TS226
-
Codes convolutifs et codes concaténés associés

Romain Tajan

24 octobre 2019

Plan

QCM

Comment avez-vous trouvé le cours précédent ?

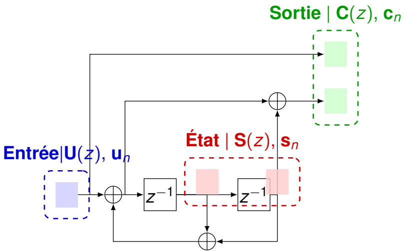
- A Très difficile
- B Difficile
- C Moyen
- D Simple
- E Très simple

#QDLE#S#ABCDE#30#

Plan

1. Previously on TS226 . . .
   - ▷ Rappels sur l'encodeur
   - ▷ Rappels sur le diagramme d'état
   - ▷ Rappels sur le treillis
   - ▷ Rappels sur les décodeurs
   - ▷ Rappels sur l'algorithme de Viterbi
2. Décodage MAP-Bit des Codes Convolutifs
3. Turbo-Codes

Rappels / définitions



- **Entrée** : $\mathbf{U}(z) = [U^{(0)}(z),\ U^{(1)}(z)\ \dots\ U^{(n_b-1)}(z)]$

$\rightarrow$ dans ce cours $n_b = 1 \Rightarrow \mathbf{U}(z) \rightarrow U(z)$

- **État** : $\mathbf{S}(z) = [S^{(0)}(z),\ S^{(1)}(z)\ \dots\ S^{(m-1)}(z)]$

$\rightarrow$ m est appelé "mémoire du code"

$\rightarrow$ $\nu = m + 1$ est appelé "longueur de contrainte"

$\rightarrow$ dans l'exemple $m = 2$

$\rightarrow$ 2^m : nombre d'états

- **Sortie** : $\mathbf{C}(z) = [C^{(0)}(z),\ C^{(1)}(z)\ \dots\ C^{(m-1)}(z)]$

$\rightarrow$ n_s nombre de sorties

$\rightarrow$ dans l'exemple $n_s = 2$

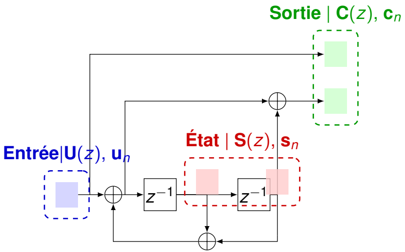
$\rightarrow$ De façon générale : $\mathbf{C}(z) = U(z)\mathbf{G}(z)$

$\rightarrow$ où $\mathbf{G}(z) = [\frac{A^{(1)}(z)}{B^{(1)}(z)}\ \dots\ \frac{A^{(n_s)}(z)}{B^{(n_s)}(z)}]$

- **Rendement du code** : $R = \frac{\#\text{bits d'info. en entrée}}{\#\text{bits codés en sortie}}$

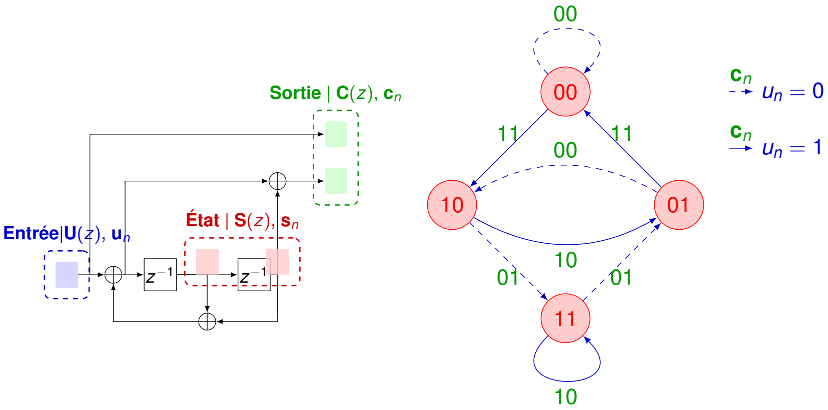
$\rightarrow$ Ici : $R = \frac{n_b}{n_s} = \frac{1}{2}$

Rappels / définitions

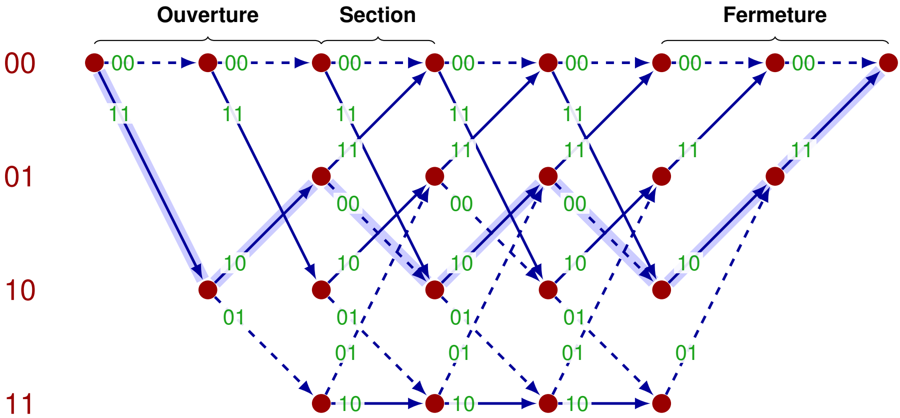


- **Code linéaire**
- **Encodeur récursif / non récursif**
- **Encodeur systématique / non systématique**
- **Notation octale**

Rappels / définitions



- Message $\Leftrightarrow$ chemin dans le graphe
- Mot de code $\Leftrightarrow$ étiquettes le long du chemin dans le graphe
- Nécessité de définir (au moins) un état initial



