

1 Rachunek λ z typami prostymi

1.1 Typy proste

Niech U będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych p, q, \dots (być może indeksowanych liczbami naturalnymi), które będziemy nazywali *zmiennymi typowymi*.

Definicja 1. (Typy proste)

Typami prostymi będziemy określali najmniej w sensie mnogościowym zbiór wyrażeń taki, że:

T1. Jeśli p jest zmienną typową, to p jest typem prostym.

T2. Jeśli τ i σ są typami prostymi, to $(\tau \rightarrow \sigma)$ jest typem prostym.

Typy proste zbudowane tylko wedle reguły T1 nazywamy typami *atomowymi*, zaś wyrażenia zbudowane wedle reguły T2 – typami *funkcyjnymi*. Zbiór typów prostych określony w myśl powyższej definicji będziemy oznaczali przez \mathbf{T}_{\rightarrow} .

Późniejsze litery alfabetu greckiego, tj. $\sigma, \tau, \rho, \dots$ będą służyły nam za zmienne metasyntaktyczne do oznaczania typów prostych. Dla lepszej czytelności będziemy pomijali najbardziej zewnętrzne nawiasy. Konstruktor typu \rightarrow jest prawostronnie łączny, co oznacza, że typy $\tau \rightarrow \sigma \rightarrow \theta$ oraz $\tau \rightarrow (\sigma \rightarrow \theta)$ będziemy uznawali za tożsame.

Typy proste ujęte Definicją 1 mają strukturę drzewa binarnego. Wysokość takiego drzewa będziemy nazywali *stopniem* typu. Precyzyjnie ujmując to pojęcie poniższa definicja.

Definicja 2. (Stopień typu)

Stopniem typu nazywamy funkcję

$$\begin{aligned}\delta(p) &= 0, \\ \delta(\tau \rightarrow \sigma) &= 1 + \max(\delta(\tau), \delta(\sigma)).\end{aligned}$$

1.2 Pseudotermy

Niech V będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych x, y, \dots (indeksowanych być może liczbami naturalnymi). Elementy takiego zbioru będziemy nazywali *λ -zmiennymi*.

Definicja 3. (Pseudo-pretermy)

Pseudo-pretermami będziemy nazywali najmniej (w sensie mnogościowym) zbiór $\Lambda_{\overline{\tau}}$ taki, że:

P1. Jeśli $x \in V$, to $x \in \Lambda_T^-$.

P2. Jeśli $M \in \Lambda_T^-$ i $N \in \Lambda_T^-$, to $(MN) \in \Lambda_T^-$.

P3. Dla dowolnych $x \in V$, $\sigma \in \mathbf{T}_\rightarrow$, $M \in \Lambda_T^-$ mamy, że $(\lambda x^\sigma. M) \in \Lambda_T^-$.

Wyrażenia postaci P2 nazywamy *aplikacjami* M do N , zaś wyrażenia postaci P3 – λ -abstrakcjami, gdzie o wszystkich podtermach termu M mówi się, że są w *zasięgu* λ -abstraktora, zaś o λ -zmiennej x mówi się, że jest *związana*.

Za zmienne metasyntaktyczne wybieramy duże litery alfabetu łacińskiego M, N, \dots . Podobnie jak w podrozdziale 1.1 stosujemy konwencję o opuszczaniu najbardziej zewnętrznych nawiasów. Aplikacja termów jest łączna lewostronnie, co oznacza, że będziemy utożsamiali wyrażenia MNP oraz $(MN)P$.

Definicja 4. (Zmienne wolne)

Dla pseudo-pretermu M określamy zbiór *termów wolnych* FV w następujący sposób:

$$\begin{aligned} FV(x) &= \{x\} \\ FV(\lambda x^\sigma. P) &= FV(P) \setminus \{x\} \\ FV(PQ) &= FV(P) \cup FV(Q) \end{aligned}$$

Jeśli $FV(M) = \emptyset$, to mówimy, że M jest *zamknięty*.

Definicja 5. (Podstawienie)

Podstawieniem $[x/N]$ pseudo-pretermu N za λ -zmienną x w M nazywamy zdefiniowane następująco przekształcenie:

$$\begin{aligned} x[x/N] &= N, \\ y[x/N] &= y, && \text{o ile } x \neq y, \\ (PQ)[x/N] &= P[x/N] Q[x/N], \\ (\lambda y^\sigma. P)[x/N] &= \lambda y^\sigma. P[x/N], && \text{gdzie } x \neq y \text{ i } y \notin FV(N). \end{aligned}$$

Zachodzą następujące fakty:

Fakt 1. (a) Jeśli $x \notin FV(M)$, to $M[x/N]$ jest poprawnym podstawieniem i $M[x/N] = M$.

