1 : \rho_1, z : \tau) \subseteq \Gamma$

(3) $(x_1 : \rho_1, x_2 : \rho_2, x_3 : \rho_3, y : \sigma, z : \tau)$ jest permutacją Γ.

(4) $\Gamma \restriction \{z, u, x_1\} = (x_1 : \rho_1, z : \tau)$.

2.2 Typowanie

Wprowadzamy następujące reguły wyprowadzania typu (relacji typowalności):

$$\Gamma \vdash x : \sigma \text{ (var)}, \qquad\qquad \text{jeśli } x : \sigma \in \Gamma,$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (MN) : \tau} \text{ (app)},$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x.\, M) : \sigma \to \tau} \text{ (abs)}.$$

W systemie tym mamy do czynienia z wyraźnym podziałem na obiekty dwóch rodzajów: λ-termy i typy. λ-termy możemy przekształcać dwoma dualnymi operacjami: λ-abstrakcją i aplikacją. Rezultat operacji zależy od wyboru zmiennej wolnej, którą chcemy wyabstrahować z termu albo wyboru termu, który chcemy zaaplkować do innego termu, odpowiednio. Dlatego mówimy, że w rachunku λ z typami prostymi termy *zależą* od termów. Ponieważ abstrahowanie przebiega wyłącznie po zbiorze λ-zmiennych, mówimy, że zależność (abstrakcja) jest *pierwszego rzędu.*

Definicja 33. (Typowalność)
Mówimy, że λ-term M jest typu σ w kontekście Γ, jeśli istnieje skończone drzewo sądów spełniające poniższe warunki:

(D1) W korzeniu drzewa znajduje się sąd $\Gamma \vdash M : \sigma$.

(D2) Liście są *aksjomatami*, czyli sądami postaci $\Gamma \vdash x : \sigma$.

(D3) Każdego rodzica można otrzymać z jego dzieci przez zastosowanie którejś z reguł wyprowadzania typu.

Tak określony obiekt będziemy nazywali *wyprowadzeniem* typu dla M (w kontekście Γ) i pisali $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$. O sądzie $\Gamma \vdash M : \sigma$ będziemy wówczas mówili, że jest *wyprowadzalny.*

Przykład 13. (a) Niech $\Gamma = (x : \sigma, y : \tau)$. Pokażemy, że $\mathrm{K} = \lambda xy.\, x$ ma typ $\sigma \to \tau \to \sigma$. Istotnie,

$$\cfrac{\cfrac{x : \sigma, y : \tau \vdash x : \sigma}{x : \sigma \vdash \lambda y.\, x : \tau \to \sigma} \text{ (abs)}}{\vdash \lambda xy.\, x : \sigma \to \tau \to \sigma} \text{ (abs)}$$

(b) Niech $\Gamma = (x : \tau \to \rho,\ y : \sigma \to \tau,\ z : \sigma)$. Wówczas:

$$
\dfrac{\dfrac{\dfrac{\Gamma \vdash x : \tau \to \rho \qquad \dfrac{\Gamma \vdash y : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash z : \sigma}{\Gamma \vdash yz : \tau}\,(\mathrm{app})}{\Gamma \vdash x(yz) : \rho}\,(\mathrm{app})}{x : \tau \to \sigma, y : \sigma \to \rho \vdash \lambda z.\, x(yz) : \sigma \to \rho}\,(\mathrm{abs})}{\dfrac{x : \tau \to \rho \vdash \lambda yz.\, x(yz) : (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho}{\vdash \lambda xyz.\, x(yz) : (\tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho}\,(\mathrm{abs})}\,(\mathrm{abs})
$$

(c) Nie wszystkie λ-termy są typowalne. Niech $\omega \equiv (\lambda x.\, xx)$ i przypuśćmy, że ω ma typ σ w kontekście Γ. Zauważmy, że wówczas w $x : \sigma \to \sigma \in \Gamma$. Ponieważ ω zawiera w sobie podterm (xx), to w wyprowadzeniu musiał on zostać otrzymany przez zastosowanie reguły (app). Wówczas $x : \sigma \in \Gamma$ i $x : \sigma \to \sigma \in \Gamma$, co nie jest możliwe, bo wszystkie deklaracje w Γ muszą mieć różne podmioty.

Uwaga. Notacja dowodowa zaproponowana w Przykładzie 13 wprowadza wiele redundancji, która utrudnia zorientowanie się w dłuższych wyprowadzeniach, zaś zlinearyzowanie dowodów pozwala na notowanie kolejnych sądów w arbitralnym porządku. Nic nie stoi na przeszkodzie abyśmy ograniczyli się tylko do rozpatrywania wyprowadzeń, w których zależności pomiędzy sądami ustalają ścisły porządek częściowy, tzn. takich, że:

– żaden sąd nie poprzedza sam siebie (antyzwrotność),
– jeśli jeden sąd poprzedza drugi, to drugi nie poprzedza pierwszego (antysymetryczność),
– jeśli sąd J_k poprzedza J_l i J_l poprzedza J_m, to J_k poprzedza J_m (przechodniość).

Taki charakter dowodów oddaje wariant notacji w postaci drzew wprowadzony przez Pravitza i proponowany w [HS08]. Powtarzanie się kontekstów eliminuje się w niej przez wprowadzanie każdej deklaracji do dowodu przed użyciem i wykreślanie jej po użyciu. W dalszej części pracy będziemy korzystać z analogicznej pod wieloma względami notacji Fitcha (tzw. notacji flagowej). Poniżej pokazujemy wyprowadzenia typu z Przykładu 13 w tej notacji.

(a)

$$
\begin{array}{lll}
1 & \vert\; x : \sigma & (\mathrm{var}) \\
2 & \vert\;\; \vert\; y : \sigma & (\mathrm{var}) \\
3 & \vert\; \lambda y.\, x : \tau \to \sigma : \sigma & (\mathrm{abs})\ 1 \\
4 & \lambda xy.\, x : \sigma \to \tau \to \sigma & (\mathrm{abs})\ 3
\end{array}
$$

(b)

1	$x : \tau \to \rho$	(var)
2	$y : \sigma \to \tau$	(var)
3	$z : \sigma$	(var)
4	$yz : \tau$	(app) 2 3
5	$x(yz) : \rho$	(app) 1 4
6	$\lambda z.\, x(yz) : \sigma \to \rho$	(abs) 5
7	$\lambda yz.x(yz) : (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho$	(abs) 6
8	$\lambda xyz.\, x(yz) : (\tau \to \rho) \to (\sigma \to \tau) \to \sigma \to \rho$	(abs) 7

Definicja 34. (Poprawność, typowalność) λ-term $M \in \mathbf{\Lambda}$ nazywamy *poprawnym* (ang. *legal*) lub *typowalnym* (ang. *typable*), jeśli istnieje wyprowadzenie $\Gamma \vdash M : \rho$ dla pewnego kontekstu Γ i typu $\rho \in \mathbb{T}$.

2.2.1 Rodzaje problemów

W teorii typów spotykamy trzy rodzaje problemów dotyczące sądów:

1. *Problem typowalności* (ang. *well-typedness, typability*)

   Polega na rozstrzygnięciu czy zadany term jest poprawny, czyli znalezieniu kontekstu oraz wyprowadzenia typu względem tego kontekstu dla zadanego termu. Symbolicznie:

   $$? \vdash \text{term} \ : \ ?$$

   Problem typowalności przy zadanym kontekście nazywamy problemem *przypisania typu* (ang. *type assignment*). Ma on nastepującą postać:

   $$\text{kontekst} \vdash \text{term} \ : \ ?$$

2. *Problem weryfikacji typu* (ang. *type checking*)

   Polega na sprawdzeniu czy term ma zadany typ względem danego kontekstu.

   $$\text{kontekst} \overset{?}{\vdash} \text{term} \ : \ \text{typ}$$

3. *Problem inhabitacji* (ang. *inhabitation, term finding*)

   Polega na skonstruowaniu termu (lub przynajmniej wykazaniu istnienia takiego termu), który miałby zadany typ względem danego kontekstu.

   $$\text{kontekst} \vdash ? \ : \ \text{typ}$$

W wielu systemach problem typowalności można sprowadzić do problemu weryfikacji typu. Istotnie, przypuśćmy, że M jest poprawnym termem i $\mathrm{FV}(M) = \{x_1, \dots x_n\}$. Zauważmy, że M jest typowalny, jeśli wyprowadzalny jest sąd

$$x_0 : p \vdash \mathrm{K}x_0(\lambda x_1 \dots x_n.\, M) : p,$$

gdzie $p \in U$ jest zmienną typową, zaś kombinator $K \equiv \lambda xy.\, x$.

Wszystkie wymione problemy są w rachunku λ z typami prostymi są rozstrzygalne[7], tzn. istnieją efektywnie obliczalne metody ich rozwiązywania. Czytelnika zainteresowanego szczegółami odsyłamy do [SU06, Twierdzenie 3.2.7] i [Bar92, Rozdział 4.4].

2.3 Własności

Przedstawimy teraz szereg lematów ustalających między innymi związki między rachunkiem λ bez typów wprowadzonym w Rozdziale 1, a rachunkiem λ z typami prostymi.

Lemat 3. *(O generowaniu)*

(1) Jeśli $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} x : \sigma$*, to* $x : \sigma \in \Gamma$.

(2) Jeśli $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} MN : \tau$*, to* $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma \to \tau$ *i* $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} N : \sigma$ *dla pewnego* $\sigma \in \mathbb{T}$.

(3) Jeśli $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} \lambda x.\, M : \tau$ *i* $x \notin \operatorname{dom} \Gamma$*, to* $\tau \equiv \tau_1 \to \tau_2$ *oraz* $\Gamma, x : \tau_1 \vdash_{\mathbb{T}} N : \tau_2$.