- On souhaite envoyer le message : $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$
- On calcule le mot de code : $\mathbf{c} = [1\ 1,\ 1\ 0,\ 0\ 0,\ 1\ 0,\ 0\ 0,\ \underline{1\ 0},\ \underline{1\ 1}]$
- On envoie le signal : $\mathbf{x} = [-1\ -1,\ -1\ 1,\ 1\ 1,\ -1\ 1,\ 1\ 1,\ \underline{-1\ 1},\ \underline{-1\ -1}]$

Décodage des Codes convolutifs

$$\underset{\text{Message}}{\mathbf{u} \in \{0,1\}^K} \rightarrow \boxed{\text{Encodeur}} \rightarrow \underset{\text{Mot de code}}{\mathbf{c} \in \mathcal{C} \subset \{0,1\}^L} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{BPSK}\\ 1-2\mathbf{c}\end{matrix}} \rightarrow \underset{\text{Signal transmis}}{\mathbf{x} \in \{-1,1\}^L} \rightarrow \boxed{\begin{matrix}\text{Canal}\\ p(\mathbf{y}|\mathbf{x})\end{matrix}} \rightarrow \underset{\text{Signal observé}}{\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{L}}} \rightarrow \boxed{\text{Décodeur}} \rightarrow \underset{\text{Message estimé}}{\hat{\mathbf{u}} \in \{0,1\}^K}$$

- Le **Max. A Posteriori** (**MAP**) : $\hat{\mathbf{u}} = \underset{\mathbf{u} \in \{0,1\}^K}{\operatorname{argmax}} \mathbb{P}(\mathbf{U} = \mathbf{u}|\mathbf{y})$

  $\rightarrow$ **Minimise la probabilité d'erreur trame**

- Le **Max. de vraisemblance** (**ML**) : $\hat{\mathbf{u}} = \underset{\mathbf{u} \in \{0,1\}^K}{\operatorname{argmax}} p(\mathbf{y}|\mathbf{u}) = \underset{\mathbf{c} \in \mathcal{C}|\mathbf{u} \in \{0,1\}^K}{\operatorname{argmin}} \sum_{\ell=0}^{L-1} \mathbf{c}_\ell \mathbf{y}_\ell^T$

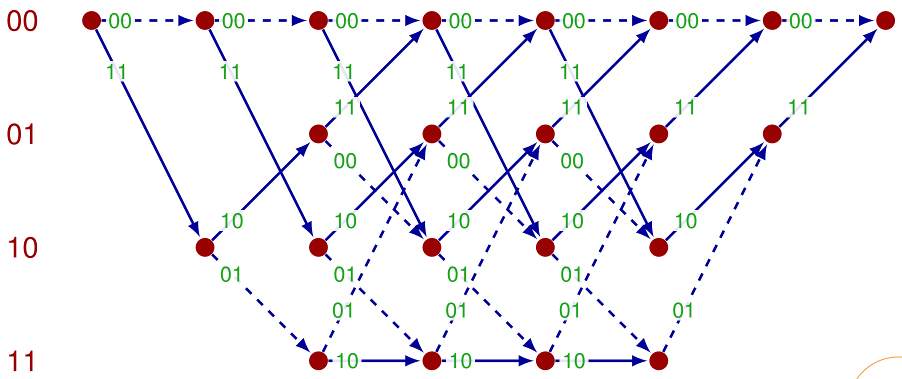
  $\rightarrow$ **CC : Équivalent moins complexe du MAP, algorithme de Viterbi**

- Le **Max. A Posteriori - Bit** (**MAP-Bit**) : $\hat{u}_i = \underset{u_i \in \{0,1\}}{\operatorname{argmax}} \mathbb{P}(U_i = u_i|\mathbf{y})$

  $\rightarrow$ **Minimise la probabilité d'erreur binaire**

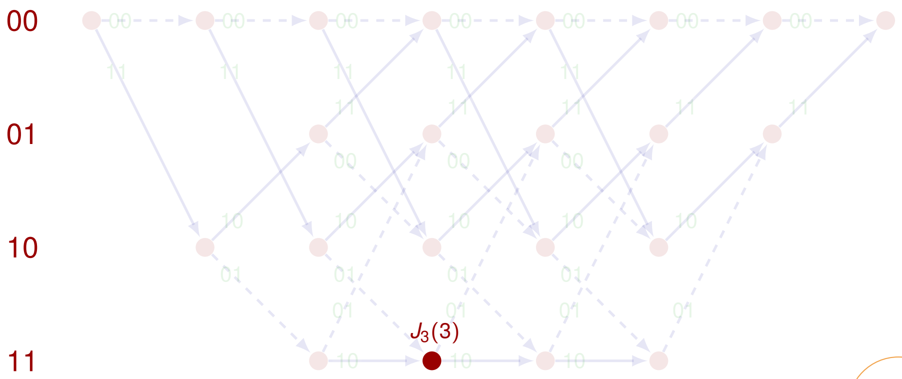
- $\mathcal{P}(s_n)$: **parents de l'état** s_n, i.e. ensemble des s_{n-1} tels que $s_{n-1} \to s_n$ existe
- **Algotithme de Viterbi** : pour chaque $n \in [0, L-1]$ et chaque $s_n \in \mathcal{S}_n$ calculer
  $J_n(s_n) = \min_{s_{n-1} \in \mathcal{P}(s_n)} \left[J_{n-1}(s_{n-1}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1} \to s_n)\mathbf{y}_{n-1}^T \right]$ et $\hat{s}_{n-1}(s_n) = \operatorname{argmin}_{s_{n-1} \in \mathcal{P}(s_n)} [\cdots]$
- **û : chemin survivant minimisant** $J_L(s_L)$

