

Rozdział 1

Płyn idealny

W tym rozdziale naszym celem jest opracowanie modelu fizycznego cieczy idealnej i uzasadnienie jej podstawowych równań ruchu.

1.1 Pojęcia wstępne

Zacniemy od przypomnienia podstawowych pojęć w teorii rozmaitości gładkich. Niech M będzie rzeczywistą n -rozmaitością różniczkowalną klasy C^∞ , p będzie dowolnym punktem rozmaitości M i niech $U, V \subset M$ będą otoczeniami punktu p . Powiemy, że dwie funkcje rzeczywiste $f : U \rightarrow \mathbb{R}, g : V \rightarrow \mathbb{R}$ są *równoważne*, jeśli w pewnym otoczeniu $W \subset U \cap V$ punktu p są one sobie równe. Pod pojęciem **kiełka** funkcji rzeczywistej klasy C^∞ w punkcie $p \in M$ będziemy rozumieli każdą klasę równoważności tak zadanej relacji. Zbiór wszystkich kiełków w punkcie p , $C_p^\infty(M)$, jest wówczas \mathbb{R} -algebrą. Zbiór wszystkich funkcji klasy C^∞ określonych na M będziemy oznaczali $\mathcal{F}(M)$.

Zmierzamy do określenia pojęcia przestrzeni stycznej za pomocą kiełków funkcji. Każde odwzorowanie liniowe $D : C_p^\infty(M) \rightarrow \mathbb{R}$ spełniające warunek:

$$D(fg) = (Df)g(p) + f(Dg)(p) \quad (1.1)$$

nazywamy **różniczkowaniem** w punkcie p . Przestrzeń liniową wszystkich różniczkowań w punkcie p nazywamy **przestrzenią styczną** w p i oznaczamy przez $T_p M$.

Niech $\pi : E \rightarrow M$ będzie dowolnym odwzorowaniem między rozmaitościami E i M . Przeciwobraz $E_p = \pi^{-1}(p)$ punktu p nazywamy **włóknem** w p . Niech $\pi' : E' \rightarrow M$ będzie odwzorowaniem rozmaitości E' i M . Powiemy, że odwzorowanie $\phi : E \rightarrow E'$ **zachowuje włókna**, jeśli $\phi(E_p) \subset E'_p$ dla każdego $p \in M$. Jeśli π jest surjekcją klasy C^∞ oraz

- i) każde włókno $\pi^{-1}(p)$ ma strukturę n -wymiarowej przestrzeni wektorowej,
- ii) dla każdego $p \in M$ istnieje otoczenie $U \in M$ punktu p i zachowujący włókna dyfeomorfizm $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^r$ taki, że dla każdego $q \in U$ zawężenie

$$\phi|_{\pi^{-1}(q)} : \pi^{-1}(q) \rightarrow \{q\} \times \mathbb{R}^r$$

jest izomorfizmem przestrzeni wektorowych,

wówczas π określamy odwzorowaniem *lokalnie trywialnym rzędu r* . Tak określony zbiór U nazywamy zbiorem *trywializującym* E , zaś ϕ nazywamy *trywializacją* E nad U .

Korzystając z powyższych rozstrzygnięć definiujemy **wiązką wektorową** klasy C^∞ rzędu r jako trójkę (E, M, π) , gdzie $\pi : E \rightarrow M$ jest lokalnie trywialną gładką surjekcją rzędu r . Nadużywając notacji często zamiast odnosić się bezpośrednio do tak zdefiniowanej struktury, będziemy mówili o *wiązce wektorowej* E albo *wiązce wektorowej* $\pi : E \rightarrow M$. W tę myśl **cięciem** wiązki $\pi : E \rightarrow M$ nazywamy odwzorowanie $s : M \rightarrow E$ takie, że $\pi \circ s = \text{id}_M$. Przyporządkowuje ono każdemu punktowi $p \in M$ włókno E_p .

