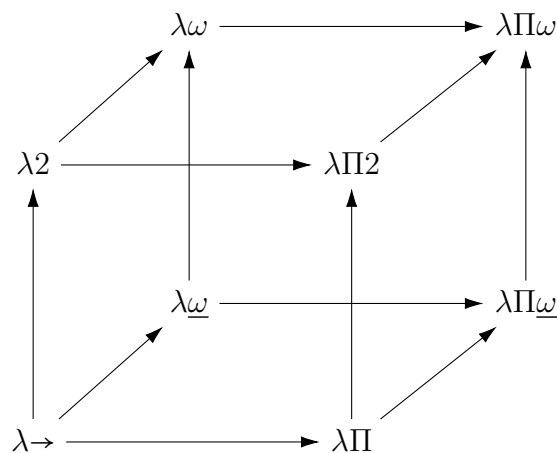


1 Rachunek λ z typami prostymi

Przedstawimy system rachunku λ z typami prostymi w stylu de Bruijna [BDS13; SU06]. Zgodnie z [HS08, roz. 13E] odpowiada on najslabszemu z *czystych systemów typów* (ang. *pure type systems*, PTS) w myśl klasyfikacji zaproponowanej przez Henka Barendregta w [Bar91]. Klasyfikację tę obrazuje Rysunek 1; kierunek krawędzi oznacza na nim zawieranie w sensie możliwości wyrażenia słabszego systemu przez system wzbogacony o nowe typy.



Rysunek 1: Kostka lambda H. Barendregta

1.1 Typy proste

Niech U będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych p, q, \dots (być może indeksowanych liczbami naturalnymi), które będziemy nazywali *zmiennymi typowymi*.

Definicja 1. (Typy proste)

Typami prostymi będziemy określali najmniejszy w sensie mnogościowym zbiór wyrażeń taki, że:

- T1. Jeśli p jest zmienną typową, to p jest typem prostym.
- T2. Jeśli τ i σ są typami prostymi, to $(\tau \rightarrow \sigma)$ jest typem prostym.

Typy proste zbudowane tylko wedle reguły T1. nazywamy typami *atomowymi*, zaś wyrażenia zbudowe wedle reguły T2. – typami *funkcyjnymi*. Zbiór typów prostych określony w myśl powyższej definicji będziemy oznaczali przez \mathbf{T}_{\rightarrow} .

Późniejsze litery alfabetu greckiego, tj. $\sigma, \tau, \rho, \dots$ będą służyły nam za zmienne metasyntaktyczne do oznaczania typów prostych. Dla lepszej czytelności będziemy pomijali najbardziej zewnętrzne nawiasy. Konstruktor typu \rightarrow jest prawostronnie łączny, co oznacza, że typy $\tau \rightarrow \sigma \rightarrow \theta$ oraz $\tau \rightarrow (\sigma \rightarrow \theta)$ będziemy uznawali za tożsame.

Typy proste ujęte Definicją 1 mają strukturę drzewa binarnego. Wysokość takiego drzewa będziemy nazywali *stopniem* typu. Precyzyjnie ujmując to pojęcie poniższa definicja.

Definicja 2. (Stopień typu)

Stopniem typu nazywamy funkcję $\delta : \mathbf{T}_{\rightarrow} \longrightarrow \mathbb{N}$ taką, że

$$\begin{aligned} \delta(p) &= 0, \text{ gdzie } p \text{ jest typem atomowym,} \\ \delta(\tau \rightarrow \sigma) &= 1 + \max(\delta(\tau), \delta(\sigma)). \end{aligned}$$

1.2 Pseudotermy

Niech V będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych x, y, \dots (indeksowanych być może liczbami naturalnymi). Elementy takiego zbioru będziemy nazywali λ -zmiennymi.

Definicja 3. (Pseudo-pretermy)

Pseudo-pretermami będziemy nazywali najmniejszy (w sensie mnogościowym) zbiór $\tilde{\Lambda}_T$ taki, że:

PT1. Jeśli $x \in V$, to $x \in \tilde{\Lambda}_T$.

