Rozdział 1

Płyn idealny

W tym rozdziale naszym celem jest opracowanie modelu fizycznego cieczy idealnej i uzasadnienie jej podstawowych równań ruchu.

1.1 Pojęcia wstępne

Zaczniemy od przypomnienia podstawowych pojęć w teorii rozmaitości gładkich. Niech M będzie rzeczywistą n-rozmaitością różniczkowalną klasy C^∞, p będzie dowolnym punktem rozmaitości M i niech $U, V \subset M$ będą otoczeniami punktu p. Zmierzamy do określenia pojęcia *przestrzeni stycznej* za pomocą klas funkcji określonych na M, które są lokalnie identyczne. Powiemy, że dwie funkcje rzeczywiste $f : U \to \mathbb{R}$, $g : V \to \mathbb{R}$ są *równoważne*, jeśli w pewnym otoczeniu $W \subset U \cap V$ punktu p są one sobie równe. Pod pojęciem *kiełka* funkcji rzeczywistej klasy C^∞ w punkcie $p \in M$ będziemy rozumieli każdą klasę równoważności tak zadanej relacji. Zbiór wszystkich kiełków w punkcie p, $\mathrm{C}^\infty_p(M)$, jest wówczas $\mathbb{R}$-algebrą. Zbiór wszystkich funkcji klasy C^∞ określonych na M będziemy oznaczali $\mathcal{F}(M)$. Każde odwzorowanie liniowe $D : C^\infty_p(M) \to \mathbb{R}$ spełniające warunek:

$$D(fg) = (Df)g(p) + f(Dg)(p) \tag{1.1}$$

nazywamy *różniczkowaniem* w punkcie p. Przestrzeń liniową wszystkich różniczkowań w punkcie p nazywamy **przestrzenią styczną** w p i oznaczamy przez T_pM.

Niech $\pi : E \to M$ będzie dowolnym odwzorowaniem między rozmaitościami E i M. Przeciwobraz $E_p = \pi^{-1}(p)$ punktu p nazywamy **włóknem** w p. Niech $\pi' : E' \to M$ będzie odwzorowaniem rozmaitości E' i M. Powiemy, że odwzorowanie $\phi : E \to E'$ *zachowuje włókna*, jeśli $\phi(E_p) \subset E'_p$ dla każdego $p \in M$. Jeśli π jest surjekcją klasy C^∞ oraz

i) każde włókno $\pi^{-1}(p)$ ma strukturę r-wymiarowej przestrzeni wektorowej,

ii) dla każdego $p \in M$ istnieje otoczenie $U \in M$ punktu p i zachowujący włókna dyfeomorfizm $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ taki, że dla każdego $q \in U$ zawężenie

$$\phi|_{\pi^{-1}(q)} : \pi^{-1}(q) \to \{q\} \times \mathbb{R}^r$$

jest izomomorfizmem przestrzeni wektorowych,

wówczas π nazywamy odwzorowaniem *lokalnie trywialnym rzędu* r. Tak określony zbiór U nazywamy zbiorem *trywializującym* E, zaś ϕ nazywamy *trywializacją* E nad U.

Korzystając z powyższych rozstrzygnięć definiujemy **wiązką wektorową** klasy C^∞ rzędu r jako trójkę (E, M, π), gdzie $\pi : E \to M$ jest lokalnie trywialną gładką surjekcją rzędu r. Nadużywając notacji często zamiast odnosić się bezpośrednio do tak zdefiniowanej struktury, będziemy mówili o *wiązce wektorowej* E albo *wiązce wektorowej* $\pi : E \to M$. W tę myśl **cięciem** wiązki $\pi : E \to M$ nazywamy odwzorowanie $s : M \to E$ takie, że $\pi \circ s = \mathrm{id}_M$.

Przyporządkowuje ono każdemu punktowi $p \in M$ włókno E_p. Jeśli $E \to M$ jest wiązką wektorową klasy C^∞, wówczas przestrzeń wektorową wszystkich cięć E klasy C^∞ oznaczamy $\Gamma(M, E)$ lub krótko $\Gamma(E)$, o ile nie prowadzi to do niejednoznaczności.

Okazuje się, że zbiór wszystkich cięć klasy C^∞ wiązki E, $\Gamma(E)$, ma interesujące własności algebraiczne. Jeśli U jest otwartym pozdbiorem rozmaitości E, wówczas analogicznie określmy $\Gamma(U)$. Na tak zadanym zbiorze można zadać strukturę modułu nad pierścieniem $C^\infty(U)$ funkcji klasy C^∞ zadanych na U. $\Gamma(U)$ jest również rzeczywistą przestrzeńą wektorowa w której możemy wybrać uporządkowaną bazę $(s_1, s_2, \ldots, s_r)$. Jest to tak zwany *reper* wiązki wektorowej $\pi : E \to M$ nad U.

