

Rozdział 1

Płyn idealny

W tym rozdziale naszym celem jest opracowanie modelu fizycznego cieczy idealnej i uzasadnienie jej podstawowych równań ruchu.

1.1 Pojęcia wstępne

Zacniemy od przypomnienia podstawowych pojęć w teorii rozmaitości gładkich. Niech M będzie rzeczywistą n -rozmaitością różniczkowalną klasy C^∞ , p będzie dowolnym punktem rozmaitości M i niech $U, V \subset M$ będą otoczeniami punktu p . Powiemy, że dwie funkcje rzeczywiste $f : U \rightarrow \mathbb{R}, g : V \rightarrow \mathbb{R}$ są *równoważne*, jeśli w pewnym otoczeniu $W \subset U \cap V$ punktu p są one sobie równe. Pod pojęciem **kiełka** funkcji rzeczywistej klasy C^∞ w punkcie $p \in M$ będziemy rozumieli każdą klasę równoważności tak zadanej relacji. Zbiór wszystkich kiełków w punkcie p , $C_p^\infty(M)$, jest wówczas \mathbb{R} -algebrą. Zbiór wszystkich funkcji klasy C^∞ określonych na M będziemy oznaczali $\mathcal{F}(M)$.

Zmierzamy do określenia pojęcia przestrzeni stycznej za pomocą kiełków funkcji. Każde odwzorowanie liniowe $D : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek:

$$D(fg) = (Df)g(p) + f(Dg)(p) \quad (1.1)$$

nazywamy **różniczkowaniem** w punkcie p . Przestrzeń liniową wszystkich różniczkowań w punkcie p nazywamy **przestrzenią styczną** w p i oznaczamy przez $T_p M$.

Niech $\pi : E \rightarrow M$ będzie dowolnym odwzorowaniem między rozmaitościami E i M . Przeciwobraz $E_p = \pi^{-1}(p)$ punktu p nazywamy **włóknem** w p . Niech $\pi' : E' \rightarrow M$ będzie odwzorowaniem rozmaitości E' i M . Powiemy, że odwzorowanie $\phi : E \rightarrow E'$ **zachowuje włókna**, jeśli $\phi(E_p) \subset E'_p$ dla każdego $p \in M$. Jeśli π jest surjekcją klasy C^∞ oraz

- i) każde włókno $\pi^{-1}(p)$ ma strukturę n -wymiarowej przestrzeni wektorowej,
- ii) dla każdego $p \in M$ istnieje otoczenie $U \in M$ punktu p i zachowujący włókna dyfeomorfizm $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ taki, że dla każdego $q \in U$ zawężenie

$$\phi|_{\pi^{-1}(q)} : \pi^{-1}(q) \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^r$$

jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych,

wówczas π określamy odwzorowaniem *lokalnie trywialnym rzędu r* . Tak określony zbiór U nazywamy zbiorem *trywializującym* E , zaś ϕ nazywamy *trywializacją* E nad U .

Korzystając z powyższych rozstrzygnięć definiujemy **wiązką wektorową** klasy C^∞ rzędu r jako trójkę (E, M, π) . Nadużywając notacji często zamiast odnosić się bezpośrednio do tak zdefiniowanej struktury, będziemy mówili o *wiązce wektorowej* E albo *wiązce wektorowej* $\pi : E \rightarrow M$. W tę myśl **cięciem** wiązki $\pi : E \rightarrow M$ nazywamy odwzorowanie $s : M \rightarrow E$ takie, że $\pi \circ s = id_M$. Przyporządkowuje ono każdemu punktowi $p \in M$ włókno E_p .

