

Rozdział 1

Płyn idealny

Naszym celem jest uzasadnienie podstawowych równań ruchu cieczy idealnej.

Niech (M, g) będzie zwartą, orientowalną n -rozmaitością Riemannowską z brzegiem i $\mu \in \Omega^n(M)$ będzie formą objętości na M . Przypomnijmy, że metryka Riemannowska $g : M \rightarrow \Omega^2(M)$ to gładkie cięcie wiązki tensorowej takie, że $g_p \in T_m^*M \otimes T_p^*M$ dla $p \in M$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni stycznej w $p \in M$.

Niech X będzie polem wektorowym klasy C^r na M i niech $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \dots, x^n)$ będzie mapą wokół $p \in M$. Wówczas $X_p = \sum_{j=1}^n a_j(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ jest wektorem stycznym w p , gdzie $a_j \in C^r(M; \mathbb{R})$. Funkcję wektorową $\mathbf{X} = \varphi_* \circ X(\varphi^{-1}) : \mathbb{R}^n \supset \varphi(U) \ni p \mapsto [a_j(p)]_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ nazywamy **lokalną reprezentacją** X .

$$\begin{array}{ccc} M \supset U & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \\ X \downarrow & & \downarrow \mathbf{X} \\ TM & \xrightarrow{\varphi_*} & T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \end{array}$$

Przez chwilę $t \in \mathbb{R}$ będziemy nazywać zmienną czasową. **Polem wektorowym zależnym od czasu** klasy C^r na M nazywamy odwzorowanie $X : \mathbb{R} \times M \rightarrow TM$ takie, że $X_t(m) := X(t, m) \in T_mM$ jest wektorem stycznym w m w chwili t dla wszystkich par $(t, m) \in \mathbb{R} \times M$. Przez $X_t \in \mathfrak{X}^r(M)$ oznaczamy pole wektorowe na M w chwili t , gdzie $\mathfrak{X}^r(M)$ to zbiór wszystkich pól wektorowych klasy C^r na M .

Przepływem (także operatorem ewolucji) na M nazywamy 1-parametrową grupę dyfeomorfizmów $\varphi_t : M \rightarrow M$ z operacją składania $\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1+t_2}$ dla $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, gdzie φ_0 jest elementem neutralnym i $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_0$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$.

Trajektorią (także: linią przepływu, krzywą całkową) pola wektorowego X w punkcie $m \in M$ nazywamy krzywą $c : \mathbb{R} \supset I \rightarrow M$ o początku w m , taką, że $c'(t) = X(c(t))$ dla każdego $t \in I$. Jeśli $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \dots, x^n)$ jest mapą wokół $c(0) = p$ i $[X^1, X^2, \dots, X^n]^T$ jest lokalną reprezentacją X , funkcja wektorowa $\mathbf{c} = \varphi \circ c, I \ni t \mapsto [c^i(t)]_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ jest lokalną reprezentacją krzywej c oraz spełniony jest układ równań różniczkowych pierwszego rzędu nazywany układem charakterystyk

$$\begin{aligned} \frac{dc^1}{dt}(t) &= X^1(c^1(t), c^2(t), \dots, c^n(t)), \\ \frac{dc^2}{dt}(t) &= X^2(c^1(t), c^2(t), \dots, c^n(t)), \\ &\vdots \\ \frac{dc^n}{dt}(t) &= X^n(c^1(t), c^2(t), \dots, c^n(t)). \end{aligned}$$

Pojęcia pola wektorowego, przepływu i trajektorii wiąże następujące twierdzenie

Twierdzenie 1.1 (O lokalnym istnieniu gładkiego i jednoznacznego przepływu). *Niech U będzie otwartym podzbiorem \mathbb{R}^n i niech $\mathbf{X} : U \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$ będzie lokalną reprezentacją pola wektorowego zależnego od czasu klasy C^r , $r \geq 1$. Wówczas*

- i) Dla dowolnego $x_0 \in U$ i chwili $t \in \mathbb{R}$ istnieje trajektoria w x_0 ,*
- ii) Jeśli w punkcie i w tej samej chwili istnieją dwie różne trajektorie, to są identyczne na przecięciu swoich dziedzin,*
- iii) Istnieje otoczenie U_0 punktu $p \in U$ oraz przepływ $F : U_0 \times]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}^n$ klasy C^r dla pewnego $a > 0$ takie, że krzywa $c_u :]-a, a[\rightarrow \mathbb{R}^n$ $c_u(t) = F(u, t)$ jest trajektorią w $u \in \mathbb{R}^n$.*

Wówczas $u(x, t)$ oznacza prędkość cząsteczki próbnej przechodzącej przez punkt $x \in M$.

Bibliografia