Rozdział 1

Płyn idealny

W tym rozdziale naszym celem jest opracowanie modelu fizycznego cieczy idealnej i uzasadnienie jej podstawowych równań ruchu.

1.1 Pojęcia wstępne

Zaczniemy od przypomnienia podstawowych pojęć w teorii rozmaitości gładkich. Niech M będzie rzeczywistą n-rozmaitością różniczkowalną klasy C^∞, p będzie dowolnym punktem rozmaitości M i niech $U, V \subset M$ będą otoczeniami punktu p. Powiemy, że dwie funkcje rzeczywiste $f : U \to \mathbb{R}, g : V \to \mathbb{R}$ są *równoważne*, jeśli w pewnym otoczeniu $W \subset U \cap V$ punktu p są one sobie równe. Pod pojęciem **kiełka** funkcji rzeczywistej klasy C^∞ w punkcie $p \in M$ będziemy rozumieli każdą klasę równoważności tak zadanej relacji. Zbiór wszystkich kiełków w punkcie p, $C^\infty_p(M)$, jest wówczas $\mathbb{R}$-algebrą. Zbiór wszystkich funkcji klasy C^∞ określonych na M będziemy oznaczali $\mathcal{F}(M)$.

Zmierzamy do określenia pojęcia przestrzeni stycznej za pomocą kiełków funkcji. Każde odwzorowanie liniowe $D : C^\infty_p(M) \to \mathbb{R}$ spełniające warunek:

$$D(fg) = (Df)g(p) + f(Dg)(p) \tag{1.1}$$

nazywamy **różniczkowaniem** w punkcie p. Przestrzeń liniową wszystkich różniczkowań w punkcie p nazywamy **przestrzenią styczną** w p i oznaczamy przez T_pM.

Niech $\pi : E \to M$ będzie dowolnym odwzorowaniem między rozmaitościami E i M. Przeciwobraz $E_p = \pi^{-1}(p)$ punktu p nazywamy **włóknem** w p. Niech $\pi' : E' \to M$ będzie odwzorowaniem rozmaitości E' i M. Powiemy, że odwzorowanie $\phi : E \to E'$ **zachowuje włókna**, jeśli $\phi(E_p) \subset E'_p$ dla każdego $p \in M$. Jeśli π jest surjekcją klasy C^∞ oraz

i) każde włókno $\pi^{-1}(p)$ ma strukturę n-wymiarowej przestrzeni wektorowej,

ii) dla każdego $p \in M$ istnieje otoczenie $U \in M$ punktu p i zachowujący włókna dyfeomorfizm $\phi : \pi^{-1}(U) \to U \times \mathbb{R}^r$ taki, że dla każdego $q \in U$ zawężenie

$$\phi|_{\pi^{-1}(q)} : \pi^{-1}(q) \to \{q\} \times \mathbb{R}^r$$

jest izomomorfizmem przestrzeni wektorowych,

wówczas π określamy odwzorowaniem *lokalnie trywialnym rzędu r*. Tak określony zbiór U nazywamy zbiorem *trywializującym E*, zaś ϕ nazywamy *trywializacją E* nad U.

Korzystając z powyższych rozstrzygnięć definiujemy **wiązką wektorową** klasy C^∞ rzędu r jako trójkę (E, M, π). Nadużywając notacji często zamiast odnosić się bezpośrednio do tak zdefiniowanej struktury, będziemy mówili o *wiązce wektorowej E* albo *wiązce wektorowej* $\pi : E \to M$. W tę myśl **cięciem** wiązki $\pi : E \to M$ nazywamy odwzorowanie $s : M \to E$ takie, że $\pi \circ s = id_M$. Przyporządkowuje ono każdemu punktowi $p \in M$ włókno E_p.

Okazuje się, że zbiór wszystkich sekcji klasy C^∞ wiązki E, oznaczany $\Gamma(E)$, ma interesujące własności algebraiczne. Jeśli U jest otwartym pozdbiorem rozmaitości E, wówczas analogicznie określmy $\Gamma(U)$. Na tak zadanym zbiorze można zadać strukturę modułu nad pierścieniem $C^\infty(U)$ funkcji klasy C^∞ zadanych na U. $\Gamma(U)$ jest również rzeczywistą przestrzeńą wektorowa w której możemy wybrać uporządkowaną bazę $(s_1, s_2, \ldots, s_r)$. Jest to tak zwany *reper* wiązki wektorowej $\pi : E \to M$ nad U.