Okazuje się, że zbiór wszystkich sekcji klasy C^∞ wiązki E , oznaczany $\Gamma(E)$, ma interesujące własności algebraiczne. Jeśli U jest otwartym podzbiorem rozmaitości E , wówczas analogicznie określimy $\Gamma(U)$. Na tak zadanym zbiorze można zadać strukturę modułu nad pierścieniem $C^\infty(U)$ funkcji klasy C^∞ zadanych na U . $\Gamma(U)$ jest również rzeczywistą przestrzenią wektorową w której możemy wybrać uporządkowaną bazę (s_1, s_2, \dots, s_r) . Jest to tak zwany *reper* wiązki wektorowej $\pi : E \rightarrow M$ nad U .

Szczególnie interesującym nas obiektem tej kategorii jest trójka (TM, M, π) , gdzie

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$$

oraz $\pi : TM \ni v \mapsto p \in M$ jest naturalną projekcją. Jeśli M jest n -rozmaiutością klasy C^k , to tak zdefiniowana wiązka styczna TM okazuje się $2n$ -rozmaiutością klasy C^{k-1} . Korzystając z powyższego wygodnego aparatu matematycznego możemy teraz określić **pole wektorowe** na rozmaitości M po prostu jako cięcie wiązki stycznej TM . Zbiór wszystkich pól wektorowych na M , $\mathfrak{X}(M)$, stanowi szczególny rodzaj \mathcal{F} -modułu, mianowicie *moduł Liego*. Pola wektorowe można w nim rozumieć jako różniczkowania w algebrze \mathcal{F} oraz określony jest w nim operator *komutacji* pól wektorowych, nazywany również *nawiasem Liego*:

$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf).$$

Okazuje się, że komutacja gładkich pól wektorowych nie wyprowadza poza $\mathfrak{X}(M)$ i lokalnie spełnia warunek (1.1), czyli jest różniczkowaniem.

Niech N, M będą rozmaitościami różniczkowalnymi i $F : N \rightarrow M$ gładkim odwzorowaniem między nimi. Wówczas dla każdego $p \in M$ określamy odwzorowanie liniowe między przestrzeniami stycznymi

$$F_{*,p} : T_p N \rightarrow T_{F(p)} M, \quad (1.2)$$

które nazywamy **różniczką** F w $p \in N$. Jeśli $X_p \in T_p N$ jest wektorem stycznym do N w p , wówczas dla dowolnego kielka $f \in C^\infty_{F(p)}(M)$ funkcji w $F(p)$

$$(F_{*,p}(X_p))f = X_p(f \circ F) \in \mathbb{R}. \quad (1.3)$$

gdzie $F_{*,p}(X_p)$ jest wektorem stycznym do N w $F(p)$. Jeśli F jest dyfeomorfizmem, zaś X – polem wektorowym na M , odwzorowanie $F_* \circ X \circ F^{-1}$ nazywamy **popchnięciem** pola wektorowego X i przez F . Dualnie, jeśli $f \in C^\infty_p(M)$ określamy **cofnięcie** $F^* f := F^* \circ f$ funkcji f przez F .

Niech X będzie polem wektorowym klasy C^r na M i niech $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \dots, x^n)$ będzie mapą wokół $p \in M$. Wówczas $X_p = \sum_{j=1}^n a_j(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ jest wektorem stycznym w p , gdzie $a_j \in C^r(M)$ są kielkami funkcji klasy C^r w p . Popchnięcie X przez φ , czyli funkcję wektorową $\mathbf{X} = \varphi_* \circ X(\varphi^{-1}) : \mathbb{R}^n \supset \varphi(U) \ni p \mapsto [a_j(p)]_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ nazywamy **lokalną reprezentacją** X .

$$\begin{array}{ccc} M \supset U & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \\ X \downarrow & & \downarrow \mathbf{X} \\ TU & \xrightarrow{\varphi_*} & T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n \end{array}$$

Chwilą $t \in \mathbb{R}$ będziemy nazywać zmienną czasową. **Polem wektorowym zależnym od czasu** klasy C^r na M nazywamy odwzorowanie $X : \mathbb{R} \times M \rightarrow TM$ takie, że $X_t(m) := X(t, m) \in T_m M$ jest wektorem stycznym w m w chwili t dla wszystkich par $(t, m) \in \mathbb{R} \times M$. Przez $X_t \in \mathfrak{X}^r(M)$ oznaczamy pole wektorowe na M w chwili t , gdzie $\mathfrak{X}^r(M)$ to zbiór wszystkich pól wektorowych klasy C^r na M .

