TS345
-
Codage pour la 5G

Romain Tajan

15 octobre 2019

Plan

1. Codes Linéaires (binaires) en blocs
2. LDPC

Codes linéaires en blocs

Définitions

1. À partir de sa **matrice génératrice** G de taille $k \times n$: $\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{u}G \mid \mathbf{u} \in \mathbb{F}_2^k \right\}$

Codes linéaires en blocs

Définitions

1. À partir de sa **matrice génératrice** G de taille $k \times n$: $\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{u}G \mid \mathbf{u} \in \mathbb{F}_2^k \right\}$
2. À partir de sa **matrice de parité** H de taille $n - k \times n$: $\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{c} \in \mathbb{F}_2^n \mid \mathbf{c}H^T = \mathbf{0} \right\}$

1. G et H **ne sont pas uniques**
2. G et H vérifient $GH^T = 0_{k \times n-k}$. Vrai pour tout coupe de matrices (G, H) d'un même code

Codes linéaires en blocs

Définitions

1. À partir de sa **matrice génératrice** G de taille $k \times n$: $\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{u}G \mid \mathbf{u} \in \mathbb{F}_2^k \right\}$
2. À partir de sa **matrice de parité** H de taille $n - k \times n$: $\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{c} \in \mathbb{F}_2^n \mid \mathbf{c}H^T = \mathbf{0} \right\}$

1. G et H **ne sont pas uniques**
2. G et H vérifient $GH^T = 0_{k \times n-k}$. Vrai pour tout coupe de matrices (G, H) d'un même code
3. $k \leq n \Rightarrow$ le codage "ajoute de la redondance"

Codes linéaires en blocs

Définitions

1. À partir de sa **matrice génératrice** G de taille $k \times n$: $\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{u}G \mid \mathbf{u} \in \mathbb{F}_2^k \right\}$
2. À partir de sa **matrice de parité** H de taille $n - k \times n$: $\mathcal{C} = \left\{ \mathbf{c} \in \mathbb{F}_2^n \mid \mathbf{c}H^T = \mathbf{0} \right\}$

1. G et H **ne sont pas uniques**
2. G et H vérifient $GH^T = 0_{k \times n-k}$. Vrai pour tout coupe de matrices (G, H) d'un même code
3. $k \leq n \Rightarrow$ le codage "ajoute de la redondance"
4. Rendement de code :

$$R = \frac{rang(G)}{n} = \frac{n - rang(H)}{n}$$

Décodage du Maximum a Posteriori (MAP)

Définition

- Soit $\mathcal{C}$ un code (M, n) donné.
- Le **décodeur** du **Maximum A Posteriori** (**MAP**) est la fonction de $\mathbf{y}$ définie par :

$$\Psi_{MAP}(\mathbf{y}) = \underset{w \in \mathcal{M}}{\operatorname{argmax}}\, \mathbb{P}(W = w | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$$

Le décodeur MAP minimise P_e

Décodage MAP sur canaux classiques

Soit le **décodeur** MAP défini par : $\Psi_{MAP}(\mathbf{y}) = \underset{w \in \mathcal{M}}{\operatorname{argmax}} \, \mathbb{P}(W = w | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$

1. Sur canal BSC : $\Psi_{MAP}(\mathbf{y}) = \underset{\mathbf{c} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \, d_H(\mathbf{c}, \mathbf{y})$
2. Sur canal AWGN : $\Psi_{MAP}(\mathbf{y}) = \underset{\mathbf{c} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \, d_E(1 - 2\mathbf{c}, \mathbf{y})$

Décodage MAP sur canaux classiques

Soit le **décodeur** MAP défini par : $\Psi_{MAP}(\mathbf{y}) = \underset{w \in \mathcal{M}}{\operatorname{argmax}} \, \mathbb{P}(W = w | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$

1. Sur canal BSC : $\Psi_{MAP}(\mathbf{y}) = \underset{\mathbf{c} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \, d_H(\mathbf{c}, \mathbf{y})$
2. Sur canal AWGN : $\Psi_{MAP}(\mathbf{y}) = \underset{\mathbf{c} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \, d_E(1 - 2\mathbf{c}, \mathbf{y})$

Sans structure sur $\mathcal{C}$, ces deux décodeurs sont trop complexes !

Décodage du Maximum a Posteriori (MAP-bit)

Définition

- Soit $\mathcal{C}$ un code **binaire** (k, n) donné.

