

TS226

-

Codes convolutifs et codes concaténés associés

Romain Tajan

8 novembre 2019

Plan

- 1 Previously on TS226 ...
- 2 Code convolutif comme machine à états
 - ▷ Diagramme d'état des codes convolutifs
 - ▷ Treillis des codes convolutifs
- 3 Décodage ML des codes convolutifs
 - ▷ Décodage ar maximum de vraisemblance (ML)

Exemple de QCM

Comment allez vous aujourd'hui ?

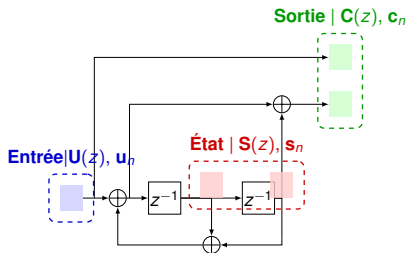
- ☐ A Très bien
- ☐ B Bien
- ☐ C Mal
- ☐ D Très mal

#QDLE#S#ABCD#30#

Plan

- 1 Previously on TS226 ...
- 2 Code convolutif comme machine à états
- 3 Décodage ML des codes convolutifs

Rappels / définitions



• **Entrée** : $\mathbf{U}(z) = [U^{(0)}(z), U^{(1)}(z) \dots U^{(n_b-1)}(z)]$

→ dans ce cours $n_b = 1 \Rightarrow \mathbf{U}(z) \rightarrow U(z)$

• **État** : $\mathbf{S}(z) = [S^{(0)}(z), S^{(1)}(z) \dots S^{(m-1)}(z)]$

→ m est appelé "mémoire du code"

→ $\nu = m + 1$ est appelé "longueur de contrainte"

→ dans l'exemple $m = 2$

→ 2^m : nombre d'états

• **Sortie** : $\mathbf{C}(z) = [C^{(0)}(z), C^{(1)}(z) \dots C^{(m-1)}(z)]$

→ n_s nombre de sorties

→ dans l'exemple $n_s = 2$

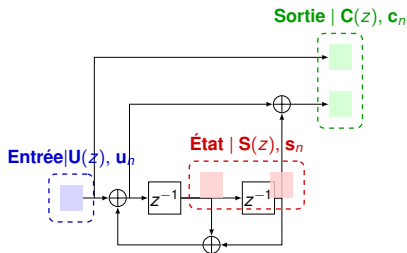
→ De façon générale : $\mathbf{C}(z) = U(z)\mathbf{G}(z)$

→ où $\mathbf{G}(z) = \begin{bmatrix} \frac{A^{(1)}(z)}{B^{(1)}(z)} & \dots & \frac{A^{(n_s)}(z)}{B^{(n_s)}(z)} \end{bmatrix}$

• **Rendement du code** : $R = \frac{\text{\#bits d'info. en entrée}}{\text{\#bits codés en sortie}}$

→ Ici : $R = \frac{n_b}{n_s} = \frac{1}{2}$

Rappels / définitions



- **Code linéaire**

→ Si $C_1(z)$ et $C_2(z)$ sont deux mots de codes, alors $C_3(z) = C_2(z) + C_1(z)$ est aussi un mot de code.

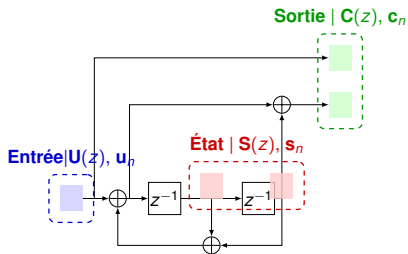
- **Encodeur récursif / non récursif**

- **Encodeur systématique / non systématique**

- **Notation octale**

Sortez vos téléphones...

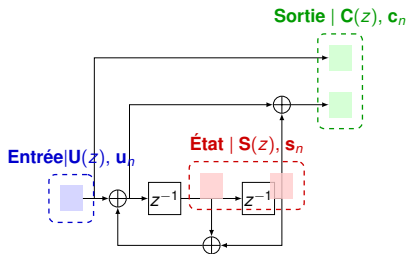
Quizz



Cet encodeur est récursif :

- ☐ A Vrai
- ☐ B Faux

Quizz

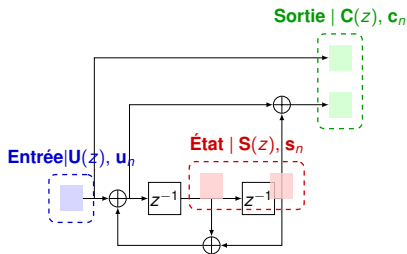


Cet encodeur est systématique :

- ☐ A Vrai
- ☐ B Faux

#QDLE#Q#A*B#20#

Quizz



La notation octale de cet encodeur est :

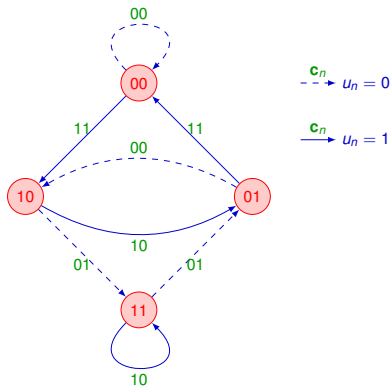
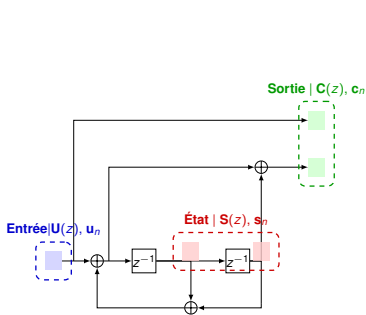
- A $(7, 5)_8$
- B $(1, \frac{5}{7})_8$
- C $(1, \frac{7}{5})_8$
- D $(5, 7)_8$

#QDLE#Q#ABC*D#20#

Plan

- 1 Previously on TS226 ...
- 2 Code convolutif comme machine à états
 - ▷ Diagramme d'état des codes convolutifs
 - ▷ Treillis des codes convolutifs
- 3 Décodage ML des codes convolutifs

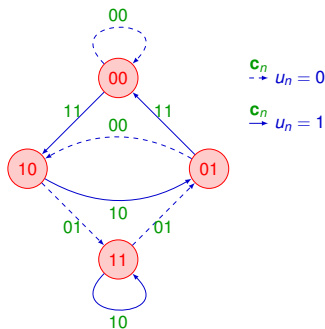
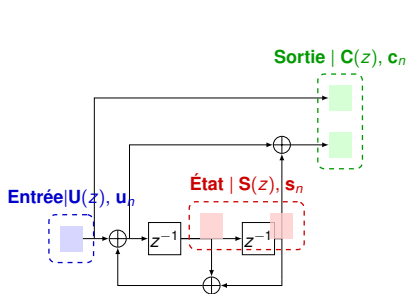
Rappels / définitions



- Message \Leftrightarrow chemin dans le graphe
- Mot de code \Leftrightarrow étiquettes le long du chemin dans le graphe
- Nécessité de définir (au moins) un état initial

Sortez vos téléphones...

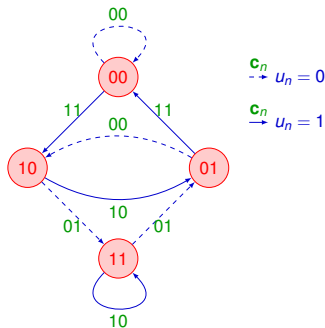
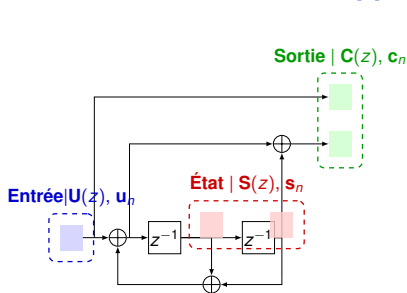
Rappels / définitions



Si $u = [0, 1, 1, 0]$, en supposant que $s_0 = [0, 0]$ quelle sera la sortie de l'encodeur :

- A** $c = [0, 0, 0, 1, 0, 1, 1, 1]$
- B** $c = [0, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 1]$
- C** $c = [1, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 1]$
- D** $c = [0, 0, 1, 1, 1, 0, 0, 0]$

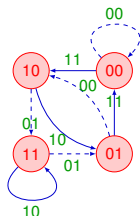
Rappels / définitions



Quel est le poids de Hamming minimal pour un mot de code $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$?

