

# Rozdział 1

## Płyn idealny

W tym rozdziale naszym celem jest opracowanie modelu fizycznego cieczy idealnej i uzasadnienie jej podstawowych równań ruchu.

### 1.1 Pojęcia wstępne

Zacniemy od przypomnienia podstawowych pojęć w teorii rozmaitości gładkich. Niech  $M$  będzie rzeczywistą  $n$ -rozmaitością różniczkowalną klasy  $C^\infty$ ,  $p$  będzie dowolnym punktem rozmaitości  $M$  i niech  $U, V \subset M$  będą otoczeniami punktu  $p$ . Powiemy, że dwie funkcje rzeczywiste  $f : U \rightarrow \mathbb{R}, g : V \rightarrow \mathbb{R}$  są *równoważne*, jeśli w pewnym otoczeniu  $W \subset U \cap V$  punktu  $p$  są one sobie równe. Pod pojęciem **kiełka** funkcji rzeczywistej klasy  $C^\infty$  w punkcie  $p \in M$  będziemy rozumieli każdą klasę równoważności tak zadanej relacji. Zbiór wszystkich kiełków w punkcie  $p$ ,  $C_p^\infty(M)$ , jest wówczas  $\mathbb{R}$ -algebrą. Zbiór wszystkich funkcji klasy  $C^\infty$  określonych na  $M$  będziemy oznaczali  $\mathcal{F}(M)$ .

Zmierzamy do określenia pojęcia przestrzeni stycznej za pomocą kiełków funkcji. Każde odwzorowanie liniowe  $D : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$  spełniające warunek:

$$D(fg) = (Df)g(p) + f(Dg)(p) \quad (1.1)$$

nazywamy **różniczkowaniem** w punkcie  $p$ . Przestrzeń liniową wszystkich różniczkowań w punkcie  $p$  nazywamy **przestrzenią styczną** w  $p$  i oznaczamy przez  $T_p M$ .

Niech  $\pi : E \rightarrow M$  będzie dowolnym odwzorowaniem między rozmaitościami  $E$  i  $M$ . Przeciwobraz  $E_p = \pi^{-1}(p)$  punktu  $p$  nazywamy **włóknem** w  $p$ . Niech  $\pi' : E' \rightarrow M$  będzie odwzorowaniem rozmaitości  $E'$  i  $M$ . Powiemy, że odwzorowanie  $\phi : E \rightarrow E'$  **zachowuje włókna**, jeśli  $\phi(E_p) \subset E'_p$  dla każdego  $p \in M$ . Jeśli  $\pi$  jest surjekcją klasy  $C^\infty$  oraz

- i) każde włókno  $\pi^{-1}(p)$  ma strukturę  $n$ -wymiarowej przestrzeni wektorowej,
- ii) dla każdego  $p \in M$  istnieje otoczenie  $U \in M$  punktu  $p$  i zachowujący włókna dyfeomorfizm  $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$  taki, że dla każdego  $q \in U$  zawężenie

$$\phi|_{\pi^{-1}(q)} : \pi^{-1}(q) \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^r$$

jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych,

wówczas  $\pi$  określamy odwzorowaniem *lokalnie trywialnym rzędu  $r$* . Tak określony zbiór  $U$  nazywamy zbiorem *trywializującym*  $E$ , zaś  $\phi$  nazywamy *trywializacją*  $E$  nad  $U$ .

Korzystając z powyższych rozstrzygnięć definiujemy **wiązką wektorową** klasy  $C^\infty$  rzędu  $r$  jako trójkę  $(E, M, \pi)$ . Nadużywając notacji często zamiast odnosić się bezpośrednio do tak zdefiniowanej struktury, będziemy mówili o *wiązce wektorowej*  $E$  albo *wiązce wektorowej*  $\pi : E \rightarrow M$ . W tę myśl **cięciem** wiązki  $\pi : E \rightarrow M$  nazywamy odwzorowanie  $s : M \rightarrow E$  takie, że  $\pi \circ s = id_M$ . Przyporządkowuje ono każdemu punktowi  $p \in M$  włókno  $E_p$ .