$\mathbf{y} = [\quad \mathbf{y_0}, \quad \mathbf{y_1}, \quad \mathbf{y_2}, \quad \mathbf{y_3}, \quad \mathbf{y_4}, \quad \mathbf{y_5}, \quad \mathbf{y_6} \quad]$



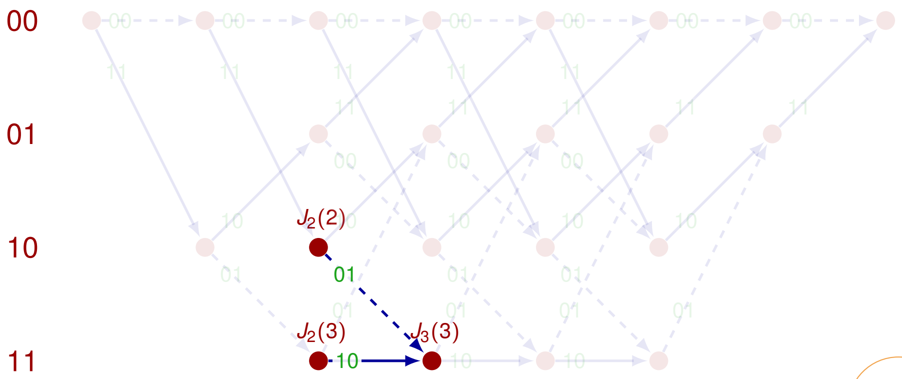
- $\mathcal{P}(s_n)$: **parents de l'état** s_n, i.e. ensemble des s_{n-1} tels que $s_{n-1} \to s_n$ existe
- **Algotithme de Viterbi** : pour chaque $n \in [0, L-1]$ et chaque $s_n \in \mathcal{S}_n$ calculer
$$J_n(s_n) = \min_{s_{n-1} \in \mathcal{P}(s_n)} \left[J_{n-1}(s_{n-1}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1} \to s_n)\mathbf{y}_{n-1}^T \right] \text{ et } \hat{s}_{n-1}(s_n) = \operatorname*{argmin}_{s_{n-1} \in \mathcal{P}(s_n)} [\cdots]$$
- **û : chemin survivant minimisant** $J_L(s_L)$

$$\mathbf{y} = [\quad \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}_1, \quad \mathbf{y}_2, \quad \mathbf{y}_3, \quad \mathbf{y}_4, \quad \mathbf{y}_5, \quad \mathbf{y}_6 \quad]$$



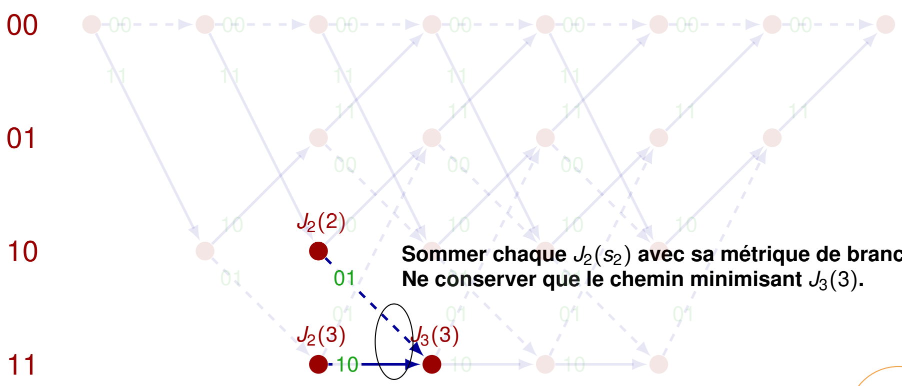
- $\mathcal{P}(s_n)$: **parents de l'état** s_n, i.e. ensemble des s_{n-1} tels que $s_{n-1} \to s_n$ existe
- **Algotithme de Viterbi** : pour chaque $n \in [0, L-1]$ et chaque $s_n \in \mathcal{S}_n$ calculer
  $J_n(s_n) = \min_{s_{n-1} \in \mathcal{P}(s_n)} \left[J_{n-1}(s_{n-1}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1} \to s_n)\mathbf{y}_{n-1}^T \right]$ et $\hat{s}_{n-1}(s_n) = \underset{s_{n-1} \in \mathcal{P}(s_n)}{\operatorname{argmin}} [\cdots]$
- **û : chemin survivant minimisant** $J_L(s_L)$

$\mathbf{y} = [\ \mathbf{y}_0,\ \mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2,\ \mathbf{y}_3,\ \mathbf{y}_4,\ \mathbf{y}_5,\ \mathbf{y}_6\ ]$



- $\mathcal{P}(s_n)$: **parents de l'état** s_n, i.e. ensemble des s_{n-1} tels que $s_{n-1} \to s_n$ existe
- **Algotithme de Viterbi** : pour chaque $n \in [0, L-1]$ et chaque $s_n \in \mathcal{S}_n$ calculer
$$J_n(s_n) = \min_{s_{n-1} \in \mathcal{P}(s_n)} \left[J_{n-1}(s_{n-1}) + \mathbf{c}_{n-1}(s_{n-1} \to s_n)\mathbf{y}_{n-1}^T \right] \text{ et } \hat{s}_{n-1}(s_n) = \operatorname*{argmin}_{s_{n-1} \in \mathcal{P}(s_n)} [\cdots]$$
- **û : chemin survivant minimisant** $J_L(s_L)$

$$\mathbf{y} = [\quad \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}_1, \quad \mathbf{y}_2, \quad \mathbf{y}_3, \quad \mathbf{y}_4, \quad \mathbf{y}_5, \quad \mathbf{y}_6 \quad]$$

