

Izomorfizm Curry’ego-Howarda

Rafał Szacherski

2018
Październik

1 Implikatywna logika minimalna

1.1 Język

Definicja 1.

- Zbiorem Φ_{\rightarrow} formuł implikatywnej logiki minimalnej $NJ(\rightarrow)$ nazywamy język generowany przez gramatykę

$$\begin{aligned}\Phi_{\rightarrow} &:= V \mid (\Phi_{\rightarrow} \rightarrow \Phi_{\rightarrow}) \mid \perp \\ V &:= p \mid V'\end{aligned}$$

- Wyrażenia powstałe z produkcji V nazywamy *zmiennymi zdaniowymi*. Zmienne zdaniowe oraz \perp są formułami *atomowymi*. Pozostałe wyrażenia nazywamy formułami *złożonymi*.
- Konwencje:
 1. W języku podmiotowym wprowadzamy następujące oznaczenia

$$\begin{aligned}\neg\varphi &:= \text{‘}\varphi \rightarrow \perp\text{’} \\ \top &:= \text{‘}\perp \rightarrow \perp\text{’}\end{aligned}$$

2. Zamiast p', p'', p''', \dots używamy kolejno liter p, q, r, \dots
 3. Za zmienne podmiotowe dla oznaczeń formuł zdaniowych obieramy późniejsze litery alfabetu greckiego, tj. $\varphi, \psi, \theta \dots$
 4. \rightarrow jest łączna w prawo.
 5. \neg ma najwyższy priorytet, \rightarrow – najniższy.
 6. Pomijamy najbardziej zewnętrzne nawiasy.
- Każdą parę $(\Gamma, \varphi) \in \mathcal{P}(\Phi_{\rightarrow}) \times \Phi_{\rightarrow}$, gdzie Γ jest zbiorem skończonym nazywamy *sądem* (*asercją*) i oznaczamy $\Gamma \vdash \varphi$.

Piszemy:

- $\varphi_1, \varphi_2 \vdash \psi$ zamiast $\{\varphi_1, \varphi_2\} \vdash \psi$,
- Γ, φ zamiast $\{\Gamma \cup \varphi\}$,
- Γ, Δ zamiast $\{\Gamma \cup \Delta\}$,
- $\vdash \varphi$ zamiast $\emptyset \vdash \varphi$.

- Na zbiorze sądów $\mathcal{P}(\Phi_{\rightarrow}) \times \Phi_{\rightarrow}$ wprowadzamy relacje określające reguły wyprowadzania

$$\frac{\Gamma, \varphi \vdash \psi}{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi} (\rightarrow I), \quad \frac{\Gamma \vdash \varphi \rightarrow \psi \quad \Gamma \vdash \varphi}{\Gamma \vdash \psi} (\rightarrow E).$$

oraz wybieramy spośród sądów jeden aksjomat postaci $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$ (Ax).

- *Dowodem* sądu $\Gamma \vdash \varphi$ nazywamy skończone drzewo sądów spełniające poniższe warunki:

1. W korzeniu drzewa znajduje się dowodzony sąd $\Gamma \vdash \varphi$.
2. Liście są *aksjomatami*, tj. sędami postaci $\Gamma, \varphi \vdash \varphi$.
3. Każdego rodzica można otrzymać z jego dzieci przez zastosowanie którejś z reguł wyprowadzania nowych sądów.

Jeśli istnieje dowód sądu $\Gamma \vdash \varphi$ to mówimy, że formuła φ jest *wyprowadzalna* ze zbioru *przesłanek* Γ i piszemy $\Gamma \vdash_N \varphi$. Formułę φ nazywamy wówczas *tezą* systemu NJ(\rightarrow).

Lemat 1. NJ(\rightarrow) jest zamknięty ze względu na

- (a) *osłabianie*: jeśli $\Gamma \vdash \varphi$, to tym bardziej $\Gamma, \psi \vdash \varphi$.
- (b) *podstawianie*: jeśli $\Gamma \vdash \varphi$, to $\Gamma[p/\psi] \vdash \varphi[p/\psi]$.

1.2 Semantyka

Twierdzenie 1. (O pełności) System dedukcyjny NJ(\rightarrow) jest pełny względem modeli Kripkego.

2 Typy proste w stylu Churcha

2.1 Język

Definicja 2.

