

1 Rachunek λ

Niech V będzie przeliczalnie nieskończonym zbiorem zmiennych przedmiotowych x, y, \dots (indeksowanych być może liczbami naturalnymi). Elementy takiego zbioru będziemy nazywali λ -zmiennymi. Ponieważ V jest potencjalnie nieskończony, zastrzegamy sobie możliwość wybierania w razie potrzeby wcześniej nie użytej zmiennej.

Definicja 1. (Zbiór $\tilde{\Lambda}$ pretermów) Zbiorem pretermów będziemy nazywali najmniejszy (w sensie mnogościowym) zbiór wyrażeń $\tilde{\Lambda}$ taki, że:

- (P1) Jeśli $x \in V$, to $x \in \tilde{\Lambda}$.
- (P2) Jeśli $M, N \in \tilde{\Lambda}$, to $(M N) \in \tilde{\Lambda}$.
- (P3) Jeśli $x \in V$ i $M \in \tilde{\Lambda}$, to $(\lambda x. M) \in \tilde{\Lambda}$.

Definicję 1 można równoznacznie wyrazić przy pomocy notacji Backusa-Naura. Wówczas ma ona następującą, zwięzłą postać:

$$\tilde{\Lambda} \leftarrow V \mid (\tilde{\Lambda} \tilde{\Lambda}) \mid (\lambda V. \tilde{\Lambda})$$

Elementy $\tilde{\Lambda}$ będziemy oznaczali literami L, M, N, P, Q, R i ich wariantami z górnymi lub dolnymi indeksami. Wyrażenia postaci (P2) nazywamy *aplikacjami* M do N . Symbol λ występujący w (P3) nazywamy λ -abstraktorem, zaś wyrażenia powstałe przez zastosowanie tej reguły to λ -abstrakcje. W wyrażeniu postaci $(\lambda x. M)$ preterm M jest w *zasięgu* λ -abstraktora, a zmienna x jest przez niego *związana*. Ponadto, będziemy stosowali następujące konwencje notacyjne:

- *najbardziej zewnętrzne nawiasy będą pomijane*,
- *aplikacja wiąże lewostronnie; wyrażenia postaci $(PQ)R$ będą zapisywane w postaci PQR ,*
- *λ -abstrakcja wiąże prawostronnie: $\lambda x_1. (\lambda x_2. P)$ zapisujemy $\lambda x_1. \lambda x_2. P$,*
- *następujące po sobie λ -abstrakcje postaci $\lambda x_1. \lambda x_2. \dots \lambda x_n. P$ zapisujemy pod wspólnym λ -abstraktorem: $\lambda x_1 x_2 \dots x_n. P$.*

Powiemy, że dwa λ -termy są *syntaktycznie równe*, jeśli rozumiane jako ciągi znaków są identyczne. Równość syntaktyczną będziemy oznaczali znakiem \equiv .

Przykład 1. Podajmy kilka przykładów λ -pretermów pogrupowanych ze względu na ich konstrukcję.

- (P1): x, y, z .
- (P2): $xx, yx, x(xz),$
 $(\lambda x. (xz))y, y(\lambda x. (xz)), (\lambda x. x)(\lambda x. x)$.
- (P3): $\lambda x. (xz), \lambda yz. x, \lambda x. (\lambda x. (xx))$.

Podwyrażenia λ -pretermu mogą być wzajemnie identyczne i występować wielokrotnie. Obserwację tę ujmuje następująca definicja.

Definicja 2. (Multizbiór Sub podtermów pretermu)

- (1) $\text{Sub}(x) = \{x\}$
- (2) $\text{Sub}(MN) = \text{Sub}(M) \cup \text{Sub}(N) \cup \{MN\}$
- (3) $\text{Sub}(\lambda x. M) = \text{Sub}(M) \cup \{\lambda x. M\}$

Elementy multizbioru $\text{Sub}(M)$ nazywamy *podtermami* M . Jeśli L jest podtermem M , ale $L \neq M$, to L nazywamy podtermem *właściwym*.

Przykład 2. Podtermy wybranych λ -pretermów.

- (a) $\text{Sub}(\lambda x. xx) = \{(\lambda x. xx)^1, (xx)^1, x^2\}$
- (b) $\text{Sub}((\lambda x. xx)(\lambda x. xx)) =$
 $= \{((\lambda x. xx)(\lambda x. xx))^1, (\lambda x. xx)^2, (xx)^2, x^4\}$

W powyższych przykładach użyliśmy standardowej notacji w górnym indeksie umieszczając krotność występowania elementu.