Okazuje się, że zbiór wszystkich cięć klasy C^∞ wiązki E , oznaczany $\Gamma(E)$, ma interesujące własności algebraiczne. Jeśli U jest otwartym podzbiorem rozmaitości E , wówczas analogicznie określmmy $\Gamma(U)$. Na tak zadanym zbiorze można zadać strukturę modułu nad pierścieniem $C^\infty(U)$ funkcji klasy C^∞ zadanych na U . $\Gamma(U)$ jest również rzeczywistą przestrzenią wektorową w której możemy wybrać uporządkowaną bazę (s_1, s_2, \dots, s_r) . Jest to tak zwany *reper* wiązki wektorowej $\pi : E \rightarrow M$ nad U .

Szczególnie interesującym nas obiektem tej kategorii jest **wiązka styczna** (TM, M, π) , gdzie

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$$

oraz $\pi : TM \ni v \mapsto p \in M$ jest naturalną projekcją. Jeśli M jest n -rozmaiutością klasy C^k , to tak zdefiniowana wiązka styczna TM okazuje się $2n$ -rozmaiutością klasy C^{k-1} ([1], s. 130). Korzystając z powyższego wygodnego aparatu matematycznego możemy teraz określić **pole wektorowe** na rozmaitości M po prostu jako cięcie wiązki stycznej TM . Zbiór wszystkich pól wektorowych na M , $\mathfrak{X}(M)$, stanowi szczególny rodzaj \mathcal{F} -modułu, mianowicie *moduł Liego*. Pola wektorowe można w nim rozumieć jako różniczkowania w algebrze \mathcal{F} oraz określony jest w nim operator *komutacji* pól wektorowych, nazywany również *nawiasem Liego*:

$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf).$$

Okazuje się, że komutacja gładkich pól wektorowych nie wyprowadza poza $\mathfrak{X}(M)$ i lokalnie spełnia warunek (1.1), czyli jest różniczkowaniem.

Niech V będzie przestrzenią wektorową. Rozważając funkcjonały wieloliniowe na produkcie kilku kopii V i jej dualnych otrzymujemy strukturę, którą nazywamy *przestrzenią tensorów o walencji* $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ nad przestrzenią V ,

$$\mathcal{T}_q^p(V) := L^{p+q}(\underbrace{V^*, \dots, V^*}_{p \text{ razy}}, \underbrace{V, \dots, V}_{q \text{ razy}}; \mathbb{R}), \quad p + q \geq 1.$$

Taką definicję określa się niekiedy *modelem wieloliniowym tensora*. Elementy $\mathcal{T}_q^p(V)$ nazywamy *tensorami q -krotnie kowariantnymi i p -krotnie kontrawariantnymi* albo prościej: *tensorami o walencji* $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$. Dla tensorów $t_1 \in \mathcal{T}_{s_1}^{r_1}(V)$ i $t_2 \in \mathcal{T}_{s_2}^{r_2}(V)$ określamy **iloczyn tensorowy** $t_1 \otimes t_2 \in \mathcal{T}_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$ przepisem

$$(t_1 \otimes t_2)(\beta^1, \dots, \beta^{r_1}, \gamma^1, \dots, \gamma^{r_2}, f_1, \dots, f_{s_1}, g_1, \dots, g_{s_2}) = \\ t_1(\beta^1, \dots, \beta^{r_1}, f_1, \dots, f_{s_1}) t_2(\gamma^1, \dots, \gamma^{r_2}, g_1, \dots, g_{s_2}),$$

gdzie $\beta^j, \gamma^j \in V^*$, $f_j, g_j \in V$. Okazuje się ([2], tw. 6.1.2), że jeśli $\{e_1, \dots, e_n\}$ jest bazą przestrzeni V i $\{e^1, \dots, e^n\}$ jest bazą przestrzeni dualnej, to

$$\{e_{i_1} \otimes \dots \otimes e_{i_q} \otimes e^{j_1} \otimes \dots \otimes e^{j_p} \mid i_1, \dots, i_q, j_1, \dots, j_p = 1, \dots, n\}$$

jest bazą $\mathcal{T}_q^p(V)$, a zatem $\dim \mathcal{T}_q^p(V) = (\dim V)^{p+q}$.