- A 2
- B 3
- C 4
- D 5
- E 6

#QDLE#Q#ABCD*E#60#



$$\overset{c_n}{\dashrightarrow} u_n = 0$$

$$\overset{c_n}{\rightarrow} u_n = 1$$

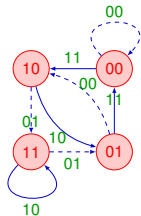
Treillis : représentation de la machine à états faisant explicitement apparaître le temps.

00 ●

01

10

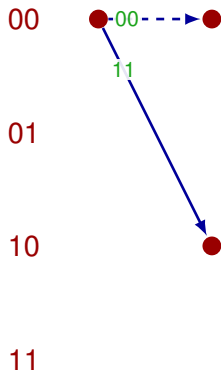
11

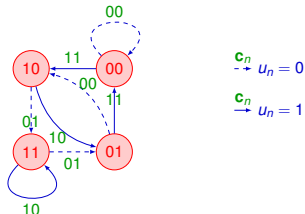


$\xrightarrow{c_n} u_n = 0$

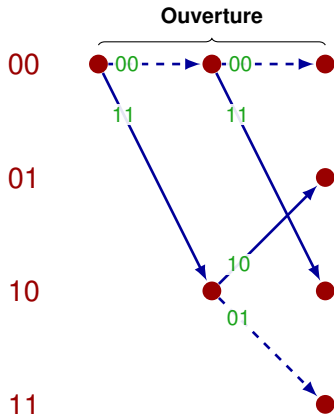
$\xrightarrow{c_n} u_n = 1$

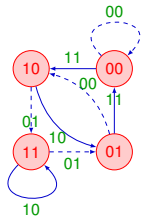
Treillis : représentation de la machine à états faisant explicitement apparaître le temps.





Treillis : représentation de la machine à états faisant explicitement apparaître le temps.

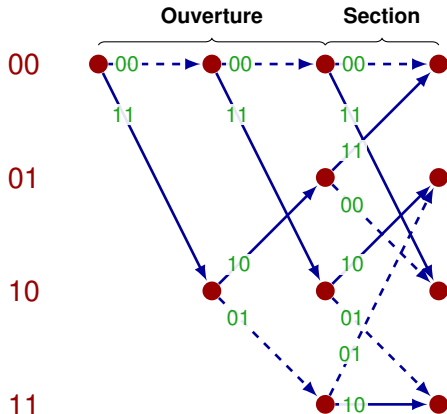


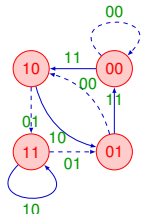


$\xrightarrow{c_n} u_n = 0$

$\xrightarrow{c_n} u_n = 1$

Treillis : représentation de la machine à états faisant explicitement apparaître le temps.

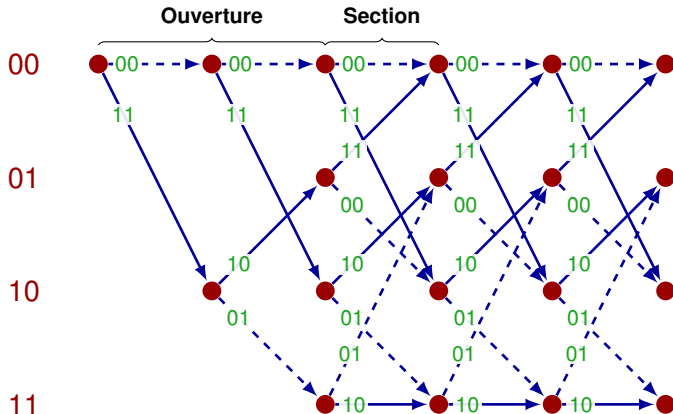


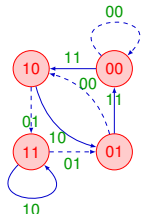


c_n
 $\rightarrow u_n = 0$

c_n
 $\rightarrow u_n = 1$

Treillis : représentation de la machine à états faisant explicitement apparaître le temps.

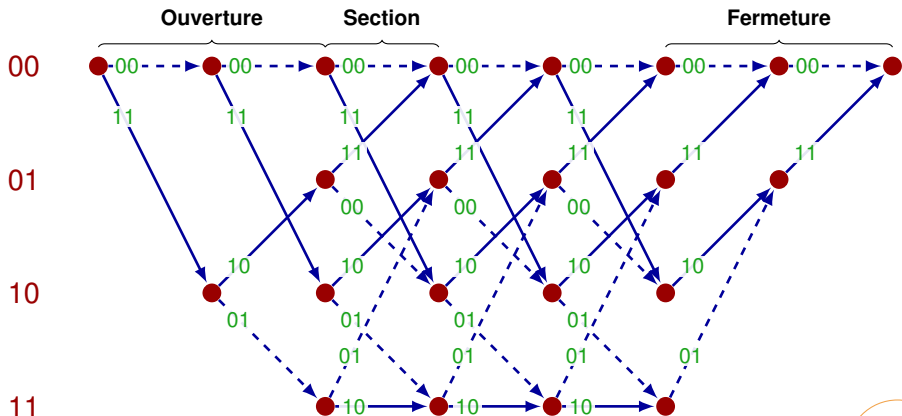


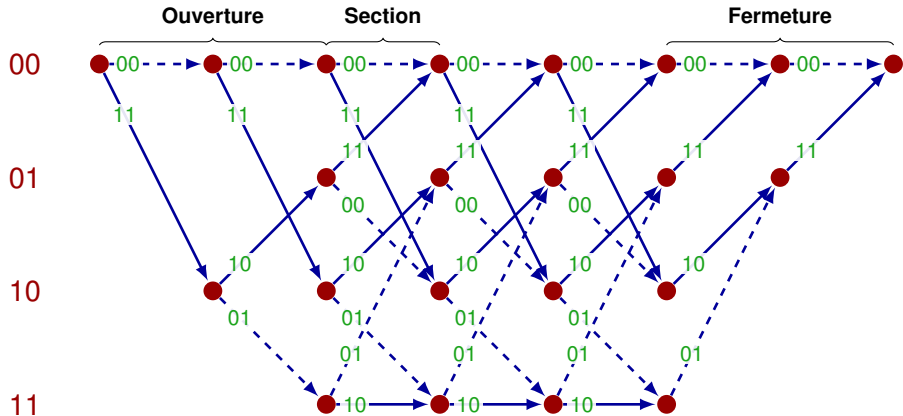


c_n
 $\rightarrow u_n = 0$

c_n
 $\rightarrow u_n = 1$

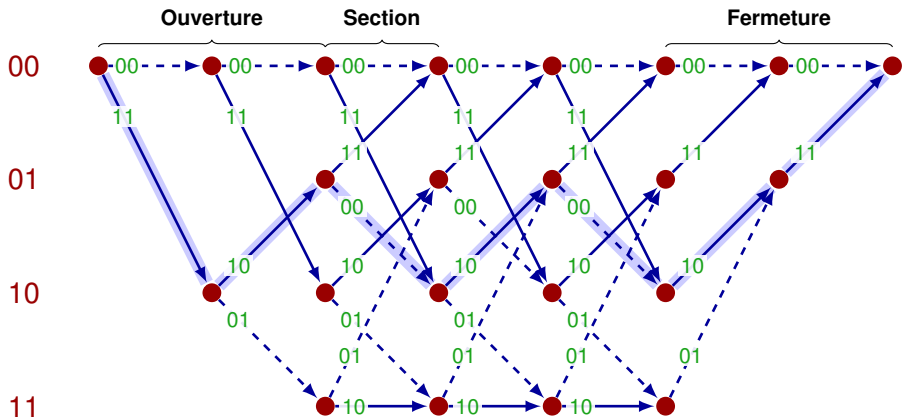
Treillis : représentation de la machine à états faisant explicitement apparaître le temps.