Okazuje się, że zbiór wszystkich sekcji klasy  $C^\infty$  wiązki  $E$ , oznaczany  $\Gamma(E)$ , ma interesujące własności algebraiczne. Jeśli  $U$  jest otwartym podzbiorem rozmaitości  $E$ , wówczas analogicznie określimy  $\Gamma(U)$ . Na tak zadanym zbiorze można zadać strukturę modułu nad pierścieniem  $C^\infty(U)$  funkcji klasy  $C^\infty$  zadanych na  $U$ .  $\Gamma(U)$  jest również rzeczywistą przestrzenią wektorową w której możemy wybrać uporządkowaną bazę  $(s_1, s_2, \dots, s_r)$ . Jest to tak zwany *reper* wiązki wektorowej  $\pi : E \rightarrow M$  nad  $U$ .

Szczególnie interesującym nas obiektem tej kategorii jest **wiązka styczną**  $(TM, M, \pi)$ , gdzie

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$$

oraz  $\pi : TM \ni v \mapsto p \in M$  jest naturalną projekcją. Jeśli  $M$  jest  $n$ -rozmaitością klasy  $C^k$ , to tak zdefiniowana wiązka styczną  $TM$  okazuje się  $2n$ -rozmaitością klasy  $C^{k-1}$ . Korzystając z powyższego wygodnego aparatu matematycznego możemy teraz określić **pole wektorowe** na rozmaitości  $M$  po prostu jako cięcie wiązki styczną  $TM$ . Zbiór wszystkich pól wektorowych na  $M$ ,  $\mathfrak{X}(M)$ , stanowi szczególny rodzaj  $\mathcal{F}$ -modułu, mianowicie *moduł Liego*. Pola wektorowe można w nim rozumieć jako różniczkowania w algebrze  $\mathcal{F}$  oraz określony jest w nim operator *komutacji* pól wektorowych, nazywany również *nawiasem Liego*:

$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf).$$

Okazuje się, że komutacja gładkich pól wektorowych nie wyprowadza poza  $\mathfrak{X}(M)$  i lokalnie spełnia warunek (1.1), czyli jest różniczkowaniem.

Przez  $L^k(V; \mathbb{R})$  oznaczamy będziemy przestrzeń wszystkich funkcjonałów  $k$ -liniowych określonych na przestrzeni liniowej  $V$ . Rozważmy skończenie wymiarowe rzeczywiste przestrzenie wektorowe  $V_1, V_2, \dots, V_r$  i odpowiednio ich przestrzenie dualne  $V_1^*, V_2^*, \dots, V_r^*$ . Dzięki kanonicznemu izomorfizmowi przestrzeni i ich dwusprzężonych, przestrzenie  $V_i$  możemy traktować jako przestrzenie funkcjonałów na  $V_i^*$ ,

$$x_i : V_i^* \ni \varphi^i \mapsto \langle \varphi^i, x_i \rangle_i := x_i(\varphi^i) \in \mathbb{R}$$

gdzie  $\langle *, * \rangle_i$  jest funkcją dualności pary przestrzeni  $V_i^*, V_i$ . Możemy określić iloczyn tak rozumianych funkcji,

$$\begin{aligned} x_1 \otimes \dots \otimes x_r : V_1^* \times \dots \times V_r^* &\mapsto \mathbb{R}, \\ (x_1 \otimes \dots \otimes x_r)(\varphi^1, \dots, \varphi^r) &:= \langle \varphi^1, x_1 \rangle_1 \dots \langle \varphi^r, x_r \rangle_r. \end{aligned}$$

Tak określone działanie jest łączne,  $r$ -liniowe, ciągłe i nie jest przemienne. Dla wygody oznaczamy  $\mathcal{T}_0^0(V) = \mathbb{R}$ . Wektor postaci  $x_1 \otimes \dots \otimes x_r$  nazywamy *iloczynem tensorowym* wektorów  $x_1, \dots, x_r$ .