Dowód. Wynika natychmiast z postaci λ-termu. □

Lemat 4. *(O podtermie) Podterm poprawnego λ-termu jest poprawny.*

Dowód. Załóżmy, że sąd $J : \Gamma \vdash M : \sigma$ jest wyprowadzalny. Dowód przebiega przez indukcję wględem długosci wyprowadzenia J. Rozważmy następujące przypadki:

(a) Jeśli J jest konsekwencją reguły *var*, to $\mathrm{Sub}(M) = \{M\}$ (Definicja 2.1), a zatem teza jest trywialnie spełniona.

(b) Jesli J jest konsekwencją reguły *app*, to $M \equiv PQ$ dla P, Q dla których twierdzenie zachodzi. Ponieważ $\mathrm{Sub}(M) = \mathrm{Sub}(P) \cup \mathrm{Sub}(Q) \cup \{PQ\}$ (Definicja 2.3), to teza również zachodzi.

(c) Jeśli J jest konsekwencją reguły *abs*, to $M \equiv \lambda x.\, P$ dla pewnego P dla którego twierdzenie zachodzi. Ponieważ $\mathrm{Sub}(\lambda x.\, M) = \mathrm{Sub}(M) \cup \{\lambda x.\, M\}$, (Definicja 2.5) to teza zachodzi również w tym przypadku.

[7]Nie jest to bynajmniej oczywiste dla innych systemów typów; za przykład wystarczy wziąć słynny wynik J. B. Wellsa [Wel99], który stwierdza, że problemy typowalności i weryfikacji typu w Systemie F są nierozstrzygalne. Stąd w praktyce uzasadnione jest zainteresowanie mniej ekspresywnymi systemami typów, np. systemem Hindleya-Milnera.

□

Lemat 5. *(O zmiennych wolnych) Jeśli sąd* $J : \Gamma \vdash L : \sigma$ *jest wyprowadzalny, to* $\mathrm{FV}(L) \subseteq \mathrm{dom}\,\Gamma$.

Dowód. Prosty dowód przeprowadzamy przez indukcję względem długości wyprowadzenia sądu J. Rozważmy następujące przypadki:

(a) Jeśli J jest konsekwencą reguły *var*, to $L \equiv x$ dla pewnej λ-zmiennej x. Wobec tego $x : \sigma \in \Gamma$, a zatem $\mathrm{FV}(x) \subseteq \mathrm{dom}\,\Gamma$.

(b) Jesli J jest konsekwencją reguły *app*, to J musi mieć postać $\Gamma \vdash MN : \sigma$. Z założenia indukcyjnego: $\mathrm{FV}(M) \subseteq \mathrm{dom}\,\Gamma$ i $\mathrm{FV}(N) \subseteq \mathrm{dom}\,\Gamma$. Z Definicji 3: $\mathrm{FV}(MN) = \mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{FV}(N)$. Stąd $\mathrm{FV}(MN) \subseteq \mathrm{dom}\,\Gamma$.

(c) Jesli J jest konsekwencją reguły *abs*, to J musi mieć postać $\Gamma \vdash \lambda x.\, M : \sigma$. Z założenia indukcyjnego $FV(M) \subseteq \mathrm{dom}\,\Gamma$. Ponieważ $\mathrm{FV}(\lambda x.\, M) = \mathrm{FV}(M) \setminus \{x\} \subseteq \mathrm{FV}(M)$ (z Definicji 3), to $\mathrm{FV}(M) \subseteq \mathrm{dom}\,\Gamma$.

□

Lemat 6. *(1) Niech* Γ' *i* Γ'' *bedą kontekstami takimi, że* $\Gamma' \subseteq \Gamma''$. *Jeśli* $\Gamma' \vdash M : \sigma$, *to* $\Gamma'' \vdash M : \sigma$.

(2) Jeśli $\Gamma \vdash M : \sigma$, *to* $\Gamma \upharpoonright \mathrm{FV}(M) \vdash M : \sigma$.

(3) Jeśli $\Gamma \vdash M : \sigma$ *i* Γ' *jest permutacją* Γ, *to* $\Gamma' \vdash M : \sigma$.

Dowód. Dowody przebiegają przez indukcję względem długości wyprowadzenia. Czytelnika zainteresowanego szczegółami odsyłamy do [Bar92, Tw. 3.1.7]. □

Uwaga. Zauważmy, że (6.(3)) rozluźnia konieczność eliminowania maksymalnej deklaracji z kontekstu przy stosowaniu reguły *abs*. W tekstach wprowadzających typy proste zazwyczaj przez kontekst rozumie się po prostu skończony zbiór wzajemnie różnych deklaracji [Bar92; SU06; HS08]. Ponieważ branie dowolnej permutacji listy nie wpływa na typowanie, to widzimy, że obydwa znaczenia możemy stosować zamiennie, bowiem jest to nic innego jak traktowanie kontekstu jako zbioru deklaracji.

Lemat 7. *(O podstawieniu) Załóżmy, że*

(a) $\Gamma_1, x : \sigma, \Gamma_2 \vdash M : \rho$

(b) $\Gamma_1 \vdash N : \sigma$

Wówczas $\Gamma_1, \Gamma_2 \vdash M[x/N] : \rho$.

Dowód. Niech $\Gamma = \Gamma_1 + \Gamma_2$. Korzystając z części (3) Lematu 6 dowód przeprowadzimy przez indukcję względem długości wyprowadzenia $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$. Rozważmy następujące przypadki:

(i) Jeśli $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$ jest konsekwencją reguły *var*, to $M \equiv x$. Wówczas $M[x/N] \equiv N$ i $\rho \equiv \sigma$. Teza zachodzi w oczywisty sposób.

(ii) $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$ jest konsekwencją reguły *app*. Wówczas $M \equiv PQ$ i istnieją wyprowadzenia $\Gamma, x : \sigma \vdash P : \tau \to \rho$ oraz $\Gamma, x : \sigma \vdash Q : \tau$. Z założenia indykcyjnego mamy, że $\Gamma \vdash P[x/N] : \tau \to \rho$ oraz $\Gamma \vdash Q[x/N] : \tau$. Wówczas stosując regułę *app* mamy:

$$\frac{\Gamma \vdash P[x/N] : \tau \to \rho \qquad \Gamma \vdash Q[x/N] : \tau}{\Gamma \vdash (P[x/N]Q[x/N]) : \rho}\ (\text{app}),$$

Tezę otrzymujemy z faktu, że $(PQ)[x/N] = P[x/N]Q[x/N]$.

(iii) Jeśli $\Gamma, x : \sigma \vdash M : \rho$ jest konsekwencją reguły *abs*, to $M \equiv \lambda y. P : \rho$ dla $\rho \equiv \sigma \to \tau$, $y \not\equiv x$. Z założenia indukcyjnego istnieje wyprowadzenie $\Gamma', y : \tau \vdash P[x/N] : \rho$, gdzie $\Gamma' = \Gamma + (x : \sigma)$. Wówczas, stosując regułę *abs* mamy:

$$\frac{\Gamma', y : \tau \vdash P[x/N] : \rho}{\Gamma' \vdash (\lambda y. P[x/N]) : \tau \to \rho}\ (\text{abs})$$

Ponieważ $(\lambda y. P)[x/N] = \lambda y. P[x/N]$ oraz $M \equiv \lambda y. P : \tau \to \rho$, otrzymujemy tezę.

$\square$

Lemat 8. *(Redukcja podmiotu) Załóżmy, że*

(i) $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$

(ii) $M \to_\beta^* N$

Wówczas $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} N : \sigma$.

Dowód. Pokażemy, że twierdzenie zachodzi dla jednego kroku redukcji $\to_\beta$. Dowód zwrotności jest trywialny, zaś aby pokazać przechodniość wystarczy skorzystać z indukcji wzgledem długości ciągu redukcji.

Niech $M \to_\beta N$. Dowód przeprowadzimy przez indukcję względem długości wyprowadzenia $\Gamma \vdash M : \sigma$. Rozważmy następujące przypadki:

(a) $\Gamma \vdash M : \sigma$ jest konsekwencją reguły *var*. Wówczas $M \equiv x$ dla pewnej λ-zmiennej $x \in V$. Wówczas poprzednik nie jest spełniony, bowiem M nie da się zredukować. Zatem twierdzenie trywialnie zachodzi.

(b) $\Gamma \vdash M : \sigma$ jest konsekwencją reguły *app*. Wówczas $M \equiv PQ$ oraz istnieją wyprowadzenia $\Gamma \vdash P : \tau \to \sigma$ oraz $\Gamma \vdash Q : \sigma$. Ponadto zakładamy, że dla pewnych $P', Q' \in \mathbf{\Lambda}$ mamy $P \to_\beta P'$ i $Q \to_\beta Q'$. Istnieją dwie możliwości redukcji $M \to_\beta N$:

   (1) $N \equiv PQ'$. Poniważ $\Gamma \vdash Q' : \sigma$ (założenie indukcyjne), to możemy zastosować regułę *app*:

$$\frac{\Gamma \vdash P : \tau \to \sigma \qquad \Gamma \vdash Q' : \tau}{\Gamma \vdash PQ' : \sigma} \text{ (app)},$$

   Ponieważ $N \equiv PQ'$, to otrzymujemy tezę.