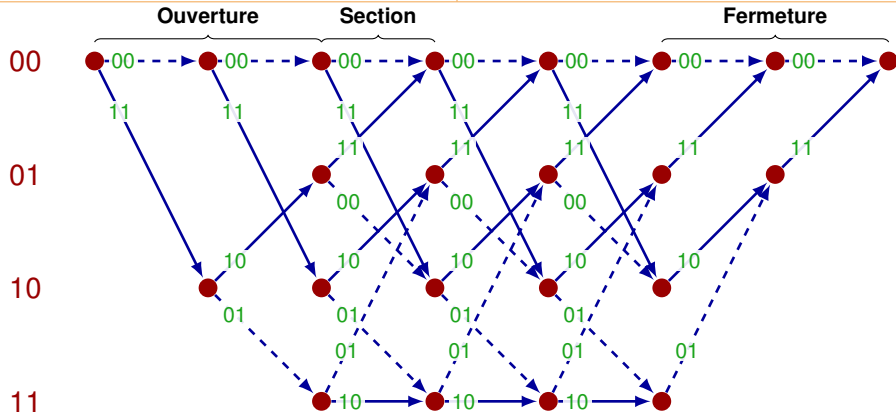
Remarques

- Fermer $\Rightarrow N = n_s(m + K) \Rightarrow R = \frac{K}{n_s(m + K)} \leq \frac{1}{n_s}$
- Tout chemin dans ce graphe représente un mot de code



- On souhaite envoyer le message : $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$
- On calcule le mot de code : $\mathbf{c} = [1\ 1, 1\ 0, 0\ 0, 1\ 0, 0\ 0, \underline{1\ 0}, \underline{1\ 1}]$
- On envoie le signal : $\mathbf{x} = [-1\ -1, -1\ 1, 1\ 1, -1\ 1, 1\ 1, \underline{-1\ 1}, \underline{-1\ -1}]$

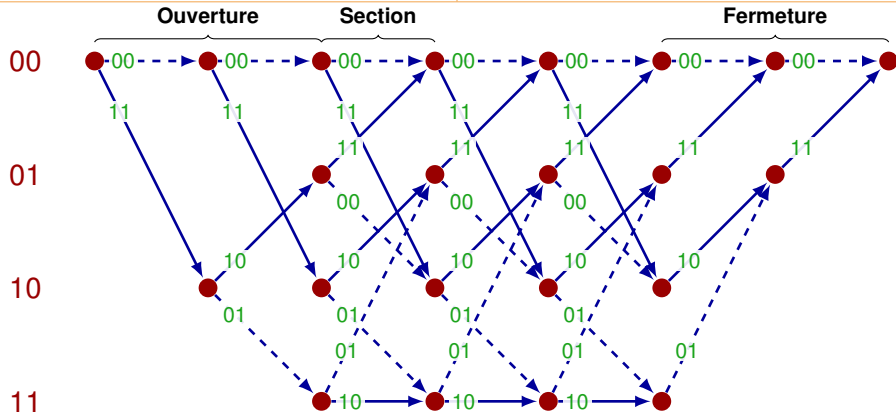
Sortez vos téléphones...



Sur ce treillis, quel est le poids de Hamming minimum pour les mots de codes $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$?

- ☒ A 4
- ☐ B 5
- ☐ C 6
- ☐ D 7

#QDLE#Q#AB*CD#60#



Sur ce treillis, combien de mots de codes $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ ont un poids de Hamming de 5 ?

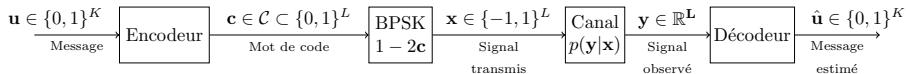
- ☒ A 4
- ☐ B 5
- ☐ C 6
- ☐ D 7

#QDLE#Q#AB*CD#60#

Plan

- 1 Previously on TS226 ...
- 2 Code convolutif comme machine à états
- 3 **Décodage ML des codes convolutifs**
 - ▷ **Décodage ar maximum de vraisemblance (ML)**

Décodage du Maximum de Vraisemblance (ML)



Définition

- Le **décodeur du Maximum de vraisemblance (ML)** est la fonction de \mathbf{y} définie par :

$$\Psi_{ML}(\mathbf{y}) = \underset{\mathbf{u} \in \{0,1\}^K}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}|\mathbf{u})$$

- Le **décodeur ML** est équivalent au **décodeur MAP** si les messages sont équiprobables.
- Sur le canal **AWGN** sans mémoire, le **décodeur ML** est équivalent à :

$$\hat{\mathbf{u}} = \Psi_{ML}(\mathbf{y}) = \Phi^{-1}(\hat{\mathbf{c}}) \text{ où } \hat{\mathbf{c}} = \underset{\mathbf{c} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbf{c}_{\ell} \mathbf{y}_{\ell}^T$$

- Nombre de bits dans le message : K
- Taille message + fermeture : $L = K + m$
- Le message envoyé : $\mathbf{u} = [u_0, u_1, \dots, u_{K-1}]$
- Le mot de code émis : $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{L-1}]$, où $\mathbf{c}_\ell = [c_\ell^{(0)}, c_\ell^{(1)}]$
- Le signal observé : $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{L-1}]$, où $\mathbf{y}_\ell = [y_\ell^{(0)}, y_\ell^{(1)}]$
- **Décodeur ML :**
$$\hat{\mathbf{c}} = \underset{\mathbf{c} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbf{c}_\ell \mathbf{y}_\ell^T$$
- Le message reçu : $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{K-1}] = \phi^{-1}(\hat{\mathbf{c}})$

• **Solution 1** : explorer tous les messages (eq. tous les mots de codes)

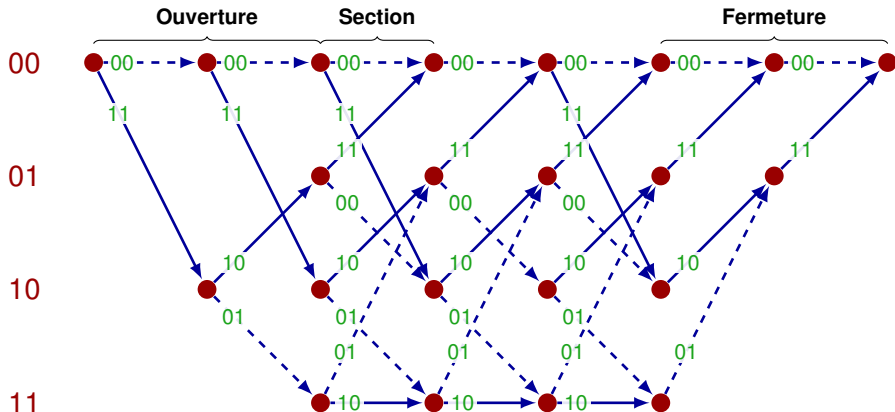
- Nombre de bits dans le message : K
- Taille message + fermeture : $L = K + m$
- Le message envoyé : $\mathbf{u} = [u_0, u_1, \dots, u_{K-1}]$
- Le mot de code émis : $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{L-1}]$, où $\mathbf{c}_\ell = [c_\ell^{(0)}, c_\ell^{(1)}]$
- Le signal observé : $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{L-1}]$, où $\mathbf{y}_\ell = [y_\ell^{(0)}, y_\ell^{(1)}]$
- **Décodeur ML** :
$$\hat{\mathbf{c}} = \underset{\mathbf{c} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbf{c}_\ell \mathbf{y}_\ell^T$$
- Le message reçu : $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{K-1}] = \phi^{-1}(\hat{\mathbf{c}})$

• **Solution 1** : explorer tous les messages (eq. tous les mots de codes) \rightarrow **il y en a 2^K ...**

- Nombre de bits dans le message : K
- Taille message + fermeture : $L = K + m$
- Le message envoyé : $\mathbf{u} = [u_0, u_1, \dots, u_{K-1}]$
- Le mot de code émis : $\mathbf{c} = [\mathbf{c}_0, \mathbf{c}_1, \dots, \mathbf{c}_{L-1}]$, où $\mathbf{c}_\ell = [c_\ell^{(0)}, c_\ell^{(1)}]$
- Le signal observé : $\mathbf{y} = [\mathbf{y}_0, \mathbf{y}_1, \dots, \mathbf{y}_{L-1}]$, où $\mathbf{y}_\ell = [y_\ell^{(0)}, y_\ell^{(1)}]$
- **Décodeur ML :**
$$\hat{\mathbf{c}} = \underset{\mathbf{c} \in \mathcal{C}}{\operatorname{argmin}} \sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbf{c}_\ell \mathbf{y}_\ell^T$$
- Le message reçu : $\hat{\mathbf{u}} = [\hat{u}_0, \hat{u}_1, \dots, \hat{u}_{K-1}] = \phi^{-1}(\hat{\mathbf{c}})$

