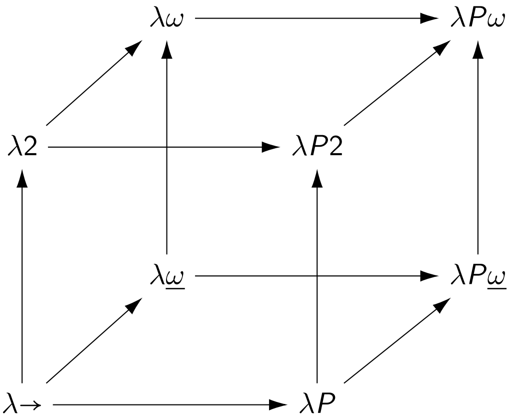


Rysunek: Kostka λ H. Barendregta

$$
\begin{array}{llcl}
\text{Typy:} & \mathbb{T} & := & \mathbb{V} \\
 & & | & \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T} \\
 & & & \\
\text{Pseudotermy:} & \Lambda_{\mathbb{T}} & := & V \\
 & & | & \Lambda_{\mathbb{T}} \Lambda_{\mathbb{T}} \\
 & & | & \lambda V : \mathbb{T}. \Lambda_{\mathbb{T}}
\end{array}
$$

Konteksty: $\Gamma = \{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n\}$

Redukcja: $(\lambda x : A.\, M)N \longrightarrow_\beta M[x := N]$

Typizacja: $\Gamma \vdash M : A$

(Var) $$\frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$$

(App) $$\frac{\Gamma \vdash M : A \rightarrow B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash (MN) : B}$$

(Abs) $$\frac{\Gamma, x : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash (\lambda x : A.\, M) : A \rightarrow B}$$

$$0 : \mathbf{0}$$
$$S : \mathbf{0} \to \mathbf{0}$$
$$R_\sigma : \sigma \to (\sigma \to \mathbf{0} \to \sigma) \to \mathbf{0} \to \sigma$$

$\lambda 2$ - termy zależne od typów

$$
\begin{tikzcd}
 & \lambda\omega \arrow[rr, dotted] & & \lambda P\omega \\
\lambda 2 \arrow[ur, dotted] \arrow[rr, dotted] & & \lambda P2 \arrow[ur, dotted] & \\
 & \lambda\underline{\omega} \arrow[uu, dotted] \arrow[rr, dotted] & & \lambda P\underline{\omega} \arrow[uu, dotted] \\
\lambda\!\rightarrow \arrow[uu] \arrow[ur, dotted] \arrow[rr, dotted] & & \lambda P \arrow[uu, dotted] \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}
$$

$\lambda 2$ - termy zależne od typów

$$
\begin{array}{llcl}
\text{Typy:} & \mathbb{T} & := & \mathbb{V} \\
 & & | & \mathbb{T} \to \mathbb{T} \\
 & & | & \forall \mathbb{V}.\, \mathbb{T} \\
 & & & \\
\text{Pseudotermy:} & \Lambda_{\mathbb{T}} & := & V \\
 & & | & \Lambda_{\mathbb{T}} \Lambda_{\mathbb{T}} \\
 & & | & \lambda V : \mathbb{T}.\, \Lambda_{\mathbb{T}} \\
 & & | & \Lambda_{\mathbb{T}} \mathbb{T} \\
 & & | & \Lambda \mathbb{V}.\, \Lambda_{\mathbb{T}}
\end{array}
$$

$\lambda 2$ – termy zależne od typów

Konteksty: $\Gamma = \{x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n\}$

Redukcja:
$$(\lambda a : A.\, M)N \longrightarrow_\beta M[a := N]$$
$$(\Lambda \alpha.\, M)A \longrightarrow_\beta M[\alpha := A]$$

Typizacja: $\Gamma \vdash M : A$

$$(\mathrm{Var}) \qquad \frac{}{\Gamma, x : A \vdash x : A}$$

$$(\mathrm{App}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A \to B \qquad \Gamma \vdash N : A}{\Gamma \vdash (MN) : B}$$

$$(\mathrm{Abs}) \qquad \frac{\Gamma, a : A \vdash M : B}{\Gamma \vdash (\lambda a : A.\, M) : A \to B}$$

$$(\forall \mathrm{E}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : (\forall \alpha.\, A)}{\Gamma \vdash MB : A[\alpha := B]} \qquad B \in \mathbb{T}$$

$$(\forall \mathrm{I}) \qquad \frac{\Gamma \vdash M : A}{\Gamma \vdash (\Lambda \alpha.\, M) : (\forall \alpha.\, A)} \qquad \alpha \notin \mathrm{FV}(\Gamma)$$