PT2. Jeśli $M \in \tilde{\Lambda}_T$ i $N \in \tilde{\Lambda}_T$, to $(MN) \in \tilde{\Lambda}_T$.

PT3. Dla dowolnych $x \in V$, $\sigma \in \mathbf{T}_{\rightarrow}$, $M \in \tilde{\Lambda}_T$ mamy, że $(\lambda x^{\sigma}. M) \in \tilde{\Lambda}_T$.

Wyrażenia postaci PT2. nazywamy *aplikacjami* M do N , zaś wyrażenia postaci PT3. – *λ -abstrakcjami*, gdzie o wszystkich podtermach termu M mówi się, że są w *zasięgu* λ -abstraktora, zaś o λ -zmiennej x mówi się, że jest nim *związana*.

Za zmienne metasyntaktyczne obieramy duże litery alfabetu łacińskiego M, N, \dots . Podobnie jak w podrozdziale 1.1 stosujemy konwencję o opuszczaniu najbardziej zewnętrznych nawiasów. Aplikacja termów jest łączna lewostronnie, co oznacza, że będziemy utożsamiali wyrażenia MNP oraz $(MN)P$.

Definicja 4. (Zmienne wolne)

Dla pseudo-pretermu M określamy zbiór *termów wolnych* FV w następujący sposób:

$$\begin{aligned} FV(x) &= \{x\} \\ FV(\lambda x^\sigma. P) &= FV(P) \setminus \{x\} \\ FV(PQ) &= FV(P) \cup FV(Q) \end{aligned}$$

Jesli $FV(M) = \emptyset$, to mówimy, że M jest *zamknięty*.

Definicja 5. (Podstawienie)

Podstawieniem $[x/N]$ pseudo-pretermu N za λ -zmienną x w M nazwamy zdefiniowane następująco przekształcenie:

$$\begin{aligned} x[x/N] &= N, \\ y[x/N] &= y, & \text{o ile } x \neq y, \\ (PQ)[x/N] &= P[x/N] Q[x/N], \\ (\lambda y^\sigma. P)[x/N] &= \lambda y^\sigma. P[x/N], & \text{gdzie } x \neq y \text{ i } y \notin FV(N). \end{aligned}$$

Zachodzą następujące fakty:

Fakt 1. (a) *Jeśli $x \notin FV(M)$, to $M[x/N]$ jest poprawnym podstawieniem i $M[x/N] = M$.*

(b) *Jeśli $M[x/N]$ jest poprawnym podstawieniem, to $y \in FV(M[x/N])$ wtw, gdy albo $y \in FV(M)$ i $x \neq y$, albo $y \in FV(N)$ i $x \in FV(M)$.*

(c) *Podstawienie $M[x/x]$ jest poprawne i $M[x/x] = M$.*

(d) *Jeśli $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem, to $M[x/y]$ ma tę samą długość, co M .*

Fakt 2. *Powiedzmy, że $M[x/N]$ jest poprawnym podstawieniem i $N[y/L]$ i $M[x/N][y/L]$ są poprawnymi podstawieniami, gdzie $x \neq y$. Jeśli $x \notin FV(L)$ lub $y \notin FV(M)$, to $M[y/L]$ i $M[y/L][x/N[y/L]]$ jest poprawnym podstawieniem oraz*

$$M[x/N][y/L] = M[y/L][x/N[y/L]].$$

Fakt 3. *Jeśli $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem i $y \notin FV(M)$, to $M[x/y][y/x]$ jest poprawnym podstawieniem oraz $M[x/y][y/x] = M$.*

Definicja 6. (α -konwersja)

α -konwersją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zwrotną i przechodnią relację binarną $=_\alpha$ określoną na zbiorze pseudotermów $\tilde{\Lambda}_T$ spełniającą poniższe warunki:

- (a) Jeśli $y \notin \text{FV}(M)$ i $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem, to $\lambda x.M =_\alpha \lambda y.M[x/y]$.
- (b) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla każdej λ -zmiennnej x mamy $\lambda x.M =_\alpha \lambda x.N$.
- (c) Jeśli $M =_\alpha N$, to $MZ =_\alpha NZ$.
- (d) Jeśli $M =_\alpha N$, to $ZM =_\alpha ZN$.