(b) Jeśli $M[x/N]$ jest poprawnym podstawieniem, to $y \in FV(M[x/N])$ wtw, gdy albo $y \in FV(M)$ i $x \neq y$, albo $y \in FV(N)$ i $x \in FV(M)$.

(c) Podstawienie $M[x/x]$ jest poprawne i $M[x/x] = M$.

(d) Jeśli $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem, to $M[x/y]$ ma tę samą długość, co M .

Fakt 2. Powiedzmy, że $M[x/N]$ jest poprawnym podstawieniem i $N[y/L]$ i $M[x/N][y/L]$ są poprawnymi podstawieniami, gdzie $x \neq y$. Jeśli $x \notin \text{FV}(L)$ lub $y \notin \text{FV}(M)$, to $M[y/L]$ i $M[y/L][x/N[y/L]]$ jest poprawnym podstawieniem oraz

$$M[x/N][y/L] = M[y/L][x/N[y/L]].$$

Fakt 3. Jeśli $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem i $y \notin \text{FV}(M)$, to $M[x/y][y/x]$ jest poprawnym podstawieniem oraz $M[x/y][y/x] = M$.

Definicja 6. (α -konwersja)

α -konwersją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) zwrotną i przechodnią relację binarną $=_\alpha$ określoną na zbiorze pseudotermów Λ_T^- spełniającą poniższe warunki:

- (a) Jeśli $y \notin \text{FV}(M)$ i $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem, to $\lambda x. M =_\alpha \lambda y. M[x/y]$.
- (b) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla każdej λ -zmiennnej x mamy $\lambda x. M =_\alpha \lambda x. N$.
- (c) Jeśli $M =_\alpha N$, to $MZ =_\alpha NZ$.
- (d) Jeśli $M =_\alpha N$, to $ZM =_\alpha ZN$.

Bez dowodu podajemy następujące twierdzenia:

Fakt 4. Relacja $=_\alpha$ jest symetryczna.

Fakt 5. $=_\alpha$ jest relacją równoważności.

Fakt 6. Jeśli $M =_\alpha N$, to $\text{FV}(M) = \text{FV}(N)$.

Dysponując powyższymi rozstrzygnięciami otrzymujemy wygodne utożsamienie pseudo-pretermów, które różnią się między sobą tylko zmiennymi związanymi.

Definicja 7. (Pseudotermy)

Klasy abstrakcji relacji α -konwersji nazywamy *pseudotermami*. Zbiór wszystkich pseudotermów oznaczamy następująco:

$$\Lambda_T = \{[M]_\alpha \mid M \in \Lambda_T^-\}$$

Nadużywając notacji będziemy odnosili się do pseudotermów tylko przez ich reprezentantów.

1.3 Typowalność

Definicja 8. (Kontekst)

Kontekstem nazywamy skończoną funkcję częściową $\Gamma : V \longrightarrow \mathbf{T}_\rightarrow$, czyli zbiór par postaci $\Gamma = \{x_1^{\tau_1}, \dots, x_n^{\tau_n}\}$, gdzie $(x_i^{\tau_i}) = (x_i, \tau_i)$ oraz $x_i \neq x_j$ dla $i \neq j$. Zbiór

$$\text{dom}(\Gamma) = \{x \in V \mid \exists \tau (x^\tau \in \Gamma)\}$$

nazywamy *dziedziną* kontekstu Γ , zaś

$$\text{rg}(\Gamma) = \{\tau \in \mathbf{T}_\rightarrow \mid \exists x (x^\tau \in \Gamma)\}$$

– *zakresem* kontekstu Γ . Piszemy:

- $x_1^{\tau_1}, x_2^{\tau_2}$ zamiast $\{x_1^{\tau_1}, x_2^{\tau_2}\}$, o ile $x_1^{\tau_1}$ i $x_2^{\tau_2}$ są różne,
- Γ, x^φ zamiast $\Gamma \cup \{x^\varphi\}$, o ile $x^\varphi \notin \Gamma$,
- Γ, Δ zamiast $\Gamma \cup \Delta$, o ile $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$.