Szczególnie interesującym nas obiektem tej kategorii jest **wiązka styczna** (TM, M, π), gdzie

$$TM := \bigcup_{p \in M} T_p M$$

oraz $\pi : TM \ni v \mapsto p \in M$ jest naturalną projekcją. Jeśli M jest n-rozmaitością klasy C^k, to tak zdefiniowana wiązka styczna TM okazuje się $2n$-rozmaitością klasy C^{k-1}. Korzystając z powyższego wygodnego aparatu matematycznego możemy teraz określić **pole wektorowe** na rozmaitości M po prostu jako cięcie wiązki stycznej TM. Zbiór wszystkich pól wektorowych na M, $\mathfrak{X}(M)$, stanowi szczególny rodzaj $\mathcal{F}$-modułu, mianowicie *moduł Liego*. Pola wektorowe można w nim rozumieć jako różniczkowania w algebrze $\mathcal{F}$ oraz określony jest w nim operator *komutacji* pól wektorowych, nazywany również *nawiasem Liego*:

$$[X, Y]f := X(Yf) - Y(Xf).$$

Okazuje się, że komutacja gładkich pól wektorowych nie wyprowadza poza $\mathfrak{X}(M)$ i lokalnie spełnia warunek (1.1), czyli jest różniczkowaniem.

Przez $L^k(V; \mathbb{R})$ oznaczać będziemy przestrzeń wszystkich funkcjonałów k-liniowych określonych na przestrzeni liniowej V. Rozważmy skończenie wymiarowe rzeczywiste przestrzenie wektorowe V_1, V_2, $\ldots$, V_r i odpowiednio ich przestrzenie dualne V_1^*, V_2^*, $\ldots$, V_r^*. Dzięki kanonicznemu izomorfizmowi przestrzeni i ich dwusprzężonych, przestrzenie V_i możemy traktować jako przestrzenie funkcjonałów na V_i^*,

$$x_i : V_i^* \ni \varphi^i \mapsto \langle \varphi^i, x_i \rangle_i := x_i(\varphi^i) \in \mathbb{R}$$

gdzie $\langle *, * \rangle_i$ jest funkcją dualności pary przestrzeni V_i^*, V_i. Możemy określić iloczyn tak rozumianych funkcji,

$$x_1 \otimes \cdots \otimes x_r : V_1^* \times \cdots \times V_r^* \mapsto \mathbb{R},$$
$$(x_1 \otimes \cdots \otimes x_r)(\varphi^1, \ldots, \varphi^r) := \langle \varphi^1, x_1 \rangle_1 \ldots \langle \varphi^r, x_r \rangle_r .$$

Tak określone działanie jest łączne, r-liniowe, ciągłe i nie jest przemienne. Dla wygody oznaczamy $\mathcal{T}_0^0(V) = \mathbb{R}$. Wektor postaci $x_1 \otimes \cdots \otimes x_r$ nazywamy *iloczynem tenstorowym* wektorów $x_1, \ldots, x_r$.

Niech V będzie przestrzenią wektorową. Rozważając funkcjonały liniowe na iloczynie tensorowym kilku kopii V i jej dualnych otrzymujemy strukturę, którą nazywamy *przestrzenią tensorów o walencji* $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$ nad przestrzenią V,

$$\mathcal{T}_q^p(V) := L^{p+q}(\underbrace{V^* \otimes \cdots \otimes V^*}_{p \text{ razy}} \otimes \underbrace{V \otimes \cdots \otimes V}_{q \text{ razy}}; \mathbb{R}), \quad p + q \geq 1.$$