   (2) $N \equiv P'Q$. Postępujemy analogicznie do przypadku (1)

(c) $\Gamma \vdash M : \sigma$ jest konsekwencją reguły *abs*. Wówczas $M \equiv \lambda x.\, P$, dla pewnych $\rho, \tau \in \mathbb{T}$ mamy $\sigma \equiv \rho \to \tau$ oraz istnieje wyprowadzenie sądu $\Gamma, x : \rho \vdash P : \tau$. Ponadto zakładamy, że dla pewnego $P' \in \mathbf{\Lambda}$ mamy $P \to_\beta P'$. β-redukcja $M \to_\beta N$ musi prowadzić w tym wypadku do $N \equiv \lambda x.\, P'$. Ponieważ $\Gamma, x : \rho \vdash P' : \tau$ (założenie indukcyjne), to możemy zastosowac regułę *abs*:

$$\frac{\Gamma', x : \rho \vdash P' : \tau}{\Gamma \vdash \lambda x.\, P' : \rho \to \tau} \text{ (abs)}$$

Stąd teza.

□

Lemat 9. *(Zachowawczość η-redukcji) Załóżmy, że*

(i) $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$

(ii) $M \to_\eta^* N$

Wówczas $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} N : \sigma$.

Dowód. Dowód przeprowadzamy analogicznie do Lematu 8. □

Twierdzenie 4. *(Własność Churcha-Rossera) Relacja $\to_\beta$ określona na typowalnych λ-termach ma własność CR.*

Dowód. Wynika to bezpośrednio z Twierdzenia 1 i Lematu 8. □

2.3.1 Uniwersalny polimorfizm

Istnieje wiele wariantów wprowadzania typów prostych. Przedstawiony w tym rozdziale rachunek powszechnie nazywany jest *stylem Currego*. Charakteryzuje go interesująca własność: poprawne termy mają jednoznacznie wyznaczony typ z dokładnością do podstawienia. Oznacza to, że zmienne wystepujące w typie każdego poprawnego termu są w istocie kwantyfikowane po zbiorze wszystkich typów prostych. Każdy taki typ nazywamy *typem (uniwersalnie parametrycznie) polimorficznym.*

Definicja 35. (Podstawienie typu) Podstawienie typu τ za zmienną typową p w typie σ nazywamy następującą funkcję :

$$\begin{aligned} p[p/\tau] &= \tau, \\ q[p/\tau] &= q, \text{ jeśli } q \not\equiv p, \\ (\sigma_1 \to \sigma_2)[p/\tau] &= \sigma_1[p/\tau] \to \sigma_2[p/\tau]. \end{aligned}$$

Jeśli Γ jest kontekstem, to przez $\Gamma[p/\tau]$ oznaczamy podstawienie τ za zmienną p dla wszystkich typów występujących w Γ.

Lemat 10. *Jeśli $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$, to $\Gamma[p/\tau] \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma[p/\tau]$ dla dowolnego $\tau \in \mathbb{T}$ i zmiennej $p \in U$.*

Dowód. Dowód przebiega przez indukcję względem długości wyprowadzenia $\Gamma \vdash M : \sigma$. Szczegóły pomijamy. □

Mając na uwadze Lemat 10 możemy wnioskować o wielu własnościach funkcji reprezentowanych przez λ-termy tylko na podstawie typu. Na przykład typowi $\sigma \to \sigma$ odpowiada dokładnie jeden (z dokładnością do α-konwersji) term $\lambda x.\, x$ i reprezentuje on funkcję identycznościową; typom $\sigma \to \rho \to \sigma$ i $\sigma \to \rho \to \rho$ odpowiednio przypisać możemy wyłącznie projekcje fst i snd (określone w 1.4.3), zaś typowi $(\rho \to \tau) \to (\sigma \to \rho) \to \sigma \to \tau$ term $\lambda gfx.g(fx)$ reprezentujący złożenie funkcji (Przykład 13 (b)), co do której wiemy z kolei, że jest łączna. Jest to wraz ogólnej zależności: dysponując dowolnym typem polimorficznym otrzymujemy *twierdzenie za darmo* [Wad89] dotyczące termów, które mają ten typ.

2.3.2 Silna normalizacja

Pokażemy, że wszystkie typowalne λ-termy redukują się do postaci β-normalnej przez skończony ciąg β-redukcji. Oznacza to, że nie ma możliwości otrzymania nieskończonego ciągu β-redukcji, tak jak to miało miejsce w Przykładzie 8 (a) (b) i to bez względu na przyjętą strategię redukcji.

Ponieważ wszystkie λ-termy samorepliujące się przy β-redukcji nie są typowalne, nie jest możliwe w rachunku λ z typami prostymi reprezentowanie rekurencyjnych typów ADT w myśl podrozdziału 1.4.4. Wynika to z faktu, że dodanie typów prostych do rachunku λ bez typów znacznie zmniejsza ekspresywność systemu, uniemożliwiając wyrażenie operacji rekursji prostej. Okazuje się, że stosujac reprezentację Churcha dla liczb naturalnych i utożsamiajac λ-termy za pomocą β-konwersji, rachunek λ z typami prostymi równoważny jest zbiorowi *wielomianów rozszerzonych* [Zak07]. Liczebnikom Churcha odpowiada wówczas typ postaci $(\sigma \to \sigma) \to \sigma \to \sigma$ i możliwe jest określenie na nich dodawania i mnożenia.

Ponieważ wszystkie ciągi redukcji są w tym systemie skończone, to relacja β-konwersji jest rozstrzygalna, wystarczy bowiem sprowadzić jej argumenty do postaci normalnej. Podejście to rodzi jednak nietrywialne problemy natury złożonościowej [SU06, Podrozdział 3.7].

Opracowany tutaj dowód pochodzi z [HS08, Dodatek A3]. Polega on na:

1. Konstrukcji interpretacji dla typów prostych: termów redukowalnych.
2. Wykazaniu, że każdy term redukowalny jest silnie normalizowalny.
3. Wykazaniu, że każdy typowalny term jest redukowalny.

Rozumowanie przedstawione w tym dowodzie, tzw. *computability method* oryginalnie przypisywane W. Taitowi [Tai67], z odpowiednimi zmianami stosuje się w dowodach własności silnej normalizacji dla innych systemów typów [SU06, Podrozdział 11.5].

Definicja 36. (Termy redukowalne) Niech $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \sigma$. Powiemy, że M jest *redukowalny* (także *silnie obliczalny*), jesli jeśli spełnia poniższe warunki:

(R1) Jesli σ jest zmienną typową, to M jest silnie normalizowalny. Określamy:

$$[\![\sigma]\!] = \mathrm{SN}.$$

(R2) Jesli σ jest typem funkcyjnym postaci $\sigma \equiv \rho \to \tau$, to dla wszystkich termów redukowalnych N takich, że $\Gamma' \vdash_{\mathbb{T}} MN : \tau$, MN jest redukowalny. Określamy:

$$[\![\rho \to \tau]\!] = \{M \mid \forall N (N \in [\![\rho]\!]) \implies MN \in [\![\tau]\!]\}.$$

Lemat 11. *Niech $\tau \in \mathbb{T}$ bedzie dowolnym typem prostym. Wówczas:*

(1) $[\![\tau]\!] \subseteq \mathrm{SN}$.

(2) Jeśli $N_1, N_2, \ldots, N_k \in \mathrm{SN}$, *to* $xN_1N_2 \ldots N_k \in [\![\tau]\!]$.

Dowód. Dowód przeprowadzimy przez indukcję strukturalną względem typu τ. Mamy do rozważenia następujące dwa przypadki:

(a) τ jest zmienną typową.

   (1) Wynika bezpośrednio z definicji $[\![\tau]\!] \in \mathrm{SN}$.
   (2) Niech $N_1, N_2, \ldots, N_k \in \mathrm{SN}$. Wówczas $N_1, N_2, \ldots, N_k \in \mathrm{SN}$. Z definicji $[\![\tau]\!]$ mamy, że $xN_1N_2\ldots N_k \in [\![\tau]\!]$.

(b) Przypuśćmy, że $\tau = \sigma \to \rho$ oraz twierdzenie zachodzi dla σ i ρ.

   (1) Niech $M \in [\![\sigma \to \rho]\!]$ i niech x bedzie dowolną λ-zmienną. Z części (2) założenia indukcyjnego mamy $x \in [\![\sigma]\!]$, zatem z definicji $[\![\sigma \to \rho]\!]$ mamy $Mx \in [\![p]\!]$. Ponieważ z części (1) założenia indukcyjnego $[\![\rho]\!] \in \mathrm{SN}$, to $Mx \in \mathrm{SN}$ i w konsekwencji $[\![\sigma \to \rho]\!] \subseteq \mathrm{SN}$.
   (2) Niech $P \in [\![\sigma]\!]$. Wówczas z części (1) założenia indukcyjnego $P \in \mathrm{SN}$. Chcemy pokazać, że $xN_1N_2\ldots N_k \in [\![\rho]\!]$. Z części (2) założenia indukcyjnego

$$xN_1N_2\ldots N_kN_{k+1} \in [\![\rho]\!].$$

   Ustalając $N_{k+1} \equiv P$ otrzymujemy tezę.

□

Lemat 12. *Załóżmy, że:*

(a) $M[x/N_0]N_1\ldots N_k \in \mathrm{SN}$,

(b) $N_0 \in \mathrm{SN}$.

Wówczas $(\lambda x.\, M)N_0N_1\ldots N_k \in \mathrm{SN}$.