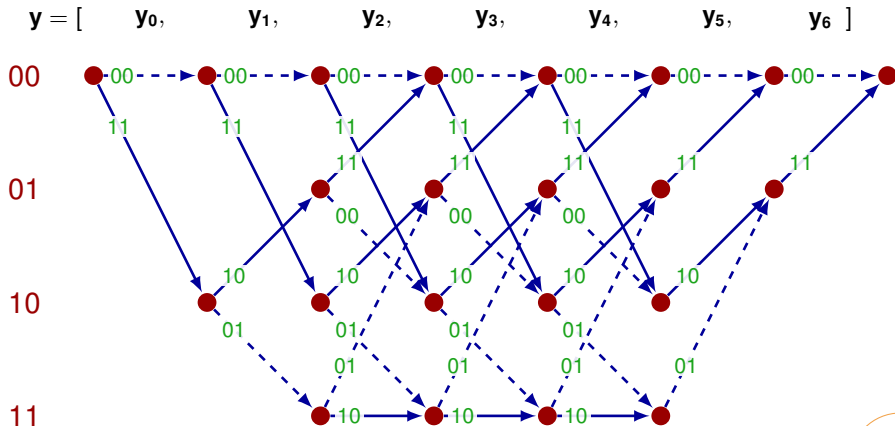
- **Solution 1** : explorer tous les messages (eq. tous les mots de codes) \rightarrow **il y en a 2^K ...**
- **Solution 2** : utiliser le treillis + la forme de la fonction de coût \rightarrow **algorithme de Viterbi**

- Soit $J_n(s_n) = \min_{\mathbf{c} \in \mathcal{C}(s_0 \rightarrow s_n)} \sum_{\ell=0}^{n-1} \mathbf{c}_\ell \mathbf{y}_\ell^T$
- Le décodage ML est équivalent à trouver l'antécédent de $J_L(s_L)$ où $s_0 = s_L = 0$



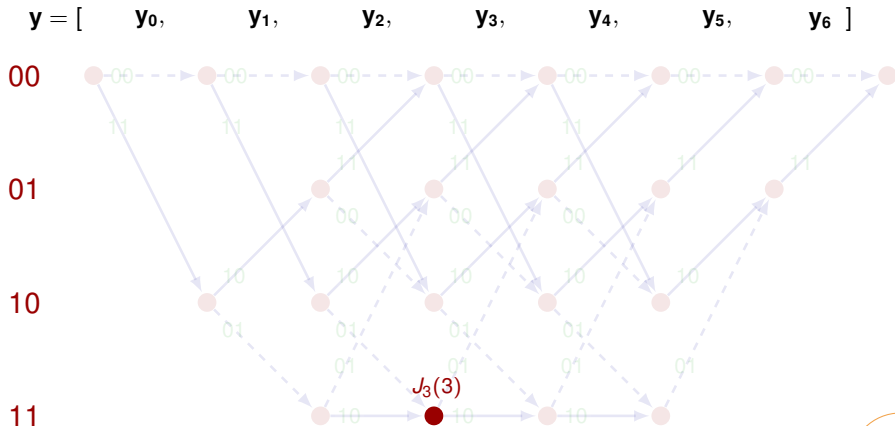
- $\mathcal{P}(s_n)$: **parents de l'état** s_n , i.e. ensemble des s_{n-1} tels que $s_{n-1} \rightarrow s_n$ existe
- **Algorithme de Viterbi** : pour chaque $n \in [0, L - 1]$ et chaque $s_n \in \mathcal{S}_n$ calculer

$$J_n(s_n) = \min_{s_{n-1} \in \mathcal{P}(s_n)} \left[J_{n-1}(s_{n-1}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1} \rightarrow s_n) \mathbf{y}_{n-1}^T \right]$$
- $\hat{\mathbf{u}}$: **chemin survivant minimisant** $J_L(s_L)$



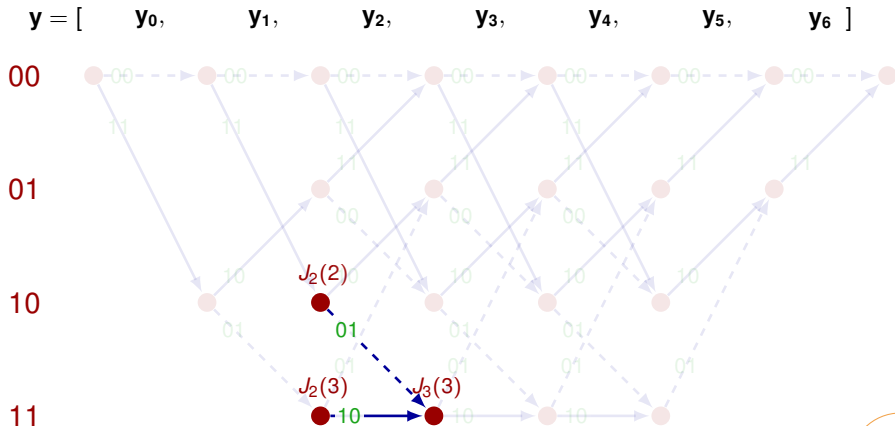
- $\mathcal{P}(s_n)$: **parents de l'état** s_n , i.e. ensemble des s_{n-1} tels que $s_{n-1} \rightarrow s_n$ existe
- **Algorithme de Viterbi** : pour chaque $n \in [0, L - 1]$ et chaque $s_n \in \mathcal{S}_n$ calculer

$$J_n(s_n) = \min_{s_{n-1} \in \mathcal{P}(s_n)} \left[J_{n-1}(s_{n-1}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1} \rightarrow s_n) \mathbf{y}_{n-1}^T \right]$$
- $\hat{\mathbf{u}}$: **chemin survivant minimisant** $J_L(s_L)$

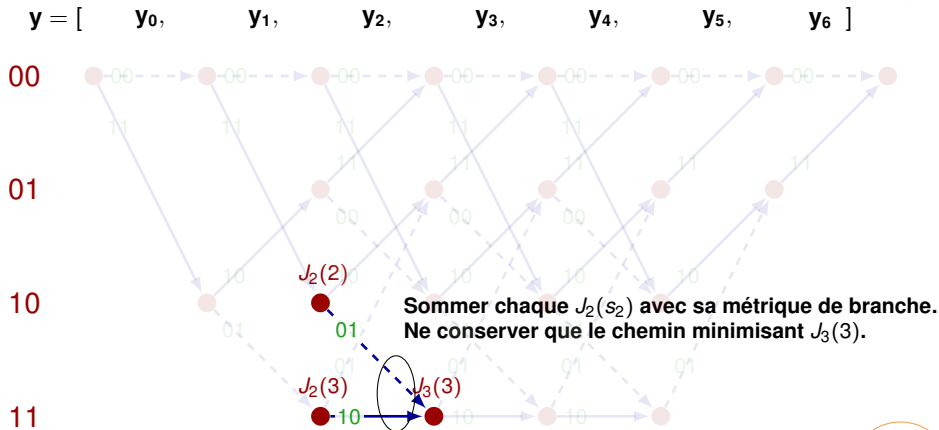


- $\mathcal{P}(s_n)$: **parents de l'état** s_n , i.e. ensemble des s_{n-1} tels que $s_{n-1} \rightarrow s_n$ existe
- **Algorithme de Viterbi** : pour chaque $n \in [0, L - 1]$ et chaque $s_n \in \mathcal{S}_n$ calculer

$$J_n(s_n) = \min_{s_{n-1} \in \mathcal{P}(s_n)} \left[J_{n-1}(s_{n-1}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1} \rightarrow s_n) \mathbf{y}_{n-1}^T \right]$$
- $\hat{\mathbf{u}}$: **chemin survivant minimisant** $J_L(s_L)$