Fakt 4. *Relacja $=_\alpha$ jest symetryczna.*

Fakt 5. *$=_\alpha$ jest relacją równoważności.*

Fakt 6. *Jeśli $M =_\alpha N$, to $\text{FV}(M) = \text{FV}(N)$.*

Dysponując powyższymi rozstrzygnięciami otrzymujemy wygodne utożsamienie pseudo-pretermów, które różnią się między sobą tylko zmiennymi związanymi.

Definicja 7. (Pseudotermy)

Klasy abstrakcji relacji α -konwersji nazywamy *pseudotermami*. Zbiór wszystkich pseudotermów oznaczamy następująco:

$$\Lambda_T = \{[M]_\alpha \mid M \in \tilde{\Lambda}_T\}$$

Nadużywając notacji będziemy odnosili się do pseudotermów tylko przez ich reprezentantów, tj. zamiast $[\lambda x^\sigma.M]_\alpha$ będziemy pisali krótko: $\lambda x^\sigma.M$.

1.3 Typowość

Definicja 8. (Kontekst)

Kontekstem nazywamy skończoną funkcję częściową $\Gamma : V \rightarrow T_\rightarrow$, czyli zbiór par postaci $\Gamma = \{x_1^{\tau_1}, \dots, x_n^{\tau_n}\}$, gdzie $(x_i^{\tau_i}) = (x_i, \tau_i)$ oraz $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$. Zbiór

$$\text{dom}(\Gamma) = \{x \in V \mid \exists \tau (x^\tau \in \Gamma)\}$$

nazywamy *dziedziną* kontekstu Γ , zaś

$$\text{rg}(\Gamma) = \{\tau \in T_\rightarrow \mid \exists x (x^\tau \in \Gamma)\}$$

– *zakresem* kontekstu Γ . Piszemy:

- $x_1^{\tau_1}, x_2^{\tau_2}$ zamiast $\{x_1^{\tau_1}, x_2^{\tau_2}\}$, o ile $x_1^{\tau_1}$ i $x_2^{\tau_2}$ są różne,
- Γ, x^τ zamiast $\Gamma \cup \{x^\tau\}$, o ile $x^\tau \notin \Gamma$,
- Γ, Δ zamiast $\Gamma \cup \Delta$, o ile $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$.

Określimy teraz system przypisywania typów do pseudotermów w stylu dedukcji naturalnej. *Sekwentami* w tym systemie będziemy nazywali wyrażenia postaci $\Gamma \vdash M^\sigma$, gdzie $M \in \mathbf{A}_T$, $\sigma \in \mathbf{T}_\rightarrow$, zaś Γ jest pewnym kontekstem.

Wprowadzamy następujące reguły dowodzenia:

$$\frac{}{\Gamma, x^\tau \vdash x^\tau} \text{ (Var)}, \quad \frac{\Gamma, x^\varphi \vdash M^\psi}{\Gamma \vdash (\lambda x^\varphi. M)^\varphi \rightarrow \psi} \text{ (Abs)}, \quad \frac{\Gamma \vdash M^{\varphi \rightarrow \psi} \quad \Gamma \vdash N^\varphi}{\Gamma \vdash (MN)^\psi} \text{ (App)}.$$

Definicja 9. (Typowalność)

Mówimy, że pseudoterm M jest typu σ w kontekście Γ (jest *typowalny*), jeśli istnieje skończone drzewo sekwentów spełniające poniższe warunki:

- P1. W korzeniu drzewa znajduje się sekwent $\Gamma \vdash M^\sigma$.
- P2. Liście są *aksjomatami*, tj. sekwentami postaci $\Gamma, x^\sigma \vdash x^\sigma$.
- P3. Każdego rodzica można otrzymać z jego dzieci przez zastosowanie któregoś z reguł wyprowadzania nowych sekwentów.

