MONITORIA DE ECONOMETRIA

Ronaldo Torres

17 de outubro de 2018

Resumo de uma regressão multipla

Considere os dados abaixo relativos aos índices da quantidade demandada (Y), do preço do produto (X1), e da quantidade produzida (x2)

Ano	Y	X1	X2
1981	69	143	84
1982	76	134	85
1983	81	117	82
1984	90	111	86
1985	94	109	93
1986	100	100	100
1987	103	137	104
1988	108	122	104
1989	113	85	107
1990	115	90	102

Primeiro passo da regressão e montar a matriz das variáveis livres “X1,X2” adicionando uma coluna de numeros 1

$$X = \begin{pmatrix} 1 & 143 & 84 \\ 1 & 134 & 85 \\ 1 & 117 & 82 \\ 1 & 111 & 86 \\ 1 & 109 & 93 \\ 1 & 100 & 100 \\ 1 & 137 & 104 \\ 1 & 122 & 104 \\ 1 & 85 & 107 \\ 1 & 90 & 102 \end{pmatrix}$$

Agora é a vez de fazer a transposta de x, sendo ela:

$$X^t = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 143 & 134 & 117 & 111 & 109 & 100 & 137 & 122 & 85 & 90 \\ 84 & 85 & 82 & 86 & 93 & 100 & 104 & 104 & 107 & 102 \end{pmatrix}$$

OBS: matriz transposta é a matriz que se obtém da troca de linhas por colunas de uma dada matriz

Também precisamos da matrix formada por Y

$$Y = \begin{pmatrix} 69 \\ 76 \\ 81 \\ 90 \\ 94 \\ 100 \\ 103 \\ 108 \\ 113 \\ 115 \end{pmatrix}$$

Sendo que a formula de encontrar os estimadores e igual:

$$\widehat{B} = (X^T X)^{-1}(X^T Y)$$

Porém temos que resolver essa equação por partes, sendo elas:

calcular primeiro o $(X^t X)$:

$$(X^T X) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 143 & 134 & 117 & 111 & 109 & 100 & 137 & 122 & 85 & 90 \\ 84 & 85 & 82 & 86 & 93 & 100 & 104 & 104 & 107 & 102 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 1 & 143 & 84 \\ 1 & 134 & 85 \\ 1 & 117 & 82 \\ 1 & 111 & 86 \\ 1 & 109 & 93 \\ 1 & 100 & 100 \\ 1 & 137 & 104 \\ 1 & 122 & 104 \\ 1 & 85 & 107 \\ 1 & 90 & 102 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 10 & 1148 & 947 \\ 1148 & 135274 & 107890 \\ 947 & 107890 & 90535 \end{pmatrix}$$

Agora para encontrar a inversa teremos que encontrar a matriz dos cofatores e dividir pelo determinante.

$$(X^t X)^{-1} = \frac{COFATOR(X^t X)}{det(X^t * X)}$$

Primeiro encontraremos o determinante $det(X^t X)$

Para encontrar o determinante precisaremos duplicar as duas primeiras colunas e aplicando em seguida a regra de Sarrus.

$$det(X^t X) = \begin{pmatrix} 10 & 1148 & 947 & | & 10 & 1148 \\ 1148 & 135274 & 107890 & | & 1148 & 135274 \\ 947 & 107890 & 90535 & | & 947 & 107890 \end{pmatrix}$$

$$\det(X^t X) = 22937274$$

Link para lei de sarrus (https://www.youtube.com/watch?v=6tDQPDoNK40)

agora precisamos encocontrar a matriz dos cofatores.

$$(X^t X) = \begin{pmatrix} A11 & A12 & A13 \\ A21 & A22 & A23 \\ A31 & A32 & A33 \end{pmatrix}$$

$$A11 = (-1)^{1+1} * det\begin{pmatrix} A22 & A23 \\ A32 & A33 \end{pmatrix}\ ;\ A12 = (-1)^{1+2} * det\begin{pmatrix} A21 & A23 \\ A31 & A33 \end{pmatrix}\ ;\ A13 = (-1)^{1+3} * det\begin{pmatrix} A21 & A22 \\ A31 & A32 \end{pmatrix}$$

$$A21 = (-1)^{2+1} * det\begin{pmatrix} A12 & A13 \\ A32 & A33 \end{pmatrix};\ A22 = (-1)^{2+2} * det\begin{pmatrix} A11 & A13 \\ A31 & A33 \end{pmatrix};\ A23 = (-1)^{2+3} * det\begin{pmatrix} A11 & A12 \\ A31 & A32 \end{pmatrix}$$

$$A31 = (-1)^{3+1} * det\begin{pmatrix} A12 & A13 \\ A22 & A23 \end{pmatrix};\ A32 = (-1)^{3+2} * det\begin{pmatrix} A11 & A13 \\ A21 & A23 \end{pmatrix};\ A33 = (-1)^{3+3} * det\begin{pmatrix} A11 & A12 \\ A21 & A22 \end{pmatrix}$$