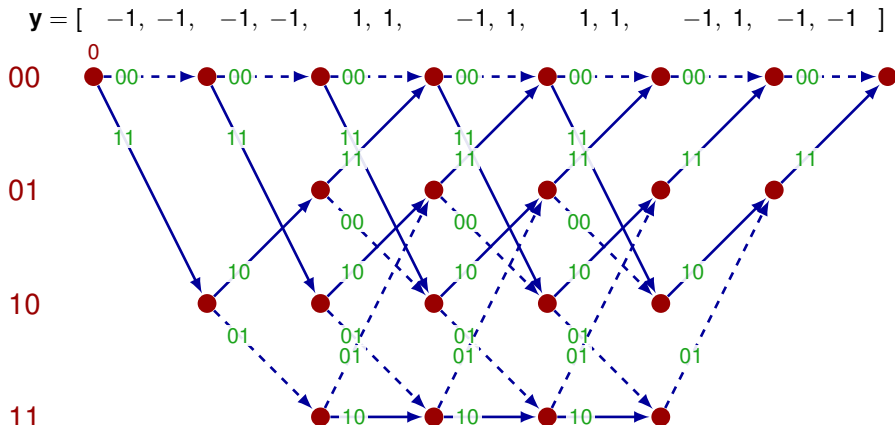


- $\mathcal{P}(s_n)$: **parents de l'état** s_n , i.e. ensemble des s_{n-1} tels que $s_{n-1} \rightarrow s_n$ existe
- **Algorithme de Viterbi** : pour chaque $n \in [0, L - 1]$ et chaque $s_n \in \mathcal{S}_n$ calculer
$$J_n(s_n) = \min_{s_{n-1} \in \mathcal{P}(s_n)} \left[J_{n-1}(s_{n-1}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1} \rightarrow s_n) \mathbf{y}_{n-1}^T \right]$$
- \hat{u} : **chemin survivant minimisant** $J_L(s_L)$



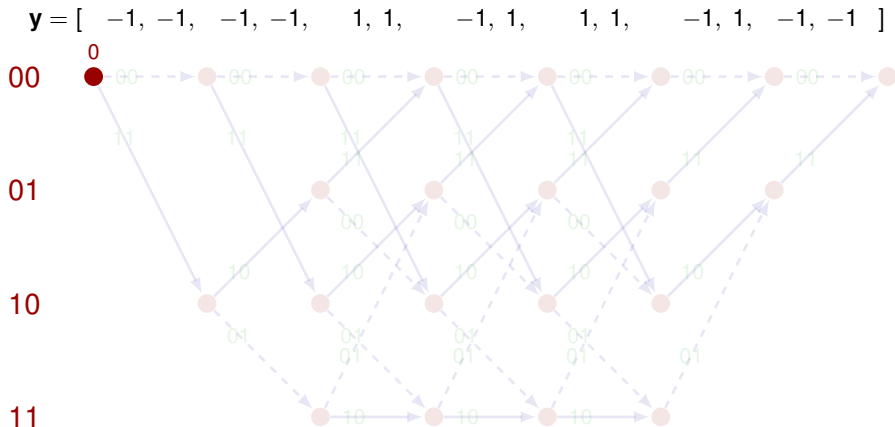
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



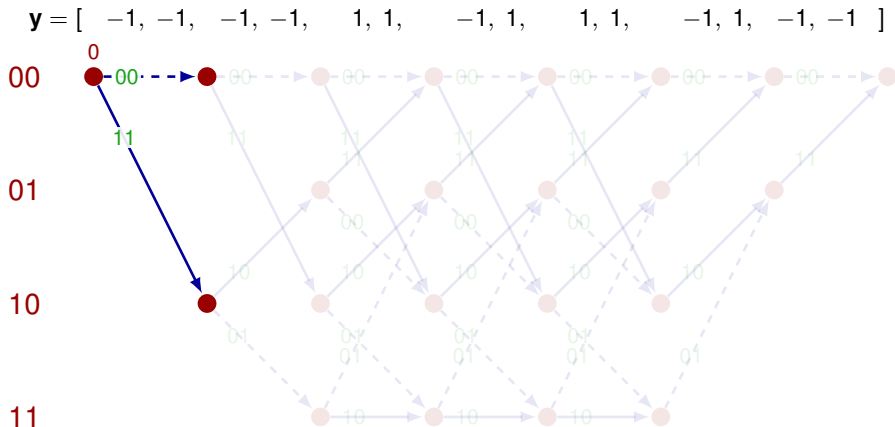
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



Exemple de question...

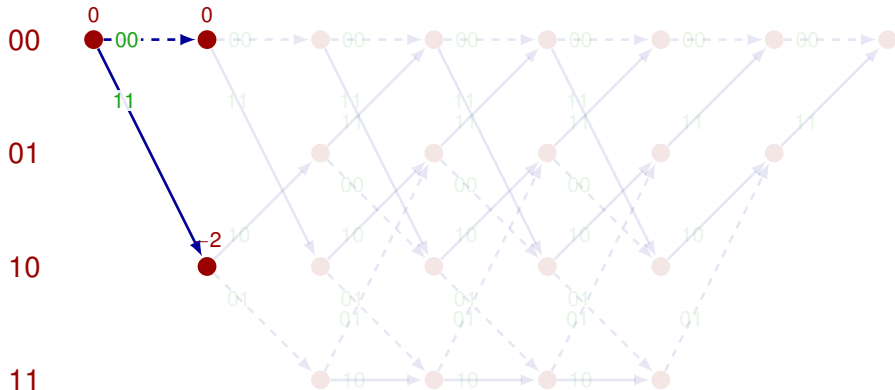
Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

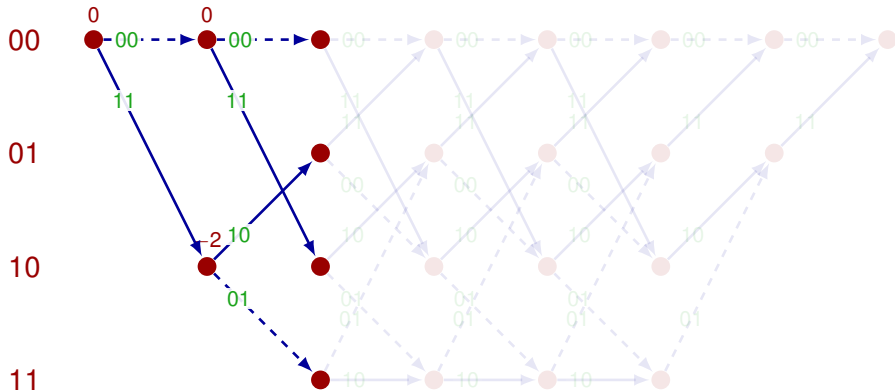
$$\mathbf{y} = [\quad -1, -1, \quad -1, -1, \quad 1, 1, \quad -1, 1, \quad 1, 1, \quad -1, 1, \quad -1, -1 \quad]$$



Exemple de question...

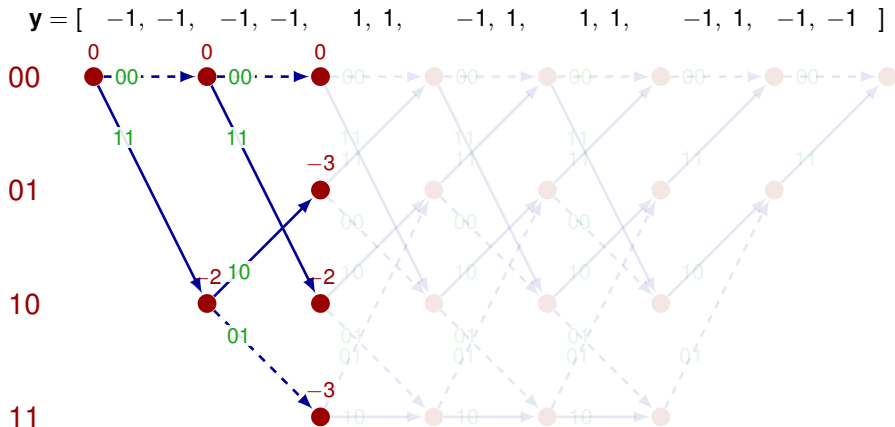
Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