Tak określone drzewo będziemy nazywali *wyprowadzeniem* typu i pisali $\Gamma \vdash M^\sigma$.

Otrzymujemy ostateczne określenie λ -termów w omawianym systemie.

Definicja 10. (λ -termy)

Wszystkie typowalne pseudotermy w pewnym kontekście Γ nazywamy *λ -termami* (z typami prostymi w kontekście Γ).

Uwaga. λ -term w kontekście Γ_1 może nie być typowalny w innym kontekście Γ_2 .

Zachodzą następujące fakty:

Fakt 7. (o odwracaniu)

- I1. Jeśli $\Gamma \vdash x^\sigma$, to $x^\sigma \in \Gamma$.
- I2. Jeśli $\Gamma \vdash MN^\sigma$, to istnieje typ $\tau \in \mathbf{T}_\rightarrow$ taki, że $\Gamma \vdash M^{\tau \rightarrow \sigma}$ i $\Gamma \vdash N^\tau$.
- I3. Jeśli $\Gamma \vdash \lambda x^\tau. M^\sigma$, to istnieje typ $\rho \in \mathbf{T}_\rightarrow$ taki, że $\sigma \equiv \tau \rightarrow \rho$ oraz $\Gamma, x^\tau \vdash M^\rho$.

Dowód. I1. Przypuśćmy, że $\Gamma \vdash x^\sigma$. Ostatni wierzchołek w wyprowadzeniu nie może być uzyskany przez żadne z określonych reguł dowodzenia, zatem musi to być aksjomat, tj. $x^\sigma \in \Gamma$. Podobnie I2. i I3. □

Fakt 8. (o podstawianiu) Jeśli $\Gamma, x^\sigma \vdash M^\tau$ oraz $\Gamma \vdash N^\sigma$, to $\Gamma \vdash M[x/N]^\tau$.

Dowód. Dowód przez indukcję strukturalną względem M . □

W danym kontekście każdy λ -term ma jednoznacznie przypisany typ, co stwierdza następujące twierdzenie:

Fakt 9. Jeśli $\Gamma \vdash M^\sigma$ oraz $\Gamma \vdash M^\tau$, to $\sigma = \tau$.

Dowód. Dowód przez indukcję strukturalną względem M . □

Uwaga 1. (Adnotacje typowe) Mówiąc o λ -termach i nie podając żadnego związanego z nimi kontekstu Γ będziemy implícite zakładali, że istnieje pewien kontekst w którym są one typowalne. Wspólny dla λ -termów M^σ i N^τ kontekst Γ będziemy notowali pisząc $M, N \in \mathbf{\Lambda}_T^\Gamma$. Ze względu na Fakt 9 mając określony kontekst Γ będziemy bez utraty jednoznaczności omijać adnotacje typowe dla λ -termów pisząc po prostu M w miejsce M^σ , gdy z kontekstu jasne będzie, że nie chodzi o pseudotermy.

Typ dowolnego λ -termu będziemy w ramach konwencji notowali używając adnotacji typowej umieszczonej w górnym indeksie. Dla przykładu, pisząc $(M^{\sigma \rightarrow \tau} N^\sigma)^\tau$ będziemy mieli na myśli, że λ -term jest w pewnym kontekście Γ typu τ .

