Rozdział 1

Ustalenia początkowe

Definicja 1.1. [1, s. 253] Niech M będzie przestrzeń Hausdorffa lokalnie homeomorficzna z ustaloną przestrzenią Banacha E. Wówczas przestrzeń M nazywamy *rozmaitością topologiczną*

Niech Ω_χ będzie otoczeniem otwartym pewnego $\chi \in M$, φ będzie homeomorfizmem $M \supset \Omega_\chi \to \chi(\Omega_\chi) \subset E$. Wówczas φ nazywamy *mapą*.

Definicja 1.2. [1, s. 41] Niech (X, τ) będzie przestrzenią Hausdorffa, przy czym X jest grupą z działaniem grupowym $X \times X \ni (x, y) \to x\dot{y} \in X$ i elementem neutralnym e. Przestrzeń (X, τ) nazywa się *grupą topologiczną*, gdy odwzorowania:

$$X \times X \ni (x, y) \to x\dot{y} \in Y,$$
$$X \ni x \to x^{-1} \in X$$

są ciągłe.

Definicja 1.3. [1, s. 253] *Strukturą różniczkowalną* (albo też *atlasem*) klasy p nazywa się taką rodzinę $\{(\chi, \Omega_\chi)\}$ map, że:

(a) Rodzina $\{\Omega_\chi\}$ stanowi otwarte pokrycie przestrzeni M (tzn. każdy punkt $x \in M$ ma otoczenie homeomorficzne z podzbiorem w E).

(b) Jeśli $(\chi_1, \Omega_{\chi_1})$ i $(\chi_2, \Omega_{\chi_2})$, to odwzorowanie

$$(\chi_1 \circ \chi_2^{-1}) : E \supset \chi_2(\Omega_{\chi_1} \cap \Omega_{\chi_2}) \to \chi_1(\Omega_{\chi_1} \cap \Omega_{chi_2}) \subset E$$

jest dyfeomorfizmem klasy p (odwzorowaniem p razy różniczkowalnym w sposób ciągły, mającym odwzorowanie odwrotne, również klasy p razy różniczkowalne w sposób ciągły).

Definicja 1.4. [1, s. 253] Atlas A nazywamy *atlasem zupełnym klasy* p, jeśli dodanie do niego mapy powoduje, że otrzymany atlas nie będzie już klasy p.

Definicja 1.5. [1, s. 253] Parę $(M, \{(\chi, \Omega_\chi)\})$, gdzie M jest przestrzenią Hausdorffa, a $\{(\chi, \Omega_\chi)\}$ jest atlasem zupełnym klasy p, nazywa się *rozmaitością różniczkowalną klasy p, modelowaną na przestrzeni Banacha E*

Definicja 1.6. [1, s. 300] Niech W, M będą rozmaitościami różniczkowalnymi, $p : W \to M$ surjekcją (rzutem) różniczkowalną, F przestrzenią topologiczną, a G efektywną róźcznikowalną grupą odwzorowań przestrzeni F na siebie. Jeżeli

(a) istnieje pokrycie otwarte $(\Omega_i, i \in I)$ przestrzeni M oraz takie dyfeomorfizmy $h_i : p^{-1}(\Omega_i) \to \Omega_i \times F$, że odwzorywują „włókno" $p^{-1}(x)$ na $\{x\} \times F$,

(b) istnieją odwzorowania $g_{ij} : \Omega_{ij} \to G$ dla $i, j \in I$ takie, że $h_i \circ h_j^{-1}(a, f) = (a, g_{ij}(a)f)$ dla $a \in \Omega_{ij}$, $f \in F$,

to zespół $W = (W, p, M, F, G)$ nazywamy *przestrzenią wiązki*, F *włóknem typowym*, G *grupą struktury wiązki*, g_{ij} *odwzorowaniem przejścia*, h_i *mapami*, a zespół wszystkich tych danych *wiązką różniczkowalną*.

Definicja 1.7. [2, s. 17] Niech U będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$, $k \geq 1$. Równanie postaci

$$F(D^k u(x), D^{k-1}u(x), \ldots, Du(x), u(x), x) = 0, \ (x \in U) \tag{1.1}$$

nazywamy równaniem różniczkowym cząstkowym k-tego rzędu; funkcja

$$F : \mathbb{R}^{n^k} \times \mathbb{R}^{n^{k-1}} \times \cdots \times \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times U \to \mathbb{R}$$

jest dana, zaś $u : U \to \mathbb{R}$ jest niewiadomą.

Definicja 1.8. [2, s. 18]

(i) Powiemy, że równanie cząstkowe (1.1) jest liniowe, jeśli jest postaci

$$\sum_{|\alpha| \leq k} a_\alpha(x) D^\alpha u = f(x)$$

(ii) Równanie (1.1) jest półliniowe lub inaczej semiliniowe, jeśli jest postaci

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \ldots, Du, u, x) = 0$$

(iii) Równanie (1.1) jest quasi-liniowe, jeśli jest postaci

$$\sum_{|\alpha| = k} a_\alpha(D^{k-1}u, \ldots, Du, u, x) D^\alpha u + a_0(D^{k-1}u, \ldots, Du, u, x) = 0$$

(iv) Równanie (1.1) jest całkowicie nieliniowe, jeśli funkcja F zależy nieliniowo od pochodnych najwyższego rzędu.

Bibliografia

[1] Krzysztof Maurin. *Analiza, Wstęp do analizy globalnej.* Państwowe Wydawnictwo Naukowe, 1971.

[2] Lawrence C. Evans. *Równania różniczkowe cząstkowe.* Wydawnictwo Naukowe PWN, 2002.