Szczególnie interesującym nas obiektem tej kategorii jest **wiązka styczna** (TM, M, π), gdzie

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$$

oraz $\pi : TM \ni v \mapsto p \in M$ jest naturalną projekcją. Jeśli M jest n-rozmaitością klasy C^k, to TM okazuje się $2n$-rozmaitością klasy C^{k-1} ([1], s. 130). Korzystając z powyższego wygodnego aparatu matematycznego możemy teraz określić **pole wektorowe** na rozmaitości M po prostu jako cięcie wiązki stycznej TM. Zbiór wszystkich pól wektorowych na M, $\mathfrak{X}(M)$, stanowi szczególny rodzaj $\mathcal{F}$-modułu, mianowicie *moduł Liego*. Pola wektorowe można w nim rozumieć jako różniczkowania w algebrze $\mathcal{F}$ oraz określony jest w nim operator *komutacji* pól wektorowych, nazywany również *nawiasem Liego*:

$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf).$$

Okazuje się ([1], tw. 14.10), że komutacja gładkich pól wektorowych nie wyprowadza poza $\mathfrak{X}(M)$ i lokalnie spełnia warunek (1.1), czyli jest różniczkowaniem.

Niech $\pi_N : TN \to N$ i $\pi_M : TM \to M$ będą wiązkami stycznymi. Odwzorowanie $F : N \to M$ klasy C^∞ między rozmaitościami N i M indukuje *wiązkę odwzorowań* $F_* : TN \to TM$ taką, że dla każdego $p \in N$:

$$F_{*,p} : T_p N \to T_{F(p)} M,$$

jest odwzorowaniem liniowym między przestrzeniami stycznymi, które nazywamy **różniczką** F w $p \in N$ oraz poniższy diagram jest przemienny.

$$\begin{tikzcd}
TN \arrow[r, "F_*"] \arrow[d, "\pi_N"'] & TM \arrow[d, "\pi_M"] \\
N \arrow[r, "F"] & M
\end{tikzcd}$$

Jeśli $X_p \in T_p N$ jest wektorem stycznym do M w p, wówczas dla dowolnego kiełka $f \in C^\infty_{F(p)}(M)$ funkcji w $F(p)$ określamy

$$(F_{*,p}(X_p))f = X_p(f \circ F) \in \mathbb{R}.$$

gdzie $F_{*,p}(X_p)$ jest wektorem stycznym do N w $F(p)$. Jeśli F jest dyfeomorfizmem, zaś X – polem wektorowym na M, odwzorowanie $F_* X := F_* \circ X \circ F^{-1}$ nazywamy **popchnięciem** pola wektorowego X przez F. Dualnie, jeśli $f \in C^\infty_p(M)$ określamy **cofnięcie** $F^* f := f \circ F$ funkcji f przez F.

Niech V będzie przestrzenią wektorową. Rozważając funkcjonały wieloliniowe na produkcie kilku kopii V i jej dualnych otrzymujemy strukturę, którą nazywamy *przestrzenią tensorów o walencji* $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ nad przestrzenią V,

$$\mathcal{T}^p_q(V) := \mathrm{L}^{p+q}(\underbrace{V^*, \ldots, V^*}_{p \text{ razy}}, \underbrace{V, \ldots, V}_{q \text{ razy}}; \mathbb{R}), \quad p + q \geq 1.$$

Taką definicję określa się niekiedy *modelem wieloliniowym tensora*. Elementy $\mathcal{T}^p_q(V)$ nazywamy *tensorami q-krotnie kowariantnymi i p-krotnie kontrawariantnymi* albo prościej: *tensorami o walencji* $\left[\begin{smallmatrix}p\\q\end{smallmatrix}\right]$. Dla tensorów $t_1 \in \mathcal{T}^{r_1}_{s_1}(V)$ i $t_2 \in \mathcal{T}^{r_2}_{s_2}(V)$ określamy **iloczyn tensorowy** $t_1 \otimes t_2 \in \mathcal{T}^{r_1+r_2}_{s_1+s_2}(V)$ przepisem

$$\begin{aligned}(t_1 \otimes t_2)(\beta^1, \dots, \beta^{r_1}, \gamma^1, \dots, \gamma^{r_2}, f_1, \dots, f_{s_1}, g_1, \dots, g_{s_2}) = \\ t_1(\beta^1, \dots, \beta^{r_1}, f_1, \dots, f_{s_1})\, t_2(\gamma^1, \dots, \gamma^{r_2}, g_1, \dots, g_{s_2}),\end{aligned}$$

gdzie $\beta^j, \gamma^j \in V^*$, $f_j, g_j \in V$. Okazuje się ([2], tw. 6.1.2), że jeśli $\{e_1, \dots, e_n\}$ jest bazą przestrzeni V i $\{e^1, \dots, e^n\}$ jest bazą przestrzeni dualnej, to

$$\left\{e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_q} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_p} \mid i_1, \dots, i_q, j_1, \dots, j_p = 1, \dots, n\right\}$$

jest bazą $\mathcal{T}^p_q(V)$, a zatem $\dim \mathcal{T}^p_q(V) = (\dim V)^{p+q}$.