Rozważmy następujące przykłady:

Przykład 1. Niech $\Gamma = \{x^\sigma, y^\tau\}$. Pokażemy, że $K = \lambda x^\sigma y^\tau. x$ ma typ $\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma$. Istotnie,

$$\frac{\frac{x^\sigma, y^\tau \vdash x^\sigma}{x^\sigma \vdash (\lambda y^\tau. x)^{\tau \rightarrow \sigma}} \text{ (Abs)}}{\vdash (\lambda x^\sigma \lambda y^\tau. x)^{\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \sigma}} \text{ (Abs)}$$

Przykład 2. Niech $\Gamma = \{x^{\tau \rightarrow \rho}, y^{\sigma \rightarrow \tau}, z^\sigma\}$. Wówczas

$$\frac{\frac{\frac{\Gamma \vdash z^\sigma \quad \Gamma \vdash y^{\sigma \rightarrow \tau}}{\Gamma \vdash yz^\tau} \text{ (App)} \quad \Gamma \vdash x^{\tau \rightarrow \rho}}{\Gamma \vdash x(yz)^\rho} \text{ (App)}}{\frac{\frac{\frac{x^{\tau \rightarrow \sigma}, y^{\sigma \rightarrow \rho} \vdash (\lambda z^\sigma. x(yz))^{\sigma \rightarrow \rho}}{x^{\tau \rightarrow \rho}, y^{\sigma \rightarrow \tau} \vdash (\lambda y^{\sigma \rightarrow \tau} \lambda z^\sigma. x(yz))^{\sigma \rightarrow \tau \rightarrow \rho}} \text{ (Abs)}}{\vdash (\lambda x^{\tau \rightarrow \rho} \lambda y^{\sigma \rightarrow \tau} \lambda z^\sigma. x(yz))^{\tau \rightarrow \rho \rightarrow (\sigma \rightarrow \tau) \rightarrow \sigma \rightarrow \rho}} \text{ (Abs)}}$$

Zauważmy, że term $\lambda x^{\tau \rightarrow \rho} \lambda y^{\sigma \rightarrow \tau} \lambda z^\sigma. x(yz)$ odpowiada operacji złożenia funkcji.

Uwaga 2. Widzimy, że wyprowadzanie typu odpowiada w gruncie rzeczy konstrukcji λ -termu. Ponieważ każde wyprowadzenie musi być skończone, typowalne są tylko pseudotermy skończonej długości.

Przykład 3. Nie wszystkie pseudotermy są typowalne w rachunku λ z typami prostymi. Istotnie, przypuśćmy że $\omega = (\lambda x^{\sigma \rightarrow \sigma}. xx)$ jest typowalny. Wówczas dla kontekstu Γ mamy $x^{\sigma \rightarrow \sigma} \in \Gamma$. Ponieważ ω zawiera w sobie podterm (xx) , to w wyprowadzeniu musiał on zostać otrzymany przez zastosowanie reguły (App). Wówczas $x^\sigma \in \Gamma$ i $x^{\sigma \rightarrow \sigma} \in \Gamma$, co nie jest możliwe, bo Γ musiałby nie być prawidłowo określonym kontekstem.

Przykład 3 wskazuje, że rachunek λ z typami prostymi nie ma wystarczających środków wyrazu, aby definiować w nim funkcje rekurencyjne. W rachunku λ bez typów definicje takie są osiągane za pomocą *kombinatorów punktu stałego*, które w rachunku λ z typami prostymi nie są typowalne właśnie ze względu na fakt, że nie jest możliwe wyprowadzenie typu dla aplikacji termu do samego siebie.

1.4 Redukcja

Definicja 11. (Zgodność)

Relację R na zbiorze termów $\mathbf{\Lambda}_T$ nazywamy *zgodną*, jeśli dla $M, N, Z \in \mathbf{\Lambda}_T$ spełnia ona następujące warunki:

- i) Jeśli MRN , to $(\lambda x^\sigma. M)R(\lambda x^\sigma. N)$ dla dowolnych $x \in V$ i $\sigma \in \mathbf{T}_\rightarrow$.
- ii) Jeśli MRN , to $(MZ)R(NZ)$.
- iii) Jeśli MRN , to $(ZM)R(ZN)$.

Przy powyższych ustaleniach *kongruencją* będziemy nazywali każdą zgodną relację równoważności na $\mathbf{\Lambda}_T$, zaś *redukcją* – każdą zgodną, zwrotną i przechodnią relację na $\mathbf{\Lambda}_T$.

