

УСПЕХИ ФИЗИЧЕСКИХ НАУКФИЗИКА НАШИХ ДНЕЙ

551.593.62

ТЕОРИЯ РАДУГИ*)

Х. Нуссенцвейг

Почему и как от рассеяния солнечных лучей на дождевых каплях в небе возникает многоцветная дуга? Чтобы дать полный ответ на этот тонкий вопрос, нужно использовать всю мощь математической физики.

Радуга перебрала мост между двумя очень далекими сферами человеческой деятельности: по одну его сторону — поэзия, по другую — наука. Мечта описать ее вдохновляла поэтов и ученых в течение тысячелетий. Широко распространено мнение, что научная сторона дела целиком и полностью сводится к простой геометрической оптике, давно уже выяснена и представляет в наши дни разве что исторический интерес. В действительности же все обстоит далеко не так просто: последовательная количественная теория радуги была развита лишь в самое недавнее время. Оказалось, что проблема не ограничивается рамками геометрической оптики — ее решение требует привлечения всех наших знаний о природе света. Здесь проявляются и интерференция, и дифракция, и поляризация, и корпускулярные свойства света, например, связанный с ним импульс.

Некоторые из самых мощных методов математической физики были разработаны специально для решения вопросов, относящихся к радуге и тесно связанных с нею явлений. Можно даже сказать, что описание радуги послужило пробным камнем для проверки теоретических построений. Наиболее совершенные из них позволили полностью объяснить это явление, т. е. предсказать математически все наблюдаемые свойства радуги. Те же методы применимы для описания аналогичных явлений, таких, как, скажем, возникновение ореола и даже радуги совершенно другого происхождения, например, атомной и ядерной.

Говоря об истории изучения радуги, стоит, пожалуй, упомянуть о ряде курьезов. Так, например, Гете писал, что ньютоновский анализ цветовой гаммы радуги является издевательством над природой. Не менее одиозно сейчас звучат и высказывания Чарльза Лэмба и Джона Китса, которые в 1817 г. на дружеском обеде провозгласили тост: «Да здравствует Ньютон и позор математике». Примечательно, однако, что многие ученые, создававшие теорию радуги, вне всякого сомнения, сами не были глухи к ее красоте. Декарт писал: «Радуга — это такое изумительное чудо природы..., что я навряд ли смогу найти более подходящий объект для применения моего метода».

*) Nussenzweig H. Moyses. The Theory of the Rainbow.— Scientific American, April 1977, v. 236, No. 4, pp. 116—127.— Перевод И. И. Ройзена.

Х. М. Нуссенцвейг — профессор физики университета в Сан-Пауло, Бразилия.

Яркая дуга, которая возникает в небе после ливня, или в брызгах водопада — это первичная радуга. Конечно, наибольший и самый захватывающий эффект производит ее цветовая гамма. Цветные полосы сильно различаются по яркости и отчетливости, но порядок их всегда одинаков: внутри дуги находится фиолетовая, которая постепенно, меняя оттенки, переходит сначала в синюю, затем в зеленую, желтую, оранжевую, и, наконец, красную, обрамляющую дугу с внешней стороны.

Другие характерные черты, присущие радуге, выражены значительно слабее и наблюдаются не всегда. Выше первой, в небе возникает вторая дуга, в которой цветовые полосы располагаются в обратном порядке: красная внутри дуги, а фиолетовая — снаружи. Вглядевшись внимательно, можно убедиться в том, что область, расположенная между двумя этими дугами, заметно темнее окружающего неба. Даже когда вторая дуга неразличима, у первой явно видны светлая и темная «стороны». Темная область получила название темной александровой полосы по имени древнегреческого философа Александра, впервые описавшего ее около двухсотого года нашей эры.

Иногда можно увидеть и другой малозаметный атрибут радуги — слабые полосы, обычно розовые и зеленые, поочередно на внутренней стороне первой дуги (еще реже они могут появиться на внешней стороне второй дуги). Наиболее отчетливо они видны вблизи ее вершины (рис. 1, 2). Эти дополнительные полосы представляют собой не что иное, как интерференцию, но они сыграли важную роль при разработке теории радуги.

□

По-видимому, первые попытки дать научное объяснение радуге восходят еще к Аристотелю, который предположил, что она возникает в результате необычного отражения лучей солнечного света от облаков. Он считал, что, отражаясь под определенным (и фиксированным) углом, они образуют круговой конус «радужных лучей». Таким образом, Аристотель правильно объяснил форму дуги и понял, что причиной радуги является не материальный объект, определенным образом расположенный на небе, а совокупность направлений, вдоль которых свет сильно рассеивается в глаза наблюдателя.

В 1266 г. Роджер Бэкон впервые измерил угол между падающим и отраженным лучами, при котором возникает радуга. Он оказался равным примерно 42° . Вторая дуга расположена на небосводе приблизительно на 9° выше. Сейчас принято отсчитывать эти углы от противоположного направления, при этом измеряется фактически изменение направления солнечных лучей. В соответствии со сказанным, для первой дуги оно равно $180^\circ - 42^\circ = 138^\circ$, а для второй — примерно 130° .

Около 1700 лет отделяют первые соображения, высказанные Аристотелем, от следующего существенного шага на пути к пониманию природы радуги. В 1304 году немецкий монах Теодорик из Фрайберга отказался от аристотелевой гипотезы о том, что радуга возникает вследствие коллективного отражения света дождевыми капельками облака. Вместо этого он предположил, что радугу способна создавать каждая капелька по отдельности. Более того, он проверил и подтвердил свое предположение экспериментально в опыте с «увеличенной каплей» — наполненной водой сферической колбой. При этом он смог проследить путь, по которому идут лучи света, создающие радугу.

В течение трех столетий открытия Теодорика оставались забытыми — до тех пор, пока они вновь и независимо не были переоткрыты Декартом, который использовал для этого тот же метод. Оба, Теодорик и Декарт, продемонстрировали, что причиной радуги являются лучи света, вошед-



Рис. 1. На этой фотографии вы видите радугу в брызгах горного ручья (Национальный парк в Калифорнии).

Она отличается необычайной яркостью и чистотой спектра. Кроме того, кажется, что она находится очень близко, хотя в действительности локализация радуги — это понятие довольно неопределенное: скорее ее можно охарактеризовать как конус световых лучей, в вершине которого находится наблюдатель.



Рис. 2. Фотография двойной радуги над проливом Джонстона в Британской Колумбии. Яркая полоса справа — основная радуга. Она отделена от едва заметной радуги второго порядка темной александровой полосой, которая заметно темнее окружающего неба. На внутренней стороне основной дуги видны несколько слабых розовых и зеленых полос: это дополнительные дуги. Задача теории состоит в том, чтобы количественно объяснить все черты этого явления.

шие в каплю и однократно отразившиеся от ее внутренней поверхности. Вторая дуга обусловлена лучами, претерпевшими внутри капли отражения дважды. При каждом отражении интенсивность света ослабляется. Это является основной причиной того, что яркость второй дуги меньше, чем первой. Теодорик и Декарт заметили также, что глядя по определенному направлению внутри углового интервала, вмещающего всю радугу, создаваемую водяным шаром, можно увидеть только один цвет, и что этот

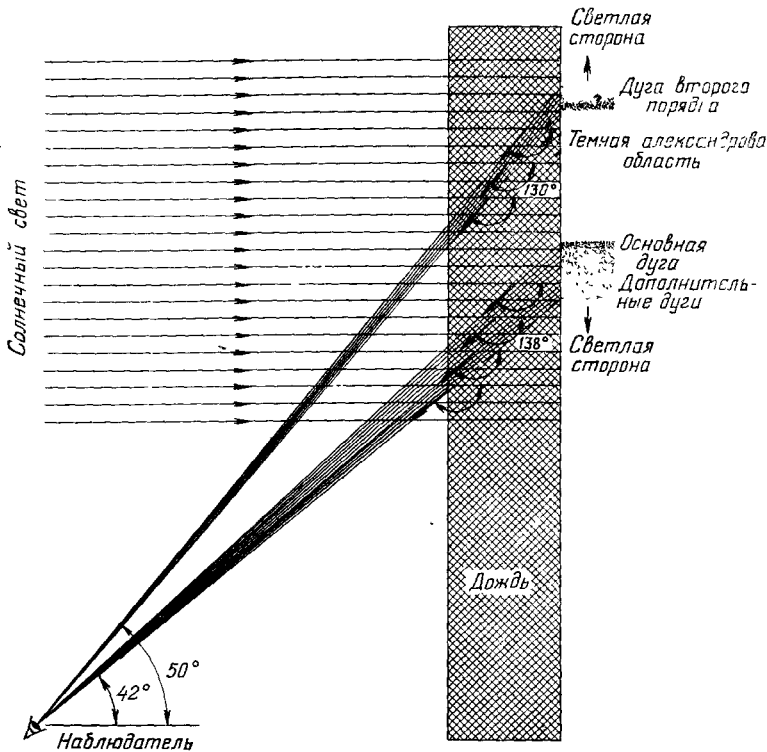


Рис. 3. Геометрия радуги определяется углом рассеяния, т. е. полным углом отражения лучей солнечного света в результате их столкновений с каплей дождя.