$\lambda\underline{\omega}$ - typy zależne od typów

$$
\begin{tikzcd}
 & \lambda\omega \arrow[rr, dotted] & & \lambda P\omega \\
\lambda 2 \arrow[ur, dotted] \arrow[rr, dotted] & & \lambda P2 \arrow[ur, dotted] & \\
 & \lambda\underline{\omega} \arrow[uu, dotted] \arrow[rr, dotted] & & \lambda P\underline{\omega} \arrow[uu, dotted] \\
\lambda{\to} \arrow[uu, dotted] \arrow[ur] \arrow[rr, dotted] & & \lambda P \arrow[uu, dotted] \arrow[ur, dotted] &
\end{tikzcd}
$$

$\lambda\underline{\omega}$ – typy zależne od typów

$$\text{Pseudowyrażenia:} \quad \mathcal{T} \quad := \quad V \mid C \mid \mathcal{T}\mathcal{T} \mid \lambda V : \mathcal{T} . \mathcal{T} \mid \mathcal{T} \to \mathcal{T}$$

gdzie:
V - przeliczalnie nieskończony zbiór zmiennych,
C - zbiór stałych, w tym dwie szczególne nazywane *sortami*: $*$, $\Box$

$\lambda\underline{\omega}$ – typy zależne od typów

Sądami nazywamy wyrażenia $\lambda\underline{\omega}$ postaci $M : A$, gdzie $M, A \in \mathcal{T}$

Kontekstem nazywamy skończony, liniowo uporzadkowany zbiór sądów.

$<>$ oznacza kontekst pusty. Jeżeli $\Gamma =< x_1 : A_n, \ldots, x_n : A_n >$, to wówczas $\Gamma, y : B =< x_1 : A_1, \ldots, x_n : A_n, y : B >$.

Typizacja: $\Gamma \vdash M : A$

(Ax) $$\frac{}{\langle\rangle \vdash * : \square}$$

(Start) $$\frac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \qquad x \notin \Gamma$$

(Weak) $$\frac{\Gamma, A : B \vdash C : s}{\Gamma, x : C \vdash A : B} \qquad x \notin \Gamma$$

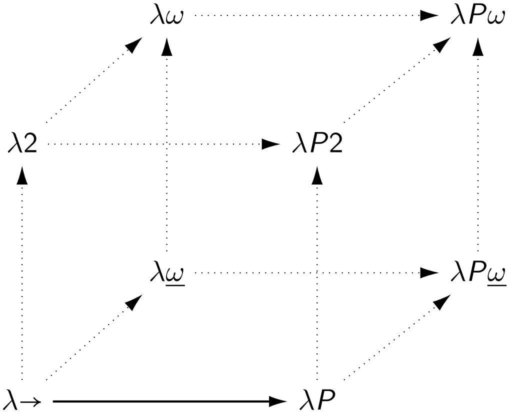
(Type/Kind) $$\frac{\Gamma \vdash A : s \qquad \Gamma \vdash B : s}{\Gamma \vdash (A \to B) : s}$$

(App) $$\frac{\Gamma \vdash F : A \to B \qquad \Gamma \vdash (A \to B) : s}{\Gamma \vdash Fa : B}$$

(Abs) $$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \qquad \Gamma \vdash (A \to B) : s}{\Gamma \vdash (\lambda x : A.\, b) : (A \to B)}$$

(Conv) $$\frac{\Gamma \vdash A : B \qquad \Gamma \vdash B' : s \qquad B =_\beta B'}{\Gamma \vdash A : B'}$$

λP - termy zależne od typów



λP – typy zależne od termów

$$\text{Pseudowyrażenia:} \quad \begin{array}{rcl} \mathcal{T} & := & V \\ & | & C \\ & | & \mathcal{T}\mathcal{T} \\ & | & \lambda V : \mathcal{T} . \mathcal{T} \\ & | & \Pi V : \mathcal{T} . \mathcal{T} \end{array}$$

gdzie:
V - przeliczalnie nieskończony zbiór zmiennych,
C - zbiór stałych, w tym dwie szczególne nazywane *sortami*: $*$, $\Box$

λP – typy zależne od typów

Typizacja: $\Gamma \vdash M : A$

(Ax) $$\frac{}{<> \vdash * : \Box}$$

(Start) $$\frac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \qquad x \notin \Gamma$$

(Weak) $$\frac{\Gamma, A : B \vdash C : s}{\Gamma, x : C \vdash A : B} \qquad x \notin \Gamma$$

