

Rozdział 1

Płyn idealny

Naszym celem jest uzasadnienie podstawowych równań ruchu cieczy idealnej.

Niech (M, g) będzie zwartą, orientowalną n -rozmaiutością Riemannowską z brzegiem i $\omega \in \Omega^n(M)$ będzie formą objętości na M . Przypomnijmy, że g jest indeksowaną przez M rodziną iloczynów skalarnych określonych na przestrzeniach stycznych do M , $g_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$ dla $p \in M$ i $p \mapsto g_p(X_p, Y_p)$, gdzie X i Y są różniczkowalnymi polami wektorowymi na M .

Niech X będzie polem wektorowym klasy C^r na M i niech $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \dots, x^n)$ będzie mapą wokół $p \in M$. Wówczas $X_p = \sum_{j=1}^n a_j(p) \frac{\partial}{\partial x^j} \Big|_p$ jest wektorem stycznym w p , gdzie $a_j \in C^r(M; \mathbb{R})$. Funkcję wektorową $\mathbf{X} : U \ni p \mapsto [a_j(p)]_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ nazywamy **lokalną reprezentacją** X .

Polem wektorowym zależnym od czasu klasy C^r na M nazywamy odwzorowanie $X : \mathbb{R} \times M \rightarrow TM$ takie, że $X_t(m) := X(t, m) \in T_m M$ jest wektorem stycznym w m w chwili t dla wszystkich par $(t, m) \in \mathbb{R} \times M$. Przez $X_t \in \mathfrak{X}(M)$ oznaczamy pole wektorowe na M w chwili t , gdzie $\mathfrak{X}(M)$ to zbiór wszystkich pól wektorowych klasy C^r na M .

Przepływem (także operatorem ewolucji) na M nazywamy 1-parametrową grupę dyfeomorfizmów $\varphi_t : M \rightarrow M$ z operacją składania $\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1+t_2}$ dla $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, gdzie φ_0 jest elementem neutralnym i $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_0$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$.

Trajektorią (także: linią przepływu, krzywą całkową) pola wektorowego X w punkcie $m \in M$ nazywamy krzywą $c : \mathbb{R} \supset I \rightarrow M$ o początku w m , taką, że $c'(t) = X(c(t))$ dla każdego $t \in I$.

Pojęcia pola wektorowego, przepływu i trajektorii wiąże następujące twierdzenie

Twierdzenie 1.1 (O lokalnym istnieniu trajektorii). *Niech p będzie dowolnym punktem rozmaiutości M i $X_p \in T_p M$ dowolnym wektorem stycznym w p . Wówczas dla pewnego $\varepsilon > 0$ istnieje gładka krzywa $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\rightarrow M$ o początku w p taka, że $c'(0) = X_p$.*

Wówczas $u(x, t)$ oznacza prędkość cząsteczki próbnej przechodzącej przez punkt $x \in M$.

Bibliografia