Niech $\pi : TM \to M$ będzie wiązką styczną i niech $T_mM = \pi^{-1}(m)$ oznacza włókno nad punktem $m \in M$. Określmy

$$\mathcal{T}^r_s(M) = \bigcup_{m \in M} \mathcal{T}^s_r(T_mM),$$

Oraz niech odwzorowanie $\pi^r_s : \mathcal{T}^r_s(M) \to M$, $\pi^r_s(e) = m$ dla $e \in \mathcal{T}^r_s(E_m)$ będzie naturalną projekcją elementu z włókna na rozmaitość. Naśladując konstrukcję wiązki stycznej, trójkę $(\mathcal{T}^r_s(M), M, \pi^r_s(e))$ nazywamy *wiązką tensorową* o walencji $\left[\begin{smallmatrix}r\\s\end{smallmatrix}\right]$ na M. Analogicznie, cięcie wiązki tensorowej określamy **polem tensorowym**.

Okazuje się ([3], §19, tw. 2), że każda permutacja $\pi \in S_n$ jednoznacznie wyznacza *operator permutacji wskaźników* $P^\pi : \mathcal{T}^p_q(V) \to \mathcal{T}^p_q(V)$

$$(P^\pi t)(\psi^1, \dots, \psi^p, y_1, \dots, y_q) = t(\psi^{\pi(1)}, \dots, \psi^{\pi(p)}, y_1, \dots, y_q),$$

dla $t \in \mathcal{T}^p_q(V)$. Niech $\pi \in S_p$ będzie dowolną permutacją zbioru p-elementowego. Powiemy, że $t \in \mathcal{T}^p_q(V)$ jest **tensorem całkowicie symetrycznym (antysymetrycznym) we wskaźnikach kontrawariantnych**, jeśli

$$P^\pi t = t \quad (\text{odpowiednio: } P^\pi t = \operatorname{sgn}\pi\, t).$$

Przy powyższych oznaczeniach na przestrzeni $\mathcal{T}^p_q(V)$ wprowadza się operatory rzutowe

$$\mathcal{A} = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \operatorname{sgn} \pi\, P^\pi, \quad \mathcal{S} = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} P^\pi,$$

które nazywamy odpowiednio *operatorem antysymetryzacji* i symetryzacji. Można wykazać ([3], §20, tw. 4), że tensor t jest antysymetryczny (symetryczny) wtedy i tylko, gdy $\mathcal{A}t = t$ ($\mathcal{S}t = t$). Wprowadźmy oznaczenie[1] dla przestrzeni tensorów całkowicie antysymetrycznych

$$\textstyle\bigwedge^p(V) := \mathcal{A}\mathcal{T}^p_0(V) \subseteq \mathcal{T}^p_0(V), \quad \bigwedge^p(V^*) := \mathcal{A}\mathcal{T}^0_p(V) \subseteq \mathcal{T}^0_p(V), \quad p \geq 1.$$

Ich elementy nazywamy odpowiednio **p-wektorami** i **p-formami**. Dla wygody przyjmujemy ponadto, że

$$\textstyle\bigwedge^0(V) := \bigwedge^0(V^*) = \mathbb{R}$$

Przez $\Sigma^k(V^*)$ oznaczamy podprzestrzeń liniową k-kowariantnych tensorów symetrycznych na V na którą operator symetryzacji $\mathcal{S}$ rzutuje przestrzeń $\mathcal{S}\mathcal{T}^p_0(V)$. Jeśli $\alpha \in \Sigma^k(V^*)$, $\beta \in \Sigma^l(V^*)$ są symetrycznymi tensorami na V, wówczas $\alpha \otimes \beta$ na ogół nie jest tensorem symetrycznym. Operator symetryzacji indukuje nowe działanie

$$\alpha\beta = \mathcal{S}(\alpha \otimes \beta),$$

[1] Jest to nawiązanie do algebraicznej konstrukcji przeprowadzonej za pomocą potęgowania zewnętrznego; okazuje się ona izomorficzna z przyjętymi przestrzeniami; szczegółów można szukać w [4].

które jest przemienne, dwuliniowe i nie wyprowadza poza $\Sigma^{k+l}(V^*)$([5], tw. 12.15).

Iloczynem zewnętrznych p-wektorów (odpowiednio: **p-form**) $t_i \in \bigwedge^{p_i}(V)$, $s^i \in \bigwedge^{p_i}(V^*)$, $i = 1, \ldots, k$, nazywamy odpowiednio tensory

$$t_1 \wedge \cdots \wedge t_k = \mathcal{A}(t_1 \otimes \cdots \otimes t_k), \quad s^1 \wedge \cdots \wedge s^k = \mathcal{A}(s^1 \otimes \cdots \otimes s^k).$$

Jeśli V jest przestrzenią n-wymiarową, wówczas ([3], §20, tw. 7)

$$\dim \bigwedge\nolimits^p(V) = \dim \bigwedge\nolimits^p(V^*) = \binom{n}{k}.$$

W szczególności przestrzenie $\bigwedge^n(V)$ i $\bigwedge^n(V^*)$ są jednowymiarowe.