Definicja 12. (β -redukcja)

β -redukcją nazywamy najmniejsza w sensie mnogościowym *zgodną* relację binarną \longrightarrow_β określoną na zbiorze pseudotermów $\mathbf{\Lambda}_T$ za pomocą podstawienia

$$(\lambda x^\sigma. P)Q \longrightarrow_\beta P[x/Q].$$

β -redekami będziemy nazywali wyrażenia postaci $(\lambda x^\sigma. M)N$, zaś rezultat ich β -redukcji w postaci termu $M[x/N]$ – β -reduktem.

Nadużywając notacji, z każdym β -redeksem Δ postaci $(\lambda x^\tau. P^\rho)R$ będziemy wiązali jego *stopień* i pisali $\delta((\lambda x^\tau. P^\rho)R) = \delta(\tau \rightarrow \rho)$, gdzie występująca po prawej stronie równości δ jest określona w myśl Definicji 2. Dysponując tą konwencją możemy określić pojęcie stopnia dowolnego λ -termu.

Definicja 13. (stopień λ -termu)

Stopniem $d(M)$ λ -termu M nazywamy supremum zbioru stopni β -redeków, które są zawarte w M , czyli

$$d(M) = \sup\{\delta(N) \mid N \text{ jest } \beta\text{-redeksem w } M\}.$$

Uwaga. Z każdym β -redeksem Δ związane są więc dwa rodzaje stopni: stopień $d(\Delta)$ jako λ -termu w myśl Definicji 13 i stopień β -redekusu $\delta(\Delta)$.

Określamy następujące relacje:

- B1. $\longrightarrow_{\beta}^+$ jest przechodnim domknięciem relacji \longrightarrow_{β} w zbiorze pseudotermów Λ_T .
- B2. $\longrightarrow_{\beta}^*$ jest domknięciem przechodnio-zwrotnym w Λ_T relacji \longrightarrow_{β} , a zatem jest *redukcją*.
- B3. $=_{\beta}$ jest najmniejszą relacją równoważności zawierającą relację \longrightarrow_{β} , (czyli *kongruencją*).

Definicja 14. (Postać normalna)

Powiemy, że λ -term M jest w *postaci normalnej*, jeśli żadna z jego podformuł nie jest β -redeksem. Przez NF_{β} będziemy oznaczali zbiór wszystkich λ -termów w postaci normalnej.

Definicję postaci normalnej można ująć w alternatywny sposób w postaci Faktu 10.

Fakt 10. M ma postać normalną, jeśli $M =_{\beta} N$ dla pewnego N , który jest w postaci normalnej.

Uwaga. Fakt, że $=_{\beta}$ jest relacją równoważności może rodzić pokusę, aby utożsamić ze sobą wszystkie postacie normalne danego λ -termu. Z Twierdzenia 3 wynika jednak, że jest to zupełnie zbędne, bowiem o ile tylko λ -term jest normalizowalny, to wiemy, że posiada dokładnie jedną postać normalną i każde takie utożsamienie byłoby trywialne.

Definicja 15. (η -redukcja)

η -redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) *zgodną* relację w Λ_T taką, że

$$\lambda x^{\sigma}. Mx \longrightarrow_{\eta} M,$$

o ile $x \notin FV(M)$.

Zdefiniowane powyżej β - i η -redukcje zachowują typ, jak stwierdza Fakt 11. Własność ta pozwala sensownie mówić o redukcji λ -termów.

Fakt 11. (o poprawności redukcji) Jeśli $\Gamma \vdash M^{\sigma}$ i $M \longrightarrow_{\beta\eta}^* N$, to $\Gamma \vdash N^{\sigma}$.

Dowód. [BDS13, tw. 1B.14].