- *Typami prostymi* T nazywamy zbiór Φ_{\rightarrow} wszystkich formuł języka logiki NJ(\rightarrow). Zamiast mówić o zmiennych zdaniowych, będziemy używali określenia *zmiennne typowe*. Za zmienne podmiotowe dla oznaczeń formuł zdaniowych obieramy późniejsze litery alfabetu greckiego, tj. $\sigma, \tau, \rho \dots$

- *Pseudotermami* nazywamy język Λ_T generowany przez gramatykę

$$\Lambda_T := V \mid (\lambda V^T. \Lambda_T) \mid (\Lambda_T \Lambda_T)$$

gdzie V to przeliczalny zbiór λ -zmiennych x, y, \dots

W języku podmiotowym będziemy używali późniejszych liter alfabetu łacińskiego pisanych kursywą (M, N, O, \dots) oznaczając pseudotermy.

- *Otoczeniem typowym* nazywamy skończoną funkcję częściową $\Gamma : V \rightarrow T$ przeprowadzającą zbiór λ -zmiennych w zbiór typów prostych. Nadużywając notacji piszemy

- $\Gamma = \{x_1 : \tau_1, \dots, x_n : \tau_n\}$
- $\text{dom}(\Gamma) = \{x \in V \mid \exists \tau. (x : \tau) \in \Gamma\}$
- $\text{rg}(\Gamma) = \{\tau \in \Phi_{\rightarrow} \mid \exists x. (x : \tau) \in \Gamma\}$

- Dla pseudotermu M następująco określamy zbiór *termów wolnych* FV:

$$\begin{aligned} \text{FV}(x) &= \{x\} \\ \text{FV}(\lambda x^\sigma. P) &= \text{FV}(P) \setminus \{x\} \\ \text{FV}(PQ) &= \text{FV}(P) \cup \text{FV}(Q) \end{aligned}$$

- *Podstawieniem* pseudotermu N za λ -zmienną x w M nazwamy zdefiniowane następująco przekształcenie:

$$\begin{aligned} x[x/N] &= N, \\ y[x/N] &= y, & \text{o ile } x \neq y, \\ (PQ)[x/N] &= P[x/N] Q[x/N], \\ (\lambda y^\sigma. P)[x/N] &= \lambda y^\sigma. P[x/N], & \text{gdzie } x \neq y \text{ i } y \notin \text{FV}(N). \end{aligned}$$

- α -konwersję $=_\alpha$ nazywamy najmniejszą w sensie mnogościowym relację zwrotną i przechodnią określoną na zbiorze pseudoterminów Λ_T spełniającą poniższe warunki:
 - (a) Jeśli $y \notin \text{FV}(M)$ i $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem, to $\lambda x. M =_\alpha \lambda y. M[x/y]$.
 - (b) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla każdej λ -zmiennnej x mamy $\lambda x. M =_\alpha \lambda x. N$.
 - (c) Jeśli $M =_\alpha N$, to $MZ =_\alpha NZ$.
 - (d) Jeśli $M =_\alpha N$, to $ZM =_\alpha ZN$.
- *Sądem (asercją)* nazywamy każdą trójkę $(\Gamma, M, \sigma) \in \mathcal{P}(V \times T) \times \Lambda_T \times T$, gdzie Γ jest otoczeniem typowym i oznaczamy $\Gamma \vdash M^\sigma$.

Piszemy:

- $\varphi_1, \varphi_2 \vdash \psi$ zamiast $\{\varphi_1, \varphi_2\} \vdash \psi$,
- Γ, x^φ zamiast $\Gamma \cup \{x^\varphi\}$, o ile $x^\varphi \notin \Gamma$.
- Γ, Δ zamiast $\{\Gamma \cup \Delta\}$, o ile $\Gamma \cap \Delta = \emptyset$.
- $\vdash \varphi$ zamiast $\emptyset \vdash \varphi$.

- Na zbiorze sądów wprowadzamy relacje określające reguły wyprowadzania termów

$$\frac{\Gamma, x^\varphi \vdash M^\psi}{\Gamma \vdash (\lambda x^\varphi. M)^\varphi} \text{ (Abs)}, \quad \frac{\Gamma \vdash M^{\varphi \rightarrow \psi} \quad \Gamma \vdash N^\varphi}{\Gamma \vdash (MN)^\psi} \text{ (App)}.$$

oraz wybieramy spośród sądów jeden aksjomat postaci $\Gamma, x^\tau \vdash x^\tau$ (Var).

Dowód sądu określamy analogicznie jak w logice NJ(\rightarrow).

Mówimy, że M jest *termem* typu τ w otoczeniu Γ , jeśli istnieje dowód sądu $\Gamma \vdash M^\tau$ w powyższym systemie dedukcyjnym.

Literatura