

ОПТИКА РАДУГИ

И. Д. Рухленко

Яркая разноцветная дуга, появляющаяся на небе после теплого летнего ливня, хорошо известна каждому. Это удивительное оптическое явление восхищало, повергало в ужас и завораживало людей на протяжении многих тысячелетий. О радуге слагались легенды и мифы: одни считали ее сетью, раскинутой мощным духом для поимки человеческих теней; воображение других рисовало им радугу змеей с горящими глазами, которая пожирает людей, запивая их водой из озера; у третьих радуга ассоциировалась, наоборот – с радостью и весельем. Сегодня нам чужды подобные измышления, ведь даже ребенок знает, что радугу образует солнечный свет, встретивший на своем пути дождевую завесу, состоящую из миллионов водяных капель. Однако далеко не все представляют, насколько разнообразны и причудливы бывают радуги, и уж совсем немногие могут объяснить их свойства. Надеюсь, что, прочитав данную статью и разобравшись с физическим феноменом радуги, вы сможете еще сильнее проникнуться ее красотой и гармонией.

Первые попытки найти причину возникновения радуги принадлежали еще философам античности. Они были обречены на неудачу, поскольку в то время не был известен закон преломления света, играющего ключевую роль в формировании радуги. Этот закон был открыт голландским ученым Виллебрордом Снеллиусом лишь в начале XVII в. С тех пор теория радуги последовательно развивалась и уточнялась на протяжении почти четырех веков – до конца XX в. В результате, сегодня физики могут количественно описать все наблюдаемые свойства радуги. Некоторые из этих свойств весьма экзотичны, в том смысле, что могут быть обнаружены лишь в исключительных случаях. Поэтому, прежде чем переходить к объяснению явления радуги, познакомимся с его характерными особенностями.

Наиболее часто видна радуга, называемая первичной (первой), главной или основной. Она представляет собой дугу круга, окрашенную спектральными цветами, плавно меняющимися от фиолетового с внутренней стороны, до красного с наружной (Рис. 1). Центр дуги – антисолярная точка – расположен на прямой, проходящей через Солнце и глаз наблюдателя. За исключением момента восхода Солнца он всегда находится ниже линии горизонта. При этом расстояние от антисолярной точки до горизонта, показанное на Рис. 1 пунктиром, равняется высоте Солнца. Угол, под которым радиус основной радуги виден наблюдателю, называемый ее угловым радиусом, приблизительно равен 42° , а полная угловая ширина дуги составляет $2^\circ 15'$. Первую радугу одинаково легко наблюдать как после дождя, так и в различных брызгах, создаваемых фонтанами, водопадами, поливальными

установками и даже пульверизаторами.

Кроме яркой основной дуги на небе иногда можно увидеть более слабую вторую. Она концентрична с первой и имеет обратный порядок цветов: красная полоса находится на внутреннем, фиолетовая – на наружном крае. Радиус второй дуги равен примерно 51° , а угловая ширина – $3^\circ 54'$. Если присмотреться, то можно заметить, что пространство, расположенное между основной и вторичной радугами, темнее окружающего неба. Эта область была названа темной александровой полосой в честь древнегреческого философа Александра, впервые описавшего ее. Облака, находящиеся внутри первой радуги, освещены относительно ярко, поэтому, даже в том случае, когда вторая радуга неразличима, александрова полоса хорошо просматривается. Рассмотрев радугу сквозь поляризатор, легко обнаружить одно замечательное свойство ее дуг, которое не наблюдается обычным глазом. Вращая поляризационную призму, легко подобрать такое ее положение, при котором обе дуги почти полностью исчезают. Это свидетельствует о том, что свет, идущий от них, сильно поляризован.