Będziemy teraz zmierzać do określenia form różniczkowych na rozmaitościach różniczkowalnych. Niech p będzie punktem z rozmaitości M. **Przestrzenią kostyczną** w p do M nazywamy przestrzeń dualną do przestrzeni stycznej T_pM

$$T_p^*M := (T_pM)^* = \mathrm{L}(T_pM, \mathbb{R}),$$

Jej elementy nazywamy **kowektorami**. Podobnie jak w przypadku wiązki stycznej, określając

$$T^*M = \bigcup_{p \in M} T_p^*M.$$

możemy zadać strukturę wiązki wektorowej (T^*M, M, ϕ) rzędu $2n$ ([1], s. 192), którą nazywamy **wiązką kostyczną** na M. Rozważmy zbiór

$$\bigwedge\nolimits^k(T^*M) := \bigcup_{p \in M} \bigwedge\nolimits^k(T_p^*M) = \bigcup_{p \in M} \mathcal{A}\mathcal{T}_k^0(T_pM)$$

i zadajmy odwzorowanie $\pi : \bigwedge^k(T^*M) \ni \alpha \mapsto p \in M$ dla $\alpha \in \bigwedge^k(T_p^*M)$. Okazuje się ([1], s. 203), że π jest wiązką wektorową rzędu $\binom{n}{k}$, której cięcia są antysymetrycznymi k-kowariantnymi (i 0-kontrawariantnymi) polami tensorowymi na M. Każde k-kowariantne pole tensorowe na M, które jest antysymetryczne, nazywamy **k-formą różniczkową** na M. Przestrzeń wektorową wszystkich C^∞ k-form na M oznaczamy $\Omega^k(M)$ oraz

$$\Omega^k(M) = \Gamma\left(M, \bigwedge\nolimits^k(T^*M)\right).$$

Zbiór $\operatorname{supp}\omega = \operatorname{cl}\{p \in M \mid \omega_p \neq 0\}$ nazywamy nośnikiem k-formy $\omega \in \Omega^k(M)$, zaś przez $\Omega_c^k(M)$ oznaczać będziemy przestrzeń wektorową wszystkich k-form klasy C^∞ ze zwartym nośnikiem na M.

Analogicznie jak w przypadku przestrzeni stycznych możemy wprowadzić operacje *cofnięcia k-formy.* Dyfeomorfizm rozmaitości $F : M \to N$ indukuje gładką wiązkę odwzorowań $F^* : \Omega^k(N) \to \Omega^k(M)$ taką, że dla k-formy $\omega \in \Omega^k(N)$ jego *cofnięcie* określamy punktowo przepisem $(F^*\omega)_p = F^*(\omega_{F(p)})$ dla wszystkich $p \in N$, czyli

$$(F^*\omega)_p(v_1, \ldots, v_k) = \omega_{F(p)}(F_{*,p}v_1, \ldots, F_{*,p}v_k), \quad v_i \in T_pNDyfeomorfizm.$$

Okazuje się ([2], tw. 7.4.1), że na n-rozmaitościach można jednoznacznie określić rodzinę odwzorowań $\mathbf{d}^k(U) : \Omega^k(U) \to \Omega^{k+1}(U)$, gdzie $k = 0, 1, 2, \ldots, n$ i U jest otwartym podzbiorem M. Taką rodzinę oznaczamy krótko $\mathbf{d}$ i nazywamy *pochodną zewnętrzną* na M. Wymagamy, żeby miała ona następujące własności:

i) $\mathbf{d}$ jest $\mathbb{R}$-liniowe oraz dla każdych $\alpha \in \Omega^k(U)$ i $\beta \in \Omega^l(U)$

$$\mathbf{d}(\alpha \wedge \beta) = \mathbf{d}\alpha \wedge \beta + -1^k \alpha \wedge \mathbf{d}\beta.$$

Odwzorowania spełniające ten warunek nazywamy $\wedge$-*antypochodnymi.*

ii) Jeśli $f \in \mathcal{F}(U)$, wówczas $(\mathbf{d}f)(X) = Xf$ dla dowolnego gładkiego pola wektorowego X na U.

iii) $\mathbf{d^2} = \mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0$.

iv) $\mathbf{d}$ jest *operatorem lokalnym*, czyli dla otwartych podzbiorów $U \subset V \subset M$ i $\alpha \in \Omega^k(V)$ zachodzi $\mathbf{d}(\alpha|_U) = (\mathbf{d}\alpha)|_U$, gdzie $|_U$ oznacza zawężenie do U.

Niech X będzie polem wektorowym klasy C^r na M i niech $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ będzie mapą wokół $p \in M$. Wówczas $X_p = \sum_{j=1}^n a_j(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$ jest wektorem stycznym w p, gdzie $a_j \in C^r(M)$ są kiełkami funkcji klasy C^r w p. Popchnięcie X przez φ, czyli funkcję wektorową $\mathbf{X} = \varphi_* \circ X(\varphi^{-1}) : \mathbb{R}^n \supset \varphi(U) \ni p \mapsto [a_j(p)]_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ nazywamy **lokalną reprezentacją** X.

$$\begin{tikzcd}
M \supset U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "X"'] & \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \arrow[d, "\mathbf{X}"] \\
TU \arrow[r, "\varphi_*"] & T\mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Chwilą $t \in \mathbb{R}$ będziemy nazywać zmienną czasową. **Polem wektorowym zależnym od czasu** klasy C^r na M nazywamy odwzorowanie $X : \mathbb{R} \times M \to TM$ takie, że $X_t(m) := X(t, m) \in T_m M$ jest wektorem stycznym w m w chwili t dla wszytkich par $(t, m) \in \mathbb{R} \times M$. Przez $X_t \in \mathfrak{X}^r(M)$ oznaczamy pole wektorowe na M w chwili t, gdzie $\mathfrak{X}^r(M)$ to zbiór wszystkich pól wektorowych klasy C^r na M.