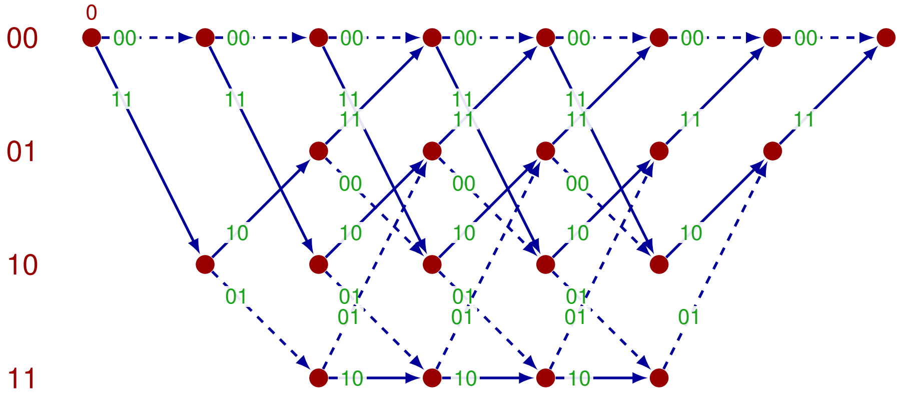


Sommer chaque $J_2(s_2)$ avec sa métrique de branche.
Ne conserver que le chemin minimisant $J_3(3)$.

Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

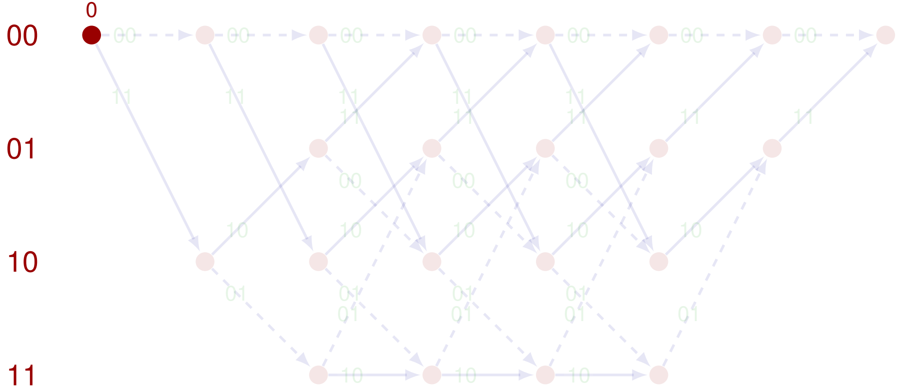
$$\mathbf{y} = [\ -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\ ]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

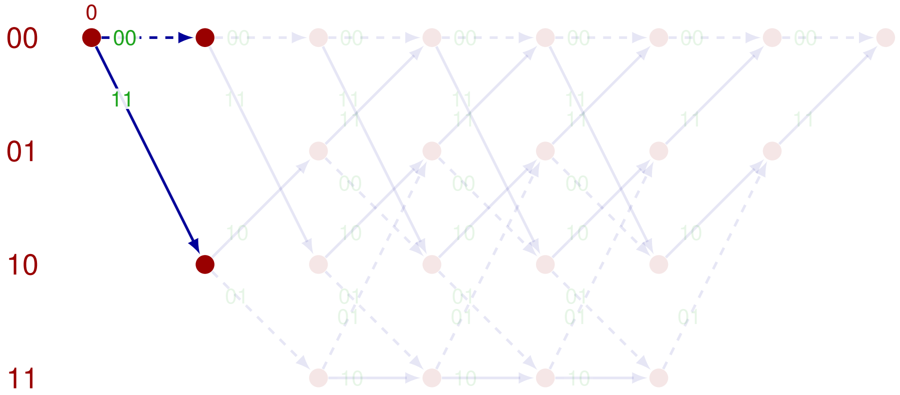
$$\mathbf{y} = [\quad -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\quad]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

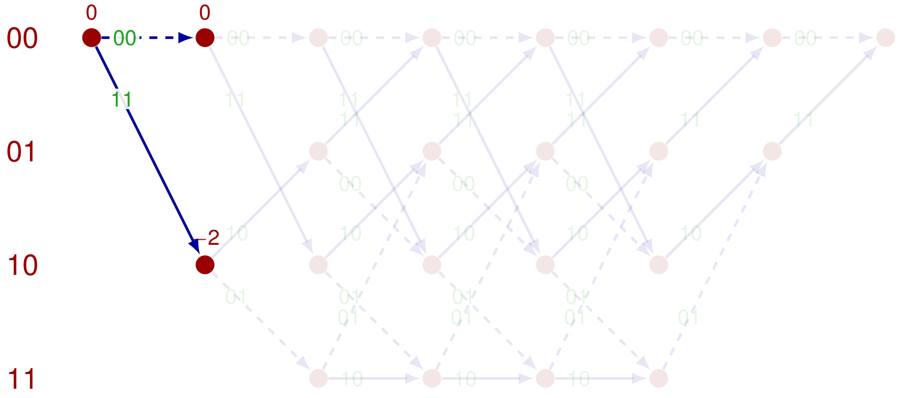
$$\mathbf{y} = [\quad -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\quad]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

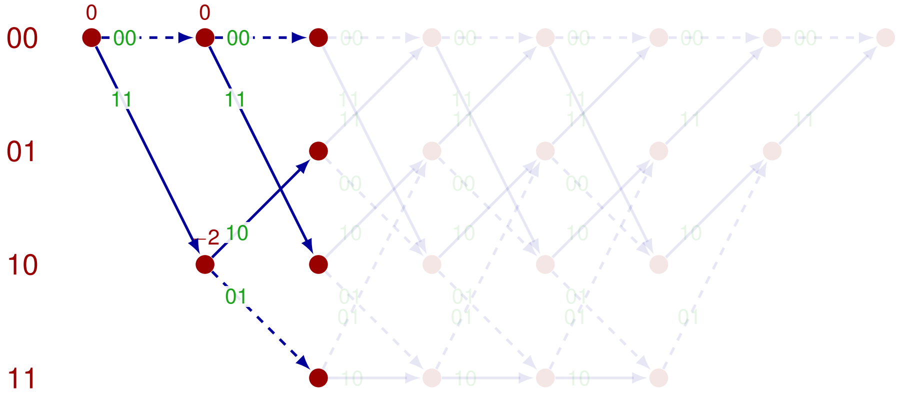
$$\mathbf{y} = [\quad -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\quad]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