Лучи интенсивно рассеиваются под углами 138 и 130°, образуя при этом соответственно основную и вторичную радугу. В промежутке между этими углами свет рассеивается лишь весьма незначительно. Это темная александрова область. Указанные выше оптимальные углы слегка различаются в зависимости от длины волны, в результате чего разные цветовые компоненты радуги видны под разными углами. Отметим, что последовательности расположения цветов в основной и вторичной радугах взаимно обратны. Радугу нельзя расположить в одной плоскости: ее форма отвечает совокупности направлений, по которым свет рассеивается в сторону наблюдателя.

цвет изменяется по мере перемещения глаза (т. е. вместе с изменением угла рассеяния), причем между цветом и углом зрения существует взаимно однозначное соответствие (рис. 3). Из этого факта они сделали вывод, что за различные цвета радуги в небе ответственны различные совокупности дождевых капель.

Таким образом, как показали Теодорик и Декарт, основные черты радуги можно понять посредством изучения распространения света внутри одной изолированной капли. Природа радуги определяется фундаментальными законами взаимодействия света с прозрачной средой — его отражением и преломлением.

Закон отражения общеизвестен и интуитивно очевиден. Он гласит, что угол отражения света должен быть равен углу его падения. Закон

преломления несколько более сложен: в то время, как отражение полностью определяется геометрией системы, преломление зависит также и от свойств среды, в которой свет распространяется.

Скорость света в вакууме вполне определена и является одной из фундаментальных физических констант. В то же время его скорость в материальной среде зависит от свойств последней. Отношение этих двух скоростей называется показателем преломления среды. Для воздуха он лишь немного больше единицы, а для воды порядка 1,33.

Проходя из воздуха в воду, луч света на границе затормаживается. Если он падает на границу двух сред наклонно, то это изменение скорости приводит и к изменению его направления (рис. 4). Постоянным

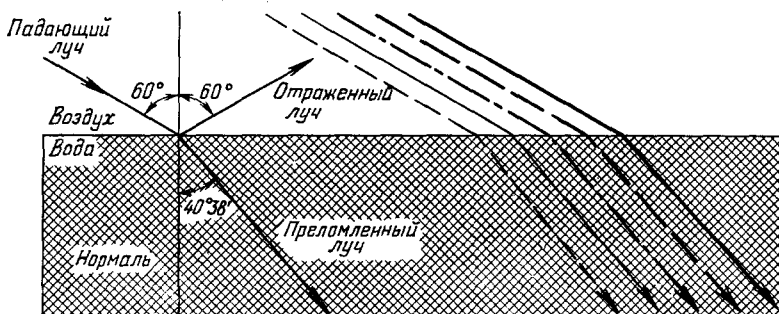


Рис. 4. Отражение и преломление света на границе между воздухом и водой как причина возникновения радуги.

При преломлении соотношение между направлениями падающего и проходящего света определяется показателями преломления соприкасающихся сред. Попадая в среду с большим показателем преломления, свет отклоняется в сторону нормали к границе раздела. Лучи различного цвета отклоняются несколько различно. Эта зависимость показателя преломления от длины волны называется дисперсией. При построении теории радуги часто рассматривают различные монохроматические компоненты солнечного света по отдельности.

в этом случае остается отношение синусов угла падения и угла преломления: оно равно отношению показателей преломления этих сред. Это правило было открыто Виллебрордом Снеллиусом в 1621 г. и называется законом Снеллиуса.



Простейшее рассмотрение свойств радуги основывается на использовании законов отражения и преломления применительно к лучу, распространяющемуся в капле воды. Последняя считается сферической, так что все направления равноправны, и путь луча характеризуется только одной переменной — его расстоянием от центра капли, которое называется прицельным параметром. Очевидно, он может изменяться в пределах от нуля, когда луч проходит непосредственно через центр капли, до ее радиуса, когда луч лишь касается ее поверхности.

На поверхности капли луч частично отражается. Этот отраженный свет мы будем называть рассеянными лучами класса 1. Оставшаяся часть света проникает внутрь капли (разумеется, изменив свое направление в соответствии с законами преломления) и затем частично выходит на нее (лучи класса 2), а частично отражается от ее внутренней поверхности. То же самое происходит при следующем столкновении с поверхностью капли той части луча, которая осталась внутри капли, и т. д. В результате этого процесса возникает серия рассеянных лучей, интенсивность которых быстро убывает по мере роста числа внутренних отражений. Лучи, принадлежащие классу 1, представляют собой свет, непосредствен-

но отраженный каплей, а лучи класса 2 — это свет, который сразу же прошел сквозь нее. Лучи класса 3 покидают каплю, побывав в ней и однократно отразившись от ее внутренней поверхности. Ими обусловлена первичная радуга. Лучи класса 4, испытавшие до выхода из капли два внутренних отражения, ответственны за возникновение вторичной радуги (рис. 5). Радуги более высокого порядка связаны с лучами, путь которых еще более сложен. Обычно они не видимы.

Для каждого класса рассеянных лучей угол рассеяния изменяется в широких пределах в зависимости от прицельного параметра. Так как

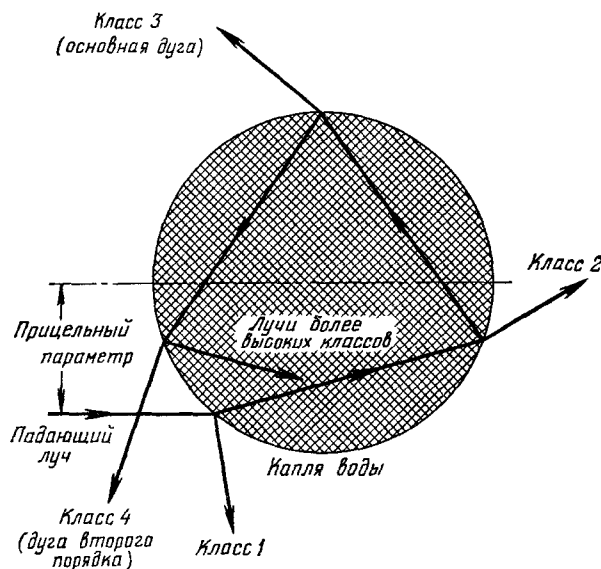


Рис. 5. Траектории световых лучей, проходящих через каплю, определяются в соответствии с законами геометрической оптики.

Лучи, которые сразу же отразились от поверхности капли, обозначены как лучи класса 1; лучи, прошедшие через каплю насквозь, — это лучи класса 2; лучи класса 3 — это те лучи, которые вышли из капли, испытав в ней одно внутреннее отражение; именно ими обусловлена основная радуга. За радугу второго порядка ответственны лучи класса 4, которые покинули каплю, испытав в ней два внутренних отражения. Для всех лучей, независимо от класса, полный угол отражения определяется только прицельным параметром: расстоянием, на котором луч проходит от центра капли.

капля освещается солнечным светом при всех прицельных параметрах одновременно, свет рассеивается ею во всех направлениях. Не представляет труда установить, какие именно лучи приводят к возникновению радуги. Однако лучи распространяются и во всех других направлениях. Почему же тогда интенсивность рассеянного света возрастает именно вблизи одного определенного угла? Теодорик не нашел ответа на этот вопрос: эта заслуга принадлежит Декарту.

Применяя законы отражения и преломления для каждой точки границы вода — воздух, Декарт аккуратно вычислил траектории многих лучей, приходящих под различными прицельными параметрами. При этом первостепенную роль играют лучи класса 3. Когда прицельный параметр равен нулю, они, пройдя через центр капли и однократно отразившись от ее внутренней стенки, рассеиваются под углом 180° , т. е. возвращаются назад к Солнцу. По мере возрастания прицельного параметра, траектория луча смещается от центра капли и угол рассеяния уменьшается. Однако, — и это обнаружил Декарт, — такая тенденция не продолжается монотонно вплоть до максимального прицельного параметра, при котором солнечный луч скользит по капле, лишь коснувшись ее

поверхности. Зависимость оказалась более сложной: угол рассеяния достигает минимума, в котором он равен 138° , при прицельном параметре порядка $7/8$ радиуса, а затем снова начинает возрастать.

Для лучей класса 4 картина аналогична, с той лишь разницей, что при нулевом прицельном параметре угол отражения равен нулю (луч, дважды отразившись от внутренней поверхности капли, выходит из нее в своем первоначальном направлении), затем он достигает максимума, равного 130° , и при дальнейшем увеличении прицельного параметра снова уменьшается до нуля.

