Rozdział 1

Płyn idealny

Naszym celem jest uzasadnienie podstawowych równań ruchu cieczy idealnej.

Niech (M, g) będzie zwartą, orientowalną n-rozmaitością Riemannowską z brzegiem i $\mu \in \Omega^n(M)$ będzie formą objętości na M. Przypomnijmy, że metryka Riemannowska $g : M \to \Omega^2(M)$ to gładkie cięcie wiązki tensorowej takie, że $g_p \in T_m^*M \otimes T_p^*M$ dla $p \in M$ jest iloczynem skalarnym na przestrzeni stycznej w $p \in M$.

Niech X będzie polem wektorowym klasy C^r na M i niech $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ będzie mapą wokół $p \in M$. Wówczas $X_p = \sum_{j=1}^n a_j(p) \left.\frac{\partial}{\partial x^j}\right|_p$ jest wektorem stycznym w p, gdzie $a_j \in C^r(M; \mathbb{R})$. Funkcję wektorową $\mathbf{X} : U \ni p \mapsto [a_j(p)]_{j=1}^n \in \mathbb{R}^n$ nazywamy **lokalną reprezentacją** X.

Przez chwilę $t \in \mathbb{R}$ będziemy na ogół oznaczać zmienną czasową. **Polem wektorowym zależnym od czasu** klasy C^r na M nazywamy odwzorowanie $X : \mathbb{R} \times M \to TM$ takie, że $X_t(m) := X(t, m) \in T_mM$ jest wektorem stycznym w m w chwili t dla wszytkich par $(t, m) \in \mathbb{R} \times M$. Przez $X_t \in \mathfrak{X}^r(M)$ oznaczamy pole wektorowe na M w chwili t, gdzie $\mathfrak{X}^r(M)$ to zbiór wszystkich pól wektorowych klasy C^r na M.

Przepływem (także operatorem ewolucji) na M nazywamy 1-parametrową grupę dyfeomorfizmów $\varphi_t : M \to M$ z operacją składania $\varphi_{t_1} \circ \varphi_{t_2} = \varphi_{t_1+t_2}$ dla $t_1, t_2 \in \mathbb{R}$, gdzie φ_0 jest elementem neutralnym i $\varphi_t \circ \varphi_{-t} = \varphi_0$ dla dowolnego $t \in \mathbb{R}$.

Trajektorią (także: linią przepływu, krzywą całkową) pola wektorowego X w punkcie $m \in M$ nazywamy krzywą $c : \mathbb{R} \supset I \to M$ o początku w m, taką, że $c'(t) = X(c(t))$ dla każdego $t \in I$. Jeśli $(U, \varphi) = (U, x^1, x^2, \ldots, x^n)$ jest mapą wokół $c(0) = p$ i $[X^1, X^2, \ldots, X^n]^T$ jest lokalną reprezentacją X, funkcja wektorowa $\mathbf{c} = \varphi \circ c, I \ni t \mapsto \left[c^i(t)\right]_{i=1}^m \in \mathbb{R}^n$ jest lokalną reprezentacją krzywej c oraz spełniony jest układ równań różniczkowch pierwszego rzędu nazywany układem charakterystyk

$$
\begin{aligned}
\frac{dc^1}{dt}(t) &= X^1\left(c^1(t), c^2(t), \ldots, c^n(t)\right),\\
\frac{dc^2}{dt}(t) &= X^2\left(c^1(t), c^2(t), \ldots, c^n(t)\right),\\
&\vdots\\
\frac{dc^n}{dt}(t) &= X^n\left(c^1(t), c^2(t), \ldots, c^n(t)\right).
\end{aligned}
$$

Pojęcia pola wektorowego, przepływu i trajektorii wiąże następujące twierdzenie

Twierdzenie 1.1 (O lokalnym istnieniu gładkiego i jednoznacznego przepływu)**.** *Niech U będzie otwartym podzbiorem $\mathbb{R}^n$ i niech $\mathbf{X} : U \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ będzie lokalną reprezentacją pola wektorowego zależnego od czasu klasy $C^r, r \geq 1$. Wówczas*

i) Dla dowolnego $x_0 \in U$ i chwili $t \in \mathbb{R}$ istnieje trajektoria w x_0,

ii) Jeśli w punkcie i w tej samej chwili istnieją dwie różne trajektorie, to są identyczne na przecięciu swoich dziedzin, *iii) Istnieje otoczenie* U_0 *punktu* $p \in U$ *oraz przepływ* $F : U_0 \times]-a, a[\to \mathbb{R}^n$ *klasy* C^r *dla pewnego* $a > 0$ *takie, że krzywa* $c_u :]-a, a[\to \mathbb{R}^n$ $c_u(t) = F(u,t)$ *jest trajektorią w* $u \in \mathbb{R}^n$.

Wówczas $u(x,t)$ oznacza prędkość cząsteczki próbnej przechodzącej przez punkt $x \in M$.

Bibliografia