

Rozdział 1

Płyn idealny

Naszym celem jest uzasadnienie podstawowych równań ruchu cieczy idealnej.

1.1 Pojęcia wstępne

Niech (M, g) będzie zwartą, orientowalną n -rozmaitością Riemannowską z brzegiem i $\mu \in \Omega^n(M)$ będzie formą objętości na M . Przypomnijmy, że metryka Riemannowska $g : M \rightarrow \Omega^2(M)$ to pole tensorowe $\mathcal{T}_2^0(M)$ takie, że $g_p \in T_m^*M \otimes T_p^*M$ dla $p \in M$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni stycznej w $p \in M$.

Niech X będzie polem wektorowym klasy C^r na M i niech $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \dots, x^n)$ będzie mapą wokół $p \in M$. Wówczas $X_p = \sum_{j=1}^n a_j(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ jest wektorem stycznym w p , gdzie $a_j \in C^r(M)$ są kielkami funkcji klasy C^r w p . Funkcję wektorową $\mathbf{X} = \varphi_* \circ X(\varphi^{-1}) : \mathbb{R}^n \supset \varphi(U) \ni p \mapsto [a_j(p)]_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ nazywamy **lokalną reprezentacją** X .

$$\begin{array}{ccc} M \supset U & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \\ X \downarrow & & \downarrow \mathbf{X} \\ TU & \xrightarrow{\varphi_*} & T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \end{array}$$

Chwilą $t \in \mathbb{R}$ będziemy nazywać zmienną czasową. **Polem wektorowym zależnym od czasu** klasy C^r na M nazywamy odwzorowanie $X : \mathbb{R} \times M \rightarrow TM$ takie, że $X_t(m) := X(t, m) \in T_mM$ jest wektorem stycznym w m w chwili t dla wszystkich par $(t, m) \in \mathbb{R} \times M$. Przez $X_t \in \mathfrak{X}^r(M)$ oznaczamy pole wektorowe na M w chwili t , gdzie $\mathfrak{X}^r(M)$ to zbiór wszystkich pól wektorowych klasy C^r na M .

Trajektorią (także: linią przepływu, krzywą całkową) pola wektorowego X w punkcie $m \in M$ nazywamy krzywą $c : \mathbb{R} \supset I \rightarrow M$ o początku w m , taką, że $c'(t) = X_{c(t)}$ dla każdego $t \in I$. Jeśli $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \dots, x^n)$ jest mapą wokół $c(0) = p$ i $[X^1, X^2, \dots, X^n]^T$ jest lokalną reprezentacją X , funkcja wektorowa $\mathbf{c} = \varphi \circ c, I \ni t \mapsto [c^i(t)]_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ jest lokalną reprezentacją krzywej c oraz spełniony jest układ równań różniczkowych pierwszego rzędu nazywany układem charakterystyk

$$\begin{aligned} \frac{dc^1}{dt}(t) &= X^1(c^1(t), c^2(t), \dots, c^n(t)), \\ \frac{dc^2}{dt}(t) &= X^2(c^1(t), c^2(t), \dots, c^n(t)), \\ &\vdots \\ \frac{dc^n}{dt}(t) &= X^n(c^1(t), c^2(t), \dots, c^n(t)). \end{aligned}$$

Prędkością $c'(t_0)$ **krzywej** c w chwili $t \in]a, b[$ nazywamy wektor styczny

$$c'(t_0) = c_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) \in T_{c(t_0)} M \quad (1.1)$$