□

Так как солнечный свет освещает каплю равномерно, все прицельные параметры равновероятны *). Поэтому поток рассеянного света максимален в том направлении, которое соответствует наиболее слабой зависимости угла рассеяния от прицельного параметра. Другими словами, максимальная яркость достигается тогда, когда в одном направлении собирается свет, рассеянный из наиболее широкого интервала прицельных параметров. Очевидно, что угол рассеяния слабее всего зависит от прицельного параметра вблизи экстремальных точек. Этим объясняется расположение первичной и вторичной радуги. Кроме того, из сказанного выше ясно, что в интервал углов от 130 до 138° лучи класса 3 и 4 вообще не рассеиваются, так что темная александрова полоса между этими дугами также находит свое естественное объяснение.

Быть может, декартову теорию можно сделать более наглядной, представив себе некоторую совокупность капель, которая каким-то образом отражает свет изотропно. Небо, заполненное такими каплями, рассеивало бы свет одинаково по всем направлениям. Но теперь следует принять во внимание, что глобальная освещенность неба, заполненного реальными каплями, та же самая, но только она перераспределена по направлениям. В результате большая часть неба оказывается темнее (чем оно было бы в воображаемой картине с изотропным распределением освещенности), но зато вблизи экстремального угла возникает яркая дуга, быстро угасающая со стороны темной и медленнее со стороны светлой части неба. Свойства вторичной дуги аналогичны, только она уже и темнее. Согласно теории Декарта область неба между этими дугами должна быть значительно темнее окружающего неба и, если ограничиться только лучами класса 3 и 4, она была бы совсем черной.

Декартова картина радуги замечательна своей простотой. Яркость зависит от скорости изменения угла рассеяния, который в свою очередь определяется двумя факторами: показателем преломления (он считается постоянным) и прицельным параметром, все значения которого считаются равновероятными. От размера капель ничего не зависит: геометрия рассеяния одинакова и для мельчайших капелек облаков, и для большого заполненного водой шара, которым пользовались Теодорик и Декарт.

□

До сих пор мы не касались одного из самых замечательных свойств радуги — ее цветовой гаммы. Нет нужды напоминать, что это явление объяснил Ньютон, разложив в 1666 г. белый свет с помощью призмы. Его эксперименты продемонстрировали не только то, что белый свет представляет собой смесь цветов, но также и то, что разным цветам соот-

*) С точностью, разумеется, до очевидного весового множителя, равного самому прицельному параметру. (Примеч. пер.)

ветствуют различные показатели преломления. Это явление называется дисперсией. Следовательно, каждому цвету или длине волны должен соответствовать свой экстремальный угол, и то, что мы наблюдаем в природе, — это совокупность монохроматических радуг, слегка смещенных одна относительно другой.

Измерив показатели преломления для различных длин волн, Ньютон нашел, что красному свету соответствует экстремальный угол $137^{\circ} 58'$, а фиолетовому — угол $139^{\circ} 43'$. Разность между ними, равная $1^{\circ} 45'$, была бы, очевидно, угловой шириной радуги, если бы солнечные лучи были абсолютно параллельны. Считая угловой размер видимого диаметра Солнца порядка $30'$, Ньютон пришел к заключению, что полная угловая ширина первичной радуги должна быть равна $2^{\circ} 15'$. Этот результат подтвердился его собственными наблюдениями.

Таким образом, Декарт и Ньютон объяснили все наиболее характерные черты радуги: существование основной и второй дуг и темного пространства между ними, угловое расположение этих дуг и их цветовой спектр. Для этого оказалось достаточным использовать только представления геометрической оптики. Однако в их теории был очень существенный изъян: она не могла объяснить существование дополнительных дуг. Для того чтобы понять эту менее заметную особенность радуги, потребовалось более глубокое проникновение в природу света.

Дополнительные дуги располагаются с внутренней, более светлой стороны основной дуги. В этой области углов в каждом направлении отражается по два луча класса 3, которые порождаются двумя падающими лучами с прицельными параметрами по обе стороны его экстремального значения. Таким образом, при углах, слегка превышающих экстремальный, рассеянный свет класса 3 содержит по два луча, прошедших сквозь каплю по различным траекториям. Эти лучи выходят из различных точек поверхности капли, но распространяются в одном направлении.

Во времена Декарта и Ньютона считалось, что освещенность объекта, на который падают два таких луча, равна просто сумме освещенностей, обусловленной каждым из них. В таком случае по мере удаления во внутреннюю относительно основной дуги сторону (т. е. при сдвиге от экстремального угла в область больших углов) небо должно было бы лишь постепенно темнеть без проявления следов каких-либо дополнительных дуг. Как мы теперь знаем, однако, такое простое рассуждение не всегда правильно: нельзя просто складывать интенсивности двух лучей, когда эти лучи не независимы.

Оптический эффект, объясняющий, в частности, появление дополнительных дуг, был открыт в 1803 г. Юнгом, который показал, что свету присуща интерференция — явление, которое тогда было уже хорошо известно из наблюдений волн на поверхности воды. Суперпозиция волн, распространяющихся в любой среде, может привести либо к их усилению (совпадение фаз), либо к их взаимному погашению (волны в противофазе). Юнг продемонстрировал интерференцию света, пропуская монохроматический пучок через два отверстия малого диаметра, в результате чего на освещаемом этим светом экране возникали светлые и темные полосы. Он же обратил внимание на то, что этот эффект имеет прямое отношение к дополнительным дугам в радуге. Два луча, отраженных в одном направлении, о которых шла речь выше, в точности аналогичны двум лучам света в эксперименте Юнга. При углах, очень близких к экстремальному, их пути сквозь каплю почти не отличаются, поэтому они интерферируют конструктивно. По мере увеличения угла, оптическая разность хода возрастает, и когда она достигает половины длины волны, интерференция становится полностью деструктивной (т. е. лучи «гасят» друг

друга). При дальнейшем увеличении угла снова происходит взаимное усиление. В результате возникает периодическое изменение интенсивности рассеянного света, т. е. серия чередующихся темных и светлых полос.

Так как углы рассеяния, которым отвечает конструктивная интерференция, определяются оптической разностью хода, они зависят от

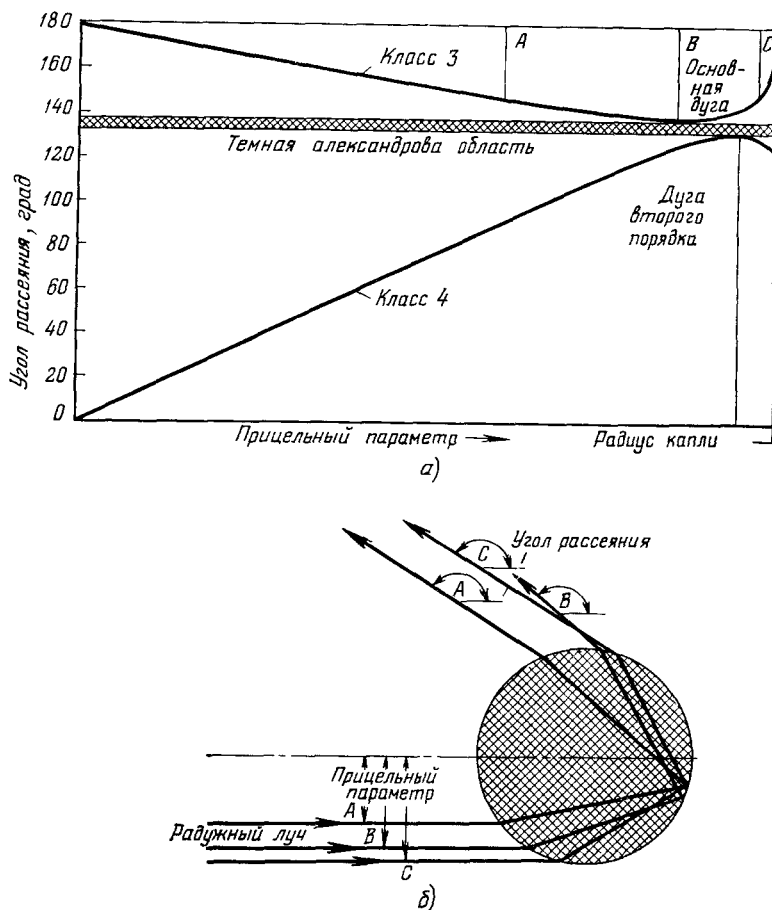


Рис. 6. Оптимальный угол выделен среди всех остальных.