Niech  $V$  będzie przestrzenią wektorową. Mnożąc tensorowo kilka kopii  $V$  i jej dualnej otrzymujemy strukturę, którą nazywamy *przestrzenią tensorów o walencji*  $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$  nad przestrzenią  $V$ ,

$$\mathcal{T}_q^p(V) := L^{p+q}(\underbrace{V^* \otimes \dots \otimes V^*}_{p \text{ razy}} \otimes \underbrace{V \otimes \dots \otimes V}_{q \text{ razy}}; \mathbb{R}), \quad p + q \geq 1.$$

Elementy  $\mathcal{T}_q^p(V)$  nazywamy *tensorami  $q$ -krotnie kowariantnymi i  $p$ -krotnie kontrawariantnymi* albo prościej: *tensorami o walencji*  $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ . Dla tensorów  $t_1 \in \mathcal{T}_{s_1}^{r_1}(V)$  i  $t_2 \in \mathcal{T}_{s_2}^{r_2}(V)$  mamy  $t_1 \otimes t_2 \in \mathcal{T}_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$  oraz

$$\begin{aligned} (t_1 \otimes t_2)(\beta^1, \dots, \beta^{r_1}, \gamma^1, \dots, \gamma^{r_2}, f_1, \dots, f_{s_1}, g_1, \dots, g_{s_2}) = \\ t_1(\beta^1, \dots, \beta^{r_1}, f_1, \dots, f_{s_1}) t_2(\gamma^1, \dots, \gamma^{r_2}, g_1, \dots, g_{s_2}). \end{aligned}$$

Okazuje się, że jeśli  $\{e_1, \dots, e_n\}$  jest bazą przestrzeni  $V$  i  $\{e^1, \dots, e^n\}$  jest bazą przestrzeni dualnej, to

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_p} \mid i_1, \dots, i_q, j_1, \dots, j_p = 1, \dots, n\}$$

jest bazą  $\mathcal{T}_q^p(V)$ , a zatem  $\dim \mathcal{T}_q^p(V) = (\dim V)^{p+q}$ .

Niech  $\pi : TM \rightarrow M$  będzie wiązką styczną i niech  $T_m M = \pi^{-1}(m)$  oznacza włókno nad punktem  $m \in M$ . Określmy

$$\mathcal{T}_s^r(M) = \bigcup_{m \in M} T_s^r(T_m M),$$

oraz niech odwzorowanie  $\pi_s^r : \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow M$ ,  $\pi_s^r(e) = m$  dla  $e \in \mathcal{T}_s^r(E_m)$  będzie naturalną projekcją elementu z włókna na rozmierność. Naśladując konstrukcję wiązki stycznej, trójkę  $(\mathcal{T}_s^r(M), M, \pi_s^r(e))$  nazywamy *wiązką tensorową* o walencji  $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$  na  $M$ . Analogicznie, cięcie wiązki tensorowej określamy **polem tensorowym**. Pole tensorowe  $k$ -kowariantne i 0-kontrawariantne na  $M$ , które jest antysymetryczne, nazywamy **k-formą różniczkową** na  $M$ .

Niech  $X$  będzie polem wektorowym klasy  $C^r$  na  $M$  i niech  $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \dots, x^n)$  będzie mapą wokół  $p \in M$ . Wówczas  $X_p = \sum_{j=1}^n a_j(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$  jest wektorem stycznym w  $p$ , gdzie  $a_j \in C^r(M)$  są kielkami funkcji klasy  $C^r$  w  $p$ . Popchnięcie  $X$  przez  $\varphi$ , czyli funkcję wektorową  $\mathbf{X} = \varphi_* \circ X(\varphi^{-1}) : \mathbb{R}^n \supset \varphi(U) \ni p \mapsto [a_j(p)]_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$  nazywamy **lokalną reprezentacją**  $X$ .

$$\begin{array}{ccc} M \supset U & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \\ X \downarrow & & \downarrow \mathbf{X} \\ TU & \xrightarrow{\varphi_*} & T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \end{array}$$

Chwilą  $t \in \mathbb{R}$  będziemy nazywać zmienną czasową. **Polem wektorowym zależnym od czasu** klasy  $C^r$  na  $M$  nazywamy odwzorowanie  $X : \mathbb{R} \times M \rightarrow TM$  takie, że  $X_t(m) := X(t, m) \in T_m M$  jest wektorem stycznym w  $m$  w chwili  $t$  dla wszystkich par  $(t, m) \in \mathbb{R} \times M$ . Przez  $X_t \in \mathfrak{X}^r(M)$  oznaczamy pole wektorowe na  $M$  w chwili  $t$ , gdzie  $\mathfrak{X}^r(M)$  to zbiór wszystkich pól wektorowych klasy  $C^r$  na  $M$ .

