Rozdział 1

Płyn idealny

Naszym celem jest uzasadnienie podstawowych równań ruchu cieczy idealnej.

Niech (M, g) będzie zwartą, orientowalną n-rozmaitością Riemannowską z brzegiem i $\omega \in \Omega^n(M)$ będzie formą objętości na M. Przypomnijmy, że g jest indeksowaną przez M rodziną iloczynów skalarnych określonych na przestrzeniach stycznych do M, $g_p : T_pM \times T_pM \to \mathbb{R}$ dla $p \in M$ i $p \mapsto g_p(X_p, Y_p)$, gdzie X i Y są różniczkowalnymi polami wektorowymi na M.

Niech X będzie polem wektorowym klasy C^r na M i niech $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ będzie mapą wokół $p \in M$. Wówczas $X_p = \sum_{j=1}^n a_j(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$ jest wektorem stycznym w p, gdzie $a_j \in C^r(M; \mathbb{R})$. Funkcję wektorową $\mathbf{X} : U \ni p \mapsto [a_j(p)]_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ nazywamy **lokalną reprezentacją** X.

Przez $t \in \mathbb{R}$ będziemy na ogół oznaczać zmienną czasową. **Polem wektorowym zależnym od czasu** klasy C^r na M nazywamy odwzorowanie $X : \mathbb{R} \times M \to TM$ takie, że $X_t(m) := X(t, m) \in T_mM$ jest wektorem stycznym w m w chwili t dla wszytkich par $(t, m) \in \mathbb{R} \times M$. Przez $X_t \in \mathfrak{X}^r(M)$ oznaczamy pole wektorowe na M w chwili t, gdzie $\mathfrak{X}^r(M)$ to zbiór wszystkich pól wektorowych klasy C^r na M.

Przepływem (także operatorem ewolucji) na M nazywamy 1-parametrową grupę dyfeomorfizmów $\varphi_t : M \to M$ z operacją składania $\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1+t_2}$ dla $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, gdzie φ_0 jest elementem neutralnym i $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_0$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$.

Trajektorią (także: linią przepływu, krzywą całkową) pola wektorowego X w punkcie $m \in M$ nazywamy krzywą $c : \mathbb{R} \supset I \to M$ o początku w m, taką, że $c'(t) = X(c(t))$ dla każdego $t \in I$. Jeśli $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ jest mapą wokół $c(0) = p$ i $[X^1, X^2, \ldots, X^n]^T$ jest lokalną reprezentacją X, funkcja wektorowa $\mathbf{c} = \varphi \circ c$, $I \ni t \mapsto \left[c^i(t)\right]_{i=1}^m \in \mathbb{R}^n$ jest lokalną reprezentacją krzywej c oraz spełniony jest układ równań różniczkowch pierwszego rzędu

$$\begin{aligned}
\frac{dc^1}{dt}(t) &= X^1(c^1(t), c^2(t), \ldots, c^n(t)),\\
\frac{dc^2}{dt}(t) &= X^2(c^1(t), c^2(t), \ldots, c^n(t)),\\
&\vdots\\
\frac{dc^n}{dt}(t) &= X^n(c^1(t), c^2(t), \ldots, c^n(t)).
\end{aligned}$$

Pojęcia pola wektorowego, przepływu i trajektorii wiąże następujące twierdzenie

Twierdzenie 1.1 (O lokalnym istnieniu trajektorii)**.** *Niech p będzie dowolnym punktem rozmaitości M i $X_p \in T_pM$ dowolnym wektorem stycznym w p. Wówczas dla pewnego $\varepsilon > 0$ istnieje gładka krzywa $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ o początku w p taka, że $c'(0) = X_p$.*

Wówczas $u(x, t)$ oznacza prędkość cząsteczki próbnej przechodzącej przez punkt $x \in M$.

Bibliografia