Dowód. (Ad absurdum) Przypuśćmy, że $P_0 \equiv (\lambda x.\, M)N_0N_1\ldots N_k \notin \mathrm{SN}$. Wówczas istnieje nieskończony ciąg redukcji

$$P_0 \to P_1 \to \ldots$$

Każdy podterm λ-termu silnie normalizowalnego jest silnie normalizowalny. Ponieważ $P_0 \equiv M[x/N_0]N_0N_1\ldots N_k \in \mathrm{SN}$, to $M[x/N_0]$, $N_0, N_1, \ldots, N_k \in \mathrm{SN}$. Na podstawie Lematu 2 mamy ponadto, że $M \in \mathrm{SN}$. Wobec tego dla pewnego $n \in \mathbb{N}$ redukcji ulega redeks czołowy:

$$P_n \equiv (\lambda x.\, M')N_0'N_1'\ldots N_k' \to_\beta M'[x/N_0']N_0'N_1'\ldots N_k' \equiv P_{n+1},$$

gdzie $M \to_\beta^* M'$ oraz $N_i \to_\beta^* N_i'$ dla $i \leq k$. Ale skoro tak, to prawdą jest również, że $M[x/N_0]N_1\ldots N_k \to_\beta^* P_{n+1}$, zaś $M[x/N_0]N_1\ldots N_k \in \mathrm{SN}$. Zatem $P_{n+1} \in \mathrm{SN}$, co prowadzi do sprzeczonści. □

Lemat 13. *Załóżmy, że:*

(a) $M[x/N_0]N_1 \ldots N_k \in [\![\tau]\!]$,

(b) $N_0 \in \mathrm{SN}$.

Wówczas $(\lambda x.\, M)N_0N_1 \ldots N_k \in [\![\tau]\!]$.

Dowód. Dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem τ. Rozważmy następujące przypadki:

(a) Jeśli τ jest zmienną typową, to $[\![\tau]\!] = \mathrm{SN}$. Wobec tego problem sprowadza się do Lematu 12.

(b) Przypuśćmy, że $\tau \equiv \sigma \to \rho$ i niech $M[x/N_0]N_1 \ldots N_k \in [\![\sigma \to \rho]\!]$. Wybierzmy dowolny $P \in [\![\sigma]\!]$. Wówczas $M[x/N_0]N_1 \ldots N_kN_{k+1} \in [\![\rho]\!]$. Z założenia indukcyjnego mamy jednak, że $(\lambda x.\, M)N_0N_1 \ldots N_kN_{k+1} \in [\![\rho]\!]$. Wystarczy więc przyjąć $N_{k+1} \equiv P$ i z definicji $[\![\sigma \to \rho]\!]$ mamy, że $(\lambda x.\, M)N_0N_1 \ldots N_k \in [\![\sigma \to \rho]\!]$.

□

Definicja 37. Powiemy, że kontekst $\Gamma = \{x_1 : \sigma_1, x_2 : \sigma_2, \ldots, x_n : \sigma_n\}$ *spełnia* stwierdzenie $M : \sigma$ i będziemy pisali $\Gamma \vDash M : \sigma$, jeśli dla dowolnych $N_1 \in [\![\sigma_1]\!]$, $N_2 \in [\![\sigma_2]\!]$, ..., $N_n \in [\![\sigma_n]\!]$ mamy, że:

$$M[x_1/N_1,\, x_2/N_2,\, \ldots,\, x_n/N_n] \in [\![\tau]\!].$$

Lemat 14. *Jeśli* $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \tau$, *to* $\Gamma \vDash M : \tau$.

Dowód. Dowód będzie przebiegał przez indukcję względem wyprowadzenia $\Gamma \vdash M : \tau$. Niech $\Gamma = (x_1 : \tau_1, x_2 : \tau_2, \ldots, x_n : \tau_n)$ będzie kontekstem dla którego istnieje wyprowadzenie $J : \Gamma \vdash M : \tau$. Wybierzmy $N_1 \in [\![\tau_1]\!]$, $N_2 \in [\![\tau_2]\!]$, ..., $N_n \in [\![\tau_n]\!]$. Rozważmy następujące przypadki:

(a) J jest konsekwencją reguły *var*. Wówczas J jest postaci $\Gamma \vdash x_i : \tau$ dla pewnego $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$, gdzie $x_i : \tau \in \Gamma$. Stąd $M[\vec{x}/\vec{N}] = x_i[x_i/N_i] = N_i \in [\![\tau]\!]$. Z dowolności N_i, $\Gamma \vDash M : \tau$.

(b) J jest konsekwencją reguły *app*. Wówczas J jest postaci $\Gamma \vdash PQ : \tau$. Z założenia indukcyjnego istnieje $\sigma \in \mathbb{T}$ takie, że $\Gamma \vDash P : \sigma \to \tau$ i $\Gamma \vDash Q : \sigma$. Wobec tego $P[\vec{x}/\vec{N}] \in [\![\sigma \to \tau]\!]$ i $Q[\![\vec{x}/\vec{N}]\!] \in [\![\sigma]\!]$. Z definicji jednoczesnego podstawienia (Definicja 10) mamy:

$$PQ[\vec{x}/\vec{N}] = P[\vec{x}/\vec{N}]Q[\vec{x}/\vec{N}]$$

Z definicji $[\![\sigma \to \tau]\!]$ wówczas $M \in [\![\tau]\!]$.

(c) J jest konsekwencją reguły *abs*. Wówczas J jest postaci $\Gamma \vdash \lambda y.\, P : \sigma \to \rho$, gdzie $y \notin \mathrm{dom}\Gamma$. Z założenia indukcyjnego mamy, że $\Gamma, y : \sigma \vDash P : \rho$. Oznacza to, że dla dowolnych $N_1 \in [\![\tau_1]\!]$, $N_2 \in [\![\tau_2]\!]$, …, $N_n \in [\![\tau_n]\!]$ mamy

$$\forall N \in [\![\sigma]\!] \left(P[\vec{x}, y/\vec{N}, N] \in [\![\rho]\!]\right) \tag{$*$}$$

Ustalmy $P' \equiv P[y/y'][\vec{x}/\vec{N}]$, gdzie $y' \notin \mathrm{dom}\Gamma$ i $y' \notin \mathrm{FV}(N_i)$ dla $i \in \mathbb{N}$, $1 \leq i \leq n$. Wówczas z $(*)$:

$$\forall N \in [\![\sigma]\!] \ (P'[y'/N] \in [\![\rho]\!])$$

Ustalmy $N_0 \in [\![\sigma]\!]$. Wówczas z cześci (1) Lematu 11 $N_0 \in \mathrm{SN}$. Wobec tego z Lematu 13 wnioskujemy, że:

$$(\lambda y'.\, P')N_0 \in [\![\rho]\!] \tag{$**$}$$

Zauważmy teraz, że ponieważ $\forall i \ y_i \notin \mathrm{FV}(N_i)$

$$\begin{aligned} (\lambda y'.\, P') &= (\lambda y'.\, P[y/y'][\vec{x}/\vec{N}]) \\ &= (\lambda y'.\, P[y/y'])[\vec{x}/\vec{N}] = (\lambda y.\, P)[\vec{x}/\vec{N}] \end{aligned} \tag{$***$}$$

Z $(**)$ i $(***)$ otrzymujemy

$$\left((\lambda y.\, P)[\vec{x}/\vec{N}]\right) N_0 \in [\![\rho]\!].$$

Ponieważ $N_0 \in [\![\sigma]\!]$, to z definicji $[\![\sigma \to \rho]\!]$ mamy, że

$$(\lambda y.\, P)[\vec{x}/\vec{N}] \in [\![\sigma \to \rho]\!].$$

Z dowolności $\vec{N}$ otrzymujemy ostatecznie, że $\Gamma \vDash \lambda y.\, P$.

□

Twierdzenie 5. *(O silnej normalizacji) Jeżeli* $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \tau$, *to* $M \in \mathrm{SN}_\beta$.

Dowód. Na podstawie Lematu 14, jeśli $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \tau$, to $M \in [\![\tau[\![$. Stosując Lemat 11 otrzymujemy tezę. □

Natychmiast widzimy, że własność silnej normalizacji pociąga za sobą własność słabej normalizacji, dlatego pomijamy dowód tej drugiej.

2.4 Typy w stylu Churcha

Przypisanie typu λ-termowi rozpoczynamy zawsze od określenia typów dla λ-zmiennych. Zasadniczo możemy to rozwiązać na dwa sposoby:

1. Możemy przypisać unikalny typ każdej λ-zmiennej przed jej wprowadzeniem. Takie podejście nazywamy *stylem Churcha* albo typowaniem *explicite*, ponieważ deklaracje typowe zmiennych występują jawnie w składni λ-termów. W konsekwencji w podejściu tym nie spotykamy problemu typowalności. Stąd systemy w tym stylu nazywa się również systemami typowanymi (ang. *typed systems*).

2. Inny sposób polega na nie ustalaniu typów zmiennych. Składnia λ-termów nie ulega wówczas zmianie, zaś o typie rozstrzyga algorytm rekonstrukcji typu. Typy w tym stylu były przedmotem Rozdziału 2. W literaturze powszechnie nazywa się to podejście *stylem Currego* albo typowaniem *implicite*, zaś systemy w takim stylu określa się systemami *przypisywania typu* (ang. *type assignment systems*).

Obydwa podejścia dają w rezultacie takie same systemy typów [SU06, Rozdział 3.4]. Rozwiązaniem kompromisowym jest tzw. typowanie w *stylu de Brujina*[8] [BDS13, 1A.33] w którym nie ustala się typu wszystkich zmiennych, jednak adnotacje typowe są częścią składni (tak jak w stylu Churcha) i zależą od ustalonego kontekstu.

Zaprezentujemy teraz alternatywną składnię oraz reguły wyprowadzania typów dla systemu typów prostych w stylu Churcha. Wszystkie określenia oraz twierdzenia występujące dotychczas w Rozdziale 2 mają swoje odpowiedniki dla systemu w stylu Churcha [NG14, Rozdział 2.10]. Wyjątek stanowi Lemat 10, które jest zastąpione w tym systemie Lematem 15 o jednoznaczności typu.