Niech $\pi : TM \rightarrow M$ będzie wiązką styczną i niech $T_m M = \pi^{-1}(m)$ oznacza włókno nad punktem $m \in M$. Określmmy

$$\mathcal{T}_s^r(M) = \bigcup_{m \in M} \mathcal{T}_r^s(T_m M),$$

Oraz niech odwzorowanie $\pi_s^r : \mathcal{T}_s^r(M) \rightarrow M$, $\pi_s^r(e) = m$ dla $e \in \mathcal{T}_s^r(E_m)$ będzie naturalną projekcją elementu z włókna na rozmaitość. Naśladując konstrukcję wiązki stycznej, trójkę $(\mathcal{T}_s^r(M), M, \pi_s^r)$ nazywamy *wiązką tensorową o walencji* $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$ na M . Analogicznie, cięcie wiązki tensorowej określamy **polem tensorowym**.

Okazuje się ([3], §19, tw. 2), że każda permutacja $\pi \in S_n$ jednoznacznie wyznacza *operator permutacji wskaźników* $P^\pi : \mathcal{T}_q^p(V) \rightarrow \mathcal{T}_q^p(V)$

$$(P^\pi t)(\psi^1, \dots, \psi^p, y_1, \dots, y_q) = t(\psi^{\pi(1)}, \dots, \psi^{\pi(p)}, y_1, \dots, y_q),$$

dla $t \in \mathcal{T}_q^p(V)$. Niech $\pi \in S_p$ będzie dowolną permutacją zbioru p -elementowego. Powiemy, że $t \in \mathcal{T}_q^p(V)$ jest **tensorem całkowicie symetrycznym (antysymetrycznym) we wskaźnikach kontrawariantnych**, jeśli

$$P^\pi t = t \quad (\text{odpowiednio: } P^\pi t = \text{sgn } \pi t).$$

Przy powyższych oznaczeniach na przestrzeni $\mathcal{T}_q^p(V)$ wprowadza się operator

$$\mathcal{A} = \frac{1}{p!} \sum_{\pi \in S_p} \text{sgn } \pi P^\pi,$$

nazywany *operatorem antysymetryzacji*. Można wykazać ([3], §20, tw. 4), że tensor t jest antysymetryczny wtedy i tylko, gdy $\mathcal{A}t = t$. Wprowadźmy oznaczenie¹ dla przestrzeni tensorów całkowicie antysymetrycznych

$$\Lambda^p(V) := \mathcal{AT}_0^p(V) \subseteq \mathcal{T}_0^p(V), \quad \Lambda^p(V^*) := \mathcal{AT}_p^0(V) \subseteq \mathcal{T}_p^0(V), \quad p \geq 1.$$

Ich elementy nazywamy odpowiednio **p -wektorami** i **p -formami**. Dla wygody przyjmujemy ponadto, że

$$\Lambda^0(V) := \Lambda^0(V^*) = \mathbb{R}$$

Iloczynem zewnętrznych p -wektorów (odpowiednio: **p -form**) $t_i \in \Lambda^{p_i}(V)$, $s^i \in \Lambda^{p_i}(V^*)$, $i = 1, \dots, k$, nazywamy odpowiednio tensory

$$t_1 \wedge \dots \wedge t_k = \mathcal{A}(t_1 \otimes \dots \otimes t_k), \quad s^1 \wedge \dots \wedge s^k = \mathcal{A}(s^1 \otimes \dots \otimes s^k).$$

Jeśli V jest przestrzenią n -wymiarową, wówczas ([3], §20, tw. 7)

$$\dim \Lambda^p(V) = \dim \Lambda^p(V^*) = \binom{n}{p}.$$

W szczególności przestrzenie $\Lambda^n(V)$ i $\Lambda^n(V^*)$ są jednowymiarowe.