1.5 Normalizacja

Powiemy, że λ -term M ma własność:

- (słabej) *normalizacji* (symbolicznie: $M \in \text{WN}_\beta$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg β -redukcji rozpoczynający się od M i kończący się termem w postaci normalnej N .
- *silnej normalizacji* (symbolicznie: $M \in \text{SN}_\beta$), jeśli wszystkie ciągi β -redukcji rozpoczynające się od M są skończone.

Uwaga. Z powyższego określenia widzimy, że własność SN_β pociąga za sobą własność WN_β .

Definicja 16. (Strategia redukcji)

Strategią redukcji nazywamy odwzorowanie $F : \Lambda_T \longrightarrow \Lambda_T$ takie, że $F(M) = M$, gdy M jest w postaci normalnej i $M \longrightarrow_\beta F(M)$ w przeciwnym wypadku. Mówimy, że strategia F jest *normalizująca*, jeśli dla każdego $M \in \text{WN}_\beta$ istnieje $i \in \mathbb{N}$ takie, że $F^i(M)$ jest w postaci normalnej.

Twierdzenie 1. (Własność WN_β) *Wszystkie λ -termy mają postać normalną.*

Dowód. Pokażemy, że dla dowolnego λ -termu M istnieje normalizująca strategia redukcji.

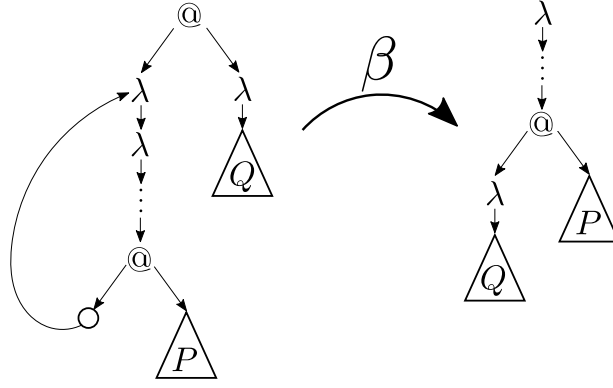
Oznaczmy przez $R_\beta(M)$ zbiór β -redeksów znajdujących się w M . Jeśli $M \in \text{NF}_\beta$, to $R_\beta(M) = \emptyset$ i twierdzenie zachodzi w sposób trywialny. Jeśli $M \notin \text{NF}_\beta$, to istnieje w M przynajmniej jeden β -redeks. Z Uwagi 2 M jest skończonej długości, więc $R_\beta(M)$ jest skończony. Możemy więc wybrać z M β -redeks znajdujący się (rozpoczynający się) w M najbardziej na prawo. Oznaczmy taki β -redeks przez Δ .

Niech δ_M będzie stopniem M (Definicja 13). Ponieważ wiele redeksów w M może mieć ten sam stopień δ_M , przez n_M oznaczmy liczbę wystąpień redeksów stopnia δ_M w M .

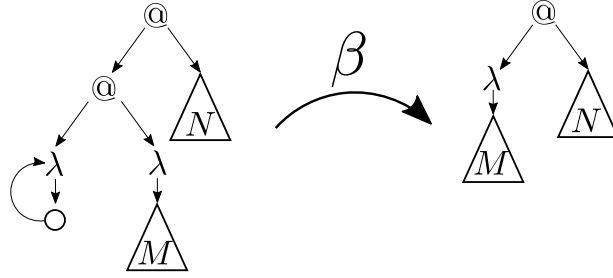
Niech F będzie strategią redukcji polegającą na β -redukowaniu redeksu Δ wybranego jak wyżej i niech $M' = F(M)$. Zauważmy, że $n_M < n_{M'}$, gdyż strategia F eliminuje Δ z M' i może prowadzić do powstania redeksów tylko mniejszego stopnia. Istotnie, ilość redeksów w M może zwiększyć się na skutek β -redukcji tylko w jeden z poniższych sposobów:

- i) powstanie nie występujących wcześniej redeksów.
- ii) powielenie już istniejących redeksów.

