# Rozdział 1

# Ustalenia początkowe

**Definicja 1.1.** [1, s. 253] Niech M będzie przestrzeń Hausdorffa lokalnie homeomorficzna z ustaloną przestrzenią Banacha $E$. Wówczas przestrzeń $M$ nazywamy *rozmaitością topologiczną*

Niech $M$ będzie lokalne homeomorfizmy $M \supset \Omega_\chi \to \chi(\Omega_\chi) \subset E$. $M$ nazywamy *mapą.*

**Definicja 1.2.** [1, s. 41] Niech $(X, \tau)$ będzie przestrzenią Hausdorffa, przy czym $X$ jest grupą z działaniem grupowym $X \times X \ni (x, y) \to x\dot{y} \in X$ i elementem neutralnym $e$. Przestrzeń $(X, \tau)$ nazywa się *grupą topologiczną*, gdy odwzorowania:

$$X \times X \ni (x, y) \to x\dot{y} \in Y,$$
$$X \ni x \to x^{-1} \in X$$

są ciągłe.

**Definicja 1.3.** [1, s. 253] *Strukturą różniczkowalną* (albo też *atlasem*) klasy $p$ nazywa się taką rodzinę $\{(\chi, \Omega_\chi)\}$ map, że:

(a) Rodzina $\{\Omega_\chi\}$ stanowi otwarte pokrycie przestrzeni $M$ (tzn. każdy punkt $x \in M$ ma otoczenie homeomorficzne z podzbiorem w $E$).

(b) Jeśli $(\chi_1, \Omega_{\chi_1})$ i $(\chi_2, \Omega_{\chi_2})$, to odwzorowanie

$$(\chi_1 \circ \chi_2^{-1}) : E \supset \chi_2(\Omega_{\chi_1} \cap \Omega_{\chi_2}) \to \chi_1(\Omega_{\chi_1} \cap \Omega_{chi_2}) \subset E$$

jest dyfeomorfizmem klasy $p$ (odwzorowaniem $p$ razy różniczkowalnym w sposób ciągły, mającym odwzorowanie odwrotne, również klasy $p$ razy różniczkowalne w sposób ciągły).

**Definicja 1.4.** [1, s. 253] Atlas $A$ nazywamy *atlasem zupełnym klasy* $p$, jeśli dodanie do niego mapy powoduje, że otrzymany atlas nie będzie już klasy $p$.

**Definicja 1.5.** [1, s. 253] Parę $(M, \{(\chi, \Omega_\chi)\})$, gdzie $M$ jest przestrzenią Hausdorffa, a $\{(\chi, \Omega_\chi)\}$ jest atlasem zupełnym klasy $p$, nazywa się *rozmaitością różniczkowalną klasy* $p$*, modelowaną na przestrzeni Banacha* $E$

**Definicja 1.6.** [1, s. 300] Niech $W$, $M$ będą rozmaitościami różniczkowalnymi, $p : W \to M$ surjekcją (rzutem) różniczkowalną, $F$ przestrzenią topologiczną, a $G$ efektywną różcznikowalną grupą odwzorowań przestrzeni $F$ na siebie. Jeżeli

(a) istnieje pokrycie otwarte $(\Omega_i, i \in I)$ przestrzeni $M$ oraz takie dyfeomorfizmy $h_i : p^{-1}(\Omega_i) \to \Omega_i \times F$, że odwzorywują „włókno" $p^{-1}(x)$ na $\{x\} \times F$,

(b) istnieją odwzorowania $g_{ij} : \Omega_{ij} \to G$ dla $i, j \in I$ takie, że $h_i \circ h_j^{-1}(a, f) = (a, g_{ij}(a)f)$ dla $a \in \Omega_{ij}$, $f \in F$,

to zespół $W = (W, p, M, F, G)$ nazywamy *przestrzenią wiązki*, $F$ *włóknem typowym*, $G$ *grupą struktury wiązki*, $g_{ij}$ *odwzorowaniem przejścia*, $h_i$ *mapami*, a zespół wszystkich tych danych *wiązką różniczkowalną*.

**Definicja 1.7.** [2, s. 17] Niech $U$ będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, $k \geq 1$. Równanie postaci

$$F(D^k u(x), D^{k-1} u(x), \ldots, Du(x), u(x), x) = 0, \ (x \in U) \tag{1.1}$$

nazywamy równaniem różniczkowym cząstkowym $k$-tego rzędu; funkcja

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$$

jest dana, zaś $u : U \to \mathbb{R}$ jest niewiadomą.

**Definicja 1.8.** [2, s. 18]

(i) Powiemy, że równanie cząstkowe (1.1) jest liniowe, jeśli jest postaci

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

(ii) Równanie (1.1) jest półliniowe lub inaczej semiliniowe, jeśli jest postaci

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \ldots, Du, u, x) = 0$$

(iii) Równanie (1.1) jest quasi-liniowe, jeśli jest postaci

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(D^{k-1}u, \ldots, Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \ldots, Du, u, x) = 0$$

(iv) Równanie (1.1) jest całkowicie nieliniowe, jeśli funkcja $F$ zależy nieliniowo od pochodnych najwyższego rzędu.

# Bibliografia

[1] Krzysztof Maurin. *Analiza, Wstęp do analizy globalnej.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1971.

[2] Lawrence C. Evans. *Równania różniczkowe cząstkowe.* Wydawnictwo Naukowe PWN, 2002.