Taką definicję określa się niekiedy *klasyczną definicją tensora*. Elementy $\mathcal{T}_q^p(V)$ nazywamy *tensorami q-krotnie kowariantnymi i p-krotnie kontrawariantnymi* albo prościej: *tensorami o walencji* $\begin{bmatrix} p \\ q \end{bmatrix}$. Dla tensorów $t_1 \in \mathcal{T}_{s_1}^{r_1}(V)$ i $t_2 \in \mathcal{T}_{s_2}^{r_2}(V)$ mamy $t_1 \otimes t_2 \in \mathcal{T}_{s_1+s_2}^{r_1+r_2}(V)$ oraz

$$\begin{aligned}(t_1 \otimes t_2)(\beta^1, \ldots, \beta^{r_1}, \gamma^1, \ldots, \gamma^{r_2}, f_1, \ldots, f_{s_1}, g_1, \ldots, g_{s_2}) = \\ t_1(\beta^1, \ldots, \beta^{r_1}, f_1, \ldots, f_{s_1})\, t_2(\gamma^1, \ldots, \gamma^{r_2}, g_1, \ldots, g_{s_2}).\end{aligned}$$

Okazuje się, że jeśli $\{e_1, \ldots, e_n\}$ jest bazą przestrzeni V i $\{e^1, \ldots, e^n\}$ jest bazą przestrzeni dualnej, to

$$\left\{ e_{i_1} \otimes \cdots \otimes e_{i_q} \otimes e^{j_1} \otimes \cdots \otimes e^{j_p} \,|\, i_1, \ldots, i_q, j_1, \ldots, j_p = 1, \ldots, n \right\}$$

jest bazą $\mathcal{T}^p_q(V)$, a zatem $\dim\mathcal{T}^p_q(V) = (\dim V)^{p+q}$.

Niech $\pi : TM \to M$ będzie wiązką styczną i niech $T_mM = \pi^{-1}(m)$ oznacza włókno nad punktem $m \in M$. Określmy

$$\mathcal{T}^r_s(M) = \bigcup_{m\in M} T^s_r(T_mM),$$

oraz niech odwzorowanie $\pi^r_s : \mathcal{T}^r_s(M) \to M$, $\pi^r_s(e) = m$ dla $e \in \mathcal{T}^r_s(E_m)$ będzie naturalną projekcją elementu z włókna na rozmaitość. Naśladując konstrukcję wiązki stycznej, trójkę $(\mathcal{T}^r_s(M), M, \pi^r_s(e))$ nazywamy *wiązką tensorową* o walencji $\left[\begin{smallmatrix} r \\ s \end{smallmatrix}\right]$ na M. Analogicznie, cięcie wiązki tensorowej określamy **polem tensorowym**. Pole tensorowe k-kowariantne i 0-kontrawariantne na M, które jest antysymetryczne, nazywamy **k-formą różniczkową** na M.

Jeśli V jest przestrzenią wektorową, przez $A_k(V) \subset \mathcal{T}^0_k(V)$ oznaczamy podprzestrzeń liniową alternujących k-tensorów na V, oznaczaną czasem $\bigwedge^k(V^\vee)$ przez nawiązanie do izomorficznej konstrukcji na gruncie algebr Grassmanna. W tej pracy wyłącznie zaznaczymy tę odpowiedniość przez stosowanie tej notacji, gdyż wzmiankowana konstrukcja daleko wykracza poza jej zakres. Piszemy odpowiednio:

$$\begin{aligned}
&\textstyle\bigwedge^0(V^\vee) = A_0(V) = \mathbb{R}\\
&\textstyle\bigwedge^1(V^\vee) = A_1(V) = V^*\\
&\textstyle\bigwedge^2(V^\vee) = A_2(V), \text{ i tak dalej.}
\end{aligned}$$

Niech X będzie polem wektorowym klasy C^r na M i niech $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ będzie mapą wokół $p \in M$. Wówczas $X_p = \sum_{j=1}^n a_j(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$ jest wektorem stycznym w p, gdzie $a_j \in C^r(M)$ są kiełkami funkcji klasy C^r w p. Popchnięcie X przez φ, czyli funkcję wektorową $\mathbf{X} = \varphi_* \circ X(\varphi^{-1}) : \mathbb{R}^n \supset \varphi(U) \ni p \mapsto [a_j(p)]^n_{j=1} \in \mathbb{R}^n$ nazywamy **lokalną reprezentacją** X.

$$\begin{tikzcd}
M \supset U \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "X"'] & \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \arrow[d, "\mathbf{X}"] \\
TU \arrow[r, "\varphi_*"] & T\mathbb{R}^n \cong \mathbb{R}^n
\end{tikzcd}$$

Chwilą $t \in \mathbb{R}$ będziemy nazywać zmienną czasową. **Polem wektorowym zależnym od czasu** klasy C^r na M nazywamy odwzorowanie $X : \mathbb{R} \times M \to TM$ takie, że $X_t(m) := X(t, m) \in T_mM$ jest wektorem stycznym w m w chwili t dla wszytkich par $(t, m) \in \mathbb{R} \times M$. Przez $X_t \in \mathfrak{X}^r(M)$ oznaczamy pole wektorowe na M w chwili t, gdzie $\mathfrak{X}^r(M)$ to zbiór wszystkich pól wektorowych klasy C^r na M.