Będziemy teraz zmierzać do określenia form różniczkowych na rozmaitościach różniczkowalnych. Niech p będzie punktem z rozmaitości M . **Przestrzenią kostyczną** w p do M nazywamy przestrzeń dualną do przestrzeni stycznej $T_p M$

$$T_p^* M := (T_p M)^* = L(T_p M, \mathbb{R}),$$

Jej elementy są *1-formami*, które nazywamy **kowektorami**. Podobnie jak w przypadku wiązki stycznej, określając

$$T^* M = \bigcup_{p \in M} T_p^* M.$$

możemy zadać strukturę wiązki wektorowej $(T^* M, M, \phi)$ rzędu $2n$ ([1], s. 192), którą nazywamy **wiązką kostyczną** na M . Rozważmy zbiór

$$\Lambda^k(T^* M) := \bigcup_{p \in M} \Lambda^k(T_p^* M) = \bigcup_{p \in M} \mathcal{AT}_k^0(T_p M)$$

i zadajmy odwzorowanie $\pi : \Lambda^k(T^* M) \ni \alpha \mapsto p \in M$ dla $\alpha \in \Lambda^k(T_p^* M)$. Okazuje się ([1], s. 203), że π jest wiązką wektorową rzędu $\binom{n}{k}$, której cięcia są antysymetrycznymi k -kowariantnymi (i 0-kontrawariantnymi) polami tensorowymi na M . Każde k -kowariantne pole tensorowe na M , które jest antysymetryczne, nazywamy **k -formą różniczkową** na M .

Niech X będzie polem wektorowym klasy C^r na M i niech $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \dots, x^n)$ będzie mapą wokół $p \in M$. Wówczas $X_p = \sum_{j=1}^n a_j(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ jest wektorem stycznym w p , gdzie $a_j \in C^r(M)$ są kiełkami funkcji klasy C^r w p . Popchnięcie X przez φ , czyli funkcję wektorową $\mathbf{X} = \varphi_* \circ X(\varphi^{-1}) : \mathbb{R}^n \supset \varphi(U) \ni p \mapsto [a_j(p)]_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ nazywamy **lokalną reprezentacją X** .

¹ Jest to nawiązanie do algebraicznej konstrukcji przeprowadzonej za pomocą potęgowania zewnętrznego; okazuje się ona izomorficzna z przyjętymi przestrzeniami; szczegółów można szukać w [4].

$$\begin{array}{ccc}
M \supset U & \xrightarrow{\varphi} & \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \\
X \downarrow & & \downarrow \mathbf{X} \\
TU & \xrightarrow{\varphi_*} & T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n
\end{array}$$

Chwilą $t \in \mathbb{R}$ będziemy nazywać zmienną czasową. **Polem wektorowym zależnym od czasu** klasy C^r na M nazywamy odwzorowanie $X : \mathbb{R} \times M \rightarrow TM$ takie, że $X_t(m) := X(t, m) \in T_m M$ jest wektorem stycznym w m w chwili t dla wszystkich par $(t, m) \in \mathbb{R} \times M$. Przez $X_t \in \mathfrak{X}^r(M)$ oznaczamy pole wektorowe na M w chwili t , gdzie $\mathfrak{X}^r(M)$ to zbiór wszystkich pól wektorowych klasy C^r na M .