- Le **décodeur** du **Maximum A Posteriori bit** (**MAP-bit**) est la fonction de **y** définie par :

$$\Psi^{(j)}_{MAP-bit}(\mathbf{y}) = \underset{u \in \{0,1\}}{\operatorname{argmax}} \, \mathbb{P}(U_j = u | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$$

- En pratique on calcule les **Logarithmes de rapports de vraisemblances** (LLR) :

$$L(U_i) = \log \frac{\mathbb{P}(U_i = 0|\mathbf{y})}{\mathbb{P}(U_i = 1|\mathbf{y})}$$

- **Le décodeur MAP minimise P_b (la probabilité d'erreur binaire)**
- **Le signe des LLRs : décisions MAP-bit**
- **Le module des LLRs : fiabilité des décisions**

MAP-bit (2)

MAP-bit

- Le **décodeur MAP-bit** encodage systématique :

$$\Psi^{(j)}_{MAP-bit}(\mathbf{y}) = \underset{x_j \in \{0,1\}}{\operatorname{argmax}} \mathbb{P}(X_j = x_j | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$$

MAP-bit (2)

MAP-bit

- Le **décodeur MAP-bit** encodage systématique :

$$\Psi^{(j)}_{MAP-bit}(\mathbf{y}) = \underset{x_j \in \{0,1\}}{\operatorname{argmax}} \, \mathbb{P}(X_j = x_j | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$$

- Le **décodeur MAP-bit** encodage systématique (2) :

$$\Psi^{(j)}_{MAP-bit}(\mathbf{y}) = \underset{x'_j \in \{0,1\}}{\operatorname{argmax}} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \\ \text{avec } x_j = x'_j}} \mathbb{P}(\mathbf{Y} = \mathbf{y} | \mathbf{X} = \mathbf{x}) \mathbb{1}(\mathbf{x} H^T = \mathbf{0})$$

MAP-bit (2)

MAP-bit

- Le **décodeur MAP-bit** encodage systématique :

$$\Psi^{(j)}_{MAP-bit}(\mathbf{y}) = \underset{x_j \in \{0,1\}}{\mathrm{argmax}}\, \mathbb{P}(X_j = x_j | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$$

- Le **décodeur MAP-bit** encodage systématique (2) :

$$\begin{aligned}
\Psi^{(j)}_{MAP-bit}(\mathbf{y}) &= \underset{x'_j \in \{0,1\}}{\mathrm{argmax}} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \\ \text{avec } x_j = x'_j}} \mathbb{P}(\mathbf{Y} = \mathbf{y} | \mathbf{X} = \mathbf{x}) \mathbb{1}(\mathbf{x}H^T = \mathbf{0}) \\
&= \underset{x'_j \in \{0,1\}}{\mathrm{argmax}} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \\ \text{avec } x_j = x'_j}} \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(Y_i = y_i | X_i = x_i) \mathbb{1}(\mathbf{x}H^T = \mathbf{0})
\end{aligned}$$

MAP-bit (2)

MAP-bit

- Le **décodeur MAP-bit** encodage systématique :

$$\Psi^{(j)}_{MAP-bit}(\mathbf{y}) = \underset{x_j \in \{0,1\}}{\operatorname{argmax}} \mathbb{P}(X_j = x_j | \mathbf{Y} = \mathbf{y})$$

- Le **décodeur MAP-bit** encodage systématique (2) :

$$\begin{aligned}
\Psi^{(j)}_{MAP-bit}(\mathbf{y}) &= \underset{x'_j \in \{0,1\}}{\operatorname{argmax}} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \\ \text{avec } x_j = x'_j}} \mathbb{P}(\mathbf{Y} = \mathbf{y} | \mathbf{X} = \mathbf{x}) \mathbb{1}(\mathbf{x}H^T = \mathbf{0}) \\
&= \underset{x'_j \in \{0,1\}}{\operatorname{argmax}} \sum_{\substack{\mathbf{x} \in \mathbb{F}_2^n \\ \text{avec } x_j = x'_j}} \prod_{i=0}^{n-1} \mathbb{P}(Y_i = y_i | X_i = x_i) \mathbb{1}(\mathbf{x}H^T = \mathbf{0})
\end{aligned}$$

Sans structure sur $\mathcal{C}$, ce décodeur est aussi trop complexe !