Trajektorią (także: linią przepływu, krzywą całkową) pola wektorowego X w punkcie $m \in M$ nazywamy krzywą $c : \mathbb{R} \supset I \to M$ o początku w m, taką, że $c'(t) = X_{c(t)}$ dla każdego $t \in I$. Jeśli $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ jest mapą wokół $c(0) = p$ i $[X^1, X^2, \ldots, X^n]^T$ jest lokalną reprezentacją X, funkcja wektorowa $\mathbf{c} = \varphi \circ c, I \ni t \mapsto \left[c^i(t)\right]_{i=1}^m \in \mathbb{R}^n$ jest lokalną reprezentacją krzywej c oraz spełniony jest układ równań różniczkowch pierwszego rzędu nazywany układem charakterystyk

$$\begin{aligned}
\frac{dc^1}{dt}(t) &= X^1\left(c^1(t), c^2(t), \ldots, c^n(t)\right), \\
\frac{dc^2}{dt}(t) &= X^2\left(c^1(t), c^2(t), \ldots, c^n(t)\right), \\
&\vdots \\
\frac{dc^n}{dt}(t) &= X^n\left(c^1(t), c^2(t), \ldots, c^n(t)\right).
\end{aligned}$$

Prędkością $c'(t_0)$ krzywej c w chwili $t \in]a, b[$ nazywamy wektor styczny

$$c'(t_0) = c_*\left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0}\right) \in T_{c(t_0)}M, \tag{1.2}$$

Zachodzą następujące twierdzenia

Twierdzenie 1 ([1], tw. 8.16)**.** *Niech X_p będzie wektorem stycznym w punkcie p rozmaitości M i niech $f \in C_p^\infty(M)$ będzie kiełkiem funkcji C^∞ w p. Jeśli $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ jest gładką krzywą o początku w p taką, że $c'(0) = X_p$, wówczas*

$$X_p f = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (f \circ c). \tag{1.3}$$

Twierdzenie 2 ([1], tw. 8.18)**.** *Niech $F : N \to M$ będzie gładkim odwzorowaniem między rozmaitościami, $p \in N$, $X_p \in T_pN$. Jeśli c jest gładką krzywą o początku w p i jej prędkość w p to X_p, wówczas*

$$F_{*,p}(X_p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (F \circ c)(t). \tag{1.4}$$

Czyli popchnięcie prędkości X_p przez F jest wektorem prędkości krzywej $F \circ c$ w M.

Przez $\mathcal{D}_X$ oznaczmy wszystkie pary $(m,t) \in M \times \mathbb{R}$ dla których istnieje trajektoria $c : I \to M$ pola wektorowego X w punkcie m i zmienna czasowa t zawiera się w pewnym przedziale I. Mówimy, że pole wektorowe jest **zupełne**, jeśli $\mathcal{D}_X = M \times \mathbb{R}$. Oznacza to, że dla każdego punktu na rozmaitości znajdziemy trajektorię cząsteczki próbnej poruszającej się dowolnie długo. Domknięcie zbioru wszystkich punktów rozmaitości na których pole wektorowe nie znika, $\operatorname{supp} X = \operatorname{cl}\{m \in M \mid X_m \neq 0\}$, nazywamy **nośnikiem** pola wektorowego X.

Zachodzą następujące twierdzenia

Twierdzenie 3 ([2], tw. 4.1.17)**.** *Niech X będzie polem wektorowym na M klasy C^r, $r \geq 1$. Wówczas*

i) $\mathcal{D}_X \supset M \times \{0\}$,

ii) $\mathcal{D}_X$ *jest otwarty w* $M \times \mathbb{R}$,

iii) istnieje jednoznacznie wyznaczone odwzorowanie $F_X : \mathcal{D}_X \to M$ *takie, że krzywa* $t \mapsto F_X(m,t)$ *jest trajektorią w* m *dla wszystkich* $m \in M$,

iv) dla $(m,t) \in \mathcal{D}_X$, $(F_X(m,t),\, s) \in \mathcal{D}_X$ *wtedy i tylko wtedy, gdy* $(m, t+s) \in \mathcal{D}_X$.