Еще менее заметным атрибутом радуг являются нежнейшие цветные арки, как правило розовые и зеленые, которые располагаются вблизи фиолетовых краев первой и второй дуг. Эти дополнительные полосы наиболее отчетливо видны вблизи вершин основных радуг и постепенно исчезают по мере приближения к горизонту. Наконец, бывают случаи, когда глазами можно поймать радуги, цвета которых сменяют друг-друга, переливаются и дрожат; бесцветные – белые радуги и радуги с преобладанием отдельных цветов; перевернутые, кольцевые, эллиптические и даже гиперболические радуги. Давайте же попытаем-

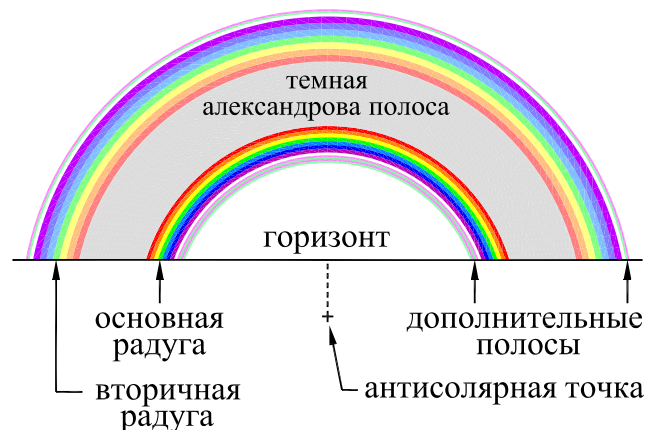


Рис. 1: Схема радуги.

ся разобраться в том, как современная физика объясняет все перечисленные феномены. Для этого вам не только потребуются вспомнить весь школьный курс оптики, но также придется использовать основы дифференциального исчисления, изучаемые в одиннадцатом классе. Поэтому те, кто еще не умеет находить производные и с их помощью исследовать графики функций, могут пропускать поясняющие выкладки, переходя сразу к их физической интерпретации.

1. ПРИЧИНА ВОЗНИКНОВЕНИЯ И ФОРМА РАДУГИ

Первым, кто дал объяснение главным особенностям радуги, был французский философ и математик Рене Декарт. В 1637 г. он теоретически исследовал рассеяние параллельных световых лучей в сферической водяной капле и нашел верное объяснение форме и расположению дуг различных порядков. Согласно теории Декарта, первую и вторую радуги образует часть солнечных лучей, испытавших, соответственно, одно- и двукратное внутренние отражения от поверхности дождевых капель. А именно – лучи, отклоненные каплями на минимальный угол. В направлении таких лучей концентрируется световая энергия, вследствие чего те участки неба, от которых они приходят в глаз, кажутся светящимися. Эти светящиеся участки и образуют радугу.

Чтобы пояснить сказанное, обратимся к Рис. 2, на

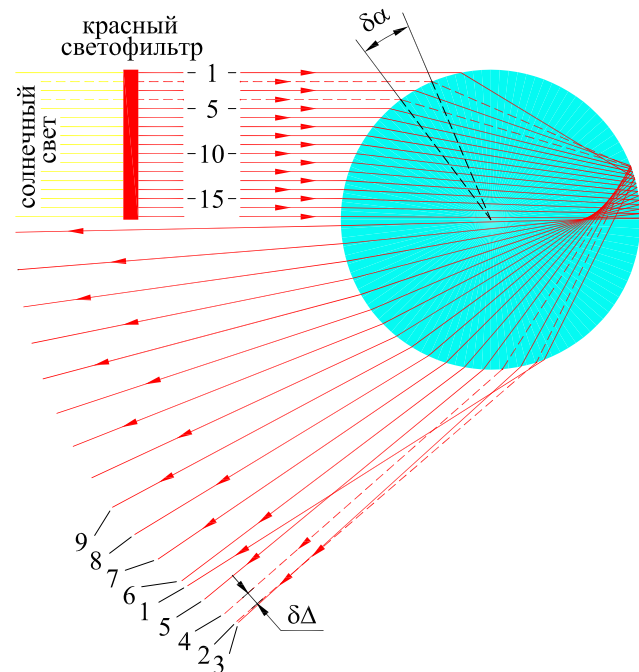


Рис. 2: Ход лучей красного света ($\lambda = 630 \text{ нм}$), испытавших одно внутреннее отражение в водяной капле.