Określimy teraz system przypisywania typów do pseudotermów w stylu dedukcji naturalnej. *Sekwentami* będziemy nazywali wyrażenia postaci $\Gamma \vdash M^\sigma$, gdzie $M \in \mathbf{A}_T$, $\sigma \in \mathbf{T}_\rightarrow$, zaś Γ jest pewnym kontekstem.

Wprowadzamy następujące reguły dowodzenia:

$$\frac{}{\Gamma, x^\tau \vdash x^\tau} \text{ (Var)}, \quad \frac{\Gamma, x^\varphi \vdash M^\psi}{\Gamma \vdash (\lambda x^\varphi. M)^\varphi \rightarrow \psi} \text{ (Abs)}, \quad \frac{\Gamma \vdash M^{\varphi \rightarrow \psi} \quad \Gamma \vdash N^\varphi}{\Gamma \vdash (MN)^\psi} \text{ (App)}.$$

Definicja 9. (Typowalność)

Mówimy, że pseudoterm M jest typu σ w kontekście Γ (jest *typowalny*), jeśli istnieje skończone drzewo sekwentów spełniające poniższe warunki:

1. W korzeniu drzewa znajduje się sekwent $\Gamma \vdash M^\sigma$.
2. Liście są *aksjomatami*, tj. sekwentami postaci $\Gamma, x^\sigma \vdash x^\sigma$.
3. Każdego rodzica można otrzymać z jego dzieci przez zastosowanie którejś z reguł wyprowadzania nowych sekwentów.

Definicja 10. (λ -termy)

Wszystkie typowalne pseudotermy w pewnym kontekście Γ nazywamy *λ -termami* (z typami prostymi w kontekście Γ).

Uwaga. λ -term w kontekście Γ_1 może nie być typowalny w innym kontekście Γ_2 .

Mówiąc o λ -termach i nie podając żadnego związanego z nimi kontekstu Γ będziemy implicite zakładali, że istnieje pewien kontekst w którym są one typowalne. Zakładamy również, że ustalone są typy dla wszystkich λ -zmiennych. Typ dowolnego λ -termu będziemy w ramach konwencji notowali używając górnego indeksu. Dla przykładu, λ -term $(M^{\sigma \rightarrow \tau} N^{\sigma})^{\tau}$ jest w pewnym kontekście Γ typu τ .

Przez *stopień* λ -termu M^{σ} będziemy mieli na myśli stopień typu σ . Nadużywając notacji będziemy pisali

$$\delta(M^{\sigma}) = \delta(\sigma),$$

gdzie δ występująca po prawej stronie powyższej równości to funkcja określona w myśl Definicji 2.

Fakt 7. *Jesli $\Gamma \vdash M^{\sigma}$ oraz $\Gamma \vdash M^{\tau}$, to $\sigma = \tau$.*

1.4 Redukcja

Definicja 11. (Zgodność)

Relację R na zbiorze termów $\mathbf{\Lambda}_T$ nazywamy *zgodną*, jeśli dla $M, N, Z \in \mathbf{\Lambda}_T$ spełnia ona następujące warunki:

- i) Jeśli MRN , to $(\lambda x^{\sigma}. M) R (\lambda x^{\sigma}. N)$ dla dowolnych $x \in V$ i $\sigma \in \mathbf{T}_{\rightarrow}$.
- ii) Jeśli MRN , to $(MZ) R (NZ)$.
- iii) Jeśli MRN , to $(ZM) R (ZN)$.

Przy powyższych ustaleniach *kongruencją* będziemy nazywali każdą zgodną relację równoważności na $\mathbf{\Lambda}_T$, zaś *redukcją* – każdą zgodną, zwrotną i przechodnią relację na $\mathbf{\Lambda}_T$.

Definicja 12. (β -redukcja)

β -redukcją nazywamy najmniejsza w sensie mnogościowym *zgodną* relację binarną \longrightarrow_{β} określoną na zbiorze pseudotermów $\mathbf{\Lambda}_T$ za pomocą podstawienia

$$(\lambda x^{\sigma}. P)Q \longrightarrow_{\beta} P[x/Q].$$

β -*redeksami* będziemy nazywali wyrażenia postaci $(\lambda x^{\sigma}. M)N$, zaś rezultat ich β -redukcji w postaci termu $M[x/N]$ – β -*reduktem*.

Określamy następujące relacje:

- B1. $\longrightarrow_{\beta}^{+}$ jest przechodnim domknięciem relacji \longrightarrow_{β} w zbiorze pseudotermów $\mathbf{\Lambda}_T$.