Twierdzenie 4 ([2], tw. 4.1.20)**.** *Każde pole wektorowe klasy C^r na zwartej rozmaitości M jest zupełne.*

Określone w Twierdzeniu 3 odwzorowanie F_X nazywamy **całką** X, zaś trajektorię $t \to F_X(m,t)$ **maksymalną krzywą całkową** X w m. Jeśli pole wektorowe X jest zupełne, F_X nazywamy **przepływem** pola wektorowego X. Każdy przepływ F określa 1-parametrową grupę dyfeomorfizmów $\{F_t : M \to M \mid t \in \mathbb{R}\}$ z operacją składania $F_{t_1} \circ F_{t_2} = F_{t_1+t_2}$ dla $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, gdzie F_0 jest elementem neutralnym i $F_t \circ F_{-t} = F_0$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. Jeśli X jest polem wektorowym zależnym od czasu, wówczas analogicznie określamy **przepływ zależny od czasu** $F_{t,s}$ pola X dla którego odwzorowanie $t \mapsto F_{t,s}(m)$ jest trajektorią X o początku w punkcie m i w chwili $t = s$, czyli

$$\frac{d}{dt} F_{t,s}(m) = X\left(t, F_{t,s}(m)\right), \quad F_{s,s}(m) = m. \tag{1.5}$$

Wówczas działanie składania staje się przechodnie, $F_{t,s} \circ F_{s,r} = F_{s,r}$, a $F_{t,t}$ jest jego elementem neutralnym.

Niech X, $Y \in \mathfrak{X}(M)$ i $F :]-\varepsilon, \varepsilon[\times U \to M$ będzie lokalnym przepływem pola wektorowego X w otoczeniu $U \subset M$ punktu $p \in M$. **Pochodną Liego $\mathcal{L}_X Y$ pola wektorowego** Y względem X w p nazywamy wektor

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X Y)_p &= \lim_{t \to 0} \frac{F_{-t*}(Y_{F_t(p)}) - Y_p}{t} = \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{(F_{-t*}Y)_p - Y_p}{t} = \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (F_{-t*}Y)_p.\end{aligned} \tag{1.6}$$

Jeśli ω jest gładką k-formą na rozmaitości M, to **pochodną Liego $\mathcal{L}_X \omega$ k-formy** ω względem X w $p \in M$ nazywamy formę

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X \omega)_p &= \lim_{t \to 0} \frac{F_t^*(\omega_{F_t(p)}) - \omega_p}{t} = \\ &= \lim_{t \to 0} \frac{(F_t^*\omega)_p - \omega_p}{t} = \\ &= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (F_t^*\omega)_p.\end{aligned} \tag{1.7}$$

Formą objętości na n-rozmaitości M nazywamy każdą nieznikający na M n-formę $\mu \in \Omega^n(M)$ i mówimy, że M jest orientowalna, jeśli na M można określić formę objętości. Powiedzmy, że rozmaitość M jest orientowalna i rozważmy na niej dowolne dwie formy objętości μ_1 i μ_2. Powiemy, że są one równoważne, jeśli istnieje $f \in \mathcal{F}(M)$ taka, że $f(m) > 0$ dla wszystkich $m \in M$ oraz $\mu_1 = f\mu_2$. Każdą klasę równoważności $[\mu]$ takiej relacji nazywamy *orientacją* na M. Rozmaitości z wybraną orientacją będziemy nazywali *rozmaitościami zorientowanymi* i oznaczali $(M, [\mu])$.

Jeśli $F : (M, \mu_M) \to (N, \mu_N)$ jest dyfeomorfizmem między rozmaitościami zorientowanymi, to powiemy, że F *zachowuje (odwraca) orientację*, jeśli $[F^*\mu_M] = [\mu_N]$ ($[F^*\mu_M] = -[\mu_N]$). Podobnie, jeśli tylko $F^*\mu_M = \mu_N$, powiemy że F *zachowuje objętość*. Pojęcie orientowalności niekiedy wygodniej jest określać za pomocą *atlasu zorientowanego*. Atlas na M nazywamy *zorientowanym*, jeśli dla dowolnych dwóch nakładających się na siebie map $(U, x^1, \ldots, x^n)$ i $(V, y^1, \ldots, y^n)$ jakobian $\det\left[\frac{\partial y^i}{\partial x^j}\right]$ jest dodatni na $U \cap V$. Wówczas, o ile rozmaitośc jest parazwarta, orientowalność M jest równoważna istnieniu atlasu zorientowanego na M ([2], tw. 7.5.2).

Niech $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ będzie ciągłą funkcją ze zwartym nośnikiem. Przez $\int f dx^1 \ldots dx^n$ oznaczamy całkę Riemanna na dowolnej kostce w $\mathbb{R}^n$, zawierającej nośnik funkcji f. Niech teraz U będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ i $\omega \in \Omega^n_c(U)$ będzie n-formą ze zwartym nośnikiem na U. Jeśli ω względem bazy standardowej w $\mathbb{R}^n$ jest postaci

$$\omega(x) = \frac{1}{n!}\omega_{i_1 \ldots i_n}(x) dx^{i_1} \wedge \cdots \wedge dx^{i_n} = \omega_{1\ldots n}(x) dx^1 \wedge \cdots \wedge dx^n,$$