Это становится ясно, если рассмотреть угол рассеяния как функцию прицельного параметра (а). Когда последний обращается в нуль, угол рассеяния лучей класса 3 равен 180° : они проходят через центр капли и отражаются от ее дальней стенки назад по направлению к Солнцу. По мере возрастания прицельного параметра угол рассеяния уменьшается, достигая при некотором прицельном параметре своего минимального (оптимального) значения. При этом возникает радуга. При больших и при меньших значениях прицельного параметра лучи рассеиваются на больший угол. Минимальное значение угла рассеяния около 138° , и вблизи него концентрируется максимальное количество рассеянных лучей. Возникающее в результате резкое возрастание интенсивности рассеянного света — это и есть основная дуга. Таков же механизм возникновения дуги второго порядка, но только, во-первых, она обусловлена лучами класса 4 и, во-вторых, оптимальным в этом случае является не минимальный, а максимальный угол рассеяния. Этот максимум приходится примерно на 130° . В интервале углов от 130 до 138° лучи классов 3 и 4 вообще не рассеиваются. Поэтому здесь простирается темная александрова область. Из рис. 6) видно, что пара лучей, проходящих по обе стороны оптимального прицельного параметра, рассеиваются под одинаковым углом. Интерференция между такими лучами приводит к возникновению дополнительных дуг.

радиуса капли. Следовательно, расположение дополнительных дуг зависит от размера капли (в отличие от экстремального угла). В больших каплях разность хода зависит от прицельного параметра значительно сильнее, чем в каплях меньшего размера. Поэтому с увеличением капельного углового расстояния между соседними дополнительными дугами умень-

пается, так что они редко бывают различимы, если диаметр капель больше одного миллиметра. Наложения цветов тоже способствуют их размытию. Зависимостью структуры дополнительных дуг от размера капель объясняется также и то, что их легче увидеть в верхней части радуги, поскольку размер капель возрастает по мере их падения.

□

С помощью открытой Юнгом интерференции света удалось, наконец, объяснить, во всяком случае, качественно и приближенно, все основные черты радуги. Недоставало только количественной математической теории, способной предсказывать интенсивность рассеянного света как функцию размера капли и угла рассеяния.

Данное Юнгом объяснение дополнительных дуг опирается на волновую теорию света. Парадоксально, но его выводы относительно другой стороны радуги (темной александровой области) противоречили этой теории. Подобно теориям Декарта и Ньютона, интерференционная теория предсказывала, что эта часть неба должна быть совершенно темной, во всяком случае, если ограничиться только лучами класса 3 и 4. Однако такой резкий переход невозможен, так как согласно волновой теории света, резкая граница между светом и тенью должна размываться за счет дифракции. Наиболее известным примером дифракции является кажущееся огибание светом или звуком края непрозрачного или звуконепропускаемого препятствия. И хотя в случае радуги такого явного препятствия и не существует, на границе между основной дугой и темной областью дифракция должна о себе напомнить. Ее исследование относится к ряду тонких и сложных задач математической физики и дальнейшее развитие теории радуги непосредственно связано с попытками их решения.

В 1835 г. сотрудник Кембриджского университета Ричард Поттер обратил внимание на то, что пересечение различных траекторий световых лучей в капле образует каустические кривые. Последние являются огибающими конфигураций лучей и всегда связаны с возникновением ярких световых пятен (рис. 7). Общеизвестным примером каустики может служить светлая кривая, которая видна в чайной чашке, когда солнечные лучи отражаются от ее внутренней поверхности. Так же как у радуги, у каустики есть светлая и темная стороны, освещенность постепенно возрастает при подходе к каустике с одной стороны, а затем резко падает после перехода через каустiku.

Поттер показал, что декартову радугу, т. е. луч класса 3, рассеянный под минимальным углом, можно рассматривать как каустiku. При бесконечном удалении от капли все остальные лучи класса 3 оказываются по одну сторону от этого луча (именно эта сторона радуги является более светлой), а по его другую, «темную» сторону лучей этого класса вообще нет. Таким образом, отыскание интенсивности рассеянного света в радуге аналогично задаче вычисления распределения его интенсивности вблизи каустики.

Эту задачу в 1838 г. попытался решить сотрудник Поттера в Кембридже Джордж Эйри. Его подход основывался на принципе распространения света, сформулированном в семнадцатом веке Христианом Гюйгенсом и развитом позднее Огустеном Жаном Френелем. Согласно этому принципу каждую точку фронта волны следует рассматривать как источник вторичных сферических волн. Последние в свою очередь образуют новый фронт, и таким образом, описывается весь процесс дальнейшего распространения волны. Отсюда следует, что, зная амплитуды волн вдоль какого-либо фронта, можно восстановить их в любой точке пространства.

В частности, зная распределение амплитуд вдоль фронта волны в отдельной капле, можно было бы получить исчерпывающее описание всех черт радуги. К сожалению, это распределение редко удается определить; обычно приходится опираться на реалистические физические предположения, надеясь, что они послужат хорошей аппроксимацией.

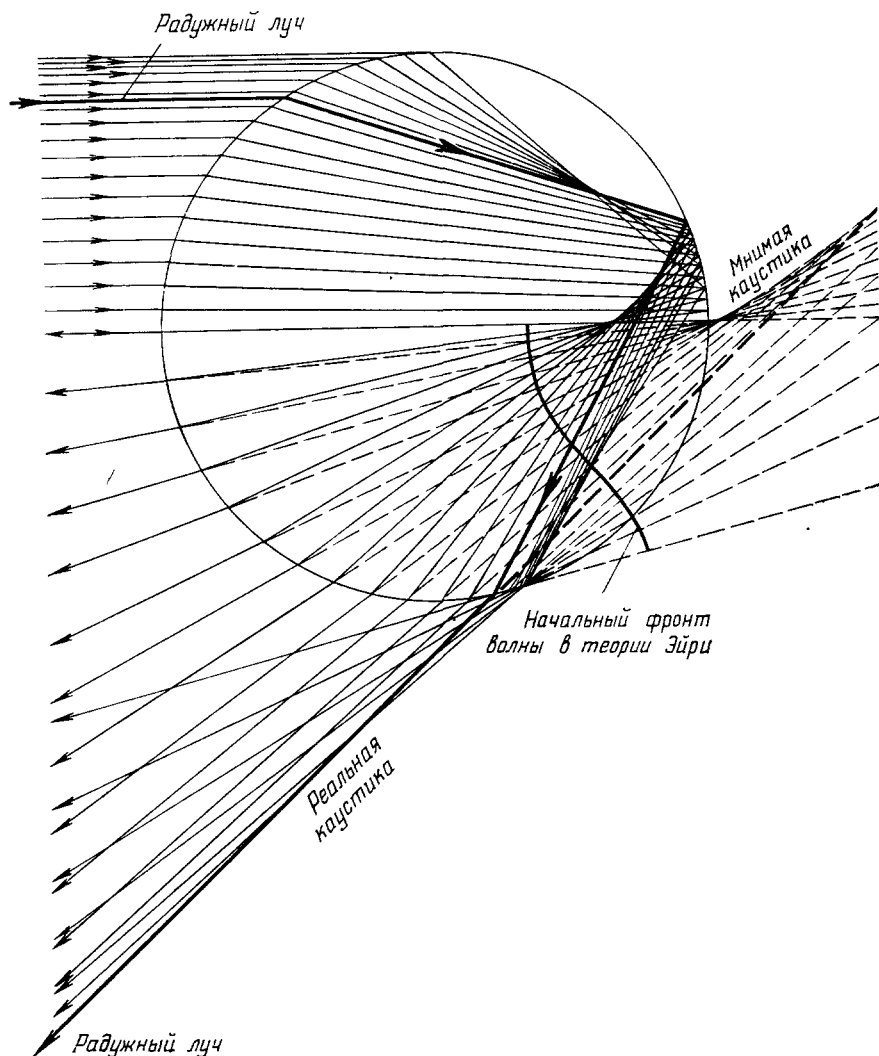


Рис. 7. Сгущение рассеянных каплей лучей образует каустику.

Она является огибающей всей совокупности этих лучей. Особый интерес представляет каустика лучей класса 3, которая состоит из двух ветвей: реальной и мнимой. Если бы радуга возникала в обоих направлениях, то соответствующие лучи стремились бы к ветвям этой каустики. Эйри разработал теорию радуги, основанную на анализе свойств каустики. Выбрав начальный фронт волны — поверхность, нормальную ко всем лучам класса 3, — он сумел вычислить амплитуды всех последующих волн. Слабость его теории в том, что приходится «угадывать» амплитуды вдоль начального фронта волны.