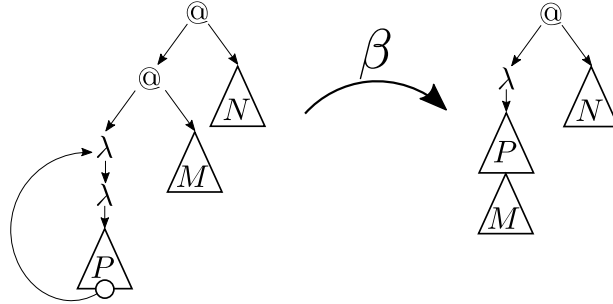
W przypadku i)



(a) Redukcja $\overbrace{(\lambda x^{\rho \rightarrow \mu} \dots x P^\rho \dots)}^{M^\tau} (\lambda y^\rho. Q^\mu)^{\rho \rightarrow \mu}$ do nowego redeksu $\underbrace{(\dots (\lambda y^\rho. Q^\mu) P^\rho \dots)}_{M[x/Q]^\tau}$.



(b) Redukcja $(\lambda x^\tau \lambda y^\rho. P^\sigma) M^\tau N^\rho$ do nowego redeksu postaci $(\lambda y^\rho. P[x/M]^\sigma) N^\rho$.



(c) Redukcja $(\lambda x^{\tau \rightarrow \rho}. x) (\lambda y^\tau. M^\rho) N^\tau$ do nowego redeksu $(\lambda y^\tau. M^\rho) N^\tau$.

Rysunek 2: Grafy odpowiadające wszystkim możliwościom w których powstają nowe β -redeksy

Twierdzenie 1 można istotnie wzmocnić. Okazuje się, że biorąc dowolny λ -term możemy mieć nie tylko pewność, że można go zredukować do postaci normalnej, ale że obierając dowolną strategię redukcja zakończy się po skończonej liczbie kroków.

Twierdzenie 2. (Własność SN_β) *Wszystkie λ -termy mają własność silnej normalizacji.*

Dowód. [SU06, tw. 3.5.5].

Twierdzenie 3. (Własność Churcha-Russera)

CR1. Niech $M, N_1, N_2 \in \Lambda_T^\Gamma$. Wówczas jeśli $M \rightarrow_{\beta\eta}^ N_1$ i $M \rightarrow_{\beta\eta}^* N_2$, to istnieje $Q \in \Lambda_T^\Gamma$ takie, że $N_1 \rightarrow_{\beta\eta}^* Q$ i $N_2 \rightarrow_{\beta\eta}^* Q$.*

CR2. Niech $M, N \in \Lambda_T^\Gamma$. Wówczas jeśli $M = \beta\eta N$, to istnieje $Q \in \Lambda_T^\Gamma$ takie, że $M \rightarrow_{\beta\eta}^ Q$ i $N \rightarrow_{\beta\eta}^* Q$.*

Dowód. [SU06, p. 3.6.3]

Poprawność redukcji (Fakt 11), własność silnej normalizacji (Twierdzenie 2) i własność Churcha-Russera (Twierdzenie 3) razem oznaczają, że każda strategia redukcji będzie prowadziła do jednoznacznie określonej postaci normalnej.

Literatura

- [Bar91] Henk Barendregt. “Introduction to generalized type systems”. In: *Journal of Functional Programming* 1.2 (1991), pp. 125–154. DOI: 10.1017/S0956796800020025.
- [BDS13] Henk Barendregt, Wil Dekkers, and Richard Statman. *Lambda Calculus with Types*. Perspectives in Logic. Cambridge University Press, 2013. DOI: 10.1017/CB09781139032636.
- [HS08] J. Roger Hindley and Jonathan P. Seldin. *Lambda-Calculus and Combinators: An Introduction*. 2nd ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2008. ISBN: 0521898854, 9780521898850.
- [SU06] Morten Heine Sørensen and Pawel Urzyczyn. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, Volume 149 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics)*. New York, NY, USA: Elsevier Science Inc., 2006. ISBN: 0444520775.