Definicja 3. (Zbiór FV zmiennych wolnych) Dla dowolnego pretermu M określamy zbiór $\text{FV}(M)$ *zmiennych wolnych* w M w następujący sposób:

$$\begin{aligned}\text{FV}(x) &= \{x\} \\ \text{FV}(\lambda x. P) &= \text{FV}(P) \setminus \{x\} \\ \text{FV}(PQ) &= \text{FV}(P) \cup \text{FV}(Q)\end{aligned}$$

Jeśli $\text{FV}(M) = \emptyset$, to mówimy, że M jest *domknięty* lub nazywamy M *kombinatorem*.

Przykład 3. (a) $\text{FV}(\lambda x. xy) = \{y\}$

(b) $\text{FV}(x(\lambda x. xy)) = \{x, y\}$

(c) $\text{FV}(\lambda xyz. xy) = \emptyset$

Definicja 4. (Podstawienie) Dla dowolnych $M, N \in \tilde{\mathbf{A}}$ i $x \in V$ przez $N[x/N]$ oznaczamy rezultat podstawienia termu N za wszystkie wolne wystąpienia zmiennej x w M , o ile w rezultacie podstawienia nie zostaną związane żadne zmienne wolne występujące w N . W takim wypadku *podstawienie* jest przekształceniem pretermów określonym w następujący sposób:

$$(S1) \quad x[x/N] = N$$

- (S2) $y[x/N] = y$, o ile $x \neq y$
- (S3) $(PQ)[x/N] = P[x/N]Q[x/N]$
- (S4) $(\lambda y. P)[x/N] = \lambda y. P[x/N]$, gdzie $x \neq y$ i $y \notin \text{FV}(N)$
- (S5) $(\lambda x. P)[x/N] = \lambda x. P$

Zauważmy, że jest to funkcja częściowa w zbiorze $\tilde{\Lambda} \times V \times \tilde{\Lambda}$. Powiemy, że $M[x/N]$ jest *poprawnym podstawieniem*, jeśli podstawienie $M[x/N]$ jest określone w myśl Definicji 4.

Lemat 1. (O podstawieniu) Niech $M, N, L \in \tilde{\Lambda}$ i niech ponadto $x \neq y$ oraz $x \notin \text{FV}(L)$. Wówczas

$$M[x/N][y/L] \equiv M[y/L][x/N[y/L]]. \quad (1)$$

Dowód. Dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem M . Rozważmy następujące przypadki:

- i) M jest zmienną. Wówczas:
 - a. Jeśli $M \equiv x$, to obie strony (1) po podstawieniu są postaci $N[y/L]$.
 - b. Jeśli $M \equiv y$, to ponieważ $x \neq y$ i $x \notin \text{FV}(M)$, po wykonaniu podstawienia po lewej stronie (1) otrzymujemy $M[x/N][y/L] \equiv L$. Ponieważ $x \notin \text{FV}(L)$, to po wykonaniu podstawienia po prawej stronie widzimy, że obydwie strony są identyczne.
 - c. Jeśli $M \equiv z$ i $z \neq x$ oraz $z \neq y$, to obydwie strony (1) są identyczne.
- ii) $M \equiv PQ$ dla pewnych $P, Q \in \tilde{\Lambda}$. Wówczas korzystając z hipotezy indukcyjnej wnosimy, że

$$\begin{aligned} P[x/N][y/L] &\equiv P[y/L][x/N[y/L]], \\ Q[x/N][y/L] &\equiv Q[y/L][x/N[y/L]]. \end{aligned}$$

Mając na względzie (S3) widzimy, że twierdzenie zachodzi i w tym przypadku.

- iii) Jeśli $M \equiv \lambda z. P$ oraz $z \equiv x$ lub $z \equiv y$, to z (S'5) widzimy, że obydwie strony (1) są identyczne. Przypuśćmy, że $z \neq x$ i $z \neq y$ i $z \notin \text{FV}(L)$. Wówczas na podstawie hipotezy indukcyjnej mamy:

$$\begin{aligned} (\lambda z. P)[x/N][y/L] &= \lambda z. P[x/N][y/L] = \\ &= \lambda z. P[y/L][x/N[y/L]] = \\ &= (\lambda z. P)[y/L][x/N[y/L]]. \end{aligned}$$

□

Wniosek 1. *Jeśli $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem i $y \notin \text{FV}(M)$, to $M[x/y][y/x]$ jest poprawnym podstawieniem oraz $M[x/y][y/x] = M$.*

Dowód. Mając na uwadze Lemat 4 dowód przebiega przez indukcję strukturalną względem M . \square

1.1 Wyrażenia λ

Na ogół chcielibyśmy utożsamiać pretermy, które różnią się wyłącznie zmiennymi związanymi, tak jak w przypadku wyrażeń $\lambda x. zx$ i $\lambda y. zy$. W takim wypadku powiemy o nich, że są swoimi α -variantami lub że są ze sobą w relacji α -konwersji.