Trajektorią (także: linią przepływu, krzywą całkową) pola wektorowego X w punkcie $m \in M$ nazywamy krzywą $c : \mathbb{R} \supset I \rightarrow M$ o początku w m , taką, że $c'(t) = X_{c(t)}$ dla każdego

$t \in I$. Jeśli $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \dots, x^n)$ jest mapą wokół $c(0) = p$ i $[X^1, X^2, \dots, X^n]^T$ jest lokalną reprezentacją X , funkcja wektorowa $\mathbf{c} = \varphi \circ c, I \ni t \mapsto [c^i(t)]_{i=1}^m \in \mathbb{R}^n$ jest lokalną reprezentacją krzywej c oraz spełniony jest układ równań różniczkowych pierwszego rzędu nazywany układem charakterystyk

$$\begin{aligned}\frac{dc^1}{dt}(t) &= X^1(c^1(t), c^2(t), \dots, c^n(t)), \\ \frac{dc^2}{dt}(t) &= X^2(c^1(t), c^2(t), \dots, c^n(t)), \\ &\vdots \\ \frac{dc^n}{dt}(t) &= X^n(c^1(t), c^2(t), \dots, c^n(t)).\end{aligned}$$

Prędkością $c'(t_0)$ **krzywej** c w chwili $t \in]a, b[$ nazywamy wektor styczny

$$c'(t_0) = c_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) \in T_{c(t_0)}M, \quad (1.4)$$

Zachodzą następujące twierdzenia

Twierdzenie 1.1. Niech X_p będzie wektorem stycznym w punkcie p rozmaitości M i niech $f \in C_p^\infty(M)$ będzie kielkiem funkcji C^∞ w p . Jeśli $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ jest gładką krzywą o początku w p taką, że $c'(0) = X_p$, wówczas

$$X_p f = \frac{d}{dt} \Big|_0 (f \circ c). \quad (1.5)$$

Twierdzenie 1.2. Niech $F : N \rightarrow M$ będzie gładkim odwzorowaniem między rozmaitościami, $p \in N$, $X_p \in T_p N$. Jeśli c jest gładką krzywą o początku w p i jej prędkość w p to X_p , wówczas

$$F_{*,p}(X_p) = \frac{d}{dt} \Big|_0 (F \circ c)(t). \quad (1.6)$$

Czyli popchnięcie prędkości X_p przez F jest wektorem prędkości krzywej $F \circ c$ w M .

Przez \mathcal{D}_X oznaczymy wszystkie pary $(m, t) \in M \times \mathbb{R}$ dla których istnieje trajektoria $c : I \rightarrow M$ pola wektorowego X w punkcie m i zmienna czasowa t zawiera się w pewnym przedziale I . Mówimy, że pole wektorowe jest **zupełne**, jeśli $\mathcal{D}_X = M \times \mathbb{R}$. Oznacza to, że dla każdego punktu na rozmaitości znajdziemy trajektorię cząsteczki próbnej poruszającej się dowolnie długo. Zbiór wszystkich punktów rozmaitości na których pole wektorowe nie znika, $\text{Supp } X = \{m \in M \mid X_m \neq 0\}$, nazywamy **nośnikiem** pola wektorowego X .

Zachodzą następujące twierdzenia

Twierdzenie 1.3. Niech X będzie polem wektorowym na M klasy C^r , $r \geq 1$. Wówczas

- i) $\mathcal{D}_X \supset M \times \{0\}$,
- ii) \mathcal{D}_X jest otwarty w $M \times \mathbb{R}$,
- iii) istnieje jednoznacznie wyznaczone odwzorowanie $F_X : \mathcal{D}_X \rightarrow M$ takie, że krzywa $t \mapsto F_X(m, t)$ jest trajektorią w m dla wszystkich $m \in M$,
- iv) dla $(m, t) \in \mathcal{D}_X$, $F_X(m, t), s) \in \mathcal{D}_X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(m, t + s) \in \mathcal{D}_X$.