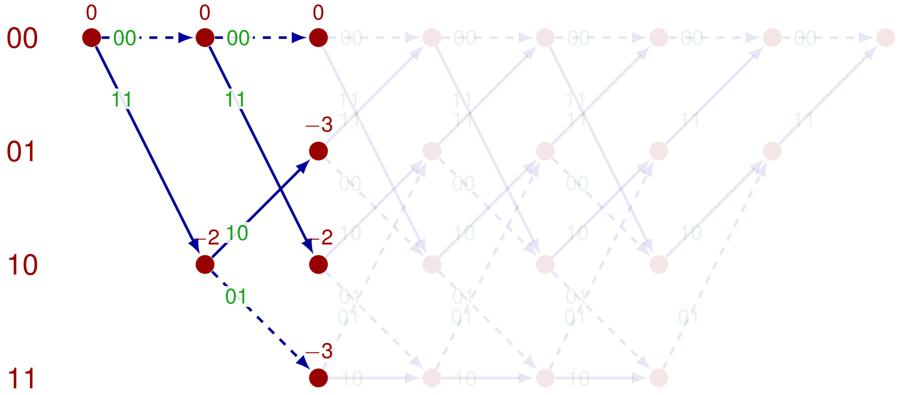
$$\mathbf{y} = [\quad -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\quad]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

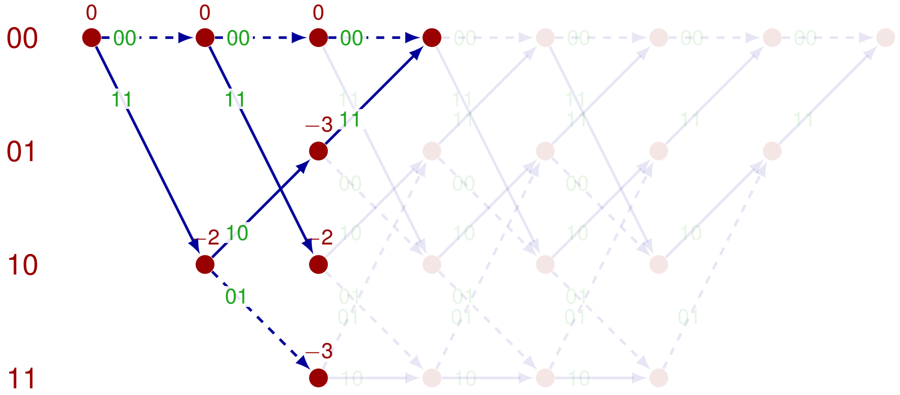
$$\mathbf{y} = [\quad -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\quad]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

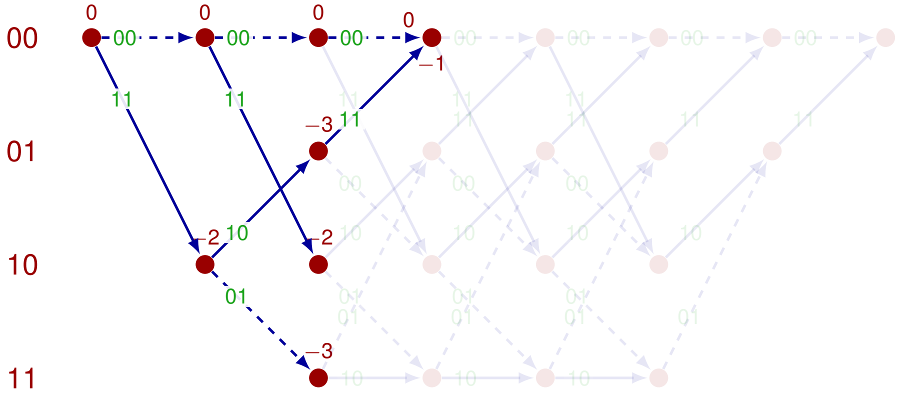
$$\mathbf{y} = [\quad -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\quad]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

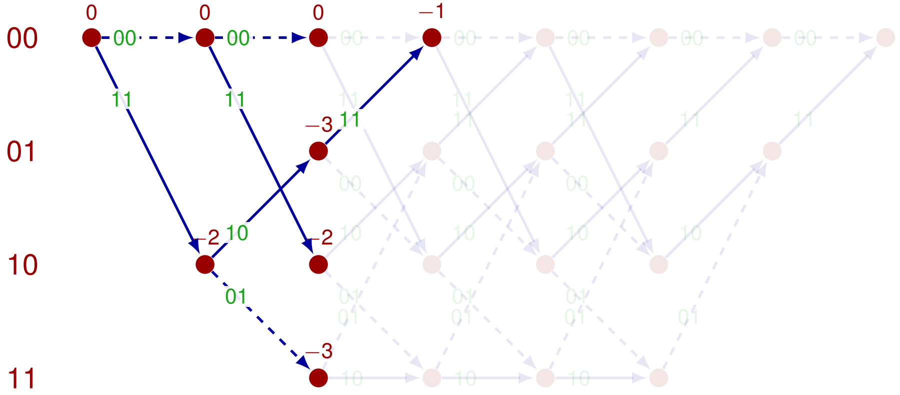
$$\mathbf{y} = [\quad -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1 \quad]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