Definicja 5. (Relacja α -konwersji) Relacją $=_\alpha$ (α -konwersji) nazywamy najmniejszy w sensie mnogościowym praporządek na $\tilde{\Lambda}$ taki, że

- ($\alpha 1$) Jeśli $y \notin \text{FV}(M)$ oraz $M[x/y]$ jest poprawnym podstawieniem, to $\lambda x. M =_\alpha \lambda y. M[x/y]$
- ($\alpha 2$) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla dowolnego $x \in V$ zachodzi $\lambda x. M =_\alpha \lambda x. N$
- ($\alpha 3$) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla dowolnego $Z \in \tilde{\Lambda}$ zachodzi $MZ =_\alpha NZ$
- ($\alpha 4$) Jeśli $M =_\alpha N$, to dla dowolnego $Z \in \tilde{\Lambda}$ zachodzi $ZM =_\alpha ZN$

Wniosek 2. *Relacja $=_\alpha$ jest relacją równoważności.*

Dowód. Wystarczy, że pokażemy, że relacja $=_\alpha$ jest symetryczna. Dowód przebiega przez indukcję względem Definicji 5. Rozważmy następujące przypadki:

- i) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji zwrotności $=_\alpha$, to $M \equiv N$, a zatem również $N \equiv M$. Stąd $N =_\alpha M$.
- ii) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji przechodniości $=_\alpha$, to istnieje $L \in \tilde{\Lambda}$ takie, że $M =_\alpha L$ i $L =_\alpha N$. Wówczas z hipotezy indukcyjnej $N =_\alpha L$ i $L =_\alpha M$. Z przechodniości relacji $=_\alpha$ otrzymujemy spodziewaną tezę.
- iii) Przypuśćmy, że $M =_\alpha N$ w konsekwencji ($\alpha 1$) dla $M \equiv \lambda x. M'$ i $N \equiv \lambda y. M'[x/y]$. Ponieważ $x \notin \text{FV}(M'[x/y])$, to ze względu na Wniosek 1 mamy, że $M'[x/y][y/x] = M'$. Zatem, na podstawie ($\alpha 1$):

$$\lambda y. M'[x/y] =_\alpha \lambda x. M'[x/y][y/x].$$

- iv) Jeśli $M =_\alpha N$ w konsekwencji ($\alpha 2$), gdzie $M = \lambda x. M'$ i $N = \lambda x. N'$ dla $M' =_\alpha N'$, to z hipotezy indukcyjnej $N' =_\alpha M'$ i w konsekwencji ($\alpha 2$) mamy, że $N =_\alpha M$.

v) Jeśli $M =_{\alpha} N$ w konsekwencji $(\alpha 3)$ dla $M \equiv M'Z$ i $N \equiv N'Z$ takich, że $M' =_{\alpha} N'$, to z hipotezy indukcyjnej oczywiście $N' =_{\alpha} M'$, a zatem z $(\alpha 3)$ $N =_{\alpha} M$.

vi) Jeśli $M =_{\alpha} N$ w konsekwencji $(\alpha 3)$, to postępujemy jak w przypadku (v). \square

Definicja 6. (Zbiór Λ λ -termów) Każdą klasę abstrakcji relacji $=_{\alpha}$ nazywamy λ -termem. Zbiór wszystkich λ -termów Λ to zbiór ilorazowy relacji α -konwersji:

$$\Lambda = \{[M]_{=\alpha} \mid M \in \tilde{\Lambda}\}$$

Konwencja. Wprowadzamy następujące konwencje notacyjne:

$$\begin{aligned} x &= [x]_{=\alpha}, \\ PQ &= [M'N']_{=\alpha}, \text{ gdzie } M = [M']_{=\alpha} \text{ i } N = [N']_{=\alpha}, \\ \lambda x. M &= [\lambda x. M']_{=\alpha}, \text{ gdzie } N = [N']_{=\alpha}. \end{aligned}$$

Na zbiór Λ przenoszą się pojęcia podtermu, zmiennych wolnych i operacji podstawienia definiowane uprzednio dla pretermów.

Definicja 7. (Multizbiór Sub podtermów λ -termu) Dla dowolnego λ -termu $M = [M']_{=\alpha}$ określamy

$$\text{Sub}(M) = \text{Sub}(M'),$$

gdzie $\text{Sub}(M')$ jest multizbiorem podwyrażeń pretermu M' zdefiniowanym w myśl Definicji 2.