$\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$



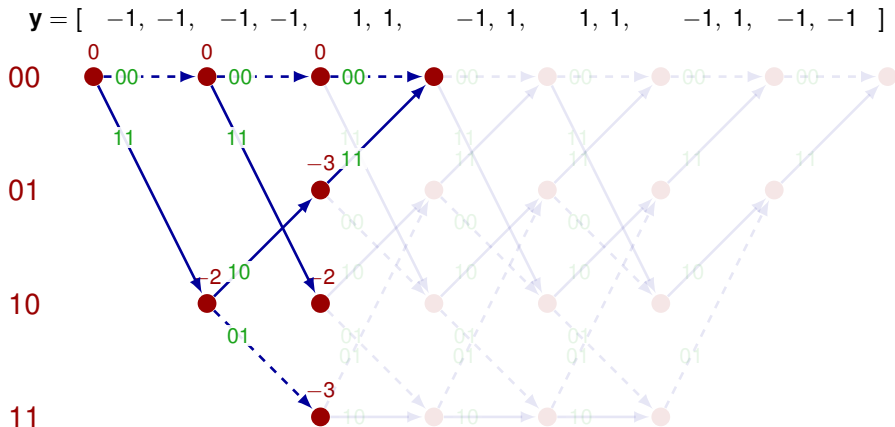
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



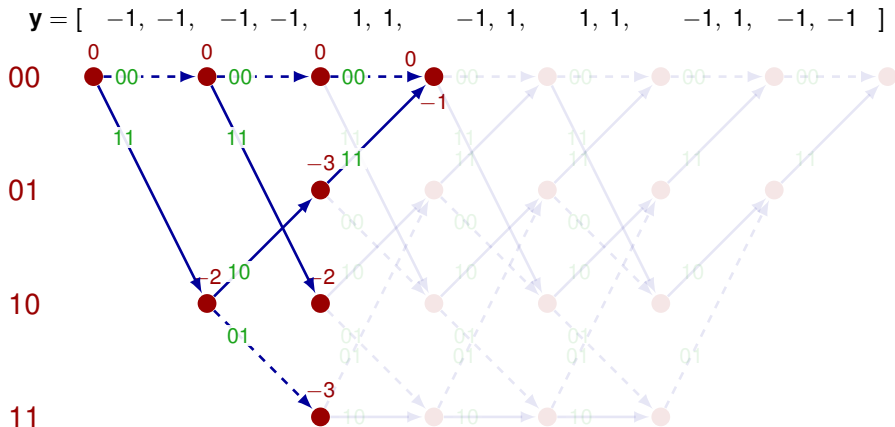
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



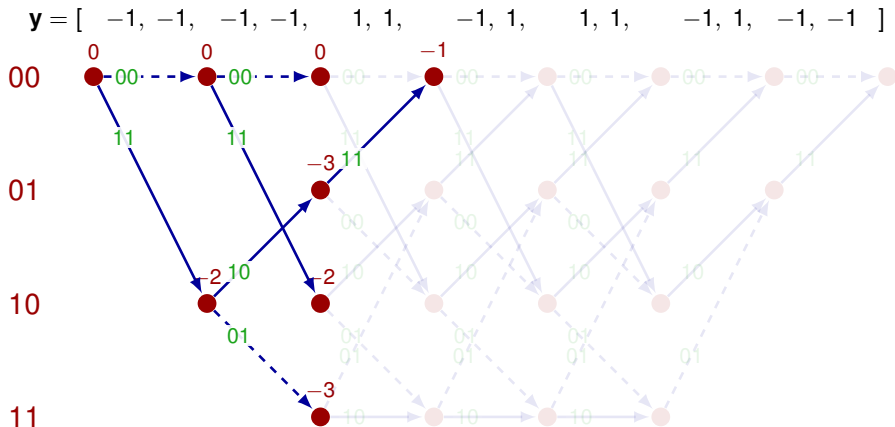
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



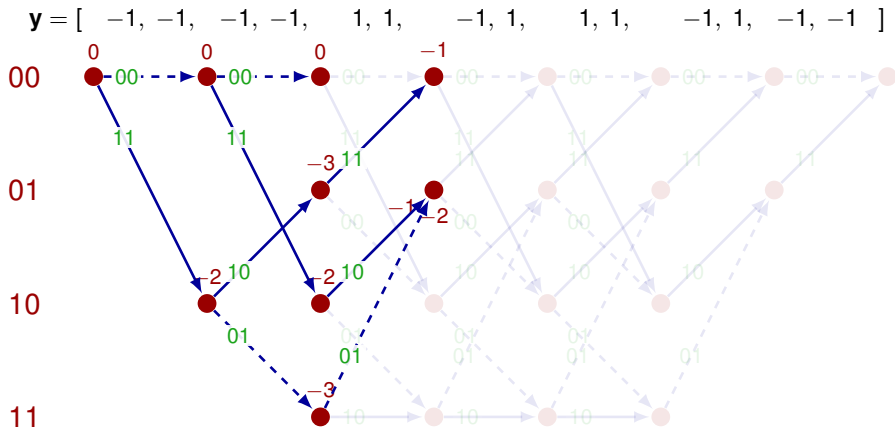
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



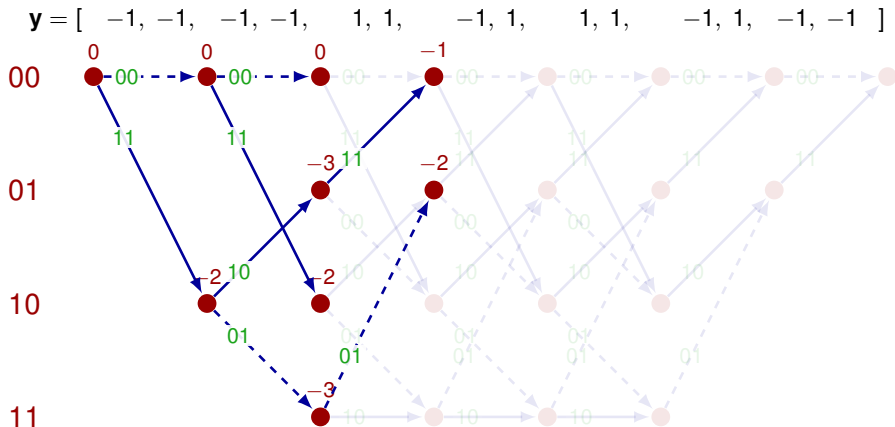
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



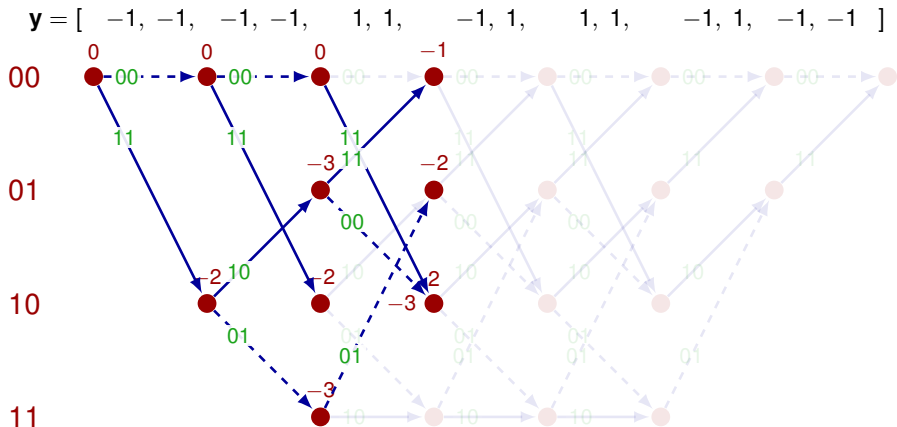
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



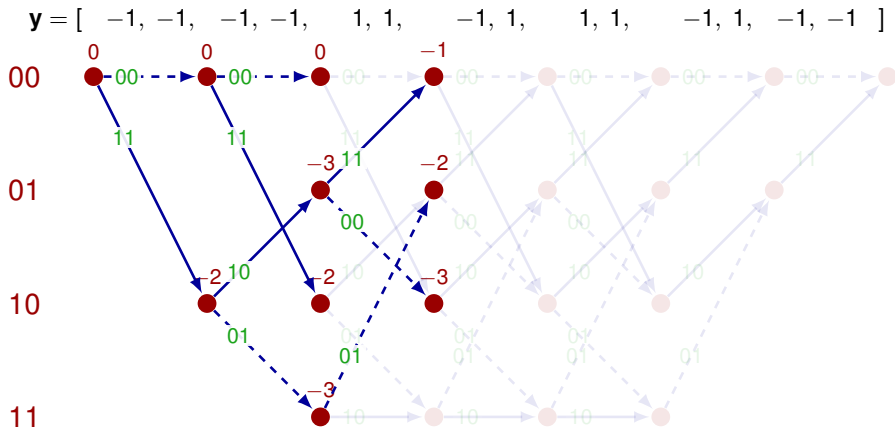
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