(Type/Kind) $$\frac{\Gamma \vdash A : * \qquad \Gamma, x : A \vdash B : s}{\Gamma \vdash (\Pi x : A.\, B) : s}$$

(App) $$\frac{\Gamma \vdash F : (\Pi x : A.\, B) \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash Fa : B[x := a]}$$

(Abs) $$\frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \qquad \Gamma \vdash (\Pi x : A.\, B) : s}{\Gamma \vdash (\lambda x : A.\, b) : (\Pi x : A.\, B)}$$

(Conv) $$\frac{\Gamma \vdash A : B \qquad \Gamma \vdash B' : s \qquad B =_\beta B'}{\Gamma \vdash A : B'}$$

Kostka λ

$$
\begin{tikzcd}
 & \lambda\omega \arrow[rr] & & \lambda P\omega \\
\lambda 2 \arrow[ur] \arrow[rr] & & \lambda P2 \arrow[ur] & \\
 & \lambda\underline{\omega} \arrow[uu] \arrow[rr] & & \lambda P\underline{\omega} \arrow[uu] \\
\lambda{\to} \arrow[uu] \arrow[ur] \arrow[rr] & & \lambda P \arrow[uu] \arrow[ur] &
\end{tikzcd}
$$

Kostka λ

$$
\text{Pseudowyrażenia:} \quad \mathcal{T} \quad ::= \quad V \;|\; C \;|\; \mathcal{T}\mathcal{T} \;|\; \lambda V : \mathcal{T}.\mathcal{T} \;|\; \Pi V : \mathcal{T}.\mathcal{T}
$$

gdzie:
V - przeliczalnie nieskończony zbiór zmiennych,
C - zbiór stałych, w tym dwie szczególne nazywane *sortami*: $*$, $\Box$

Redukcja: $(\lambda x : A.\, B)\, C \longrightarrow_\beta B[x := C]$

W sądzie $A : B$, gdzie $A, B \in \mathcal{T}$, A nazywamy *podmiotem*, zaś B – *orzeczeniem*.

Deklaracjami nazywamy sekwenty sądy postaci $x : A$, gdzie $A \in \mathcal{T}$ i x jest zmienną.

Psedokontekstem nazywamy skończony, liniowo uporządkowany zbiór deklaracji dla wzajemnie różnych podmiotów.

Typizacja: $\Gamma \vdash M : A$
Schematy reguł dzielimy na dwie grupy:

a) Reguły ogólne

$$\text{(Ax)} \qquad \frac{}{<>\vdash * : \Box}$$

$$\text{(Start)} \qquad \frac{\Gamma \vdash A : s}{\Gamma, x : A \vdash x : A} \qquad x \notin \Gamma$$

$$\text{(Weak)} \qquad \frac{\Gamma, A : B \vdash C : s}{\Gamma, x : C \vdash A : B} \qquad x \notin \Gamma$$

$$\text{(App)} \qquad \frac{\Gamma \vdash F : (\Pi x : A.\, B) \qquad \Gamma \vdash a : A}{\Gamma \vdash Fa : B[x := a]}$$

$$\text{(Abs)} \qquad \frac{\Gamma, x : A \vdash b : B \qquad \Gamma \vdash (\Pi x : A.\, B) : s}{\Gamma \vdash (\lambda x : A.\, b) : (\Pi x : A.\, B)}$$

$$\text{(Conv)} \qquad \frac{\Gamma \vdash A : B \qquad \Gamma \vdash B' : s \qquad B =_\beta B'}{\Gamma \vdash A : B'}$$

b) Reguły wyróżniające

$$((s_1, s_2)\text{-reguła }) \qquad \frac{\Gamma \vdash A : s_1 \qquad \Gamma, x : A \vdash B : s_2}{\Gamma \vdash (\Pi x : A.\, B) : s_2}$$

0	$\lambda_{\to}$	$(*, *)$			
1	$\lambda 2$	$(*, *)$	$(\square, *)$		
2	λP	$(*, *)$		$(*, \square)$	
1+2	$\lambda P2$	$(*, *)$	$(\square, *)$	$(*, \square)$	
3	$\lambda \underline{\omega}$	$(*, *)$			$(\square, \square)$
1+3	$\lambda \omega$	$(*, *)$	$(\square, *)$		$(\square, \square)$
2+3	$\lambda P \underline{\omega}$	$(*, *)$		$(*, \square)$	$(\square, \square)$
1+2+3	λC	$(*, *)$	$(\square, *)$	$(*, \square)$	$(\square, \square)$