gdzie współrzędne ω określamy przez wektory bazy standardowej

$$\omega_{i_1 \ldots i_n}(x) = \omega(x)(e_{i_1}, \ldots, e_{i_n}),$$

wówczas *całką z formy* ω na $U \subset \mathbb{R}^n$ nazywamy

$$\int_U \omega = \int_{\mathbb{R}^n} \omega_{1\ldots n}(x) dx^1 \ldots dx^n.$$

Korzystając z powyższej definicji całkowania na $\mathbb{R}^n$ możemy przy pomocy rozkładu jedności rozszerzyć to pojęcie na dowolne rozmaitości. Niech zorientowany atlas $\{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ zadaje orientację na n-rozmaitości M. Wybierzmy z tego atlasu mapę (U, φ) i niech $\omega \in \Omega^n_c(M)$. Jeśli $\operatorname{supp}\omega \subset U$, wówczas zawężenie $\omega|_U$ ma taki sam zwarty nośnik. Ponieważ $\varphi : U \to \varphi(U)$ jest dyfeomorfizmem, $(\varphi^{-1})^* \left.\omega\right|_U$ jest również n-formą ze zwartym nośnikiem na $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$. Wówczas

$$\int_U \omega := \int_{\varphi(U)} (\varphi^{-1})^* \left.\omega\right|_U .$$

nazywamy *całką z formy* ω na U. Niech $\omega \in \Omega^n_c(M)$. Wybierzmy rozkład jedności $\{\rho_\alpha\}$ przyporządkowany pokryciu $\{U_\alpha\}$. Ponieważ $\rho_\alpha\omega$ jest n-formą ze zwartym nośnikiem zawartym w U_α, to określona jest całka $\int_{U_\alpha} \rho_\alpha\omega$. Skończoną sumę postaci

$$\int_M \omega := \sum_\alpha \int_{U_\alpha} \rho_\alpha \omega$$

nazywamy *całką z formy* ω *na* M. Taka definicja jest niezależna ani od wyboru zorientowanego atlasu, ani od wyboru rozkładu jedności ([1], s. 265-266).

Dalej rozważać będziemy n-rozmaitości M z określoną metryką Riemmana g, które nazywać będziemy krótko **n-rozmaitościami Riemanowskimi** i oznaczali (M, g). Przypomnijmy, że metryka Riemannowska $g \in \Omega^2(M)$ to symetryczne i dodatnio określone pole tensorowe $\mathcal{T}^0_2(M)$ takie, że $g_p \in T^*_m M \otimes T^*_p M$ dla $p \in M$ jest iloczynem skalarnym określonym na przestrzeni stycznej $T_p M$.

Twierdzenie 5 (**O zamianie zmiennych**, [2], tw. 8.1.7)**.** *Niech M i N będą n-rozmaitościami z orientacją i niech $f : M \to N$ będzie dyfeomorfizmem zachowującym orientację. Jeśli $\omega \in \Omega^n(N)$ ma zwarty nośnik, to $f^*\omega$ również ma zwarty nośnik oraz*

$$\int_N \omega = \int_M f^*\omega. \tag{1.8}$$

Niech X będzie polem wektorowym na M. Funkcję $\mathrm{div}_\mu X \in C^\infty(M)$ taką, że

$$\mathcal{L}_X \mu = (\mathrm{div}_\mu X)\mu \tag{1.9}$$

nazywamy **dywergencją** X. Mówimy, że X jest **nieściśliwy** (względem μ), jeśli $\mathrm{div}_\mu X = 0$.

Poniższej prezentujemy centralne twierdzenie w mechanice płynów, które umożliwi nam uzyskanie zasady zachowania w postaci *równania ciągłości.*

Twierdzenie 6 (**O transporcie**, [2], tw. 8.1.12)**.** *Niech (M, μ) będzie rozmaitością z objętością i niech X będzie polem wektorowym na M z przepływem F_t. Oznaczając $f_t(m) = f(m, t)$ dla $f \in \mathcal{F}(M \times \mathbb{R})$ mamy:*

$$\frac{d}{dt} \int_{F_t(U)} f_t \mu = \int_{F_t(U)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}_\mu(f_t X) \right) \mu, \tag{1.10}$$

dla dowolnego zbioru otwartego U w M.

Dowód.

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} F_t^*(f_t\mu) &= F_t^*\left(\frac{\partial f}{\partial t}\mu\right) + F_t^*\mathcal{L}_X(f_t\mu) = \\
&= F_t^*\left(\frac{\partial f}{\partial t}\mu\right) + F_t^*\left((\mathcal{L}_X f_t)\,\mu + f_t(\mathrm{div}_\mu X)\mu\right) = \\
&= F_t^*\left(\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}_\mu(f_t X)\right)\mu\right).
\end{aligned}$$

Stosując wzór na zamianę zmiennych z Twierdzenia 5 otrzymujemy

$$\begin{aligned}
\frac{d}{dt} \int_{F_t(U)} f_t\mu = \frac{d}{dt}\int_U F_t^*(f_t\mu) = \int_U F_t^*\left(\left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}_\mu(f_t X)\right)\mu\right) = \\
= \int_{F_t(U)} \left(\frac{\partial f}{\partial t} + \mathrm{div}_\mu(f_t X)\right)\mu.
\end{aligned}$$