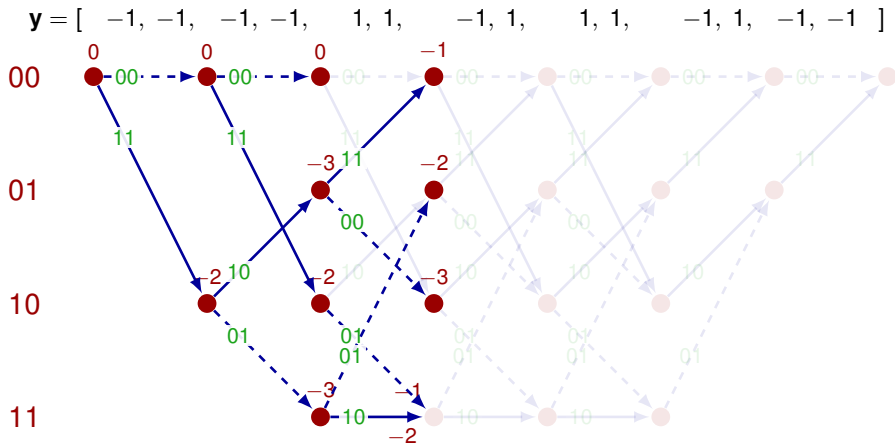
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



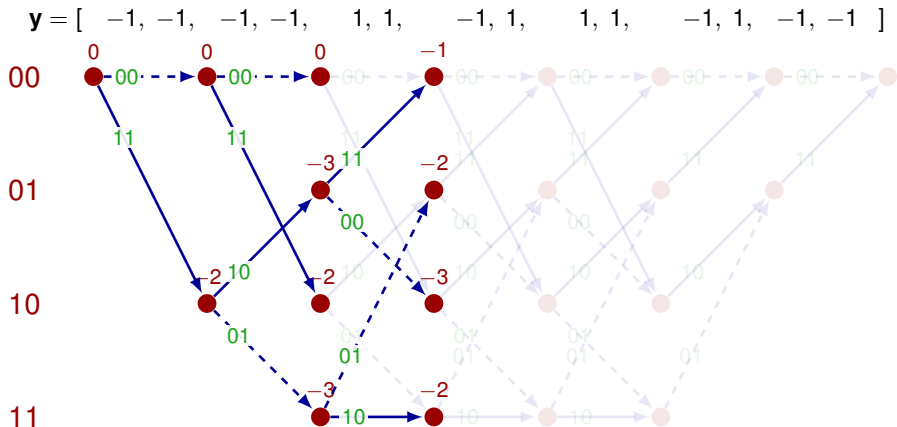
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



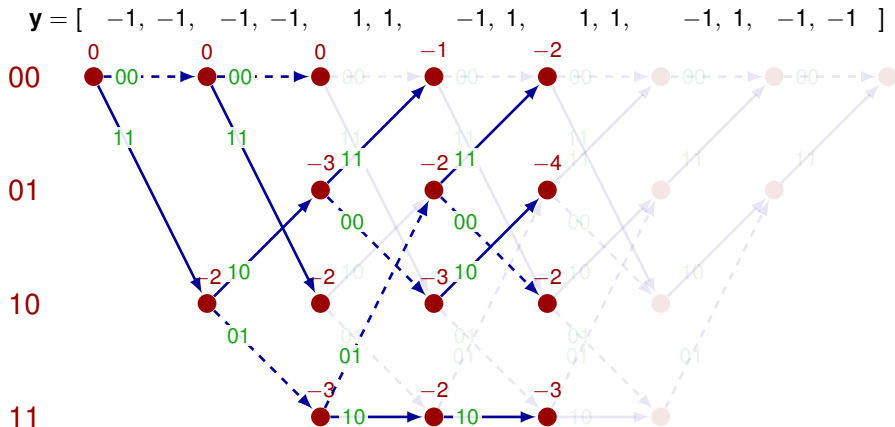
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



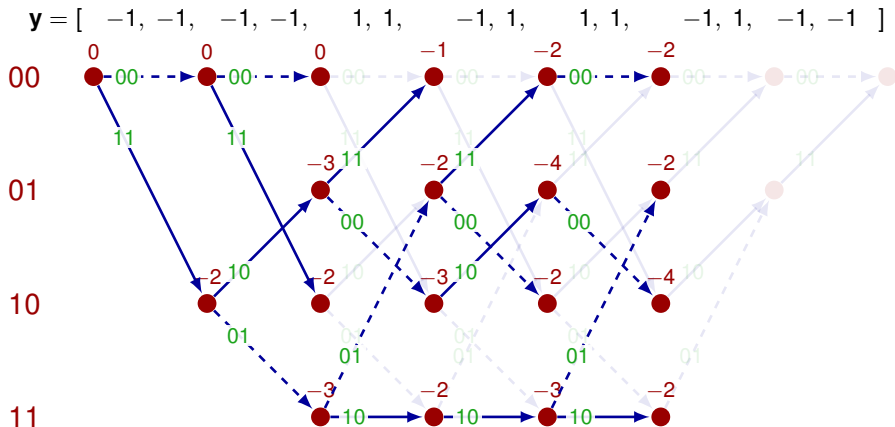
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



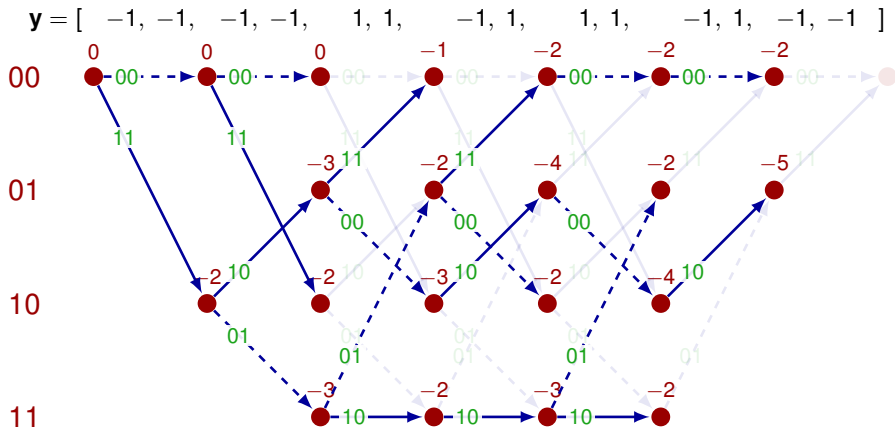
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



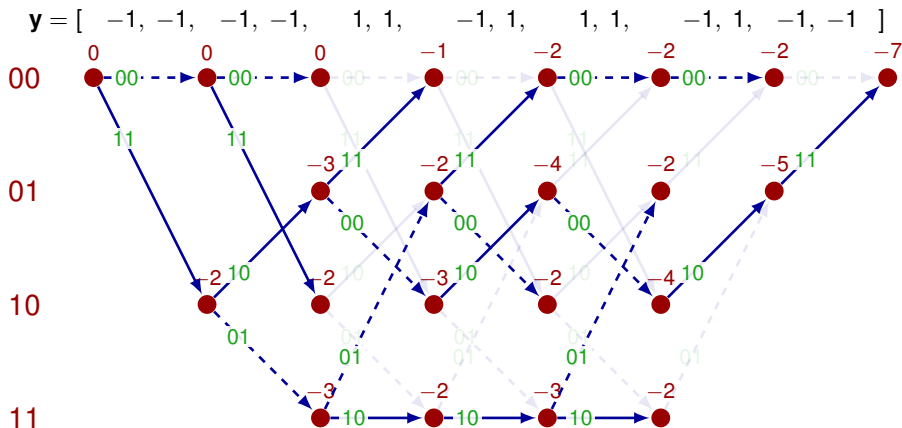
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