**Trajektorią** (także: linią przepływu, krzywą całkową) pola wektorowego  $X$  w punkcie  $m \in M$  nazywamy krzywą  $c : \mathbb{R} \supset I \rightarrow M$  o początku w  $m$ , taką, że  $c'(t) = X_{c(t)}$  dla każdego  $t \in I$ . Jeśli  $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \dots, x^n)$  jest mapą wokół  $c(0) = p$  i  $[X^1, X^2, \dots, X^n]^T$  jest lokalną reprezentacją  $X$ , funkcja wektorowa  $\mathbf{c} = \varphi \circ c, I \ni t \mapsto [c^i(t)]_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$  jest lokalną reprezentacją krzywej  $c$  oraz spełniony jest układ równań różniczkowych pierwszego rzędu nazywany układem charakterystyk

$$\begin{aligned} \frac{dc^1}{dt}(t) &= X^1(c^1(t), c^2(t), \dots, c^n(t)), \\ \frac{dc^2}{dt}(t) &= X^2(c^1(t), c^2(t), \dots, c^n(t)), \\ &\vdots \\ \frac{dc^n}{dt}(t) &= X^n(c^1(t), c^2(t), \dots, c^n(t)). \end{aligned}$$

**Prędkością**  $c'(t_0)$  **krzywej**  $c$  w chwili  $t \in ]a, b[$  nazywamy wektor styczny

$$c'(t_0) = c_* \left( \frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) \in T_{c(t_0)} M, \quad (1.2)$$

Zachodzą następujące twierdzenia

**Twierdzenie 1.1.** Niech  $X_p$  będzie wektorem stycznym w punkcie  $p$  rozmierności  $M$  i niech  $f \in C_p^\infty(M)$  będzie kielkiem funkcji  $C^\infty$  w  $p$ . Jeśli  $c : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \rightarrow M$  jest gładką krzywą o początku w  $p$  taką, że  $c'(0) = X_p$ , wówczas

$$X_p f = \frac{d}{dt} \Big|_0 (f \circ c). \quad (1.3)$$

**Twierdzenie 1.2.** Niech  $F : N \rightarrow M$  będzie gładkim odwzorowaniem między rozmaitościami,  $p \in N$ ,  $X_p \in T_p N$ . Jeśli  $c$  jest gładką krzywą o początku w  $p$  i jej prędkość w  $p$  to  $X_p$ , wówczas

$$F_{*,p}(X_p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_0 (F \circ c)(t). \quad (1.4)$$

Czyli popchnięcie prędkości  $X_p$  przez  $F$  jest wektorem prędkości krzywej  $F \circ c$  w  $M$ .

Przez  $\mathcal{D}_X$  oznaczmy wszystkie pary  $(m, t) \in M \times \mathbb{R}$  dla których istnieje trajektoria  $c : I \rightarrow M$  pola wektorowego  $X$  w punkcie  $m$  i zmienna czasowa  $t$  zawiera się w pewnym przedziale  $I$ . Mówimy, że pole wektorowe jest **zupełne**, jeśli  $\mathcal{D}_X = M \times \mathbb{R}$ . Oznacza to, że dla każdego punktu na rozmaitości znajdziemy trajektorie cząsteczki próbnej poruszającej się dowolnie długo. Zbiór wszystkich punktów rozmaitości na których pole wektorowe nie zanika,  $\text{Supp } X = \{m \in M \mid X_m \neq 0\}$ , nazywamy **nośnikiem** pola wektorowego  $X$ .

Zachodzą następujące twierdzenia

**Twierdzenie 1.3.** Niech  $X$  będzie polem wektorowym na  $M$  klasy  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Wówczas

- i)  $\mathcal{D}_X \supset M \times \{0\}$ ,
- ii)  $\mathcal{D}_X$  jest otwarty w  $M \times \mathbb{R}$ ,
- iii) istnieje jednoznacznie wyznaczone odwzorowanie  $F_X : \mathcal{D}_X \rightarrow M$  takie, że krzywa  $t \mapsto F_X(m, t)$  jest trajekcją w  $m$  dla wszystkich  $m \in M$ ,
- iv) dla  $(m, t) \in \mathcal{D}_X$ ,  $F_X(m, t), s) \in \mathcal{D}_X$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $(m, t + s) \in \mathcal{D}_X$ .