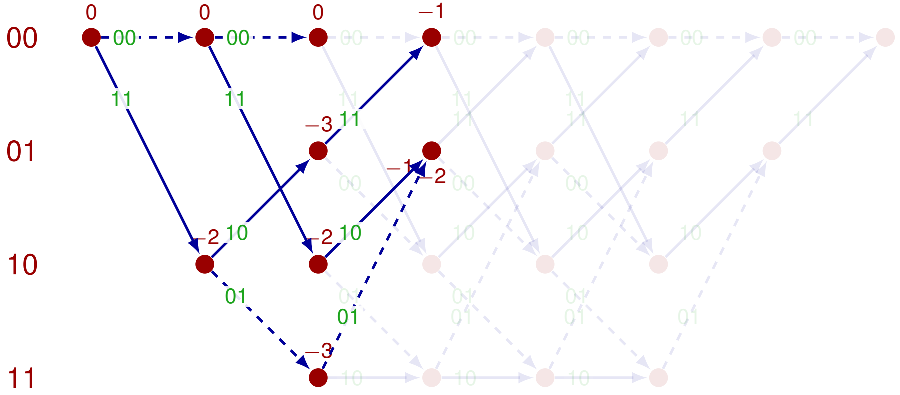
$\mathbf{y} = [\ -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\ ]$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

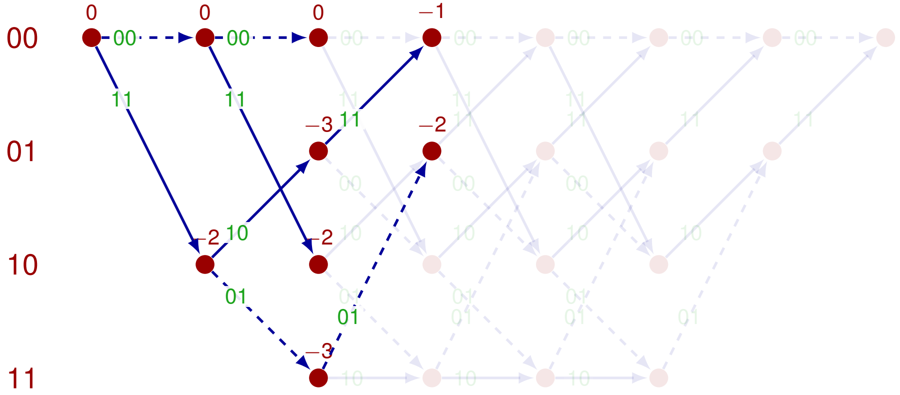
$$\mathbf{y} = [\quad -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\quad]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

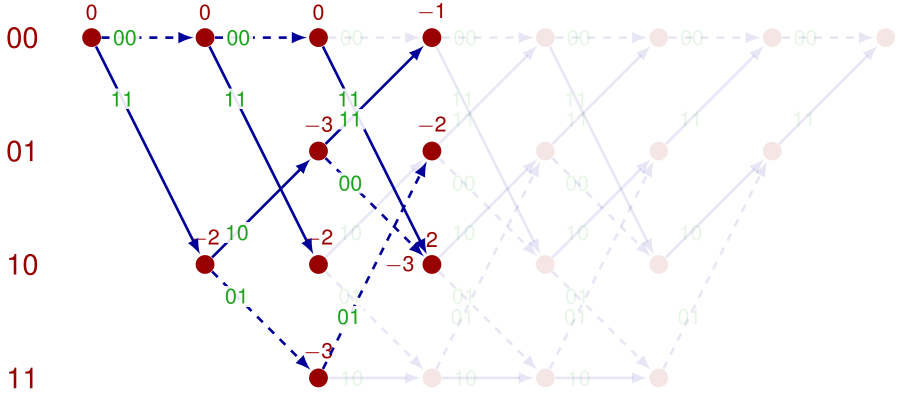
$$\mathbf{y} = [\quad -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\quad]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

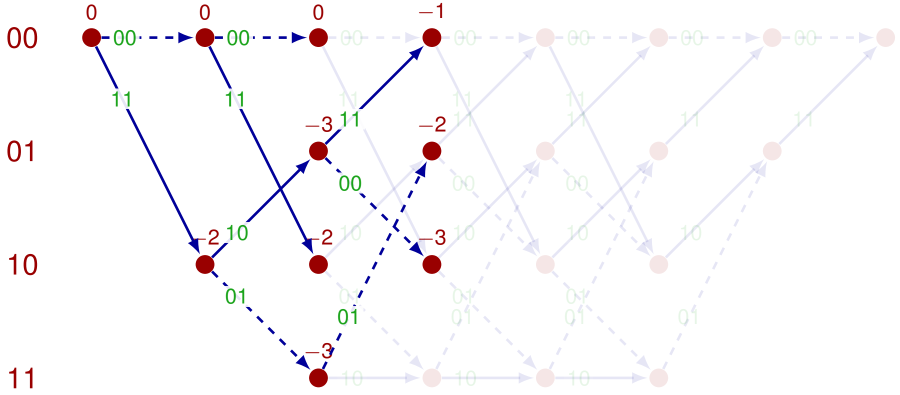
$$\mathbf{y} = [\quad -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\quad]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

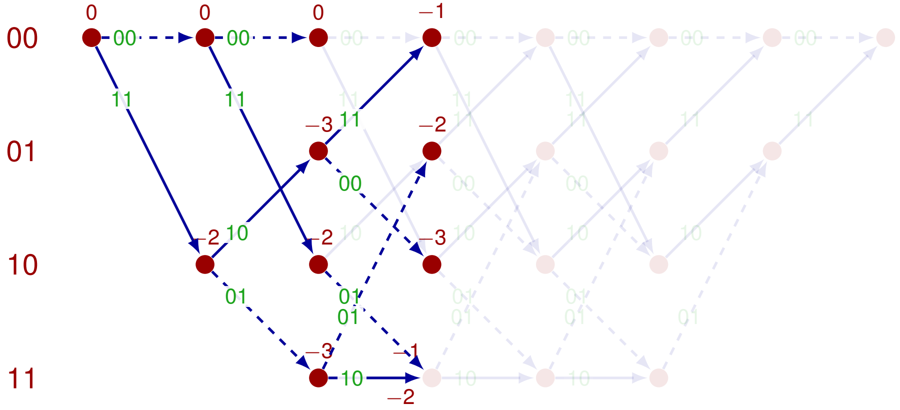
$$\mathbf{y} = [\quad -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\quad]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