Zachodzi następujące twierdzenie

Twierdzenie 1.1. *Niech X_p będzie wektorem stycznym w punkcie p rozmaitości M i niech $f \in C_p^\infty(M)$ będzie kielkiem funkcji C^∞ w p . Jeśli $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ jest gładką krzywą o początku w p taką, że $c'(0) = X_p$, wówczas*

$$X_p f = \frac{d}{dt} \Big|_0 (f \circ c). \quad (1.2)$$

Przez \mathcal{D}_X oznaczmy wszystkie pary $(m, t) \in M \times \mathbb{R}$ dla których istnieje trajektoria $c : I \rightarrow M$ pola wektorowego X w punkcie m i zmienna czasowa t zawiera się w pewnym przedziale I . Mówimy, że pole wektorowe jest **zupełne**, jeśli $\mathcal{D}_X = M \times \mathbb{R}$. Oznacza to, że dla każdego punktu na rozmaitości znajdziemy trajektorie cząsteczki próbnej poruszającej się dowolnie długo. Zbiór wszystkich punktów rozmaitości na których pole wektorowe nie znika, $\text{Supp } X = \{m \in M \mid X_m \neq 0\}$, nazywamy **nośnikiem** pola wektorowego X .

Zachodzi następujące twierdzenie

Twierdzenie 1.2. *Niech X będzie polem wektorowym na M klasy C^r , $r \geq 1$. Wówczas*

- i) $\mathcal{D}_X \supset M \times \{0\}$,
- ii) \mathcal{D}_X jest otwarty w $M \times \mathbb{R}$,
- iii) istnieje jednoznacznie wyznaczone odwzorowanie $F_X : \mathcal{D}_X \rightarrow M$ takie, że krzywa $t \mapsto F_X(m, t)$ jest trajektorią w m dla wszystkich $m \in M$,
- iv) dla $(m, t) \in \mathcal{D}_X$, $F_X(m, t), s) \in \mathcal{D}_X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(m, t + s) \in \mathcal{D}_X$.

Określone w Twierdzeniu 1.2 odwzorowanie F_X nazywamy **całką** X , zaś trajektorie $t \mapsto F_X(m, t)$ **maksymalną krzywą całkową** X w m . Jeśli pole wektorowe X jest zupełne, F_X nazywamy **przepływem** pola wektorowego X . Każdy przepływ F określa 1-parametrową grupę dyfeomorfizmów $\{F_t : M \rightarrow M \mid t \in \mathbb{R}\}$ z operacją składania $F_{t_1} \circ F_{t_2} = F_{t_1+t_2}$ dla $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, gdzie F_0 jest elementem neutralnym i $F_t \circ F_{-t} = F_0$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. Jeśli X jest polem wektorowym zależnym od czasu, wówczas analogicznie określamy **przepływ zależny od czasu** $F_{t,s}$ pola X dla którego odwzorowanie $t \mapsto F_{t,s}(m)$ jest trajektorią X o początku w punkcie m i w chwili $t = s$, czyli

$$\frac{d}{dt} F_{t,s}(m) = X(t, F_{t,s}(m)), \quad F_{s,s}(m) = m. \quad (1.3)$$

Wówczas działanie składania staje się przechodnie, $F_{t,s} \circ F_{s,r} = F_{t,r}$, a $F_{t,t}$ jest jego elementem neutralnym.

Twierdzenie 1.3. *Każde pole wektorowe klasy C^r na zwartej rozmaitości M jest zupełne.*

Niech $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ i $F :]-\varepsilon, \varepsilon[\times U \rightarrow M$ będzie lokalnym przepływem pola wektorowego X w otoczeniu $U \subset M$ punktu $p \in M$. **Pochodną Liego** $\mathcal{L}_X Y$ **pola wektorowego** Y względem X w p nazywamy wektor

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_{-t*}(Y_{F_t(p)}) - Y_p}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(F_{-t*} Y)_p - Y_p}{t} = \\ &= \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} (F_{-t*} Y)_p. \end{aligned} \quad (1.4)$$

Jeśli ω jest gładką k -formą na rozmaiłości M , to **pochodną Liego** $\mathcal{L}_X\omega$ **k -formy** ω względem X w $p \in M$ nazywamy formę

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X\omega)_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_t^*(\omega_{F_t(p)} - \omega_p)}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(F_t^*\omega)_p - \omega_p}{t} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F_t^*\omega)_p. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Bibliografia