Rozdział 1

Płyn idealny

Naszym celem jest uzasadnienie podstawowych równań ruchu cieczy idealnej.

1.1 Pojęcia wstępne

Niech (M, g) będzie zwartą, orientowalną n-rozmaitością Riemannowską z brzegiem i $\mu \in \Omega^n(M)$ będzie formą objętości na M. Przypomnijmy, że metryka Riemannowska $g : M \to \Omega^2(M)$ to gładkie cięcie wiązki tensorowej $\mathcal{T}_2^0$ takie, że $g_p \in T_m^* M \otimes T_p^* M$ dla $p \in M$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni stycznej w $p \in M$.

Niech X będzie polem wektorowym klasy C^r na M i niech $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ będzie mapą wokół $p \in M$. Wówczas $X_p = \sum_{j=1}^n a_j(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$ jest wektorem stycznym w p, gdzie $a_j \in C^r(M; \mathbb{R})$. Funkcję wektorową $\mathbf{X} = \varphi_* \circ X(\varphi^{-1}) : \mathbb{R}^n \supset \varphi(U) \ni p \mapsto [a_j(p)]_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ nazywamy **lokalną reprezentacją** X.

$$
\begin{tikzcd}
M \supset U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "X"'] & \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \arrow[d, "\mathbf{X}"] \\
TU \arrow[r, "\varphi_*"] & T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}
$$

Chwilą $t \in \mathbb{R}$ będziemy nazywać zmienną czasową. **Polem wektorowym zależnym od czasu** klasy C^r na M nazywamy odwzorowanie $X : \mathbb{R} \times M \to TM$ takie, że $X_t(m) := X(t, m) \in T_m M$ jest wektorem stycznym w m w chwili t dla wszytkich par $(t, m) \in \mathbb{R} \times M$. Przez $X_t \in \mathfrak{X}^r(M)$ oznaczamy pole wektorowe na M w chwili t, gdzie $\mathfrak{X}^r(M)$ to zbiór wszystkich pól wektorowych klasy C^r na M.

Trajektorią (także: linią przepływu, krzywą całkową) pola wektorowego X w punkcie $m \in M$ nazywamy krzywą $c : \mathbb{R} \supset I \to M$ o początku w m, taką, że $c'(t) = X_{c(t)}$ dla każdego $t \in I$. Jeśli $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ jest mapą wokół $c(0) = p$ i $[X^1, X^2, \ldots, X^n]^T$ jest lokalną reprezentacją X, funkcja wektorowa $\mathbf{c} = \varphi \circ c, I \ni t \mapsto \left[c^i(t)\right]_{i=1}^m \in \mathbb{R}^n$ jest lokalną reprezentacją krzywej c oraz spełniony jest układ równań różniczkowch pierwszego rzędu nazywany układem charakterystyk

$$
\begin{aligned}
\frac{dc^1}{dt}(t) &= X^1\left(c^1(t), c^2(t), \ldots, c^n(t)\right), \\
\frac{dc^2}{dt}(t) &= X^2\left(c^1(t), c^2(t), \ldots, c^n(t)\right), \\
&\vdots \\
\frac{dc^n}{dt}(t) &= X^n\left(c^1(t), c^2(t), \ldots, c^n(t)\right).
\end{aligned}
$$

Przez $\mathcal{D}_X$ oznaczmy wszystkie pary $(m,t) \in M \times \mathbb{R}$ dla których istnieje trajektoria $c : I \to M$ pola wektorowego X w punkcie m i zmienna czasowa t zawiera się w pewnym przedziale I. Mówimy, że pole wektorowe jest **zupełne**, jeśli $\mathcal{D}_X = M \times \mathbb{R}$. Oznacza to, że dla każdego punktu na rozmaitości znajdziemy trajektorię cząsteczki próbnej poruszającej się dowolnie długo. Zbiór wszystkich punktów rozmaitości na których pole wektorowe nie znika, $\operatorname{Supp} X = \{m \in M \mid X_m \neq 0\}$, nazywamy **nośnikiem** pola wektorowego X.

Zachodzi następujące twierdzenie

Twierdzenie 1.1. *Niech X będzie polem wektorowym na M klasy C^r, $r \geq 1$. Wówczas*

i) $\mathcal{D}_X \supset M \times \{0\}$,

ii) $\mathcal{D}_X$ *jest otwarty w* $M \times \mathbb{R}$,

iii) istnieje jednoznacznie wyznaczone odwzorowanie $F_X : \mathcal{D}_X \to M$ takie, że krzywa $t \mapsto F_X(m,t)$ jest trajektorią w m dla wszystkich $m \in M$,

iv) dla $(m,t) \in \mathcal{D}_X$, $F_X(m,t)$, $s) \in \mathcal{D}_X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(m, t+s) \in \mathcal{D}_X$.

Określone w Twierdzeniu 1.1 odwzorowanie F_X nazywamy **całką** X, zaś trajektorię $t \to F_X(m,t)$ **maksymalną krzywą całkową** X w m. Jeśli pole wektorowe X jest zupełne, F_X nazywamy **przepływem** pola wektorowego X. Każdy przepływ F określa 1-parametrową grupę dyfeomorfizmów $\{F_t : M \to M \mid t \in \mathbb{R}\}$ z operacją składania $F_{t_1} \circ F_{t_2} = F_{t_1+t_2}$ dla $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, gdzie F_0 jest elementem neutralnym i $F_t \circ F_{-t} = F_0$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. Jeśli X jest polem wektorowym zależnym od czasu, wówczas analogicznie określamy **przepływ zależny od czasu** $F_{t,s}$ pola X dla którego odwzorowanie $t \mapsto F_{t,s}(m)$ jest trajektorią X o początku w punkcie m i w chwili $t = s$, czyli

$$\frac{d}{dt} F_{t,s}(m) = X\left(t, F_{t,s}(m)\right), \quad F_{s,s}(m) = m. \tag{1.1}$$

Wówczas działanie składania staje się przechodnie, $F_{t,s} \circ F_{s,r} = F_{s,r}$, a $F_{t,t}$ jest elementem neutralnym.

Twierdzenie 1.2. *Każde pole wektorowe klasy C^r na zwartej rozmaitości M jest zupełne.*

Bibliografia