Plan

Codes Low Density Parity Check (LDPC)

- Introduits par Gallager pendant sa **thèse de doctorat** en 1963

Codes Low Density Parity Check (LDPC)

- Introduits par Gallager pendant sa **thèse de doctorat** en 1963

  $\rightarrow$ Codes possédant une **matrice de parité peu dense**

Codes Low Density Parity Check (LDPC)

- Introduits par Gallager pendant sa **thèse de doctorat** en 1963
  - → Codes possédant une **matrice de parité peu dense**
  - → Codes pouvant être analysés (exposant d'erreur)

Codes Low Density Parity Check (LDPC)

- Introduits par Gallager pendant sa **thèse de doctorat** en 1963
  - → Codes possédant une **matrice de parité peu dense**
  - → Codes pouvant être analysés (exposant d'erreur)
  - → Décodage simplifié

Codes Low Density Parity Check (LDPC)

- Introduits par Gallager pendant sa **thèse de doctorat** en 1963
  - $\rightarrow$ Codes possédant une **matrice de parité peu dense**
  - $\rightarrow$ Codes pouvant être analysés (exposant d'erreur)
  - $\rightarrow$ Décodage simplifié

- **Peu de travaux** pendant $\sim$ 30 ans (Tanner en 1981)

Codes Low Density Parity Check (LDPC)

- Introduits par Gallager pendant sa **thèse de doctorat** en 1963
  - $\rightarrow$ Codes possédant une **matrice de parité peu dense**
  - $\rightarrow$ Codes pouvant être analysés (exposant d'erreur)
  - $\rightarrow$ Décodage simplifié
- **Peu de travaux** pendant $\sim$ 30 ans (Tanner en 1981)
  - $\rightarrow$ Codes représentable à l'aide d'un **graphe bipartite** (**graphe de Tanner**)

Codes Low Density Parity Check (LDPC)

- Introduits par Gallager pendant sa **thèse de doctorat** en 1963
  - $\rightarrow$ Codes possédant une **matrice de parité peu dense**
  - $\rightarrow$ Codes pouvant être analysés (exposant d'erreur)
  - $\rightarrow$ Décodage simplifié
- **Peu de travaux** pendant $\sim$ 30 ans (Tanner en 1981)
  - $\rightarrow$ Codes représentable à l'aide d'un **graphe bipartite** (**graphe de Tanner**)
  - $\rightarrow$ Décodage possible à l'aide du graphe

Codes Low Density Parity Check (LDPC)

- Introduits par Gallager pendant sa **thèse de doctorat** en 1963
  - $\rightarrow$ Codes possédant une **matrice de parité peu dense**
  - $\rightarrow$ Codes pouvant être analysés (exposant d'erreur)
  - $\rightarrow$ Décodage simplifié
- **Peu de travaux** pendant $\sim$ 30 ans (Tanner en 1981)
  - $\rightarrow$ Codes représentable à l'aide d'un **graphe bipartite** (**graphe de Tanner**)
  - $\rightarrow$ Décodage possible à l'aide du graphe
  - $\rightarrow$ Performances dépendant des propriétés du graphe

Codes Low Density Parity Check (LDPC)

- Introduits par Gallager pendant sa **thèse de doctorat** en 1963
  - $\rightarrow$ Codes possédant une **matrice de parité peu dense**
  - $\rightarrow$ Codes pouvant être analysés (exposant d'erreur)
  - $\rightarrow$ Décodage simplifié
- **Peu de travaux** pendant $\sim$ 30 ans (Tanner en 1981)
  - $\rightarrow$ Codes représentable à l'aide d'un **graphe bipartite** (**graphe de Tanner**)
  - $\rightarrow$ Décodage possible à l'aide du graphe
  - $\rightarrow$ Performances dépendant des propriétés du graphe
- Algorithme de propagation de croyance (IA) (Pearl en 1988)

Codes Low Density Parity Check (LDPC)

- Introduits par Gallager pendant sa **thèse de doctorat** en 1963
  - → Codes possédant une **matrice de parité peu dense**
  - → Codes pouvant être analysés (exposant d'erreur)
  - → Décodage simplifié
- **Peu de travaux** pendant $\sim$ 30 ans (Tanner en 1981)
  - → Codes représentable à l'aide d'un **graphe bipartite** (**graphe de Tanner**)
  - → Décodage possible à l'aide du graphe
  - → Performances dépendant des propriétés du graphe
- Algorithme de propagation de croyance (IA) (Pearl en 1988)
  - → Alogrithme de propagation de croyance (BP - Belief Propagation)