2.4.1 Składnia

Zbiór typów $\mathbb{T}$ definiujemy w myśl Definicji 29. Niech U, V będą przeliczalnie nieskończonymi zbiorem zmiennych przedmiotowych, odpowiednio: zmiennych typowych i (λ-zmiennych). Celem zdefiniowania λ-termów w stylu Churcha przeprowadzamy konstrukcję analogiczną do tej przedstawionej w Rozdziale 1: określamy zbiór pretermów $\tilde{\Lambda}_{\mathbb{T}}$, a następnie definiujemy λ-termy jako klasy abstrakcji α-konwersji.

$$
\begin{aligned}
\mathbb{T} &\leftarrow U \mid (\mathbb{T} \to \mathbb{T}) \\
\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbb{T}} &\leftarrow V \mid (\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbb{T}}\, \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbb{T}}) \mid (\lambda V : \mathbb{T}.\, \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbb{T}})
\end{aligned}
$$

[8] W [SU06] nazywa się to podejście *nieortodoksyjnym stylem Churcha*

Zauważmy, że λ-termy w stylu Churcha różnią się od stylu Currego tylko w wypadku λ-abstrakcji. Z tą jedną modyfikacją definicje zbioru zmiennych wolnych, podstawienia, β- i η-redukcji, kontekstu i wyprowadzenia są analogiczne do tych z Rozdziałów 1 i 2.

2.4.2 Typowanie

$$\Gamma \vdash x : \sigma \text{ (var)}, \qquad\qquad \text{jeśli } x : \sigma \in \Gamma,$$

$$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash (MN) : \tau} \text{ (app)},$$

$$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma . M) : \sigma \to \tau} \text{ (abs)}.$$

Zauważmy, że mając zadany kontekst, typ każdego poprawnego λ-termu jest jednoznacznie określony. Jest to istotna różnica, którą wprowadza styl Churcha. W systemach w stylu Currego termy poprawne są zamknięte ze względu na podstawienie typu. Własność, którą wyraża Lemat 15 zachodzi w nich z dokładnością do podstawienia.

Lemat 15. *(O jednoznaczności) Jeśli* $\Gamma \vdash M : \sigma$ *i* $M \to_\beta^*$*, to* $\Gamma \vdash N : \sigma$.

Dowód. Dowód przebiega przez indukcję względem długości wyprowadzenia $\Gamma \vdash M : \sigma$. Szczegóły pomijamy. □

Przykład 14. Zauważmy, że nie istnieje jeden typ dla reprezentacji funkcji identycznościowej. Jeśli *nat* jest stałą typową, którą reprezentujemy liczby naturalne, to identyczność na zbiorze liczb naturalnych będziemy reprezentowali termem $\lambda x : nat. x$, na zbiorze funkcji $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $\lambda x : \text{nat} \to \text{nat}. x$ i tak dalej. Aby określić ogólną postać identyczności, musimy móc abstrahować po zbiorze typów, czyli parametryzować postać termu typem.

$$\lambda\sigma : *. \lambda x : \sigma. x,$$

gdzie symbolem $*$ oznaczamy typ obiektów będących typami (szczegóły omówimy w Rozdziale 3). Własność tę (polimorfizm parametryczny) miał w pewnym sensie rachunek λ w stylu Currego (Podrozdział 2.3.1).

2.5 Podsumowanie

System typów, który był przedmiotem Rozdziału 2 jest najbardziej elementarnym przypadkiem typowanego rachunku λ[9]. W literaturze często spotyka się być

[9]Patologicznym przypadkiem jest rachunek λ bez typów, jeśli przyjmiemy, że wszystkie wyrażenia mają w nim dokładnie jeden typ. Argument ten często podejmowany jest na rzecz statycznie

może jeszcze prostszy, równoważny wariant typów prostych, w którym wszystkie typy buduje się wyłącznie z jednej stałej typowej. Pod pojęciem typów prostych rozumie się także szereg rozszerzeń przedstawionego przez nas systemu.

Mają one na ogół szczególny cel praktyczny: na przykład rozszerzenie o typ dla par umożliwiają elegancką prezentację analogii między intuicjonistycznym rachunkiem zdań, typowanym rachunkiem λ i kategoriami kartezjańsko domkniętymi, znanej szerzej jako izomorfizm Currego-Howarda-Lambeka [GTL89, Rozdział 3.1]. Nie wpływa to jednak na samą istotę typowania, która polega na zależności termów od termów. Jak przekonamy się w Rozdziale 3 zależność tę można rozszerzyć, pozwalając typom na decydowanie o postaci termu.

3 System Girarda/Reynoldsa

W rozdziale tym przedstawimy rachunek λ drugiego rzędu w stylu Churcha. System ten wprowadzony został przez J.-Y. Girarda jako System F i w literaturze szerzej znany jest pod tą nazwą.

3.1 Termy zależne od typów

Definicja 38. (Typy $\mathbb{T}2$) Niech $\mathbb{V}$ będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych. Zmienne te będziemy nazywali *zmiennymi typowymi* i oznaczali literami alfabetu greckiego ($\alpha, \beta, \gamma, \ldots$). Zbiór typów $\mathbb{T}2$ Systemu F okreslamy w notacji BNF następującym zapisem:

$$\mathbb{T}2 \;\leftarrow\; \mathbb{V} \mid (\mathbb{T}2 \to \mathbb{T}2) \mid (\Pi\mathbb{V} : *.\, \mathbb{T}2)$$

Za oznaczenia metazmienych przebiegających zbiór typów $\mathbb{T}2$ posłużą nam późniejsze litery alfabetu greckiego: $\sigma, \tau, \rho, \ldots$ lub następujące litery alfabetu łacińskiego: A, B, T.

Definicja 39. (Pretermy $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbb{T}2}$) Niech V będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych. Zmienne te będziemy nazywali *zmiennymi termowymi* i oznaczali literami alfabetu łacińskiego (x, y, z, $\ldots$). Zbiór pretermów $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbb{T}2}$ Systemu F okreslamy w notacji BNF następującym zapisem:

$$\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbb{T}2} \;\leftarrow\; V \mid (\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbb{T}2}\, \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbb{T}2}) \mid (\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbb{T}2}\, \mathbb{T}2) \mid (\lambda V : \mathbb{T}2.\, \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbb{T}2}) \mid (\lambda V : *.\, \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbb{T}2})$$

Wyrażenia postaci $(\lambda V : *.\, \tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbb{T}2})$ i $(\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbb{T}2}\, \mathbb{T}2)$ nazywamy *polimorficzną abstrakcją* i *polimorficzną aplikacją*, odpowiednio. O zmiennej (termowej lub typowej) występującej bezpośrednio po znaku λ powiemy, że jest związana.

typowanych języków programowania.

Uwaga. Zakładamy, że $V \cap \mathbb{V} = \varnothing$.

Konwencja. Stosujemy standardowe konwencje notacyjne:
- Opuszczamy najbardziej zewnętrzne nawiasy,
- Aplikacja wiąże prawostronnie,
- Aplikacja i $\to$ wiążą mocniej niż λ– i Π-abstrakcja,
- Kolejne λ- i Π-abstrakcje zmiennych tych samych typów mogą występować pod wspónym znakiem i wiążą prawostronnie,
- Konstruktor typu $\to$ wiaże prawostronnie.

Przykładowo: $\Pi\alpha\,\beta : *.\,\alpha \to \beta \to \alpha \;\equiv\; \Pi\alpha : *.(\Pi\beta : *.\,(\alpha \to (\beta \to \alpha))))$.

Wyrażenia λ (λ-termy) w Systemie F to klasy abstrakcji α-konwersji. Konstrukcja ta jest analogiczna do zaprezentowanej w Rozdziale 1.1. Za oznaczenia metazmienych przebiegające zbiór wyrażeń Systemu F posłużą nam późniejsze litery alfabetu łacińskiego: M, N, P, ...

Oczywistemu rozszerzeniu ulega szereg pojęć z Rozdziału 2. Poniżej umieszczamy najistotniejsze z nich.

Definicja 40. (Zbiór FV zmiennych wolnych) Przez $\mathrm{FV}(M)$ oznaczamy zbiór wszystkich wolnych zmiennych termowych i typowych wystepujących w $M \in \mathbf{\Lambda}_{\mathrm{T2}}$.

$$
\begin{aligned}
\mathrm{FV}(x) &= x,\\
\mathrm{FV}(\lambda x : \sigma.\, M) &= \mathrm{FV}(\sigma) \cup (\mathrm{FV}(M) \setminus \{x\}),\\
\mathrm{FV}(MN) &= \mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{FV}(N),\\
\mathrm{FV}(\lambda\alpha : *.\, M) &= \mathrm{FV}(M) \setminus \{\alpha\},\\
\mathrm{FV}(M\sigma) &= \mathrm{FV}(M) \cup \mathrm{FV}(\sigma).
\end{aligned}
$$

Definicja 41. (Multizbiór Sub podtermów pretermu)

(1) $\mathrm{Sub}(x) = \{x\}$

(2) $\mathrm{Sub}(MN) = \mathrm{Sub}(M) \cup \mathrm{Sub}(N) \cup \{M\,N\}$

(3) $\mathrm{Sub}(M\sigma) = \mathrm{Sub}(M) \cup \{M\sigma\}$

(4) $\mathrm{Sub}(\lambda x : \alpha.\, M) = \mathrm{Sub}(M) \cup \{\lambda x : \alpha.\, M\}$

(5) $\mathrm{Sub}(\lambda\sigma : *.\, M) = \mathrm{Sub}(M) \cup \{\lambda\sigma : *.\, M\}$

Definicja 42. (Podstawienie) Rozszerzamy definicję podstawienia o reguły obejmujące zmienne typowe.