Twierdzenie 1.4. Każde pole wektorowe klasy C^r na zwartej rozmaitości M jest **zupełne**.

Określone w Twierdzeniu 1.3 odwzorowanie F_X nazywamy **całką** X , zaś trajektorię $t \mapsto F_X(m, t)$ **maksymalną krzywą całkową** X w m . Jeśli pole wektorowe X jest **zupełne**, F_X nazywamy **przepływem** pola wektorowego X . Każdy przepływ F określa 1-parametrową

grupę dyfeomorfizmów $\{F_t : M \rightarrow M \mid t \in \mathbb{R}\}$ z operacją składania $F_{t_1} \circ F_{t_2} = F_{t_1+t_2}$ dla $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, gdzie F_0 jest elementem neutralnym i $F_t \circ F_{-t} = F_0$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. Jeśli X jest polem wektorowym zależnym od czasu, wówczas analogicznie określamy **przepływ zależny od czasu** $F_{t,s}$ pola X dla którego odwzorowanie $t \mapsto F_{t,s}(m)$ jest trajektorią X o początku w punkcie m i w chwili $t = s$, czyli

$$\frac{d}{dt} F_{t,s}(m) = X(t, F_{t,s}(m)), \quad F_{s,s}(m) = m. \quad (1.7)$$

Wówczas działanie składania staje się przechodnie, $F_{t,s} \circ F_{s,r} = F_{t,r}$, a $F_{t,t}$ jest jego elementem neutralnym.

Niech $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ i $F :]-\varepsilon, \varepsilon[\times U \rightarrow M$ będzie lokalnym przepływem pola wektorowego X w otoczeniu $U \subset M$ punktu $p \in M$. **Pochodną Liego $\mathcal{L}_X Y$ pola wektorowego Y względem X w p** nazywamy wektor

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_{-t*}(Y_{F_t(p)}) - Y_p}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(F_{-t*} Y)_p - Y_p}{t} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F_{-t*} Y)_p. \end{aligned} \quad (1.8)$$

Jeśli ω jest gładką k -formą na rozmaiłości M , to **pochodną Liego $\mathcal{L}_X \omega$ k -formy ω względem X w $p \in M$** nazywamy formę

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \omega)_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_t^*(\omega_{F_t(p)}) - \omega_p}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(F_t^* \omega)_p - \omega_p}{t} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F_t^* \omega)_p. \end{aligned} \quad (1.9)$$

Niech (M, g) będzie zwartą, orientowalną n -rozmaiłością Riemannowską z brzegiem i $\mu \in \Omega^n(M)$ będzie formą objętości na M . Przypomnijmy, że metryka Riemannowska $g : M \rightarrow \Omega^2(M)$ to pole tensorowe $\mathcal{T}_2^0(M)$ takie, że $g_p \in T_m^* M \otimes T_p^* M$ dla $p \in M$ jest iloczynem skalarnym określonym na przestrzeni stycznej $T_p M$. **Formą objętości** na n -rozmaiłości M nazywamy n -formę $\mu \in \Omega^n(M)$ taką, że $\mu(m) \neq 0$ dla wszystkich $m \in M$. Mówimy, że M jest orientowalna, jeśli na M można określić formę objętości.

Niech X będzie polem wektorowym na M . Funkcję $\operatorname{div}_\mu X \in C^\infty(M)$ taką, że

$$\mathcal{L}_X \mu = (\operatorname{div}_\mu X) \mu \quad (1.10)$$

nazywamy **dywergencją** X . Mówimy, że X jest **nieściśliwy** (względem μ), jeśli $\operatorname{div}_\mu X = 0$.

Bibliografia