котором показан ход 17 лучей красного света, испытавших в водяной капле одно внутреннее отражение. До преломления все лучи, образующие пучок, были параллельны между собой. После прохождения сквозь каплю, данный пучок кажется полностью расходящимся. На самом деле это не так. Посмотрев на Рис. 2 внимательно, легко заметить, что 2-ой и 4-ый лучи, показанные пунктиром, на выходе идут почти параллельно друг-другу. Так получилось потому, что они упали на каплю практически симметрично относительно наименее преломленного луча 3. Как мы сейчас докажем, по мере сближения 2-го и 4-ого лучей, т. е. при стремлении разности $\delta\alpha$ их углов падения на поверхность капли к нулю, угол расхождения этих лучей после преломления $\delta\Delta$ стремится к нулю значительно быстрее, чем $\delta\alpha$. Поэтому отношение $\delta\alpha/\delta\Delta$, которому пропорциональна интенсивность вышедшего света, стремится к бесконечности. Отсюда следует, что в направлении луча 3 будет иметь место сгущение энергии, или повышенная освещенность.

На самом деле, усиление света в водяной капле имеет место не только для лучей, показанных на Рис. 2, но также для лучей, испытавших два, три и более внутренних отражений. Давайте определим, в каких направлениях данное усиление происходит. Для этого рассмотрим монохроматический луч SA, упавший на поверхность сферической капли под произвольным углом α (Рис. 3). В точке падения данный луч частично отражается, а частично преломляется и проходит внутрь капли под углом β . Дойдя до точки В, прошедший луч разделяется на два: один выходит наружу под углом α к нормали, а второй, испытав внутреннее отражение, попадет в точку С. В этой точке световой луч также раздваивается: часть его выходит из капли,

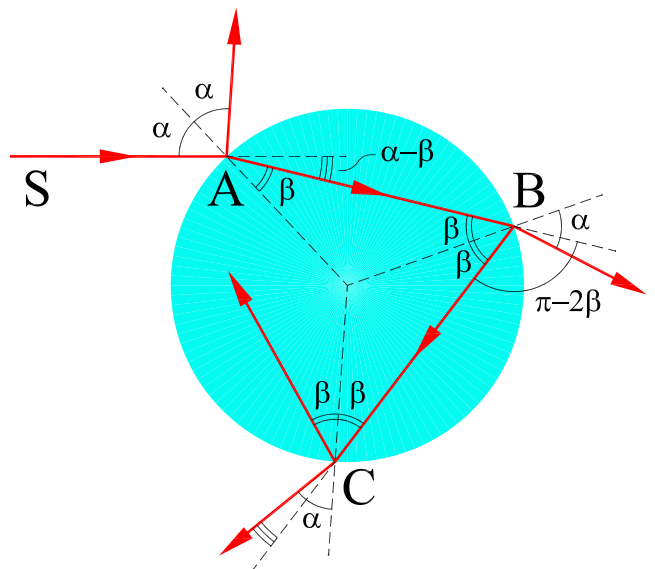


Рис. 3: Распространение светового луча в сферической капле воды.

а часть отражается и продолжает путешествие внутри. Найдем, сперва, под каким углом к направлению падения покинет каплю луч, испытавший k внутренних отражений от ее поверхности. Из Рис. 3 видно, что при входе и выходе из капли луч света изменяет направление своего распространения, поворачиваясь по часовой стрелке на угол $\alpha - \beta$. При каждом внутреннем отражении аналогичный поворот составляет величину $\pi - 2\beta$. В результате искомый поворот светового луча после выхода из капли составит

$$\Delta = 2(\alpha - \beta) + k(\pi - 2\beta). \quad (1)$$

Заметьте, что функция Δ весьма сложным образом зависит от угла падения α , т. к. α и β связаны законом преломления

$$\sin \alpha = n \sin \beta, \quad (2)$$

где n – показатель преломления воды относительно воздуха. Несмотря на это, для любого k можно найти такой критический угол падения α_k , при котором производная функции Δ обратится в нуль. Действительно, считая угол преломления β функцией α , можем записать производную функции $\Delta(\alpha)$ в следующем виде:

$$\Delta' = 2 - 2(k+1)\beta'. \quad (3)$$

Очевидно, что она равна нулю, когда

$$\beta' = \frac{1}{1+k}. \quad (4)$$

Данное уравнение определяет критический угол. Чтобы его найти, возьмем производную по углу α от обеих частей закона преломления (2), помня, что функция $\sin \beta$ является сложной и ее производная равна не просто $\cos \beta$, а $\cos \beta \times \beta'$. В результате получим:

$$\cos \alpha = n \cos \beta \times \beta'. \quad (5)$$

Исключив из получившегося равенства β' с помощью (4), найдем

$$(k+1) \cos \alpha_k = n \cos \beta_k, \quad (6)$$

где β_k – угол преломления, который соответствует критическому углу падения, т. е.

$$\sin \alpha_k = n \sin \beta_k. \quad (7)$$

Возводя выражения (6) и (7) в квадрат и складывая почленно, придем к уравнению с одним неизвестным

$$\sin^2 \alpha_k + (k+1)^2 \cos^2 \alpha_k = n^2.$$

Откуда

$$\alpha_k = \arccos \sqrt{\frac{n^2 - 1}{k^2 + 2k}}, \quad (8)$$

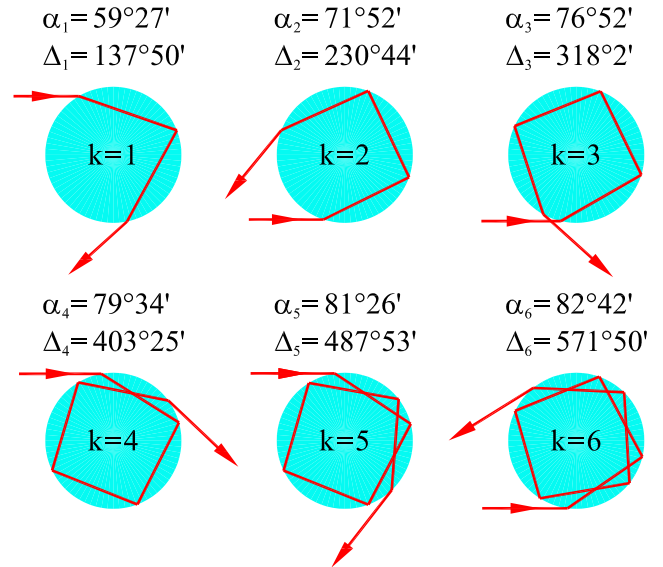


Рис. 4: Ход лучей света с длиной волны 630 нм ($n = 1.3324$), наименее отклоненных от направления своего первоначального распространения, для различного числа внутренних отражений k .

причем перед корнем был выбран знак плюс, т. к. угол α_k острый. Как видно из формулы (8), угол α_k существует при $n^2 - 1 < k^2 + 2k$, т. е. при $n < k + 1$. Поскольку показатель преломления воды относительно воздуха для всех световых лучей, начиная от красного и заканчивая фиолетовым, не превосходит 2, то α_k существует при всех k , начиная с $k = 1$ (Рис. 4). Покажем, что данный угол соответствует минимальному повороту выходящего из капли луча относительно направления падения SA. Как известно, в точке минимума вторая производная функции должна быть положительна. Согласно (3) $\Delta'' = -2(k+1)\beta''$. Производную β'' в экстремуме можно найти, продифференцировав дважды по углу α закон преломления. Для этого достаточно взять производную от выражения (5), рассматривая его правую часть как произведение двух сложных функций:

$$-\sin \alpha = -n \sin \beta \times \beta' + n \cos \beta \times \beta''.$$

Выражая отсюда β'' и используя формулы (4) и (7), получим:

$$\beta'' = -\frac{k}{k+1} \operatorname{tg} \beta_k.$$

Но $\operatorname{tg} \beta_k > 0$, следовательно

$$\Delta'' = 2k \operatorname{tg} \beta_k > 0, \quad (9)$$

что и требовалось доказать.