$$
\begin{aligned}
x[x/P] &= P,\\
y[x/P] &= y,\\
(MN)[x/P] &= M[x/P]N[x/P],\\
(\lambda y:\sigma.\,M)[x/P] &= \lambda y:\sigma.\,M[x/P],\ \text{gdzie}\, y\notin FV(P)\cup\{x\},\\
(M\sigma)[x/P] &= M[x/P]\sigma,\\
(\lambda\beta:*.\,M)[x/P] &= \lambda\beta:*.\,M[x/P],\ \text{gdzie}\ p\notin \mathrm{FV}(P),\\
x[\alpha/\sigma] &= x,\\
(MN)[\alpha/\sigma] &= M[\alpha/\sigma]N[\alpha/\sigma],\\
(\lambda y:\sigma.\,M)[\alpha/\sigma] &= \lambda y:\sigma.\,M[\alpha/\sigma],\\
(M\rho)[\alpha/\sigma] &= M\rho[\alpha/\sigma],\\
(\lambda\beta:*.\,M)[\alpha/\sigma] &= \lambda\beta:*.\,M[\alpha/\sigma],\ \text{gdzie}\ \beta\notin \mathrm{FV}(\sigma)\cup\{\alpha\}.
\end{aligned}
$$

Definicja 43. (α-konwersja) Relacją $=_\alpha$ (α-konwersji) nazywamy najmniejszą w sensie mnogościowym zgodną relację równowazności na $\tilde{\mathbf{\Lambda}}_{\mathbb{T}2}$ taką, że

(α1) $\lambda x:\sigma.\,M =_\alpha \lambda y:\sigma.\,M[x/y]$, jeśli $M[x/y]$ jest określone i $y\notin \mathrm{FV}(M)$.

(α2) $\lambda\alpha:*.\,M =_\alpha \lambda\beta:*.\,M[\alpha/\beta]$, jeśli β nie występuje w M.

(α3) $\Pi\alpha:*.\,M =_\alpha \Pi\beta:*.\,M[\alpha/\beta]$, jeśli β nie występuje w M.

Przykład 15. Rozważmy następujące przykłady α-konwertów:

a) $\lambda\alpha:*.\,\lambda x:\alpha.\,x =_\alpha$
$\lambda\beta:*.\,\lambda x:\beta.\,x =_\alpha$
$\lambda\beta:*.\,\lambda y:\beta.\,y.$

b) $\Pi\alpha:*.\,\alpha\to\alpha =_\alpha$
$\Pi\beta:*.\,\beta\to\beta =_\alpha$
$\Pi\beta:*.\,\beta\to\beta.$

Odpowiednim modyfikacjom ulegają również pojęcia wprowadzone w Definicji 31 i Definicji 32.

Definicja 44. (Stwierdzenie, deklaracja)

1. Stwierdzeniem nazywamy każdy napis postaci $M:\sigma$, gdzie $M\in\Lambda_{\mathbb{T}2}$ i $\sigma\in\mathbb{T}2$ lub $\sigma:*$, gdzie $\sigma\in\mathbb{T}2$.
2. Deklaracją nazywamy każde stwierdzenie ze zmienną typową lub zmienną termową w miejscu podmiotu.

Definicja 45. (λ2-kontekst, dziedzina, zakres)

(E1) $\varnothing$ jest $\lambda 2$-kontekstem; oznaczamy go parą nawiasów () lub pomijamy, jeśli nie prowadzi to do niejednoznaczności.

(E2) Jeśli:

(a) Γ jest $\lambda 2$-kontekstem,

(b) $\alpha \in \mathbb{V}$ jest zmienną typową taką, że $\alpha \notin \mathrm{dom}(\Gamma)$,

to $\Gamma, \alpha : *$ jest $\lambda 2$-kontekstem, gdzie

$$\mathrm{dom}(\Gamma, \alpha : *) = (\mathrm{dom}(\Gamma), \alpha),$$
$$\mathrm{rg}(\Gamma, \alpha : *) = \mathrm{rg}(\Gamma) \cup \{*\}.$$

(E3) Jeśli:

(a) Γ jest $\lambda 2$-kontekstem,

(b) $\rho \in \mathbb{T}2$ jest typem takim, że $\alpha \in \mathrm{dom}(\Gamma)$ dla wszystkich $\alpha \in \mathrm{FV}(\rho)$,

(c) $x \in V$ jest zmienną termową taką, że $x \notin \mathrm{dom}\,\Gamma$,

to $\Gamma, x : \rho$ jest $\lambda 2$-kontekstem, gdzie

$$\mathrm{dom}(\Gamma, x : \rho) = (\mathrm{dom}(\Gamma), x),$$
$$\mathrm{rg}(\Gamma, \alpha : *) = \mathrm{rg}(\Gamma) \cup \{\rho\}.$$

$\mathrm{dom}(\Gamma)$ i $\mathrm{rg}(\Gamma)$ nazywamy odpowiednio *dziedziną* i *zakresem* $\lambda 2$-kontekstu Γ.

Jesli $\Gamma = (a_{11} : a_{12}, \ldots, a_{n1} : a_{n2})$ jest $\lambda 2$-kontekstem, to przez $\Gamma[\alpha/\sigma]$ oznaczamy $\lambda 2$-kontekst, w którym jesli $a_{i1} \in V$, to a_{i2} zamieniamy na $x_{i2}[\alpha/\sigma]$ dla $1 \leq i \leq n$.

Uwaga. Zauważmy, że przy powyższych rozstrzygnięciach definicyjnych nie zachodzi odpowiednik Twierdzenia 6 (3): nie możemy rozpatrywać dowolnych permutacji kontekstów w sądach $\Gamma \vdash M : T$, ponieważ w myśl Definicji 45 deklaracje zmiennych termowych w poprawnie zbudowanych $\lambda 2$-kontekstach są uzależnione od poprzedzających je deklaracji typowych.

Naturalnie zachodzi natomiast Lemat 6 (1), który oznacza tyle, że w rozszerzonym kontekście jesteśmy w stanie wyprowadzić co najmniej tyle, ile w pierwotnym. Fakt ten wyraża Lemat 16.

Lemat 16. *(O zwężaniu) Jeśli*

(a) Γ' *i* Γ'' *są kontekstami takimi, że* $\Gamma' \subseteq \Gamma''$

(b) $\Gamma' \vdash M : \sigma$

to $\Gamma'' \vdash M : \sigma$.

Dowód. Dowód przeprowadzamy przez indukcję względem długości wyprowadzenia sądu. Szczegóły pomijamy $\Gamma' \vdash M : \sigma$. □

Przykład 16. (a) $\varnothing$ jest $\lambda 2$-kontekstem na podstawie (E1).

(b) $\alpha : *$ jest $\lambda 2$-kontekstem na podstawie (E2).

(c) $\alpha : *,\ x : \alpha \to \alpha$ jest $\lambda 2$-kontekstem na podstawie (E3). Zauważmy, że deklaracja $\alpha : *$ wysępuje w kontekście przed $x : \alpha \to \alpha$.

(d) $\alpha : *,\ x : \alpha \to \alpha,\ \beta : *$ jest $\lambda 2$-kontekstem na podstawie (E2).

(e) $\Gamma \equiv (\alpha : *,\ x : \alpha \to \alpha,\ \beta : *,\ y : (\alpha \to \alpha) \to \beta)$ jest $\lambda 2$-kontekstem na podstawie (E3). Wówczas $\mathrm{dom}(\Gamma) = (\alpha,\ x,\ \beta, y)$ i $\mathrm{rg}(\Gamma) = \{*,\ \alpha \to \alpha,\ \beta,\ (\alpha \to \alpha) \to \beta\}$.

3.2 Typowanie

Wprowadzamy następujące reguły wyprowadzania typu:

(var) $\quad \Gamma \vdash x : \sigma, \quad$ jeśli $x : \sigma \in \Gamma$

(app) $$\frac{\Gamma \vdash M : \sigma \to \tau \qquad \Gamma \vdash N : \sigma}{\Gamma \vdash MN : \tau}$$

(abs) $$\frac{\Gamma, x : \sigma \vdash M : \tau}{\Gamma \vdash (\lambda x : \sigma.\, M) : \sigma \to \tau}$$

(form) $\quad \Gamma \vdash B : *, \quad$ jeśli $B \in \mathbb{T}2$ i $\mathrm{FV}(B) \subseteq \mathrm{rg}\,\Gamma$

(Π-e) $$\frac{\Gamma \vdash M : (\Pi\alpha : *.\, A) \qquad \Gamma \vdash B : *}{\Gamma \vdash MB : A[\alpha/B]}$$

(Π-i) $$\frac{\Gamma, \alpha : * \vdash M : A}{\Gamma \vdash \lambda\alpha : *.\, M : \Pi\alpha : *.\, A}$$

Definicja 46. (Poprawność, typowalność) Powiemy, że term $M \in \mathbf{\Lambda}_{\mathbb{T}2}$ jest *poprawny* lub *typowalny*, jeśli istnieje $\lambda 2$-kontekst Γ i typ $\rho \in \mathbb{T}2$ taki, że $\Gamma \vdash M : \rho$.