Trajektorią (także: linią przepływu, krzywą całkową) pola wektorowego X w punkcie $m \in M$ nazywamy krzywą $c : \mathbb{R} \supset I \rightarrow M$ o początku w m , taką, że $c'(t) = X_{c(t)}$ dla każdego $t \in I$. Jeśli $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \dots, x^n)$ jest mapą wokół $c(0) = p$ i $[X^1, X^2, \dots, X^n]^T$ jest lokalną reprezentacją X , funkcja wektorowa $\mathbf{c} = \varphi \circ c, I \ni t \mapsto [c^i(t)]_{i=1}^n \in \mathbb{R}^n$ jest lokalną reprezentacją krzywej c oraz spełniony jest układ równań różniczkowych pierwszego rzędu nazywany układem charakterystyk

$$\begin{aligned}
\frac{dc^1}{dt}(t) &= X^1(c^1(t), c^2(t), \dots, c^n(t)), \\
\frac{dc^2}{dt}(t) &= X^2(c^1(t), c^2(t), \dots, c^n(t)), \\
&\vdots \\
\frac{dc^n}{dt}(t) &= X^n(c^1(t), c^2(t), \dots, c^n(t)).
\end{aligned}$$

Prędkością $c'(t_0)$ **krzywej** c w chwili $t \in]a, b[$ nazywamy wektor styczny

$$c'(t_0) = c_* \left(\frac{d}{dt} \Big|_{t_0} \right) \in T_{c(t_0)} M, \quad (1.2)$$

Zachodzą następujące twierdzenia

Twierdzenie 1.1. Niech X_p będzie wektorem stycznym w punkcie p rozmaitości M i niech $f \in C_p^\infty(M)$ będzie kielkiem funkcji C^∞ w p . Jeśli $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ jest gładką krzywą o początku w p taką, że $c'(0) = X_p$, wówczas

$$X_p f = \frac{d}{dt} \Big|_0 (f \circ c). \quad (1.3)$$

Twierdzenie 1.2. Niech $F : N \rightarrow M$ będzie gładkim odwzorowaniem między rozmaitościami, $p \in N$, $X_p \in T_p N$. Jeśli c jest gładką krzywą o początku w p i jej prędkość w p to X_p , wówczas

$$F_{*,p}(X_p) = \frac{d}{dt} \Big|_0 (F \circ c)(t). \quad (1.4)$$

Czyli popchnięcie prędkości X_p przez F jest wektorem prędkości krzywej $F \circ c$ w M .

Przez \mathcal{D}_X oznaczmy wszystkie pary $(m, t) \in M \times \mathbb{R}$ dla których istnieje trajektoria $c : I \rightarrow M$ pola wektorowego X w punkcie m i zmienna czasowa t zawiera się w pewnym przedziale I . Mówimy, że pole wektorowe jest **zupełne**, jeśli $\mathcal{D}_X = M \times \mathbb{R}$. Oznacza to, że dla każdego punktu na rozmaitości znajdziemy trajektorię cząsteczki próbnej poruszającej się dowolnie długo. Zbiór wszystkich punktów rozmaitości na których pole wektorowe nie znika, $\text{Supp } X = \{m \in M \mid X_m \neq 0\}$, nazywamy **nośnikiem** pola wektorowego X .

Zachodzą następujące twierdzenia

Twierdzenie 1.3. Niech X będzie polem wektorowym na M klasy C^r , $r \geq 1$. Wówczas

- i) $\mathcal{D}_X \supset M \times \{0\}$,
- ii) \mathcal{D}_X jest otwarty w $M \times \mathbb{R}$,
- iii) istnieje jednoznacznie wyznaczone odwzorowanie $F_X : \mathcal{D}_X \rightarrow M$ takie, że krzywa $t \mapsto F_X(m, t)$ jest trajektorią w m dla wszystkich $m \in M$,
- iv) dla $(m, t) \in \mathcal{D}_X$, $F_X(m, t)$, $s) \in \mathcal{D}_X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(m, t + s) \in \mathcal{D}_X$.

Twierdzenie 1.4. Każde pole wektorowe klasy C^r na zwartej rozmaitości M jest zupełne.