Итак, параллельный пучок монохроматических лучей, встретивших на своем пути сферическую водяную каплю, концентрируется ей в направлениях, определяемых углами Δ_k , которые отсчитываются от направления SA по часовой стрелке (см. Рис. 3). Эти

углы называются декартовыми и определяются выражением (1), в котором угол падения равен критическому

$$\Delta_k = 2(\alpha_k - \beta_k) + k(\pi - 2\beta_k). \quad (10)$$

Значения первых шести декартовых углов и соответствующих им углов α_k для света с длиной волны 630 нм приведены в Таб. I. При построении данного рисунка было учтено, что в большинстве случаев наблюдатель находится ниже дождевых капель, и, чтобы попасть к нему в глаз, преломленные лучи должны распространяться вниз. Поэтому при $k = 1, 4$ и 5 достигающие наблюдателя лучи входят в каплю сверху, а при $k = 2, 3$ и 6 – снизу. Формально усиление света в направлениях Δ_k равно бесконечности, т. к. при $\delta\alpha \rightarrow 0$ (см. Рис. 2) угол падения $\alpha \rightarrow \alpha_k$ и

$$\frac{\delta\alpha}{\delta\Delta} = \frac{1}{\left(\frac{\delta\Delta}{\delta\alpha}\right)} \rightarrow \frac{1}{\Delta'} \rightarrow \infty.$$

В реальности же явление дифракции света приводит к тому, что данное усиление всегда оказывается конечным.

Выясним теперь как образуются радуги различных порядков. В этом нам поможет Рис. 5, на котором изображена дождевая завеса, освещаемая параллельными лучами, идущими от Солнца. Как и прежде, для простоты рассуждений, будем рассматривать только лучи красного света. Из проведенного анализа следует, что, после рассеяния на капле, пучок световых лучей остается симметричным относительно луча, проходящего через центр капли. Поэтому в солнечных лучах каждая капля воды становится вершиной множества конусов усиленных лучей (соответствующих различным k). Из каждого веера лучей, образующих данный конус, в глаз наблюдателя попадает только один, причем лишь в том случае, если порождающая его капля располагается в месте пересечения дождевой завесы с поверхностью аналогичного конуса, выходящего из глаза наблюдателя. В большинстве случаев данное пересечение происходит по дуге окружности, чем и объясняется форма радуги. Угловой радиус γ_1 радуги первого порядка равняется

Таблица I: Значения первых шести углов α_k и Δ_k для лучей света с длиной волны 630 нм (см. Рис. 4), а также приблизительные угловые радиусы (γ_k) и положения центров соответствующих радуг.

k	α_k	Δ_k	γ_k	Центр дуги
1	59°27'	137°50'	42°	антисолярная точка
2	71°52'	230°44'	51°	антисолярная точка
3	76°52'	318°02'	42°	Солнце
4	79°34'	403°25'	43°	Солнце
5	81°26'	487°53'	52°	антисолярная точка
6	82°42'	571°50'	32°	антисолярная точка

ся угловому радиусу конуса, который образован лучами, усиленными каплей после однократного внутреннего отражения. Используя данные Рис. 4, найдем: $\gamma_1 = 180^\circ - 137^\circ 50' \approx 42^\circ$. Радуга с двумя внутренними отражениями находится чуть выше первой и имеет радиус $\gamma_2 = 230^\circ 44' - 180^\circ \approx 51^\circ$. Ее образуют лучи, вошедшие в капли с нижней стороны и вышедшие с верхней (см. Рис. 5). Главную и вторичную радуги видит наблюдатель А, стоящий спиной к Солнцу. Согласно изложенной теории, пространство между этими радугами должно быть совершенно темным, поскольку свет, усиленный находящимися в нем каплями, минует наблюдателя.

В отличие от первых двух радуг, третья ($\gamma_3 = 318^\circ 02' - 180^\circ \approx 138^\circ$) и четвертая ($\gamma_4 = 403^\circ 25' \approx 137^\circ$) почти совпадают и имеют своим центром Солнце. Их мог бы видеть наблюдатель В, обращенный лицом к светилу, если бы не более яркий свет, приходящий от Солнца без внутренних отражений в каплях (лучи 0 на Рис. 5). Этому свету никакой радуги не соответствует, так как его интенсивность монотонно убывает по мере увеличения угла между поверхностью капли и солнечными лучами. Однако он настолько ярок, что третья и четвертая радуги в нем просто теряются.