Przykład 17. (a) Niech $\bot \equiv \ \Pi\sigma : *.\, \sigma$ i $\Gamma = (\beta : *, x : \bot)$.

$$
\begin{array}{lll}
1 & \beta : * & \text{(form)} \\
2 & x : \perp & \text{(var)} \\
3 & x\beta \ : \ \beta & (\Pi\text{-e}) \ 2 \ 1 \\
4 & \lambda\beta : *.\, x\beta \ : \ \underbrace{\Pi\beta : *.\, \beta}_{\perp} & (\Pi\text{-i}) \ 3
\end{array}
$$

(b) $\Gamma = (\beta : *, y : \beta, x : \perp)$.

$$
\begin{array}{lll}
1 & \beta : * & \text{(form)} \\
2 & y : \beta & \text{(var)} \\
3 & x : \perp & \text{(var)} \\
4 & \lambda x : \perp .\, y \ : \perp \to \beta & \text{(abs)} \ 2 \\
5 & \lambda y : \beta \ x : \perp .\, y \ : \perp \to \beta & \text{(abs)} \ 4 \\
6 & \lambda\beta : *.\, \lambda y : \beta \ x : \perp .\, y \ : \ \Pi\beta : *.\ \perp \to \beta & (\Pi\text{-i}) \ 1
\end{array}
$$

(c) Przykład 14 ilustrował, że typy proste nie pozwalają na określenie polimorficznej identyczności. W Systemie F nie sprawia to problemów.

$$
\begin{array}{lll}
1 & \alpha : * & \text{(form)} \\
2 & x : \alpha & \text{(var)} \\
3 & \lambda x : \alpha.\ x \ : \ \alpha \to \alpha & \text{(abs)} \ 2 \\
4 & \lambda\alpha : *.\, \lambda x : \alpha.\ x \ : \ \Pi\alpha : *.\, \alpha \to \alpha & (\Pi\text{-i}) \ 3
\end{array}
$$

(d) W systemie Girarda/Reynoldsa możemy okreslić polimorficzne liczebniki Churcha ustalając:

$$
\begin{aligned}
\mathrm{Nat} &\equiv \Pi\alpha : *.\, (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha \\
\bar{0} &\equiv \lambda\alpha : *.\, \lambda f : \alpha \to \alpha \ x : \alpha.\, x \\
\bar{1} &\equiv \lambda\alpha : *.\, \lambda f : \alpha \to \alpha \ x : \alpha.\, f x \\
&\vdots \\
\bar{n} &\equiv \lambda\alpha : *.\, \lambda f : \alpha \to \alpha \ x : \alpha.\ \underbrace{f \ldots (f\, x)}_{\text{n-razy}}
\end{aligned}
$$

Dla przykładu rozważmy typowanie $\bar{2}$:

1	$\alpha : *$	(form)
2	$f : \alpha \to \alpha$	(var)
3	$x : \alpha$	(var)
4	$fx \ : \ \alpha$	(app) 2 3
5	$f(fx) \ : \ \alpha$	(app) 2 1
6	$\lambda x : \alpha.\, f(fx) \ : \ \alpha \to \alpha$	(abs) 5
7	$\lambda f : \alpha \to \alpha.\, \lambda x : \alpha.\, f(fx) \ : \ (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$	(abs) 6
8	$\lambda \alpha : *.\, \lambda f : \alpha \to \alpha.\, \lambda x : \alpha.\, f(fx) \ : \ \underbrace{\Pi \alpha : *.\, (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha}_{\mathrm{Nat}}$	(Π-i) 7

Za pomocą łatwej indukcji względem długości wyprowadzenia możemy przekonać się, że w istocie wszystkie polimorficzne liczebniki Churcha są typu Nat.

(e) Typować możemy równieżi polimorficzne złożenie funkcji.

1	$\gamma : *$	(form)
2	$\beta : *$	(form)
3	$\alpha : *$	(form)
4	$g : \beta \to \gamma$	(var)
5	$f : \alpha \to \beta$	(var)
6	$x : \alpha$	(var)
7	$fa \ : \ \beta$	(app) 5 6
8	$g(fa) \ : \ \gamma$	(app) 4 7
9	$\lambda x : \alpha .\, g(fa) \ : \ \alpha \to \gamma$	(abs) 8
10	$\lambda f : \alpha \to \beta \ x : \alpha .\ g(fa) \ :$ $(\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$	(abs) 9
11	$\lambda g : \beta \to \gamma \ f : \alpha \to \beta \ x : \alpha .\ g(fa) \ :$ $(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$	(abs) 10
12	$\lambda \alpha : * .\, \lambda g : \beta \to \gamma \ f : \alpha \to \beta \ x : \alpha .\ g(fa) \ :$ $\Pi \alpha : * .(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$	(abs) 11
13	$\lambda \beta \alpha : * .\, \lambda g : \beta \to \gamma \ f : \alpha \to \beta \ x : \alpha .\ g(fa) \ :$ $\Pi \beta \alpha : * .(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$	(abs) 12
14	$\lambda \gamma \beta \alpha : * .\, \lambda g : \beta \to \gamma \ f : \alpha \to \beta \ x : \alpha .\ g(fa) \ :$ $\Pi \gamma \beta \alpha : * .(\beta \to \gamma) \to (\alpha \to \beta) \to \alpha \to \gamma$	(abs) 13

Jak widzimy procedura wyprowadzania typu odpowiada w istocie rekonstrukcji wyrażenia. Problem typowania w (ortodoksyjnym) stylu Churcha jest trywialny, gdyż zgodnie z Rozdziałem 2.4 założyliśmy, że mamy pełną informację typową o zmiennych przedmiotowych. Czytając wyprowadzenia od dołu do góry rekonstruujemy również kontekst. Mówimy, że składnia Systemu F w stylu Churcha *koduje typowanie*.

3.3 Redukcja

Definicja 47. (β-redukcja) β-redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zgodną na $\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{T}2}$ relację binarną $\to_\beta$ taką, że

$$(\lambda x : \sigma .\, M)N \to_\beta M[x/N].$$
$$(\lambda \alpha : * .\, M)T \to_\beta M[\alpha/T]$$

Lemat 17 (podobnie jak Lemat 15) zapewnia nas, że typ termu zachowuje się przy β-redukcji. Praktyczny sens tego twierdzenia polega na tym, że relacja posiadania tego samego typu jest zamknięta na β-konwersję i aby rozstrzygnąć o typie danego termu wystarczy, że znamy typ któregokolwiek jego β-konwersa.

Lemat 17. *(O redukcji podmiotu) Jeśli* $\Gamma \vdash M : \tau$ *i* $M \to_\beta^* N$, *to* $\Gamma \vdash N : \tau$.

Dowód. Dowód przeprowadzamy analogicznie do dowodu Lematu 8, przez indukcję względem długości wyprowadzenia sądu $\Gamma \vdash M; \tau$. Szczegóły pomijamy. □

Przykład 18. Wróćmy do Przykładu 17 (d). Wyprowadziliśmy w nim sąd:

$$\vdash \lambda\alpha : *. \lambda f : \alpha \to \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx) \ : \ \Pi\alpha : *. (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha$$

Stosując lemat o zwężaniu (Lemat 16), dla dowolnego $\lambda 2$-kontekstu Γ wyprowadzalny jest również sąd:

$$\Gamma \vdash \lambda\alpha : *. \lambda f : \alpha \to \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx) \ : \ \Pi\alpha : *. (\alpha \to \alpha) \to \alpha \to \alpha \tag{1}$$

Niech Γ będzie takim $\lambda 2$-kontekstem, że

$$\{\mathrm{nat} : *,\ \mathrm{zero} : \mathrm{nat},\ \mathrm{succ} : \mathrm{nat} \to \mathrm{nat}\} \subseteq \Gamma,$$

gdzie przez nat, zero i succ oznaczamy dowolnie wybrane zmienne termowe i typowe, odpowiednio. Stosując regułę (Π-e) do (1) i $\Gamma \vdash \mathrm{nat} : *$ otrzymujemy:

$$\Gamma \vdash \lambda f : \mathrm{nat} \to \mathrm{nat}. \lambda x : \mathrm{nat}. f(fx)\ \mathrm{nat} \ : \ (\mathrm{nat} \to \mathrm{nat}) \to \mathrm{nat} \to \mathrm{nat} \tag{2}$$

Dalej, stosując regułę (app) do (2) i $\Gamma \vdash \mathrm{succ} : \mathrm{nat} \to \mathrm{nat}$ mamy, że

$$\Gamma \vdash \lambda x : \mathrm{nat}. f(fx)\ \mathrm{nat}\ \mathrm{succ} \ : \ \mathrm{nat} \to \mathrm{nat} \tag{3}$$

Ponownie aplikując (3) do $\Gamma \vdash \mathrm{zero} : \mathrm{nat}$ mamy:

$$\Gamma \vdash f(fx)\ \mathrm{nat}\ \mathrm{succ}\ \mathrm{zero} \ : \ \mathrm{nat} \tag{4}$$

Na podstawie lematu o redukcji podmiotu (Lemat 17) widzimy, że każdy kolejny redukt w poniższym ciągu ma typ nat.

$$\begin{aligned}\lambda\alpha : *. \lambda f : \alpha \to \alpha. \lambda x : \alpha. f(fx))\,\mathrm{nat}\ \mathrm{suc}\ \mathrm{zero} \to_\beta \\ \lambda f : \mathrm{nat} \to \mathrm{nat}. \lambda x : \mathrm{nat}. f\,(f\,x))\,\mathrm{suc}\ \mathrm{zero} \to_\beta \\ (\lambda x : \mathrm{nat}. \mathrm{suc}\,(\mathrm{suc}\ x))\,\mathrm{zero} \to_\beta \\ \mathrm{suc}\,(\mathrm{suc}\ \mathrm{zero})\end{aligned}$$

Odpowiedniej modyfikacji ulega również pojęcie η-redukcji.