В качестве фронта волны Эйри выбрал поверхность внутри капли, нормальную ко всем лучам класса 3 с точкой перегиба (т. е. изменения знака кривизны) в том месте, где она пересекает луч, отраженный под минимальным углом. Амплитуды вдоль этого фронта оценивались, исходя из обычных предположений, делаемых в теории дифракции. В результа-

те Эйри удалось выразить интенсивность рассеянного света вблизи радуги через неизвестную тогда математическую функцию, носящую теперь его имя. Нас сейчас интересует не сама эта функция как математический объект, а ее физический смысл. Предсказываемое функцией Эйри распределение аналогично дифракционной картине, возникающей при огибании светом экрана с прямолинейным краем. На светлой стороне основной дуги возникают осцилляции интенсивности, соответствующие дополнительным дугам, положение и ширина которых несколько отличаются от предсказываемых интерференционной теорией Юнга. Другое существенное отличие теории Эйри состоит в том, что максимум интенсивности радуги приходится на угол, который несколько превышает декартов угол. Теории Декарта и Юнга предсказывали бесконечную интенсивность при этом минимальном угле рассеяния (как и должно быть на каустике). В теории Эйри она, конечно, всюду ограничена, и при минимальном угле

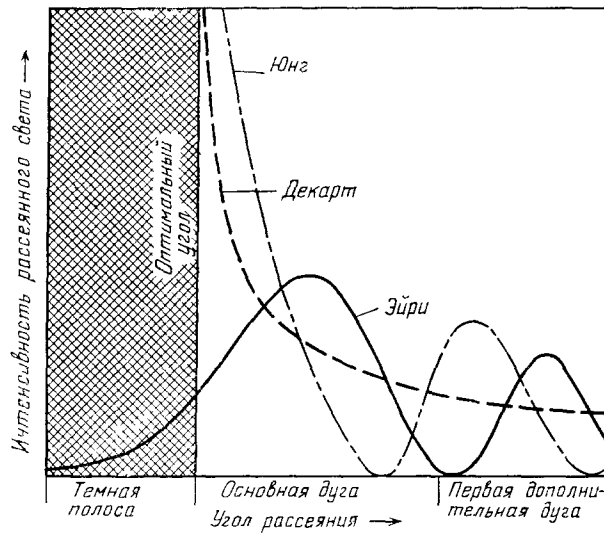


Рис. 8. Сравнение интенсивностей как функций угла рассеяния предсказываемых тремя ранними теориями радуги.

В чисто геометрическом подходе Декарта при оптимальном угле интенсивность бесконечна, затем она постепенно и монотонно уменьшается (без дополнительных всплесков) при сдвиге от радуги в светлую сторону и резко падает до нуля по другую (темную) сторону радуги. Теория Юнга, учитывающая интерференцию световых волн, предсказывает возникновение дополнительных дуг, но в ней остается резкий скачок от бесконечной до нулевой интенсивности при переходе в темную александрову область. Впервые этот скачок сглаживается в теории Эйри (благодаря учету дифракции), которая, кроме того, несколько смещает положение максимумов интенсивности.

рассеяния оказывается меньше половины своей максимальной величины. И, наконец, дифракция изменяет освещенность с темной стороны радуги: теперь она уже не обрывается резко, а убывает постепенно по мере удаления в александрову область (рис. 8).

Все вычисления Эйри относились к монохроматической радуге. Чтобы применить его метод к реальной радуге, обусловленной лучами солнечного света, нужно взять суперпозицию монохроматических радуг Эйри по всему его видимому спектру. Чтобы пойти дальше и описать реально воспринимаемую глазом картину радуги, необходимо привлечь теорию цветового зрения.

Чистота цветовой гаммы в радуге зависит от того, насколько перекрываются ее монохроматические компоненты, а это в свою очередь определяется размером капель. От однородных больших капель (с диаметром

порядка нескольких миллиметров) возникают яркие радуги с чистыми цветами, в то время как в случае очень маленьких капель (с диаметром порядка 0,1 мм) цвета перекрываются настолько сильно, что радуга становится почти белой. $\frac{1}{2}$ 1.

□

Важной характеристикой света, которая до сих пор не принималась во внимание, является его поляризация. Свет представляет собой поперечные волны, т. е. такие, в которых осцилляции поля перпендикулярны к направлению распространения. (В отличие от этого, звуковые волны продольны). Поперечные колебания состоят из двух взаимно перпендикулярных компонент (линейных поляризаций), с помощью которых можно описать любой световой луч. Солнечный свет представляет собой некогерентную смесь этих поляризаций в одинаковой пропорции. Часто поэтому говорят, что он неполяризован. Однако после отражения относительный вес состояний с различной поляризацией изменяется, поэтому поляризация играет существенную роль как одно из характерных свойств радуги.

Рассмотрим отражение светового луча, распространяющегося внутри капли, от ее стенки. Естественной геометрической базой отсчета является плоскость, в которой лежат падающий и отраженный лучи (плоскость падения). Поляризацию любого луча всегда можно разложить на составляющие, нормальную и тангенциальную к этой плоскости. Для обеих составляющих показатель отражения мал при углах падения вблизи нормали к поверхности и очень быстро возрастает по мере приближения к критическому углу, значение которого определяется показателем преломления. При углах, меньших критического, свет отражается полностью независимо от поляризации. Однако, при промежуточных (между нормалью и критическим) углах показатель отражения зависит от поляризации. По мере того, как угол падения возрастает, отражается все большая доля поперечно поляризованного света. В то же время показатель отражения тангенциальной компоненты сначала уменьшается и лишь затем начинает возрастать. В частности, при некотором угле эта компонента света вообще не испытывает отражения — она полностью проходит через границу раздела между двумя средами. В результате при падении света под этим углом отраженный свет оказывается полностью поляризованным перпендикулярно к плоскости падения. Этот угол называют углом Брюстера в честь Давида Брюстера, впервые указавшего в 1815 г. на связанное с ним исключительное свойство отражения света (рис. 9).

Радужные лучи поляризованы почти полностью. В этом легко убедиться, рассматривая радугу через поляризатор и вращая последний вокруг направления луча. Такая сильная поляризация обусловлена удивительным свойством: радугу порождают лучи, угол падения которых на внутреннюю поверхность капли очень близок к углу Брюстера. Поэтому почти вся тангенциальная компонента проходит насквозь, оставаясь в лучах класса 2.

□

После того как стало известно, что волновые свойства присущи в той или иной мере всем материальным объектам, раздвинулись границы области применения теории радуги: от нее потребовалось объяснение новых, невидимых радуг, возникающих в результате атомных и ядерных столкновений.

Еще в 1831 г. ирландский математик Уильям Гамильтон обратил внимание на аналогию между геометрической оптикой и классической

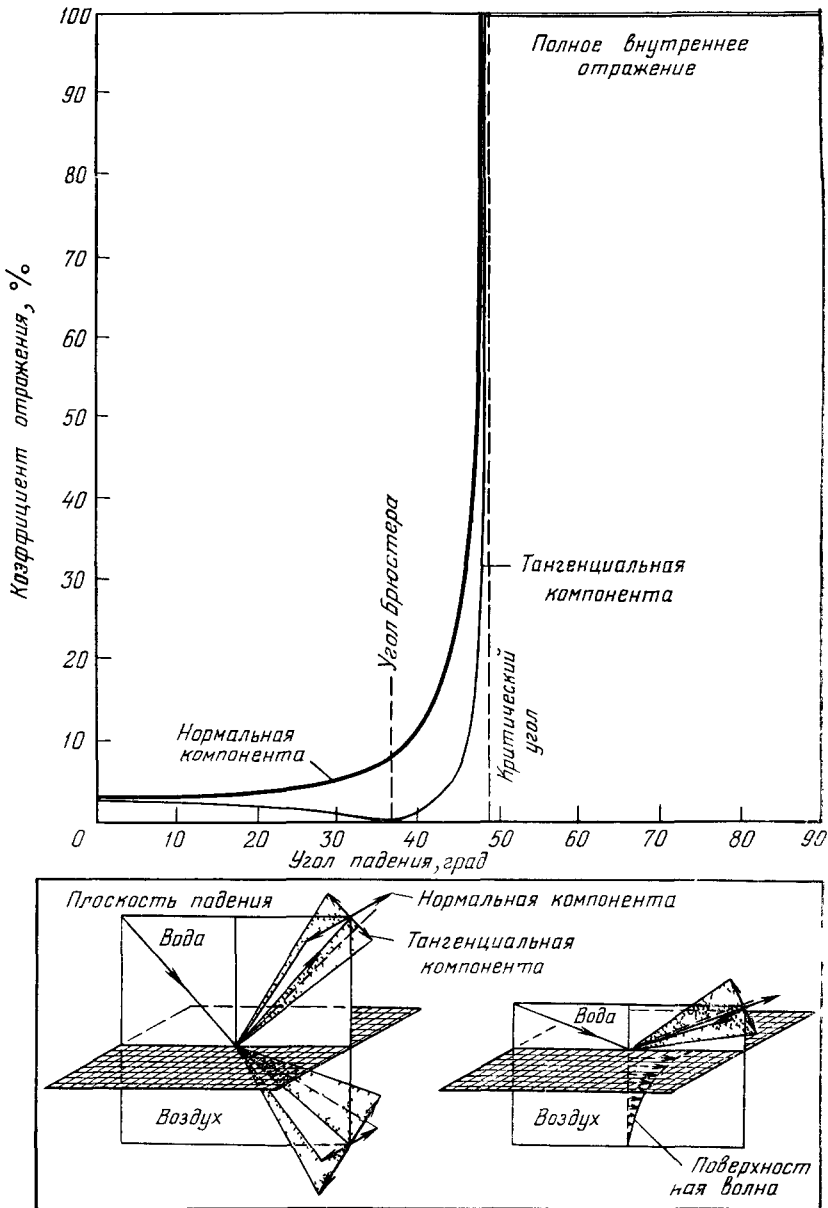


Рис. 9 Поляризация «радужного света» обусловлена зависимостью отражения от поляризации.