Далее, пять внутренних отражений дают радугу, которая почти совпадает со второй ($\gamma_5 = 540^\circ - 487^\circ 53' \approx 52^\circ$). Шестая радуга лежит внутри первой ($\gamma_6 = 571^\circ 50' - 540^\circ \approx 32^\circ$), а ее центр, как и у пятой, находится в антисолярной точке. Увидеть эти радуги в естественных условиях невозможно, поскольку их свет ослаблен многократными преломлениями, сопровождающими каждое внутреннее отражение. Между тем, в лаборатории их наблюдать сравнительно легко, а если заменить капли стеклянным цилиндром или струей воды и сильно осветить их, то можно добрать до радуги 12 и даже 19 (!) порядков. При желании,

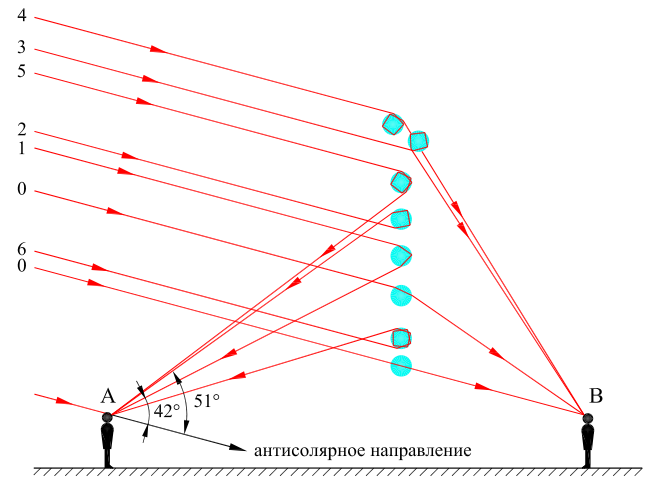


Рис. 5: Схема, поясняющая образование радуг различного порядка. Высота Солнца над горизонтом равняется 15° .

их радиусы и расположение вы можете найти самостоятельно, воспользовавшись формулами (8) и (10).

Несложно понять и образование, так называемых, горизонтальных радуг, которые располагаются в горизонтальной плоскости, а также радуг кольцеобразной формы. Поскольку форма радуги представляет собой сечение конуса...

II. РАСПОЛОЖЕНИЕ ЦВЕТОВ В РАДУГЕ

Объяснив на основании законов геометрической оптики причину возникновения и форму радуги, Декарт мог только догадываться о происхождении ее цветов. Секрет цветовой гаммы радуги был раскрыт Исааком Ньютоном, поставившим в 1666 г. знаменитый опыт по разложению белого света призмой. Сегодня, благодаря этому опыту, мы знаем о явлении дисперсии: показатель преломления в области прозрачности любого вещества монотонно убывает при переходе от более коротких световых волн к более длинным. Поскольку, согласно выражению (8), критический угол падения зависит от показателя преломления света, то для разных длин волн декартовы углы Δ_k будут слегка различаться. В результате, наблюдатель увидит радугу окрашенной, ибо к нему в глаз одновременно попадут яркие лучи света всевозможных цветов. Из-за большого расстояния между дождевыми каплями и наблюдателем, эти лучи придут с разных направлений и, следовательно, будут испущены различными группами капель.