Trajektorią (także: linią przepływu, krzywą całkową) pola wektorowego X w punkcie $m \in M$ nazywamy krzywą $c : \mathbb{R} \supset I \to M$ o początku w m, taką, że $c'(t) = X_{c(t)}$ dla każdego $t \in I$. Jeśli $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ jest mapą wokół $c(0) = p$ i $[X^1, X^2, \ldots, X^n]^T$ jest lokalną reprezentacją X, funkcja wektorowa $\mathbf{c} = \varphi \circ c, I \ni t \mapsto \left[c^i(t)\right]^m_{i=1} \in \mathbb{R}^n$ jest lokalną reprezentacją krzywej c oraz spełniony jest układ równań różniczkowch pierwszego rzędu nazywany układem charakterystyk

$$\begin{aligned}
\frac{dc}{dt}^1(t) &= X^1\left(c^1(t), c^2(t), \ldots, c^n(t)\right),\\
\frac{dc}{dt}^2(t) &= X^2\left(c^1(t), c^2(t), \ldots, c^n(t)\right),\\
&\vdots\\
\frac{dc}{dt}^n(t) &= X^n\left(c^1(t), c^2(t), \ldots, c^n(t)\right).
\end{aligned}$$

Prędkością $c'(t_0)$ **krzywej** c w chwili $t \in]a,b[$ nazywamy wektor styczny

$$c'(t_0) = c_* \left(\left.\frac{d}{dt}\right|_{t_0} \right) \in T_{c(t_0)}M, \tag{1.2}$$

Zachodzą następujące twierdzenia

Twierdzenie 1.1. *Niech X_p będzie wektorem stycznym w punkcie p rozmaitości M i niech $f \in C^\infty_p(M)$ będzie kiełkiem funkcji C^∞ w p. Jeśli $c :]-\varepsilon, \varepsilon[\to M$ jest gładką krzywą o początku w p taką, że $c'(0) = X_p$, wówczas*

$$X_p f = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (f \circ c). \tag{1.3}$$

Twierdzenie 1.2. *Niech $F : N \to M$ będzie gładkim odwzorowaniem między rozmaitościami, $p \in N$, $X_p \in T_pN$. Jeśli c jest gładką krzywą o początku w p i jej prędkość w p to X_p, wówczas*

$$F_{*,p}(X_p) = \left.\frac{d}{dt}\right|_0 (F \circ c)(t). \tag{1.4}$$

Czyli popchnięcie prędkości X_p przez F jest wektorem prędkości krzywej $F \circ c$ w M.

Przez $\mathcal{D}_X$ oznaczmy wszystkie pary $(m,t) \in M \times \mathbb{R}$ dla których istnieje trajektoria $c : I \to M$ pola wektorowego X w punkcie m i zmienna czasowa t zawiera się w pewnym przedziale I. Mówimy, że pole wektorowe jest **zupełne**, jeśli $\mathcal{D}_X = M \times \mathbb{R}$. Oznacza to, że dla każdego punktu na rozmaitości znajdziemy trajektorię cząsteczki próbnej poruszającej się dowolnie długo. Zbiór wszystkich punktów rozmaitości na których pole wektorowe nie znika, $\operatorname{Supp} X = \{m \in M \mid X_m \neq 0\}$, nazywamy **nośnikiem** pola wektorowego X.