Codes Low Density Parity Check (LDPC)

- Introduits par Gallager pendant sa **thèse de doctorat** en 1963
  - → Codes possédant une **matrice de parité peu dense**
  - → Codes pouvant être analysés (exposant d'erreur)
  - → Décodage simplifié
- **Peu de travaux** pendant $\sim$ 30 ans (Tanner en 1981)
  - → Codes représentable à l'aide d'un **graphe bipartite** (**graphe de Tanner**)
  - → Décodage possible à l'aide du graphe
  - → Performances dépendant des propriétés du graphe
- Algorithme de propagation de croyance (IA) (Pearl en 1988)
  - → Alogrithme de propagation de croyance (BP - Belief Propagation)
- **Redécouverte** des codes LDPC (MacKay, Luby fin 1990)

Codes Low Density Parity Check (LDPC)

- Introduits par Gallager pendant sa **thèse de doctorat** en 1963
  - → Codes possédant une **matrice de parité peu dense**
  - → Codes pouvant être analysés (exposant d'erreur)
  - → Décodage simplifié
- **Peu de travaux** pendant $\sim$ 30 ans (Tanner en 1981)
  - → Codes représentable à l'aide d'un **graphe bipartite** (**graphe de Tanner**)
  - → Décodage possible à l'aide du graphe
  - → Performances dépendant des propriétés du graphe
- Algorithme de propagation de croyance (IA) (Pearl en 1988)
  - → Alogrithme de propagation de croyance (BP - Belief Propagation)
- **Redécouverte** des codes LDPC (MacKay, Luby fin 1990)
  - → (Re)Montrent que les codes LDPC sont de bons codes

Codes Low Density Parity Check (LDPC)

- Introduits par Gallager pendant sa **thèse de doctorat** en 1963
  - → Codes possédant une **matrice de parité peu dense**
  - → Codes pouvant être analysés (exposant d'erreur)
  - → Décodage simplifié
- **Peu de travaux** pendant $\sim$ 30 ans (Tanner en 1981)
  - → Codes représentable à l'aide d'un **graphe bipartite** (**graphe de Tanner**)
  - → Décodage possible à l'aide du graphe
  - → Performances dépendant des propriétés du graphe
- Algorithme de propagation de croyance (IA) (Pearl en 1988)
  - → Alogrithme de propagation de croyance (BP - Belief Propagation)
- **Redécouverte** des codes LDPC (MacKay, Luby fin 1990)
  - → (Re)Montrent que les codes LDPC sont de bons codes

Définition des codes LDPC

Définitions

1. Soit une matrice H

$$H = \begin{pmatrix} h_{0,0} & h_{0,1} & \cdots & h_{0,n-1} \\ h_{1,0} & h_{1,1} & \cdots & h_{1,n-1} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ h_{m-1,0} & h_{m-1,1} & \cdots & h_{m-1,n-1} \end{pmatrix}$$

Densité de H : $\dfrac{\left|\{i,j : h_{i,j} = 1\}\right|}{m\,n}$

2. **Codes LDPC** : Codes possédant une matrice de parité H peu dense (creuse). Ordre de grandeur pour n grand ≤ 0.01.
3. **Codes réguliers** : poids des lignes constant r, poids des colonnes constant g
4. Rendement d'un code LDPC régulier : $R \geq 1 - \dfrac{m}{n} = 1 - \dfrac{g}{r}$
5. $R_d = 1 - \dfrac{g}{r}$ est appelé **rendement de construction** d'un code LDPC

Définition des codes LDPC

Petit TD dans le cours...

Soit une matrice H

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1. Donner la densité de H
2. H définie-t-elle un code LDPC régulier ?
3. Si oui, que valent g et r ?
4. Combien vaut le rendement de construction de ce code ?
5. Combien vaut le rendement de ce code ?