A matriz de cofatores será cada elemento aplicado na formula anterior.

$$(X^t X) = \begin{pmatrix} 10 & 1148 & 947 \\ 1148 & 135274 & 107890 \\ 947 & 107890 & 90535 \end{pmatrix}$$

aplicando os valores da matriz cofatores são:

$$cofatores(X^t X) = \begin{pmatrix} 606779490 & -1762350 & -4246758 \\ -1762350 & 8541 & 8256 \\ -4246758 & 8256 & 34836 \end{pmatrix}$$

Link do vídeo da matriz cofator (https://www.youtube.com/watch?v=KTg8JMgSzTU)

Agora e vez de fazer a inversa:

$$(X^T X)^{-1} = \frac{cofator(X^t X)}{det(X^t X)}$$

$$(X^t X)^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{101129915}{3822879} & \frac{-293725}{3822879} & \frac{-235931}{1274293} \\ \frac{-293725}{3822879} & \frac{949}{2548586} & \frac{1376}{3822879} \\ \frac{-235931}{1274293} & \frac{1376}{3822879} & \frac{5806}{3822879} \end{pmatrix}$$

Agora teremos de encontra a matrix

$$X^t Y = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 143 & 134 & 117 & 111 & 109 & 100 & 137 & 122 & 85 & 90 \\ 84 & 85 & 82 & 86 & 93 & 100 & 104 & 104 & 107 & 102 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 69 \\ 76 \\ 81 \\ 90 \\ 94 \\ 100 \\ 103 \\ 108 \\ 113 \\ 115 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 949 \\ 107006 \\ 91145 \end{pmatrix}$$

Agora temos de encontrar os estimadores.

$\widehat{B} = (X^t X) * (X^t Y)$

$$\widehat{B} = \begin{pmatrix} \frac{101129915}{3822879} & \frac{-293725}{3822879} & \frac{-235931}{1274293} \\ \frac{-293725}{3822879} & \frac{949}{2548586} & \frac{1376}{3822879} \\ \frac{-235931}{1274293} & \frac{1376}{3822879} & \frac{5806}{3822879} \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 949 \\ 107006 \\ 91145 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7,889080 \\ -0,263273 \\ 1,237959 \end{pmatrix}$$

Sendo a função estimada:

$\widehat{Y} = 7,889080 - 0,263273X1 + 1,237959X2$

OBS: Está estimação está de acordo com a teoria pois o aumento de uma unidade no preço, implica em uma redução de 0,26 unidades da quantidade demandada e o aumento da quantidade produzida em uma unidade, aumenta a quantidade demandada em 1,23 unidades.

Agora necessita-se encontrar as somas quadráticas.

$$Y^tY = \begin{pmatrix} 69 & 76 & 81 & 90 & 94 & 100 & 103 & 108 & 113 & 115 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 69 \\ 76 \\ 81 \\ 90 \\ 94 \\ 100 \\ 103 \\ 108 \\ 113 \\ 115 \end{pmatrix} = 92301$$

$$\widehat{B^t} * X^tY = \begin{pmatrix} 7,889080 & -0,263273 & 1,237959 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 949 \\ 107006 \\ 91145 \end{pmatrix} = 92148,6674625$$

$$sendo\ que\ \bar{Y}\ \text{é}\ a\ m\text{é}dia\ ent\text{ão}:\ n * \bar{Y}^2 = 10 * (94,9)^2 = 90060,1$$

Achando a soma dos quadrados dos resíduos (SQR)

$$SQR = Y^tY - \widehat{B^t} * X^tY = 92301 - 92148,667462 = 152,33253$$

Achando a soma dos quadrado explicada (SQE)

$$SQE = \widehat{B^t} * X^tY - n\bar{Y}^2 = 92148,667462 - 90060,1 = 2088,567462$$

Achando a soma total dos quadrados (SQT)

$$SQT = Y^tY - n\bar{Y}^2 = 92301 - 90060,1 = 2240,9$$

Para encontrar o coeficiênte de determinação:

$$R^2 = \frac{SQE}{SQT} = \frac{2088,567462}{2240} = 0,932361$$

Agora determinaremos a variânça do SQR.

$$\widehat{\sigma}^2 = \frac{SQR}{n-k} = \frac{152,33253}{10-3} = 21,7617$$