B2. $\longrightarrow_{\beta}^*$ jest domknięciem przechodnio-zwrotnym w Λ_T relacji \longrightarrow_{β} , a zatem jest *redukcją*.

B3. $=_{\beta}$ jest najmniejszą relacją równoważności zawierającą relację \longrightarrow_{β} , (czyli *kongruencją*).

Definicja 13. (Postać normalna)

Powiemy, że λ -term M jest w *postaci normalnej*, jeśli żadna z jego podformuł nie jest β -redexem. Przez NF_{β} będziemy oznaczali zbiór wszystkich λ -termów w postaci normalnej.

Zachodzą następujące fakty:

Fakt 8. M ma postać normalną, jeśli $M =_{\beta} N$ dla pewnego N , który jest w postaci normalnej.

Fakt 9. Jeśli $\Gamma \vdash M^{\sigma}$ i $M \longrightarrow_{\beta}^* N$, to $\Gamma \vdash N^{\sigma}$.

Definicja 14. (η -redukcja)

η -redukcją nazywamy najmniejszą (w sensie mnogościowym) *zgodną* relację w Λ_T taką, że

$$\lambda x^{\sigma}. Mx \longrightarrow_{\eta} M,$$

o ile $x \notin FV(M)$.

Fakt 10. Jeśli $\Gamma \vdash M^{\sigma}$ i $M \longrightarrow_{\eta}^* N$, to $\Gamma \vdash N^{\sigma}$.

1.5 Normalizacja

Powiemy, że λ -term M ma własność:

- (*słabej normalizacji*) (symbolicznie: $M \in WN_{\beta}$) wtedy i tylko wtedy, gdy istnieje ciąg β -redukcji rozpoczynający się od M i kończący się termem w postaci normalnej N .
- (*silnej normalizacji*) (symbolicznie: $M \in SN_{\beta}$), jeśli wszystkie ciągi β -redukcji rozpoczynające się od M są skończone.

Z powyższego określenia widzimy, że własność SN_{β} pociąga za sobą własność WN_{β} .

Definicja 15. (Strategia redukcji)

Strategią redukcji nazywamy odwzorowanie $F : \Lambda_T \longrightarrow \Lambda_T$ takie, że $F(M) = M$, gdy M jest w postaci normalnej i $M \rightarrow_{\beta} F(M)$ w przeciwnym wypadku. Mówimy, że strategia F jest *normalizująca*, jeśli dla każdego $M \in WN_{\beta}$ istnieje $i \in \mathbb{N}$ takie, że $F^i(M)$ jest w postaci normalnej.

Twierdzenie 1. (Własność WN_{β}) *Wszystkie λ -termy mają postać normalną.*

Dowód. Pokażemy, że dla dowolnego λ -termu M istnieje normalizująca strategia redukcji.

Przypuśćmy, że M nie jest w postaci normalnej. Ponieważ M jest wyrażeniem o skończonej długości, to musi zawierać skończenie wiele redeksów. Oznaczmy przez δ_M maksymalny stopień spośród nich. Ponieważ wiele redeksów w M może mieć ten sam stopień δ_M , przez n_M oznaczmy liczbę ich wystąpień.

Niech Δ będzie β -redeksiem stopnia δ_M położonym w M najbardziej na prawo i niech M' będzie β -reduktem otrzymanym przez zredukowanie Δ . Zauważmy, że $n_M < n_{M'}$. Istotnie, Δ nie występuje w M' , zaś β -redukcja Δ na podstawie Lematu ?? może prowadzić do powstania redeksów tylko mniejszego stopnia. Powtarzając otrzymujemy więc λ -term w postaci normalnej. \square

Twierdzenie 2. (Własność SN_β) *Wszystkie λ -termy mają własność silnej normalizacji.*

- WCR: $\forall a, b, c \in A (a \longrightarrow b \wedge a \longrightarrow c) \rightarrow \exists d \in A (b \longrightarrow^* d \wedge c \longrightarrow^* d)$
- CR: $\forall a, b, c \in A (a \longrightarrow^* b \wedge a \longrightarrow^* c) \rightarrow \exists d \in A (b \longrightarrow^* d \wedge c \longrightarrow^* d)$

Twierdzenie 3. (Lemat Newmana) *Niech \rightarrow będzie relacją binarną spełniającą SN . Jeśli \rightarrow spełnia WCR, to spełnia CR.*

Dowód.

Twierdzenie 4. (Własność SN_β) *Każdy λ -term w stylu Churcha własność silnej normalizacji.*

Dowód.