Graphe de Tanner

Le **graphe de Tanner** est un **graphe bipartite** avec :

1. n **nœuds de variables** représentant les variables x_j $j \in \{0, \ldots n-1\}$

$$\begin{array}{cccccccccc} x_0 & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ \boxed{=} & \boxed{=} & \boxed{=} & \boxed{=} & \boxed{=} & \boxed{=} & \boxed{=} & \boxed{=} & \boxed{=} & \boxed{=} \end{array}$$

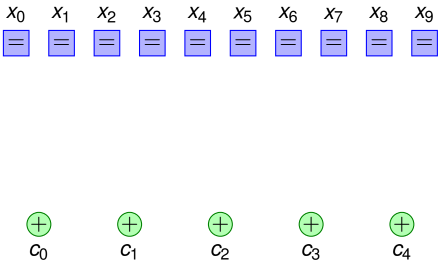
$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Graphe de Tanner

Le **graphe de Tanner** est un **graphe bipartite** avec :

1. n **nœuds de variables** représentant les variables x_j $j \in \{0, \dots n-1\}$
2. m **nœuds de parité (contrôle)** c_i $i \in \{0, \dots m-1\}$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

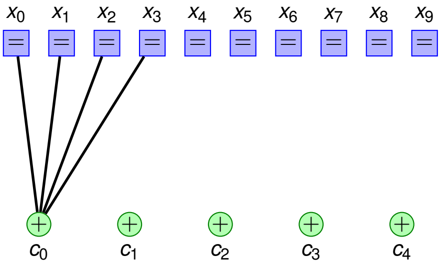


Graphe de Tanner

Le **graphe de Tanner** est un **graphe bipartite** avec :

1. n **nœuds de variables** représentant les variables x_j $j \in \{0, \dots n-1\}$
2. m **nœuds de parité (contrôle)** c_i $i \in \{0, \dots m-1\}$
3. Une arrête est dessinée entre nœud de variable x_j et le nœud de parité c_i ssi $h_{i,j} = 1$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

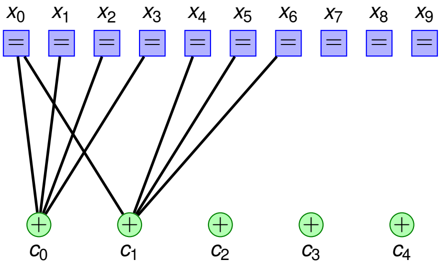


Graphe de Tanner

Le **graphe de Tanner** est un **graphe bipartite** avec :

1. n **nœuds de variables** représentant les variables x_j $j \in \{0, \dots n-1\}$
2. m **nœuds de parité (contrôle)** c_i $i \in \{0, \dots m-1\}$
3. Une arrête est dessinée entre nœud de variable x_j et le nœud de parité c_i ssi $h_{i,j} = 1$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

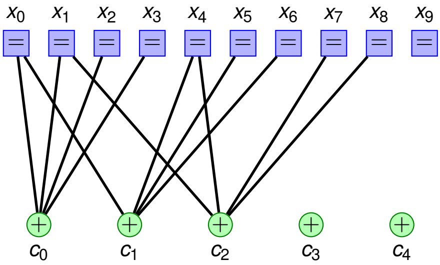


Graphe de Tanner

Le **graphe de Tanner** est un **graphe bipartite** avec :

1. n **nœuds de variables** représentant les variables x_j $j \in \{0, \ldots n-1\}$
2. m **nœuds de parité (contrôle)** c_i $i \in \{0, \ldots m-1\}$
3. Une arrête est dessinée entre nœud de variable x_j et le nœud de parité c_i ssi $h_{i,j} = 1$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

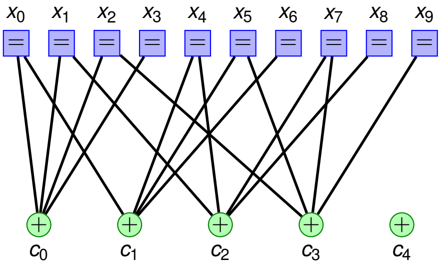


Graphe de Tanner

Le **graphe de Tanner** est un **graphe bipartite** avec :

1. n **nœuds de variables** représentant les variables x_j $j \in \{0, \ldots n-1\}$
2. m **nœuds de parité (contrôle)** c_i $i \in \{0, \ldots m-1\}$
3. Une arrête est dessinée entre nœud de variable x_j et le nœud de parité c_i ssi $h_{i,j} = 1$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$



Graphe de Tanner

Le **graphe de Tanner** est un **graphe bipartite** avec :

1. n **nœuds de variables** représentant les variables x_j $j \in \{0, \dots n-1\}$
2. m **nœuds de parité (contrôle)** c_i $i \in \{0, \dots m-1\}$
3. Une arrête est dessinée entre nœud de variable x_j et le nœud de parité c_i ssi $h_{i,j} = 1$

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$