□

1.2 Dynamika płynów

Poniższy opis płynu jest idealizacją, która zaniedbuje cząsteczkową strukturę rzeczywistych płynów. Przez płyny rozumiemy tutaj wszystkie substancje fizyczne w stanie ciekłym i gazowym. *Ciecze* są płynami, które charakteryzuje długość średniej swobodnej drogi cząsteczki w przedziale $10^{-7} - 10^{-8}$ cm i znaczna odporność na zmianę objętości pod wpływem ciśnienia. *Gazy* charakteryzuje znacznie dłuższa średnia swobodna droga cząsteczek rzędu 10^{-3} cm i łatwość zmiany objętości. Nasze rozważania będą oparte na obserwabliach takich jak prędkość, gęstość i ciśnienie. Wielkości te należy rozumieć jako wartości średnie dla cząsteczek zawartych w infinitezymalnie małej objętości płynu. Przez *cząsteczkę próbną* będziemy rozumieli właśnie taką małą objętość. Nasze rozważania będą konsekwencjami poniższych trzech zasad:

1. Masa nie ulega zniszczeniu ani nie jest tworzona.

2. Zmiana pędu cząsteczki próbnej płynu jest równa wartości przyłożonej do niej siły.

3. Energia nie ulega zniszczeniu ani nie jest tworzona.

Drugi punkt to popularna II zasada dynamiki Newtona wyrażona w postaci zasady zachowania pędu. Punkt pierwszy wyraża zasadę zachowania masy, zaś trzeci – zasadę zachowania energii. Oznacza to, że wyprowadzając równania ruchu nie uwzględniamy procesów dyssypacji energii, które mogą zachodzić w płynącej cieczy w wyniku wewnętrznego tarcia (*lepkości*) i wymiany ciepła między różnymi częściami cieczy.

Niech (M, g) będzie zwartą, orientowalną n-rozmaitością Riemannowską z brzegiem i $\mu \in \Omega^n(M)$ będzie formą objętości na M. Rozmaitość M interpretujemy jako pewien rzeczywisty obszar wypełniony poruszającym się płynem. Ustalmy punkt $x \in M$ i rozważmy cząstkę próbną, która porusza się po trajektorii przechodzącej przez punkt x w chwili $t = 0$. Oznaczmy tę trajektorię przez $\varphi_t(x) = \varphi(x, t)$. Niech $u(x, t)$ oznacza prędkość cząsteczki próbnej położonej w punkcie x w chwili t. Określiliśmy w ten sposób na rozmaitości M pole wektorowe zależne od czasu, które dalej nazywać będziemy *polem prędkości płynu*. Zależność między u i φ_t możemy wyrazić przez

$$\frac{d\varphi_t}{dt}(x) = u(\varphi_t(x), t). \tag{1.11}$$

Zauważmy, że φ_t jest przepływem dla pola wektorowego zależnego od czasu u. Załóżmy, że dla każdej chwili t dana jest pewna gładka funkcja $\rho_t(x) = \rho(x, t)$, która wyraża gęstość płynu w punkcie x. Niech teraz W będzie otwartym podzbiorem M z gładkim brzegiem. Wówczas masa płynu wypełniającego W w chwili t wyraża się przez

$$m(W, t) = \int_W \rho_t d\mu. \tag{1.12}$$

1.2.1 Zasada zachowania masy

Niech W będzie otwartym podzbiorem rozmaitości M z gładkim brzegiem. W myśl zasady zachowania masy, całkowita masa płynu wypełniającego W w chwili $t = 0$ nie ulega zmianie po czasie t

$$m\left(\varphi_t(W), t\right) = \int_{\varphi_t(W)} \rho_t d\mu = \int_W \rho_0 d\mu = m(W, 0). \tag{1.13}$$

Stosując Twierdzenie 6 otrzymujemy

$$0 = \frac{d}{dt} \int_{\varphi_t(W)} \rho_t d\mu = \int_{\varphi_t(W)} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_t u) \right) d\mu.$$

A zatem

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \operatorname{div}(\rho_t u) = 0. \tag{1.14}$$

Równanie (1.14) nazywamy **równaniem ciągłości**. Odpowiada ono prawu zachowania masy, które przyjęliśmy na początku.

1.2.2 Zasada zachowania pędu

Tensor naprężeń

1.2.3 Zasada zachowania energii

Bibliografia

[1] Loring W. Tu. *An Introduction to Manifolds.* Springer Science & Business Media, 2010.

[2] Jerrold E. Marsden, Tudor Ratiu, and Ralph Abraham. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications.* Springer-Verlag Publishing Company, Inc., 2002.

[3] Andrzej Herdegen. *Algebra liniowa i geometria.* Wydawnictwo Discepto, 2010.

[4] Krzysztof Maurin. *Analiza, Wstęp do analizy globalnej.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1971.

[5] John M. Lee. *Introduction to Smooth Manifolds.* Springer Science+Business Media, 2012.