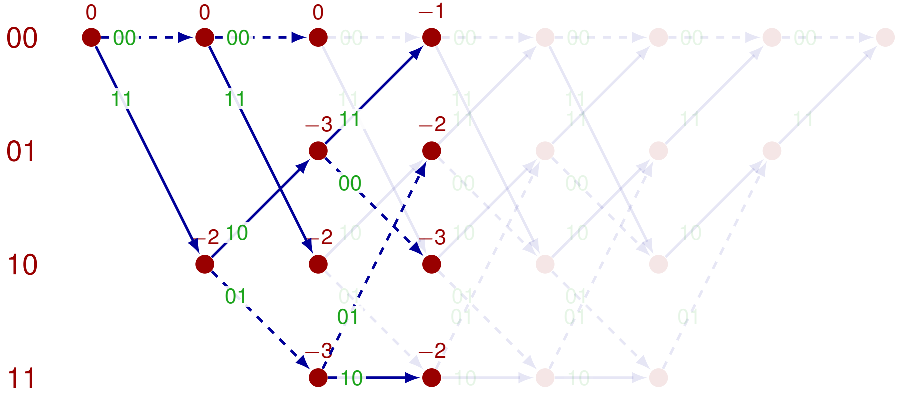
$$\mathbf{y} = [\ \ -1,\ -1,\ \ -1,\ -1,\ \ 1,\ 1,\ \ -1,\ 1,\ \ 1,\ 1,\ \ -1,\ 1,\ \ -1,\ -1\ \ ]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

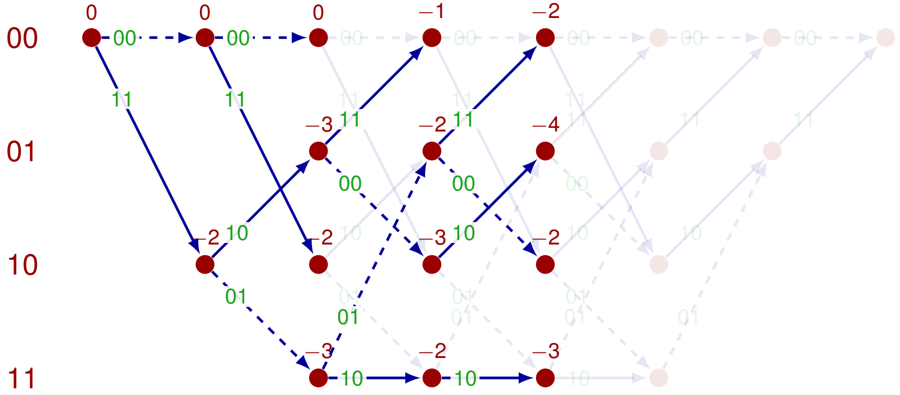
$\mathbf{y} = [\ -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\ ]$



Exemple de question...

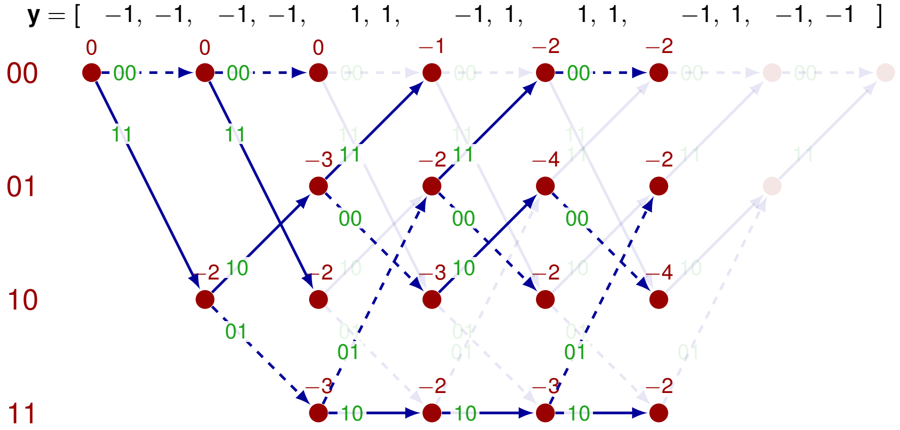
Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

$$\mathbf{y} = [\ -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\ ]$$



Exemple de question...

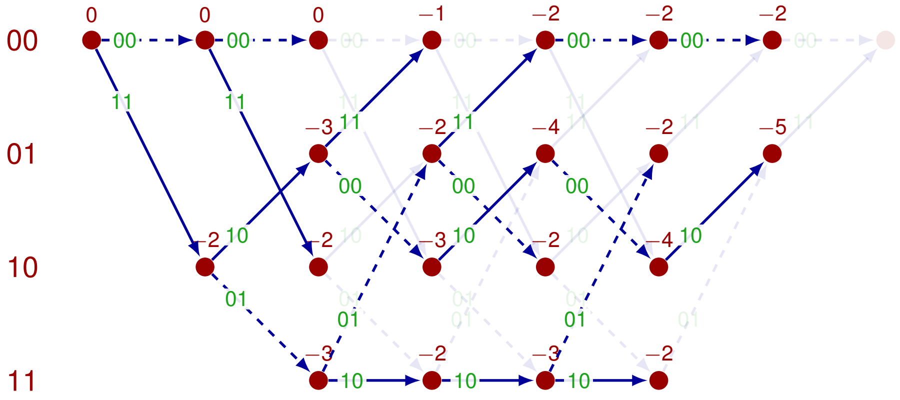
Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