Definicja 48. (η-redukcja) η-redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zgodną na $\mathbf{\Lambda}_{\mathbb{T}2}$ relację binarną $\rightarrow_\beta$ taką, że

$$\lambda x : \sigma.\, Mx \rightarrow_\eta M,$$
$$\lambda \alpha : *.\, M\alpha \rightarrow_\eta M.$$

Zachodzi oczywiście również odpowiednik Lematu 9:

Lemat 18. *(Zachowawczość η-redukcji) Jeśli $\Gamma \vdash M : \tau$ i $M \rightarrow_\eta^* N$, to $\Gamma \vdash N : \tau$.*

Dowód. Dowód przeprowadzamy przez indukcję względem długości wyprowadzenia sądu $\Gamma \vdash M : \tau$. Szczegóły pomijamy. □

Przykład 19. Zwróćmy ponownie uwagę na Przykład 17(a). Ponieważ $\lambda\beta : *.\, x\beta \rightarrow_\eta x$, to ze względu Lemat 18 wyprowadzalny jest również $\Gamma \vdash x : \bot$.

W odpowiednich wersjach zachodzą również Lemat 3 o generowaniu, Lemat 4 o podtermie, Lemat 5 o zmiennych wolnych i Lemat 7 o podstawieniu. We wszystkich przypadkach metoda dowodowa nie odbiega znacząco od odpowiedników z Rozdziałów 1 i 2.

Kolejnym ważnym twierdzeniem, które zachodzi dla Systemu F jest silna normalizacja β-redukcji.

Twierdzenie 6. *(O silnej normalizacji) Jeżeli $\Gamma \vdash_{\mathbb{T}} M : \tau$, to $M \in \mathrm{SN}_\beta$.*

Dowód.

Wniosek. *Ponieważ wszystkie typowalne termy w Systemie F mają skończone ciągi redukcji, to kombinator punktu stałego*

$$\mathrm{fix} : \Pi\alpha : *.\, (\alpha \to \alpha) \to \alpha$$

nie jest typowalny w tym systemie.

Jako Fakt 5 przedstawimy własność Churcha-Rossera upewniającą nas, że β-redukcja, bez względu na przyjętą strategię, zawsze prowadzi do tych samych rezultatów, a zatem ma sens obliczeniowy. Fakt ten otrzymujemy jako wniosek z lematu Newmana 2, wykazując, że β-redukcja ma słabą własność Churcha-Rossera (WCR) [SU06, Twierdzenie 11.2.12].

Fakt 5. *(Własność Churcha-Rossera) Relacja β-redukcji ma własność CR.*

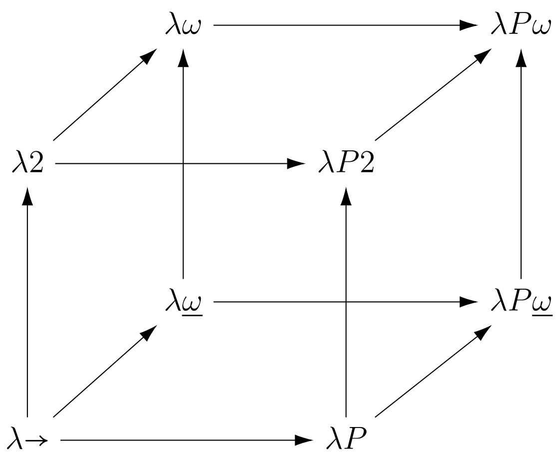
3.4 Podsumowanie

```
module Fnord where
  comp = \g f x -> g (f x)

comp
  :: forall t_aqz t1_aqB t2_aqD.
     (t_aqz -> t1_aqB) -> (t2_aqD -> t_aqz) -> t2_aqD -> t1_aqB

comp =
  \ (@ t_aqz)
    (@ t1_aqB)
    (@ t2_aqD)
    (g_aqg :: t_aqz -> t1_aqB)
    (f_aqh :: t2_aqD -> t_aqz)
    (x_aqi :: t2_aqD) ->
    g_aqg (f_aqh x_aqi)
```

Na kanwie zaproponowanej przez H. P. Barendregta w [Bar92, Rozdział 5] klasyfikacji rozszerzeń rachunku λ z typami prostymi (tzw. *kostki* λ, Rysunek 4), rozdział ten poświęcimy omówieniu wzajemnych zależności jakie mogą łączyć λ-termy i typy. Zajmować będziemy się wyłącznie systemami w stylu Churcha.



Rysunek 4: Poszczególne systemy klasyfikacji H. Barendregta; kierunek krawędzi $\rightarrow$ oznacza relację $\subseteq$.

Literatura

[Alt02] Thorsten Altenkirch. "α-conversion is easy". Under Revision. 2002. URL: https://www.cs.nott.ac.uk/~psztxa/publ/alpha-draft.pdf.

[Bar84] H. P. Barendregt. *The Lambda Calculus: Its Syntax and Semantics*. Elsevier, 1984.

[Bar92] H. P. Barendregt. "Lambda Calculi with Types". In: vol. 2. Jan. 1992, pp. 117–309. ISBN: 0198537611.

[BDS13] Henk Barendregt, Wil Dekkers, and Richard Statman. *Lambda Calculus with Types*. Perspectives in Logic. Cambridge University Press, 2013. DOI: 10.1017/CBO9781139032636.

[Bru72] N.G. de Bruijn. "Lambda Calculus Notation with Nameless Dummies, a Tool for Automatic Formula Manipulation, with Application to the Church-Rosser Theorem". In: *Indagationes Mathematicae (Proceedings)* 75 (Dec. 1972), pp. 381–392. DOI: 10.1016/1385-7258(72)90034-0.

[Chu41] Alonzo Church. *The Calculi of Lambda-Conversion*. Princeton University Press, 1941.

[GTL89] Jean-Yves Girard, Paul Taylor, and Yves Lafont. *Proofs and Types*. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 1989. ISBN: 0-521-37181-3.

[HIN05] RALF HINZE. "THEORETICAL PEARL Church numerals, twice!" In: *Journal of Functional Programming* 15.1 (2005), pp. 1–13. DOI: 10.1017/S0956796804005313.

[HS08] J. Roger Hindley and Jonathan P. Seldin. *Lambda-Calculus and Combinators: An Introduction*. 2nd ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2008. ISBN: 0521898854, 9780521898850.

[Hut99] Graham Hutton. "A Tutorial on the Universality and Expressiveness of Fold". In: *J. Funct. Program.* 9.4 (July 1999), pp. 355–372. ISSN: 0956-7968. DOI: 10.1017/S0956796899003500. URL: http://dx.doi.org/10.1017/S0956796899003500.

[Jan13] Jan Martin Jansen. "Programming in the λ-Calculus: From Church to Scott and Back". In: *Essays Dedicated to Rinus Plasmeijer on the Occasion of His 61st Birthday on The Beauty of Functional Code - Volume 8106*. Berlin, Heidelberg: Springer-Verlag, 2013, pp. 168–180. ISBN: 978-3-642-40354-5. DOI: 10.1007/978-3-642-40355-2_12. URL: https://doi.org/10.1007/978-3-642-40355-2_12.

[JKP06] Jan Martin Jansen, Pieter Koopman, and Rinus Plasmeijer. "Efficient Interpretation by Transforming Data Types and Patterns to Functions". In: Jan. 2006, pp. 73–90.

[KPJ14] Pieter Koopman, Rinus Plasmeijer, and Jan Martin Jansen. "Church Encoding of Data Types Considered Harmful for Implementations: Functional Pearl". In: *Proceedings of the 26Nd 2014 International Symposium on Implementation and Application of Functional Languages*. IFL '14. Boston, MA, USA: ACM, 2014, 4:1–4:12. ISBN: 978-1-4503-3284-2. DOI: `10.1145/2746325.2746330`. URL: `http://doi.acm.org/10.1145/2746325.2746330`.

[Mar96] P Martin Lof. "On the Meanings of the Logical Constants and the Justifications of the Logical Laws". In: *Nordic Journal of Philosophical Logic* 1 (Jan. 1996).

[NG14] Rob Nederpelt and Herman Geuvers. *Type Theory and Formal Proof: An Introduction*. Cambridge University Press, 2014. DOI: `10.1017/CBO9781139567725`.

[PL92] Simon L. Peyton Jones and David R. Lester. *Implementing Functional Languages*. Upper Saddle River, NJ, USA: Prentice-Hall, Inc., 1992. ISBN: 0-13-721952-0.

[SS75] Gerald J. Sussman and Guy L. Steele Jr. *An Interpreter for Extended Lambda Calculus*. Tech. rep. Cambridge, MA, USA, 1975.

[SU06] Morten Heine Sørensen and Pawel Urzyczyn. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, Volume 149 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics)*. New York, NY, USA: Elsevier Science Inc., 2006. ISBN: 0444520775.

[Tai67] W. W. Tait. "Intensional Interpretations of Functionals of Finite Type I". In: *Journal of Symbolic Logic* 32.2 (1967), pp. 198–212. DOI: `10.2307/2271658`.

[Wad89] Philip Wadler. "Theorems for Free!" In: *Proceedings of the Fourth International Conference on Functional Programming Languages and Computer Architecture*. FPCA '89. Imperial College, London, United Kingdom: ACM, 1989, pp. 347–359. ISBN: 0-89791-328-0. DOI: `10.1145/99370.99404`. URL: `http://doi.acm.org/10.1145/99370.99404`.

[Wel99] J. B. Wells. "Typability and type checking in system F are equivalent and undecidable". English. In: *Annals of Pure and Applied Logic* 98.1-3 (June 1999), pp. 111–156. ISSN: 0168-0072.

[Wit53] Ludwig Wittgenstein. *Philosophical Investigations*. Wiley-Blackwell, 1953.

[Zak07] Mateusz Zakrzewski. "Definable functions in the simply typed lambda-calculus". In: *CoRR* abs/cs/0701022 (2007). arXiv: `cs/0701022`. URL: `http://arxiv.org/abs/cs/0701022`.