Definicja 8. (Zbiór zmiennych wolnych FV) Dla dowolnego λ -termu $M = [M']_{=\alpha}$ określamy zbiór $\text{FV}(M)$ *zmiennych wolnych* w M

$$\text{FV}(M) = \text{FV}(M'),$$

gdzie $\text{FV}(M')$ jest zbiorem zmiennych wolnych pretermu M' zdefiniowanym w myśl Definicji 3.

Definicja 9. (Podstawienie) Niech $M = [M']_{=\alpha}$ i $N = [N']_{=\alpha}$ i niech $M'[x/N']$ będzie poprawnym podstawieniem w myśl Definicji 4. Wówczas

$$M[x/N] = [M'[x/N']]_{=\alpha}.$$

Operacja podstawienia wymaga jednak pewnej delikatności. Rozważmy następującą relację:

$$\lambda x. zx =_{\alpha} \lambda y. zy$$

Zauważmy, że traktując operację podstawienia w sposób naiwny, otrzymujemy, że $(\lambda x. zx)[z/x] \neq_\alpha (\lambda y. zy)[z/x]$, a więc tracimy porządaną własność niezmienniczości α -konwersji względem podstawienia. Stąd w Definicji 4 wymóg, aby poprawne podstawienie nie prowadziło do uszczuplenia zbioru zmiennych wolnych. Precyzyjniejszym rozwiązaniem jest określenie podstawienia, które prowadziłoby do abstrachowania po wcześniej nie występujących zmiennych, czyli

$$(\lambda x. M)[y/N] = \lambda x'. M[x/x'] [y/N],$$

w przypadku, gdy $x \neq y$, gdzie $x' \notin \text{FV}(M)$ i $x' \notin \text{FV}(N)$. Rozstrzygnięcie takie przytacza się w [HS08]. Precyzyjnie tę ideę ujmuje Definicja 4'.

Definicja 4'. (*Podstawienie'*)

$$(S'1) \ x[x/N] = N$$

$$(S'2) \ y[x/N] = y, \text{ o ile } x \neq y$$

$$(S'3) \ (PQ)[x/N] = P[x/N] Q[x/N]$$

$$(S'4) \ (\lambda x. P)[x/N] = \lambda x. P$$

$$(S'5) \ (\lambda y. P)[x/N] = \lambda y. P, \text{ jeśli } x \notin \text{FV}(P)$$

$$(S'6) \ (\lambda y. P)[x/N] = \lambda y. P[x/N], \text{ gdzie } x \in \text{FV}(P) \text{ i } y \notin \text{FV}(N)$$

$$(S'7) \ (\lambda y. P)[x/N] = \lambda z. P[y/z][x/N], \text{ gdzie } x \in \text{FV}(P) \text{ i } y \in \text{FV}(N)$$

przy czym w (S'7) wymagamy, aby zmienna z nie występowała wcześniej w termach N i P jako zmienna wolna, zaś dla (S'5)-(S'7) dodatkowo $y \neq x$.

Pozornie błacha operacja podstawienie okazuje się centralnym pojęciem we wszystkich systemach rachunku λ . To na niej opiera się sens obliczeniowy tych systemów, co jest naturalne, bo w istocie są to przecież systemy przepisujące. W literaturze znajdujemy mnogość propozycji, które w ten czy inny sposób starają się ułatwić rzeczywistą implementację tej operacji. Na szczególną uwagę zasługują tutaj tak zwane *indeksy de Bruijna*. Zaproponowana przez de Bruijna w [Bru72] notacja eliminuje bezpośrednie występowanie zmiennych w λ -termach i historycznie wiąże się z jego pracami nad systemem wspomaganego dowodzenia twierdzeń AUTOMATH.

Szerszy komentarz dotyczący dotychczasowych prób uchwycenia operacji podstawienia można prześledzić w [Che13]. Nasze rozważania opierają się w tej materii przeważająco na [SU06]. Samo podejście do definiowania λ -termów przez operację α -konwersji nie jest powszechne w literaturze przedmiotu. Analogiczną konstrukcję należałoby powtarzać wprowadzając każdy kolejny system, dlatego w dalszej części tej pracy będziemy poprzestawali na nieformalnym traktowaniu wyrażeń danego systemu jako odpowiednich klas α -konwersji.

Notowanie serii podstawień prędko staje się niezręczne, dlatego na gruncie Definicji 9 potrzebujemy określić nieco więcej cukru syntaktycznego.