Последнюю всегда можно разложить на две компоненты — нормальную и тангенциальную к плоскости падения. Коэффициент отражения луча, падающего на поверхность капли изнутри, зависит от угла падения. При углах, больших критического, свет отражается полностью независимо от поляризации (хотя некоторая часть его начинает распространяться вдоль поверхности). При меньших углах нормальная компонента отражается сильнее, чем тангенциальная, а при некотором угле — угле Брюстера — последняя не отражается вообще. Этот угол близок к тому, при котором возникает радуга. Поэтому «радужный свет» сильно поляризован — в нем доминирует нормальная компонента.

механикой. Аналогом лучей в геометрической оптике являются траектории частиц, а отклонению световых лучей при переходе границы двух сред

с различными показателями преломления соответствует изменение направления движения частицы под действием внешней силы. Существует много аналогий между столкновениями частиц и различными оптическими эффектами. Одной из них является радуга.

Рассмотрим столкновения между двумя атомами газа. По мере сближения между ними сначала возникает постепенно возрастающее притяжение. Однако при дальнейшем сближении электронные оболочки этих атомов перекрываются, в результате чего притяжение ослабевает. На еще меньших расстояниях оно переходит в быстро возрастающее резкое отталкивание.

Как и в оптике, рассеяние атомов можно изучать, рассматривая их траектории как функцию прицельного параметра. Так как в этом случае силы изменяются постепенно и непрерывно, атомы в процессе соударения движутся по криволинейным траекториям, в отличие от мгновенного изменения направления светового луча на границе двух сред с различными показателями преломления.

Несмотря на то, что эти траектории могут быть довольно сложны, каждому углу отклонения соответствует вполне определенный прицельный параметр. Кроме того, существует одна траектория, соответствующая локальному максимуму углового отклонения. Это именно та траектория, вдоль которой наиболее эффективно действует притяжение между

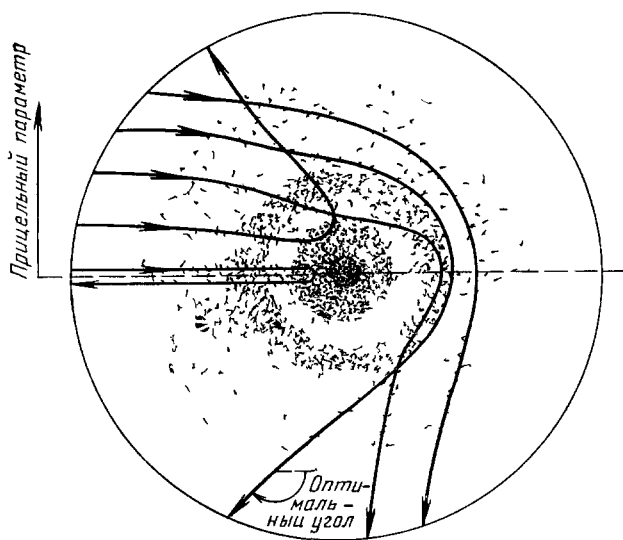


Рис. 10 Рассеяние атомов на атомах также порождает своеобразную радугу.

При этом роль показателя преломления здесь играют межатомные силы. Принципиальное отличие последних состоит в том, что они изменяются плавно и непрерывно, поэтому атомы при столкновении движутся по криволинейным траекториям. По мере их сближения между ними сначала возникает постепенно возрастающее притяжение (область редких точек), которое затем сменяется резким отталкиванием (внутренняя область редких точек). Радуга возникает вблизи локального максимума угла рассеяния. Этот угол соответствует траектории, вдоль которой межатомное притяжение действует наиболее эффективно.

атомами. Следует ожидать, что вблизи соответствующего угла должна наблюдаться значительная концентрация рассеиваемых частиц. Это и есть радуга, возникающая при взаимодействии атомов (рис. 10).

Квантовомеханическое описание атомной и ядерной радуг было развито в 1959 г. Кеннетом Фордом и Джоном Уилером. Интерференция

между коллинеарными траекториями приводит к появлению дополнительных пиков в интенсивности. Для рассеяния частиц существует также аналог теории Эйри.

Впервые атомная радуга наблюдалась в 1964 г. сотрудниками Боннского университета Хундхаузенем и Паули, изучавшими рассеяние атомов натрия на ртути. Ими наблюдались основная радуга и два дополнительных пика. В последующих экспериментах были обнаружены также более тонкие осцилляции интенсивности. Разумеется, эта радуга содержит информацию о межатомных силах. Точно так же, как в случае оптической радуги экстремальный угол зависит только лишь от показателя

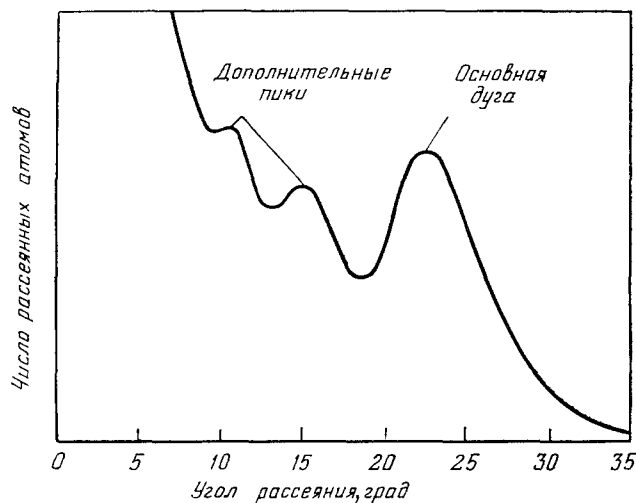


Рис. 11. Атомная радуга, обнаруженная в Боннском университете Хундхаузенем и Паули, изучавшими рассеяние атомов натрия на ртути.

Осцилляция числа рассеянных атомов в зависимости от угла рассеяния отвечают основной и дополнительным дугам. Радуга такого типа содержит информацию о величине и радиусе действия межатомных сил.

преломления, для атомной радуги этот угол определяется силой взаимного притяжения между атомами. Аналогия простирается и дальше: положение дополнительных пиков, как и в оптической радуге, зависит от размеров и, следовательно, позволяет извлечь информацию о радиусе взаимодействия (рис. 11). Подобные же эксперименты выполнены сейчас и для рассеяния атомных ядер.

□

Теория Эйри обладает многими привлекательными чертами и, в целом, является весьма удовлетворительной. И все же у нее есть слабое место. Как уже упоминалось выше, она содержит в себе одну существенную неопределенность: приходится угадывать амплитуду вдоль выбранного произвольно начального фронта волны. Используемые при этом физические предпосылки представляются оправданными, только когда мы имеем дело с достаточно большими дождевыми каплями. Ситуация лучше всего характеризуется величиной отношения окружности капли к длине световой волны. Этот параметр может принимать значения от примерно 100 для тумана или измороси до нескольких тысяч для больших дождевых капель. Аппроксимация Эйри оправдана только в том случае, если этот параметр больше или порядка 5000.

Ирония судьбы состоит в том, что полностью корректное решение проблемы радуги стало надолго недоступным именно после того, как около ста лет тому назад Джеймсом Клерком Максвеллом была создана теория электромагнитного поля. Эта теория позволила, в частности, дать четкую математическую формулировку для описания свойств оптической радуги. Все, что для этого было нужно, — это решить задачу рассеяния плоской электромагнитной волны однородной сферой. Решение аналогичной, но несколько более простой проблемы — рассеяния звуковых волн сферой — обсуждалось рядом ученых, особенно лордом Рэлеем, еще в конце прошлого века. Для электромагнитных волн такое же решение в 1908 г. нашли Густав Май и Питер Дебай.