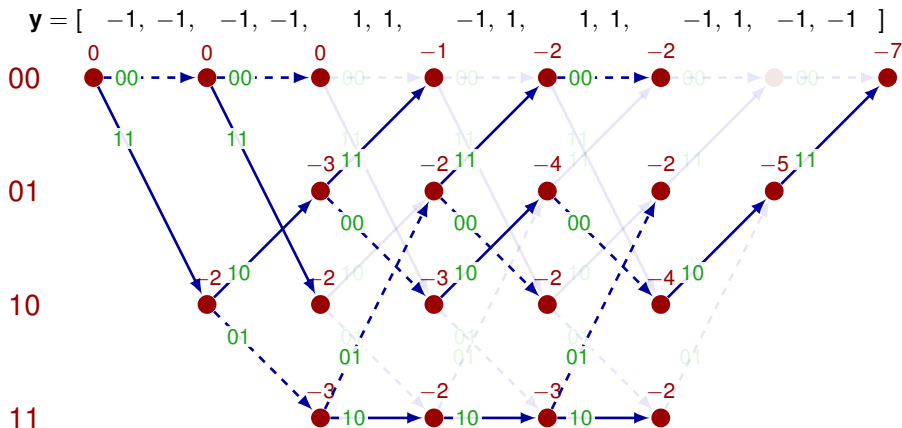
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



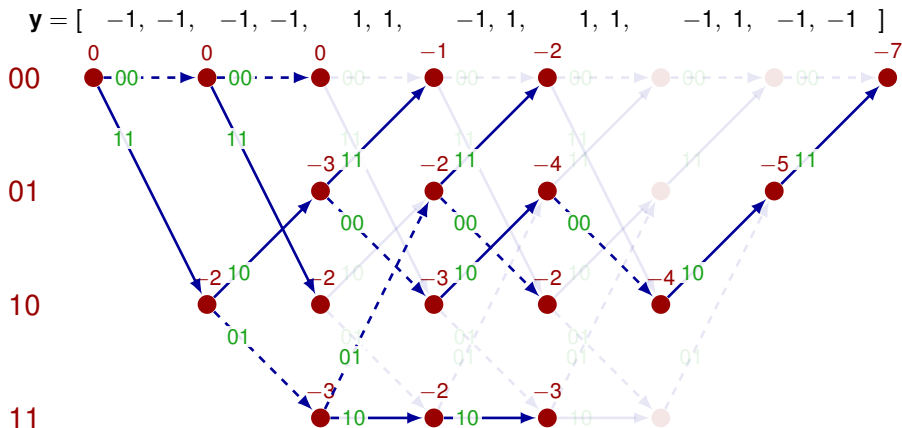
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



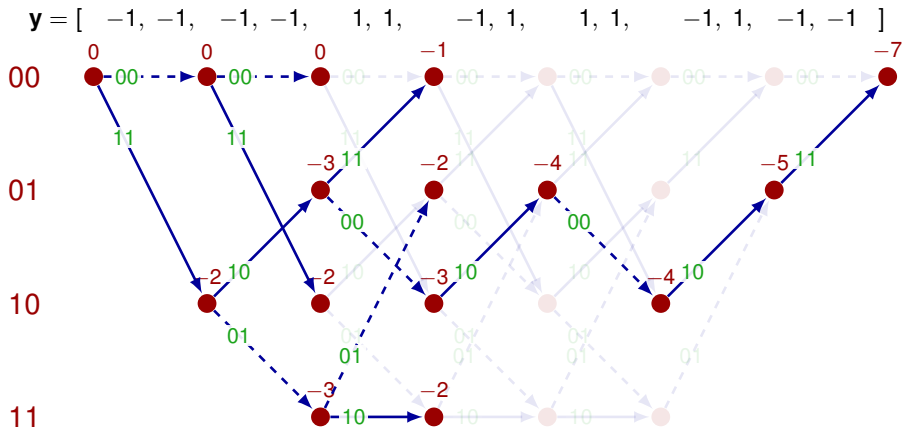
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

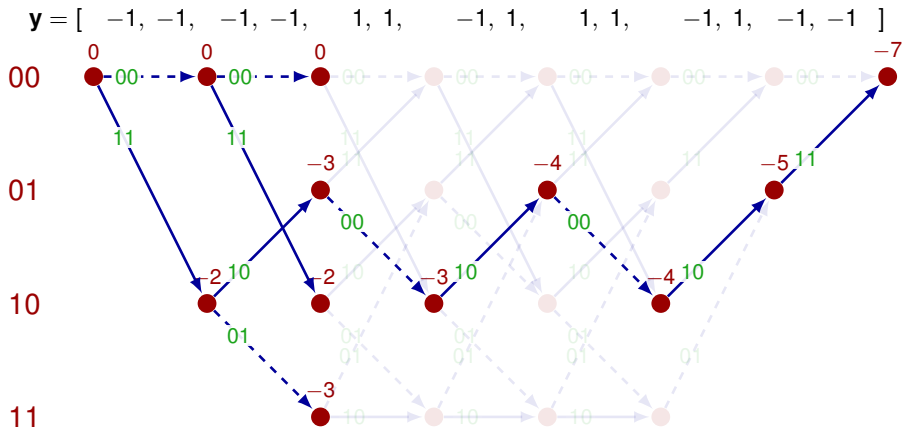


Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

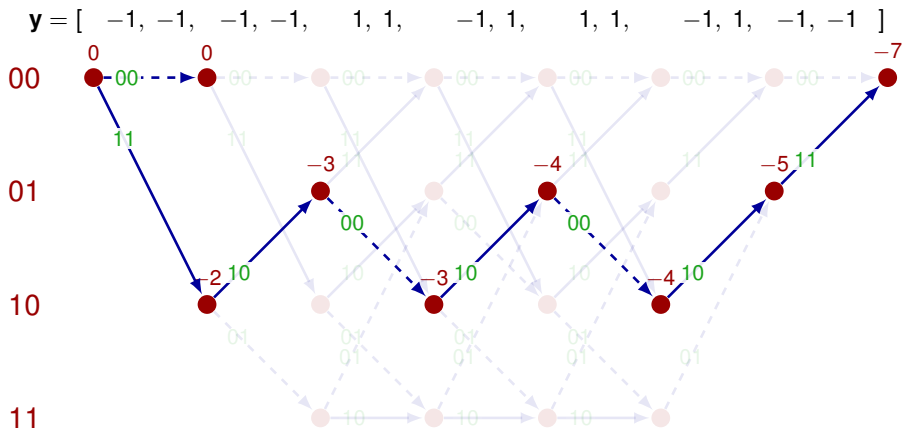


Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



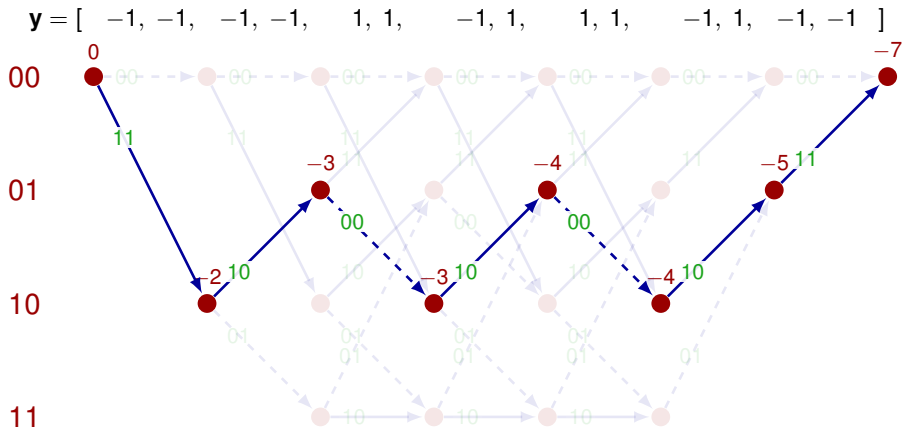
Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



Dernier QCM

Comment avez-vous trouvé ce cours ?

- ☐ A Très difficile
- ☐ B Difficile
- ☐ C Moyen
- ☐ D Simple
- ☐ E Très simple

#QDLE#S#ABCDE#30#