Definicja 10. (Podstawienie jednoczesne) Dla dowolnego $M \in \mathbf{\Lambda}$, ciągu λ -zmiennych \vec{x} i ciągu λ -termów \vec{N} określamy:

- ($\vec{s}1$) $x_i[\vec{x}/\vec{N}] = N_i$ dla $i \in \mathbb{N}$.
- ($\vec{s}2$) $y[\vec{x}/\vec{N}] = y$ o ile dla dowolnego $i \in \mathbb{N}$, $y \neq x_i$.
- ($\vec{s}3$) $(PQ)[\vec{x}/\vec{N}] = P[\vec{x}/\vec{N}]Q[\vec{x}/\vec{N}]$
- ($\vec{s}4$) $(\lambda y. P)[\vec{x}/\vec{N}] = \lambda y'. P[y/y'][\vec{x}/\vec{N}]$, gdzie y' jest wcześniej nie występującą zmienną, $y \neq x_i$ dla wszystkich $i \in \mathbb{N}$ i $y \notin \bigcup_{i \in \mathbb{N}} FV(N_i)$.

Przykład 4. Porównajmy następujące podstawienia:

- (a) Niech $\vec{x} = id$ i niech \vec{N} będzie ciągiem stałym o wyrazie

1.2 Redukcja

Sens obliczeniowy λ -termom nadajemy przez określenie na $\mathbf{\Lambda}$ operacji β - i η -redukcji. Pożądane jest, żeby operacje te wykonywane na podtermach pozostawały w zgodzie ze strukturą całego λ -termu.

Definicja 11. (Relacja zgodna) Relację binarną \mathcal{R} na zbiorze $\mathbf{\Lambda}$ nazywamy *zgodną*, jeśli dla dowolnych $M, N, P \in \mathbf{\Lambda}$ zachodzą następujące warunki:

- (c1) Jeśli $M\mathcal{R}N$, to $(\lambda x. M)\mathcal{R}(\lambda x. N)$ dla dowolnej λ -zmiennnej x .
- (c2) Jeśli $M\mathcal{R}N$, to $(MP)\mathcal{R}(NP)$.
- (c3) Jeśli $M\mathcal{R}N$, to $(PM)\mathcal{R}(PN)$.

Przez *domknięcie relacji* \mathcal{R}_1 będziemy rozumieli najmniejszą (w sensie mnogościowym) relację \mathcal{R}_2 taką, że $\mathcal{R}_1 \subset \mathcal{R}_2$. Z pewnego rodzaju domknięciami, ze względu na ich szczególną rolę, wiążemy następującą notację:

- (a) Przez \mathcal{R}^+ oznaczamy przechodnie domknięcie relacji \mathcal{R} .
- (b) Przez \mathcal{R}^* oznaczamy zwrotnie domknięcie relacji \mathcal{R}^+ .
- (c) Przez $=_{\mathcal{R}}$ oznaczamy symetryczne domknięcie relacji \mathcal{R}^* .

Dla lepszego zrozumienia powyższych operacji warto zauważyć, że (b) wyznacza praporzadek, który w odniesieniu do redukcji określonych na $\mathbf{\Lambda}$ można rozumieć jako graf skierowany (w przypadku $\mathbf{\Lambda}$ być może nieskończony) w którym krawędzie odpowiadają możliwym krokom obliczenia, zaś (c) – kongruencję, która znów w szczególnym odniesieniu do λ -termów, będzie dokonywała podziału w $\mathbf{\Lambda}$ ze względu na rezultat obliczenia.

Definicja 12. (Redukcja)

Literatura

- [Bru72] N.G. de Bruijn. “Lambda Calculus Notation with Nameless Dummies, a Tool for Automatic Formula Manipulation, with Application to the Church-Rosser Theorem”. In: *Indagationes Mathematicae (Proceedings)* 75 (Dec. 1972), pp. 381–392. DOI: 10.1016/1385-7258(72)90034-0.
- [Che13] George Cherevichenko. “New definitions of contexts and free variables for lambda-calculi with explicit substitutions”. In: *CoRR* abs/1303.5039 (2013). arXiv: 1303.5039. URL: <http://arxiv.org/abs/1303.5039>.
- [HS08] J. Roger Hindley and Jonathan P. Seldin. *Lambda-Calculus and Combinators: An Introduction*. 2nd ed. New York, NY, USA: Cambridge University Press, 2008. ISBN: 0521898854, 9780521898850.
- [SU06] Morten Heine Sørensen and Pawel Urzyczyn. *Lectures on the Curry-Howard Isomorphism, Volume 149 (Studies in Logic and the Foundations of Mathematics)*. New York, NY, USA: Elsevier Science Inc., 2006. ISBN: 0444520775.