Казалось бы, имея перед глазами точное решение задачи рассеяния, можно легко выяснить все его свойства, в частности, получить точную математическую картину радуги. Проблема, однако, состояла в том, что для этого нужно было просуммировать ряд парциальных волн, каждый член которого представлял собой довольно сложную математическую функцию. Конечно, приближенное решение можно было получить, оборвав этот ряд и отбросив малые члены, но практически такая процедура не всегда осуществима. Как раз в интересующем нас случае для получения хорошей аппроксимации в этом ряду необходимо оставить такое число членов, которое по порядку величины равно упоминавшемуся выше параметру. Для задачи, которую в свое время решал Рэлей (речь идет о рассеянии света, которым объясняется голубой цвет неба), разложение в ряд по парциальным волнам потому и было очень эффективным, что оказалось достаточно ограничиться лишь одним членом этого ряда. Последнее было связано с тем, что голубой цвет неба обусловлен рассеянием света на молекулах, размер которых значительно меньше длины световой волны. Когда же речь идет о радуге, то, наоборот, размер рассеивателя может в тысячи раз превосходить длину волны падающего на него света. Поэтому получение хорошего приближения методом суммирования парциальных волн требует вычисления суммы нескольких тысяч довольно-таки сложных функций. Для решения этой задачи пытались использовать электронно-вычислительные машины, но результаты оказались быстро изменяющимися функциями угла рассеяния и размера капли. И тут трудоемкость и дороговизна быстро встали непреодолимой преградой на этом пути. Кроме того, компьютер, разумеется, позволяет в лучшем случае получить лишь численное решение, из которого еще далеко не просто извлечь общие физические закономерности. Итак, возникла парадоксальная ситуация: мы знаем вид точного решения, но не в состоянии извлечь из него конструктивной информации о явлении, которое оно заведомо описывает.

□

Первый шаг на пути к разрешению этого парадокса был сделан в начале нашего века математиками Анри Пуанкаре и Дж. Н. Ватсоном. Они указали метод, позволяющий преобразовать ряд парциальных волн, который очень медленно сходится к своему точному значению, в выражение, которое обладает очень хорошей сходимостью. Соответствующая техника известна теперь как преобразование Ватсона или как метод комплексных угловых моментов.

Не представляет большого труда усмотреть, почему угловой момент имеет отношение к кругу вопросов, связанных с радугой, хотя далеко не так очевидно, причем тут комплексные значения этого момента. Проще всего понять это, опираясь на корпускулярную теорию света, согласно которой свет — это поток частиц, называемых фотонами. Хотя у фотонов

и нет массы, с ними связана энергия и импульс, которые обратно пропорциональны длине соответствующей световой волны. Если прицельный параметр падающего на каплю фотона отличен от нуля, то этот фотон обладает угловым моментом, равным произведению его импульса на прицельный параметр. Претерпевая ряд последовательных внутренних отражений, фотон фактически вращается вокруг центра капли. Квантовая механика налагает на этот процесс дополнительные ограничения. Во-первых, она ограничивает допустимые значения углового момента рядом дискретных значений, и, во-вторых, она утверждает, что прицельный параметр не может быть определен точно. Каждому дискретному значению углового момента соответствует один член в разложении по парциальным волнам.

Чтобы произвести преобразование Ватсона, необходимо рассмотреть также значения углового момента, которые обычно считаются «нефизическими». Математический прием состоит в том, что угловой момент, который является квантованной величиной и принимает в действительности лишь дискретные значения, считается формально непрерывной переменной, способной принимать любые, в том числе и комплексные, значения. Другими словами, с математической точки зрения он рассматривается как обычная комплексная величина, имеющая вещественную и мнимую части. Соответствующую этому область изменения этой величины называют плоскостью комплексного углового момента.

Эта математическая абстракция оказалась чрезвычайно плодотворной. В частности, при переходе посредством преобразования Ватсона в плоскость комплексного углового момента происходит перераспределение вкладов в ряд по парциальным волнам. В результате, вместо огромного числа членов этого ряда оказывается достаточным учесть в соответствующих интегралах лишь несколько ключевых точек, называемых седловыми точками и полюсами. В последние годы полюсы стали объектом пристального теоретического изучения в физике элементарных частиц, где их называют полюсами Редже по имени итальянского ученого Туллио Редже, впервые обратившего внимание на их первостепенное значение.

□

Что касается радуги, то тут и полюсы, и седловые точки поддаются простой физической интерпретации. Вклады от седловых точек, расположенных на вещественной оси, ассоциируются с обычными, реальными световыми лучами, обсуждавшимися нами на протяжении всей этой статьи. Ну, а что можно сказать о комплексных седловых точках? Обычно мнимые или комплексные собственные значения принято считать нефизическими решениями уравнения; тем не менее эти решения не бессмысленны. Применительно к распространению волн, мнимая компонента таких решений обычно связана с их затуханием. К примеру, при полном внутреннем отражении света на границе вода — воздух световые волны все-таки проходят через отражающее «зеркало», однако после этого их амплитуда затухает настолько, что интенсивность становится исчезающе малой уже на глубине порядка длины волны. В результате свет не попадает в окружающий воздух: он оказывается «прикованным» к границе между водой и воздухом и движется вдоль нее. Математически это явление описывается как раз мнимой частью решения. Аналогичным образом описывается эффект, известный в квантовой механике как «туннелирование» и состоящий в том, что частица проходит сквозь потенциальный барьер, не «взбираясь» на него. Подобные же «комплексные лучи» возникают по теневую сторону каустики, где они соответствуют быстрому затуханию дифрагировавших световых волн.

Вклады полюсов Редже в преобразованный ряд по парциальным волнам связаны с поверхностными волнами иного рода. Эти волны возбуждаются при тангенциальном падении луча на сферу. Возникнув, такая волна движется вдоль сферы, но при этом непрерывно затухает, так как с нее по касательной к поверхности «срывается» излучение (подобно воде, разбрызгиваемой дождевальными машинами). В каждой точке своего криволинейного пути вдоль поверхности она также проникает

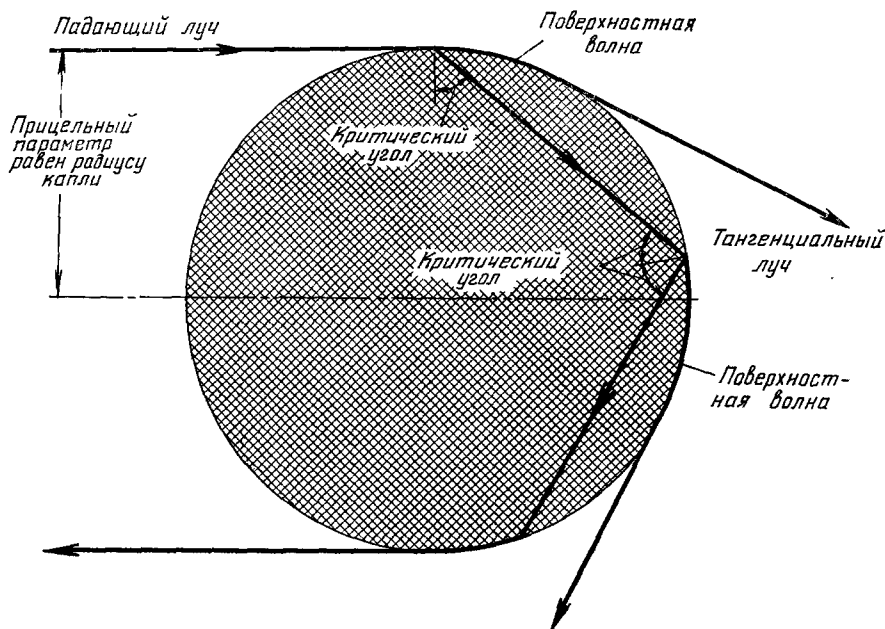


Рис. 12. В основе теории комплексных угловых моментов лежит тот факт, что фотон или квант света, падающего на каплю под некоторым прицельным параметром (который нельзя определить точно), обладает угловым моментом.

В этой теории угловой момент из дискретных физических значений формально математически продолжается во всю комплексную плоскость. Одно из следствий такого подхода иллюстрируется на примере лучей, падающих на каплю тангенциально к ее поверхности. Они возбуждают поверхностные волны, которые, огибая каплю, непрерывно «сбрасывают» излучение вовне. Эти лучи могут также проникать внутрь капли под углом полного внутреннего отражения, либо порождая затем новую поверхностную волну, либо отражаясь снова.

внутри сферы под углом полного внутреннего отражения, возвращаясь на нее после одного или нескольких таких «скачков» (рис. 12). Небезынтересно отметить, что еще в 1584 г. Кеплер предположил, что подобный механизм мог бы быть причиной образования радуги, однако он вынужден был отказаться от своей идеи, так как при этом не удавалось получить правильное значение характерного для радуги угла отражения.