Określone w Twierdzeniu 1.3 odwzorowanie F_X nazywamy **całką** X , zaś trajektorię $t \mapsto F_X(m, t)$ **maksymalną krzywą całkową** X w m . Jeśli pole wektorowe X jest zupełne, F_X nazywamy **przepływem** pola wektorowego X . Każdy przepływ F określa 1-parametrową grupę dyfeomorfizmów $\{F_t : M \rightarrow M \mid t \in \mathbb{R}\}$ z operacją składania $F_{t_1} \circ F_{t_2} = F_{t_1+t_2}$ dla $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, gdzie F_0 jest elementem neutralnym i $F_t \circ F_{-t} = F_0$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. Jeśli X jest polem wektorowym zależnym od czasu, wówczas analogicznie określamy **przepływ zależny od czasu** $F_{t,s}$ pola X dla którego odwzorowanie $t \mapsto F_{t,s}(m)$ jest trajektorią X o początku w punkcie m i w chwili $t = s$, czyli

$$\frac{d}{dt} F_{t,s}(m) = X(t, F_{t,s}(m)), \quad F_{s,s}(m) = m. \quad (1.5)$$

Wówczas działanie składania staje się przechodnie, $F_{t,s} \circ F_{s,r} = F_{t,r}$, a $F_{t,t}$ jest jego elementem neutralnym.

Niech $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ i $F :]-\varepsilon, \varepsilon[\times U \rightarrow M$ będzie lokalnym przepływem pola wektorowego X w otoczeniu $U \subset M$ punktu $p \in M$. **Pochodną Liego $\mathcal{L}_X Y$ pola wektorowego Y względem X w p** nazywamy wektor

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X Y)_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_{-t*}(Y_{F_t(p)}) - Y_p}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(F_{-t*} Y)_p - Y_p}{t} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F_{-t*} Y)_p. \end{aligned} \quad (1.6)$$

Jeśli ω jest gładką k -formą na rozmaitości M , to **pochodną Liego $\mathcal{L}_X \omega$ k -formy ω względem X w $p \in M$** nazywamy formę

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_X \omega)_p &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{F_t^*(\omega_{F_t(p)}) - \omega_p}{t} = \\ &= \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(F_t^* \omega)_p - \omega_p}{t} = \\ &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} (F_t^* \omega)_p. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Niech (M, g) będzie zwartą, orientowalną n -rozmaitością Riemannowską z brzegiem i $\mu \in \Omega^n(M)$ będzie formą objętości na M . Przypomnijmy, że metryka Riemannowska $g : M \rightarrow \Omega^2(M)$ to pole tensorowe $\mathcal{T}_2^0(M)$ takie, że $g_p \in T_m^* M \otimes T_p^* M$ dla $p \in M$ jest iloczynem skalarnym określonym na przestrzeni stycznej $T_p M$. **Formą objętości** na n -rozmaitości M nazywamy n -formę $\mu \in \Omega^n(M)$ taką, że $\mu(m) \neq 0$ dla wszystkich $m \in M$. Mówimy, że M jest orientowalna, jeśli na M można określić formę objętości.

Niech X będzie polem wektorowym na M . Funkcję $\operatorname{div}_\mu X \in C^\infty(M)$ taką, że

$$\mathcal{L}_X \mu = (\operatorname{div}_\mu X) \mu \quad (1.8)$$

nazywamy **dywergencją** X . Mówimy, że X jest **nieściśliwy** (względem μ), jeśli $\operatorname{div}_\mu X = 0$.

Bibliografia

- [1] Loring W. Tu. *An Introduction to Manifolds*. Springer Science & Business Media, 2010.
- [2] Jerrold E. Marsden, Tudor Ratiu, and Ralph Abraham. *Manifolds, Tensor Analysis, and Applications*. Springer-Verlag Publishing Company, Inc., 2002.
- [3] Andrzej Herdegen. *Algebra liniowa i geometria*. Wydawnictwo Discepto, 2010.
- [4] Krzysztof Maurin. *Analiza, Wstęp do analizy globalnej*. Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1971.