Zachodzą następujące twierdzenia

Twierdzenie 1.3. *Niech X będzie polem wektorowym na M klasy C^r, $r \geq 1$. Wówczas*

i) $\mathcal{D}_X \supset M \times \{0\}$,

ii) $\mathcal{D}_X$ *jest otwarty w* $M \times \mathbb{R}$,

iii) istnieje jednoznacznie wyznaczone odwzorowanie $F_X : \mathcal{D}_X \to M$ takie, że krzywa $t \mapsto F_X(m,t)$ jest trajektorią w m dla wszystkich $m \in M$,

iv) dla $(m,t) \in \mathcal{D}_X$, $F_X(m,t)$, $s) \in \mathcal{D}_X$ wtedy i tylko wtedy, gdy $(m, t+s) \in \mathcal{D}_X$.

Twierdzenie 1.4. *Każde pole wektorowe klasy C^r na zwartej rozmaitości M jest zupełne.*

Określone w Twierdzeniu 1.3 odwzorowanie F_X nazywamy **całką** X, zaś trajektorię $t \to F_X(m,t)$ **maksymalną krzywą całkową** X w m. Jeśli pole wektorowe X jest zupełne, F_X nazywamy **przepływem** pola wektorowego X. Każdy przepływ F określa 1-parametrową grupę dyfeomorfizmów $\{F_t : M \to M \mid t \in \mathbb{R}\}$ z operacją składania $F_{t_1} \circ F_{t_2} = F_{t_1+t_2}$ dla $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, gdzie F_0 jest elementem neutralnym i $F_t \circ F_{-t} = F_0$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$. Jeśli X jest polem wektorowym zależnym od czasu, wówczas analogicznie określamy **przepływ zależny od czasu** $F_{t,s}$ pola X dla którego odwzorowanie $t \mapsto F_{t,s}(m)$ jest trajektorią X o początku w punkcie m i w chwili $t = s$, czyli

$$\frac{d}{dt} F_{t,s}(m) = X\left(t, F_{t,s}(m)\right), \quad F_{s,s}(m) = m. \tag{1.5}$$

Wówczas działanie składania staje się przechodnie, $F_{t,s} \circ F_{s,r} = F_{s,r}$, a $F_{t,t}$ jest jego elementem neutralnym.

Niech $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ i $F :]-\varepsilon, \varepsilon[\times U \to M$ będzie lokalnym przepływem pola wektorowego X w otoczeniu $U \subset M$ punktu $p \in M$. **Pochodną Liego $\mathcal{L}_X Y$ pola wektorowego** Y względem X w p nazywamy wektor

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X Y)_p &= \lim_{t \to 0} \frac{F_{-t*}(Y_{F_t(p)}) - Y_p}{t} = \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(F_{-t*}Y)_p - Y_p}{t} = \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (F_{-t*}Y)_p.
\end{aligned} \tag{1.6}$$

Jeśli ω jest gładką k-formą na rozmaitości M, to **pochodną Liego $\mathcal{L}_X \omega$ k-formy** ω względem X w $p \in M$ nazywamy formę

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X \omega)_p &= \lim_{t \to 0} \frac{F_t^*(\omega_{F_t(p)}) - \omega_p}{t} = \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{(F_t^*\omega)_p - \omega_p}{t} = \\
&= \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} (F_t^*\omega)_p.
\end{aligned} \tag{1.7}$$

Niech (M, g) będzie zwartą, orientowalną n-rozmaitością Riemannowską z brzegiem i $\mu \in \Omega^n(M)$ będzie formą objętości na M. Przypomnijmy, że metryka Riemannowska $g : M \to \Omega^2(M)$ to pole tensorowe $\mathcal{T}_2^0(M)$ takie, że $g_p \in T_m^*M \otimes T_p^*M$ dla $p \in M$ jest iloczynem skalarnym określonym na przestrzeni stycznej T_pM. **Formą objętości** na n-rozmaitości M nazywamy n-formę $\mu \in \Omega^n(M)$ taką, że $\mu(m) \neq 0$ dla wszystkich $m \in M$. Mówimy, że M jest orientowalna, jeśli na M można określić formę objętości.

Niech X będzie polem wektorowym na M. Funkcję $\mathrm{div}_\mu X \in C^\infty(M)$ taką, że

$$\mathcal{L}_X \mu = (\mathrm{div}_\mu X)\mu \tag{1.8}$$

nazywamy **dywergencją** X. Mówimy, że X jest **nieściśliwy** (względem μ), jeśli $\mathrm{div}_\mu X = 0$.

Bibliografia