В 1937 г. датские физики Ван-дер-Поль и Бреммер, используя для описания радуги преобразование Ватсона, сумели показать, что в предельном случае оно приводит к аппроксимации Эйри. В 1965 г. мне удалось модифицировать метод Ватсона, а затем в 1969 г. с помощью этого улучшенного метода добиться несколько большего успеха.

□

Мы видели, что в простом декартовом подходе на освещенной стороне радуги каждый раз имеются два луча, излучаемых в одинаковом направлении. При оптимальном угле они сливаются в один луч, а в темной области отсутствуют вообще. Как уже упоминалось выше, в плоскости комплексного углового момента каждому геометрическому лучу соответствует

седловая точка на вещественной оси. Следовательно, с математической точки зрения радуга — это не что иное, как наложение двух седловых точек. В затененной области (т. е. при углах меньше критического) седловые точки не исчезают вообще, а становятся комплексными, т. е. смещаются от вещественной оси и приобретают мнимую часть. Именно ими описывается свет, дифрагирующий в александрову темную область. Он может служить примером «комплексных лучей» с теневой стороны каустической кривой.

В свете изложенного, необходимо отметить, что результаты, полученные с помощью метода комплексных угловых моментов, вовсе не зачеркивают прежних достижений в описании радуги. Декартово объяснение возникновения основной дуги вследствие отражения лучей под минимальным углом, вне всякого сомнения, остается в силе, а дополнительные дуги

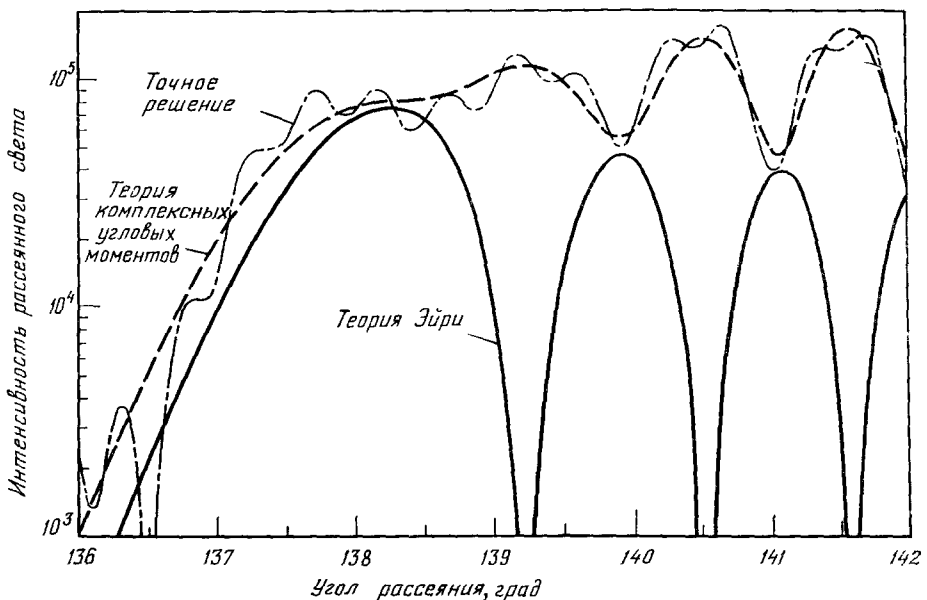


Рис. 13. Количественные теории радуги предсказывают интенсивность рассеянного света как функцию угла рассеяния, а также ее зависимость от поляризации и размера капли.

На графике представлены результаты, к которым приводят три теории, для интенсивности тангенциально поляризованного света, рассеиваемого каплей, окружность которой в 1500 раз больше длины световой волны. Одна кривая отвечает «точному» решению, полученному непосредственно из уравнений Максвелла. Оно имеет вид бесконечного ряда весьма сложных функций и аппроксимировано на графике суммой свыше 1500 членов в каждой расчетной точке кривой. Теория Эйри явно не согласуется с точным решением, особенно в области углов, соответствующих дополнительным дугам, где максимумы в этой теории приходятся как раз на провалы в точном решении. В то же время предсказания, полученные методом комплексных угловых моментов, находятся в близком соответствии с точным решением, отличаясь от него лишь отсутствием малых высокочастотных осцилляций. Последние связаны с другим оптическим атмосферным явлением — ореолом, который также объясняется посредством теории комплексных угловых моментов.

по-прежнему можно рассматривать как отмеченный Янгом результат интерференции. Метод комплексных угловых моментов просто дает более всеобъемлющую картину движения фотонов в окрестности радуги и потому приводит к более корректным выводам.

В 1975 г. сотрудник Рочестерского университета Кейр произвел детальное сравнение трех теоретических подходов: аппроксимации Эйри, «точного» решения, полученного путем прямого суммирования ряда парциальных волн с помощью компьютера, и результатов, полученных в рамках метода комплексных угловых моментов посредством учета наложений двух седловых точек (рис. 13). Оказалось, что для домини-

рующей поляризации, нормальной к плоскости рассеяния, теория Эйри с точностью лишь до небольших поправок правильно описывает основную дугу, но в области дополнительных дуг отклонения от нее весьма ощутимы. Что же касается света, поляризованного параллельно плоскости рассеяния, то здесь приближение Эйри оказывается совершенно бессильным. Оно предсказывает минимумы интенсивности дополнительных дуг там, где точная теория дает максимумы, и наоборот. Такое резкое расхождение является косвенным отражением того обстоятельства, что угол внутреннего отражения лучей, образующих радугу, и угол Брюстера почти совпадают. Между тем теория Эйри не учитывает, что при угле Брюстера амплитуда отраженных лучей изменяет знак. В результате эта теория предсказывает деструктивную интерференцию там, где она в действительности является конструктивной и т. п.

В то же время предсказания метода комплексных угловых моментов очень хорошо согласуются с точной теорией во всем, что касается основных черт радуги, как-то: основная и дополнительные дуги, а также дифракционная картина в затемненной части неба. Мелкомасштабные флуктуации интенсивности, присутствующие в точном решении, не воспроизводятся в рамках теории комплексных угловых моментов. Однако при типичном соотношении между размером капли и длиной световой волны (порядка 1500) точный результат получается ценой суммирования свыше полутора тысяч сложных функций, в то время как в методе комплексных угловых моментов решение выражается в несравненно более простом виде.

□

Небольшие добавочные флуктуации в точной кривой интенсивности связаны с отражениями более высокого порядка, т. е. с лучами более высоких классов. Они малосущественны в области основной дуги, но по мере увеличения угла рассеяния их роль возрастает и вблизи рассеяния назад становится определяющей. С этими лучами связано другое замечательное метеорологическое явление — ореол *).

Ореол — это многоцветное гало, окружающее тень, которую отбрасывает предмет на облака или туман. Чаще всего оно возникает вокруг тени, которую отбрасывает самолет, летящий над облаками. Оно тоже объясняется теорией комплексных угловых моментов, но в этом случае описание сложнее, чем для радуги. Частично ореол обязан своим возникновением поверхностным волнам, которые описываются полюсами Редже и, как уже отмечалось выше, связаны с лучами, падающими на каплю тангенциально к ее поверхности. При этом существенную роль играет многократное внутреннее отражение, при котором траектория луча образует замкнутый многоугольник звездообразной формы. В результате возникают резонансы, т. е. повышения интенсивности. Это геометрическое построение очень сродни кеплеровым идеям относительно природы радуги.

Второе, чем обусловлен ореол, — и это было продемонстрировано Кейром — происходит от теневых зон радуг высокого порядка, возникающих вблизи рассеяния назад. Этот эффект связан с комплексными лучами, о которых упоминалось выше. Радуга 10-го порядка, видимая под углом всего лишь в несколько градусов от направления назад, оказывается в этом отношении наиболее эффективной.

*) См. статью: Bryant H. C., Jarmie N., The Glory. — Scientific American, July 1974.

Для радуг высокого порядка теория Эйри непригодна вообще, (при обеих поляризациях), поэтому необходимо использовать метод комплексных угловых моментов, в рамках которого ореол порождается отчасти тенью радуги. Этот факт доставляет известную эстетическую удовлетворенность: в рамках красивой, но, казалось бы, абстрактной теории комплексных угловых моментов удастся объяснить два удивительных явления природы и установить неожиданную связь между ними.

ЛИТЕРАТУРА

- V a n d e H u l s t H. C.— Light Scattering by Small Particles.— N.Y.: J. Wiley and Sons, 1957.
M i n n a e r t M.— Light and Color in the Open Air.— N.Y.: G. Bell and Sons, 1959.
B o y e r C. The Rainbow: From Myth to Mathematics.— Th. Yoseloff: 1959.
T r i c k e r R. A. R. Introduction to Meteorological Optics.— N.Y.: American Elsevier, 1970.
K h a r e V., N u s s e n z w e i g H. M.— Phys. Rev. Lett., 1974, v. 33, p. 976.