Чтобы теоретически предсказать как должны располагаться цвета в радугах различного порядка, необходимо знать увеличивается или уменьшается угол Δ_k при переходе от красного конца спектра к фиолетовому. Выяснить это можно, построив график зависимости $\Delta_k(n)$. Поскольку фиолетовым лучам соответствует больший показатель преломления, чем красным, то для ответа на поставленный вопрос достаточно по графику определить возрастает или убывает функция $\Delta_k(n)$. Но построить график данной функ-

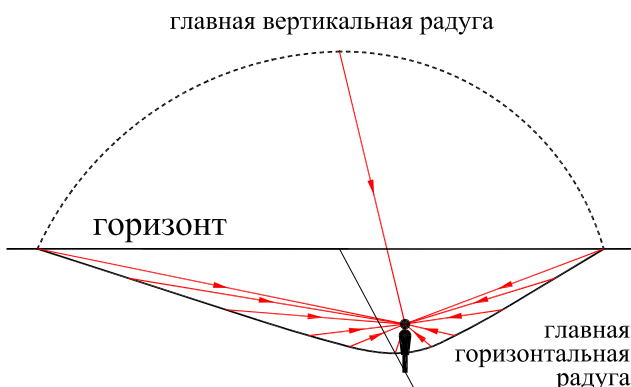


Рис. 6: Схема образования горизонтальной радуги.

Рис. 7: Схема образования радуги в лучах красного света. Только выделенные на световых конусах лучи попадают в глаз наблюдателя и создают радугу.

ции без использования компьютера достаточно сложно. Кроме того, придется строить целый ряд графиков – свой для каждого k . Поэтому правильнее поступить иначе. Так как возрастание и убывание любой функции определяется знаком ее производной, давайте, для выяснения порядка цветов в радугах, найдем знак производной $\Delta'_k(n)$. Дифференцируя с этой целью равенство (10), получим:

$$\Delta'_k = 2[\alpha'_k - (k+1)\beta'_k].$$

Обратите внимание, так как сейчас мы вычисляем производную по показателю преломления, производная β'_k уже не определяется условием (4). Чтобы преобразовать выражение, стоящее в квадратных скобках, воспользуемся известным нам приемом – продифференцируем равенство (7) по n :

$$\cos \alpha_k \times \alpha'_k = \sin \beta_k + n \cos \beta_k \times \beta'_k.$$

Исключая отсюда множитель $n \cos \beta_k$ с помощью (6), без труда найдем:

$$\alpha'_k - (k+1)\beta'_k = \frac{1}{n} \operatorname{tg} \alpha_k.$$

Поскольку $\operatorname{tg} \alpha_k > 0$, то и $\Delta'_k = (2/n) \operatorname{tg} \alpha_k > 0$. Следовательно минимальное отклонение лучей Δ_k возрастает с увеличением n , т. е. при переходе от красных лучей к фиолетовым при всех значениях k .

Посмотрите на Рис. 8. На нем построен ход 7 лучей различного цвета, образовавшихся в результате разложения белого света на поверхности капли. Длины волн, соответствующие различным цветам, приведены в Таб. II. Также в таблице даны относительные показатели преломления, рассчитанные для различных длин волн по формуле Коши

$$n(\lambda) = 1.3246 + \frac{3092}{\lambda^2},$$

где λ выражена в нанометрах. Для света видимого диапазона данная формула обеспечивает весьма хорошую точность.

Согласно данным Таб. II, угловая ширина основной радуги $\Gamma_1 = 139^\circ 29' - 137^\circ 46' = 1^\circ 43'$, а вторичной – $\Gamma_2 = 233^\circ 43' - 230^\circ 36' = 3^\circ 07'$.

Рис. 8: Разложение белого луча в спектр каплей воды.

III. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ДУГИ

В заключение автор считает своим приятным долгом поблагодарить Фонд некоммерческих программ «Династия» за предоставление именного гранта в рамках программы поддержки учителей физики и математики.

Таблица II: Декартовы углы первого и второго порядков для лучей спектральных цветов.

Луч	λ , нм	n	Δ_1	Δ_2
Фиолетовый	400	1.3439	$139^\circ 29'$	$233^\circ 43'$
Синий	470	1.3386	$138^\circ 44'$	$232^\circ 21'$
Голубой	490	1.3375	$138^\circ 34'$	$232^\circ 04'$
Зеленый	530	1.3356	$138^\circ 18'$	$231^\circ 34'$
Желтый	570	1.3341	$138^\circ 05'$	$231^\circ 11'$
Оранжевый	600	1.3332	$137^\circ 57'$	$230^\circ 56'$
Красный	650	1.3319	$137^\circ 46'$	$230^\circ 36'$