**Twierdzenie 1.4.** Każde pole wektorowe klasy  $C^r$  na zwartej rozmaitości  $M$  jest **zupełne**.

Określone w Twierdzeniu 1.3 odwzorowanie  $F_X$  nazywamy **całką**  $X$ , zaś trajektorie  $t \mapsto F_X(m, t)$  **maksymalną krzywą całkową**  $X$  w  $m$ . Jeśli pole wektorowe  $X$  jest **zupełne**,  $F_X$  nazywamy **przepływem** pola wektorowego  $X$ . Każdy przepływ  $F$  określa 1-parametrową grupę dyfeomorfizmów  $\{F_t : M \rightarrow M \mid t \in \mathbb{R}\}$  z operacją składania  $F_{t_1} \circ F_{t_2} = F_{t_1+t_2}$  dla  $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$ , gdzie  $F_0$  jest elementem neutralnym i  $F_t \circ F_{-t} = F_0$  dla dowolnego  $t \in \mathbb{R}$ . Jeśli  $X$  jest polem wektorowym zależnym od czasu, wówczas analogicznie określamy **przepływ zależny od czasu**  $F_{t,s}$  pola  $X$  dla którego odwzorowanie  $t \mapsto F_{t,s}(m)$  jest trajekcją  $X$  o początku w punkcie  $m$  i w chwili  $t = s$ , czyli

$$\left. \frac{d}{dt} F_{t,s}(m) \right|_{t=s} = X(F_{s,s}(m)), \quad F_{s,s}(m) = m. \quad (1.5)$$

Wówczas działanie składania staje się przechodnie,  $F_{t,s} \circ F_{s,r} = F_{t,r}$ , a  $F_{t,t}$  jest jego elementem neutralnym.

Niech  $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$  i  $F : ]-\varepsilon, \varepsilon[ \times U \rightarrow M$  będzie lokalnym przepływem pola wektorowego  $X$  w otoczeniu  $U \subset M$  punktu  $p \in M$ . **Pochodną Liego**  $\mathcal{L}_X Y$  pola wektorowego  $Y$  względem  $X$  w  $p$  nazywamy wektor

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_{-t*}(Y_{F_t(p)}) - Y_p}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(F_{-t*} Y)_p - Y_p}{t} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F_{-t*} Y)_p. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Jeśli  $\omega$  jest gładką  $k$ -formą na rozmaitości  $M$ , to **pochodną Liego**  $\mathcal{L}_X \omega$   **$k$ -formy**  $\omega$  względem  $X$  w  $p \in M$  nazywamy formę

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \omega)_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_t^*(\omega_{F_t(p)}) - \omega_p}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(F_t^* \omega)_p - \omega_p}{t} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F_t^* \omega)_p. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Niech  $(M, g)$  będzie zwartą, orientowalną  $n$ -rozmaitością Riemannowską z brzegiem i  $\mu \in \Omega^n(M)$  będzie formą objętości na  $M$ . Przypomnijmy, że metryka Riemannowska  $g : M \rightarrow \Omega^2(M)$  to pole tensorowe  $\mathcal{T}_2^0(M)$  takie, że  $g_p \in T_m^*M \otimes T_p^*M$  dla  $p \in M$  jest iloczynem skalarnym określonym na przestrzeni stycznej  $T_pM$ . **Formą objętości** na  $n$ -rozmaitości  $M$  nazywamy  $n$ -formę  $\mu \in \Omega^n(M)$  taką, że  $\mu(m) \neq 0$  dla wszystkich  $m \in M$ . Mówimy, że  $M$  jest orientowalna, jeśli na  $M$  można określić formę objętości.

Niech  $X$  będzie polem wektorowym na  $M$ . Funkcję  $\operatorname{div}_\mu X \in C^\infty(M)$  taką, że

$$\mathcal{L}_X \mu = (\operatorname{div}_\mu X) \mu \tag{1.8}$$

nazywamy **dywergencją**  $X$ . Mówimy, że  $X$  jest **nieściśliwy** (względem  $\mu$ ), jeśli  $\operatorname{div}_\mu X = 0$ .

# Bibliografia