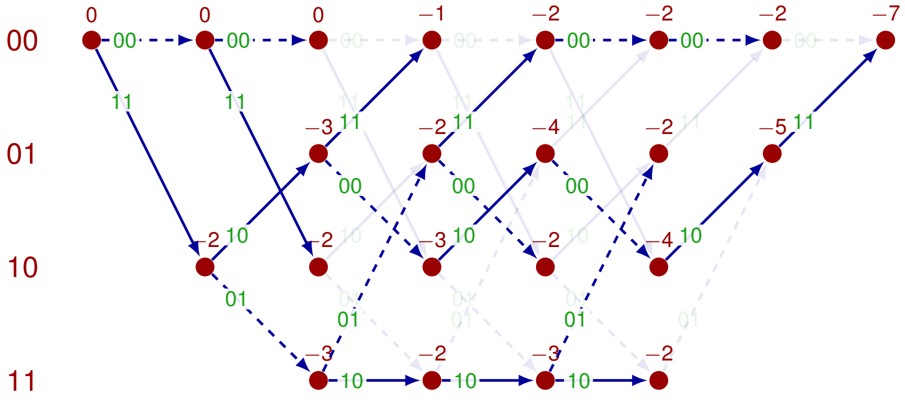
$$\mathbf{y} = [\ -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\ ]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

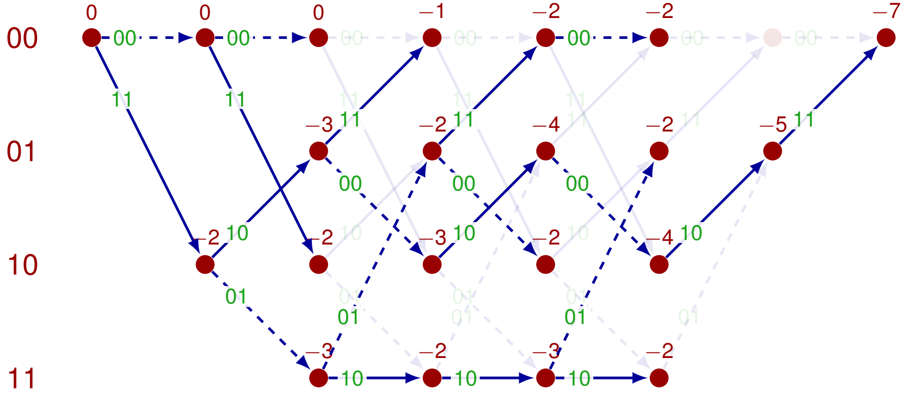
$$\mathbf{y} = [\quad -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\quad]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

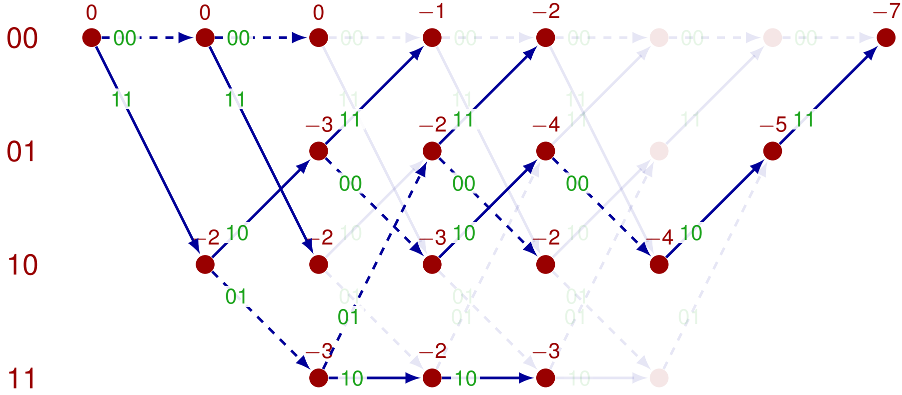
$$\mathbf{y} = [\quad -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\quad]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1, -1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, 1, 1, -1, 1, -1, -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1, 1, 0, 1, 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

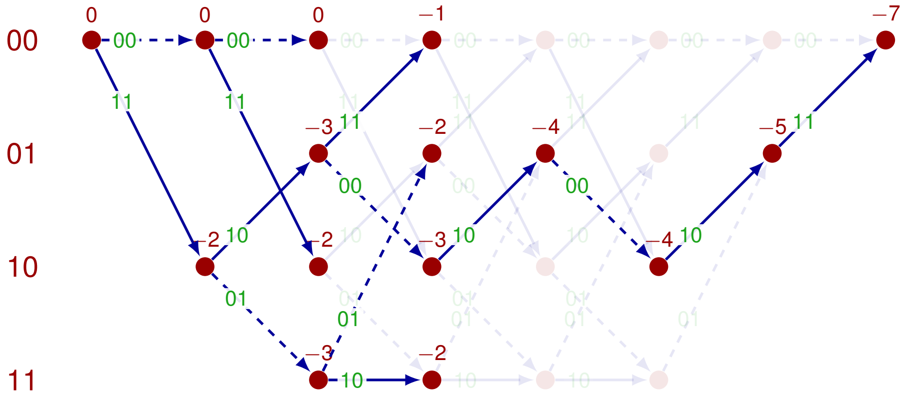
$$\mathbf{y} = [\ -1, -1,\ \ -1, -1,\ \ 1, 1,\ \ -1, 1,\ \ 1, 1,\ \ -1, 1,\ \ -1, -1\ ]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

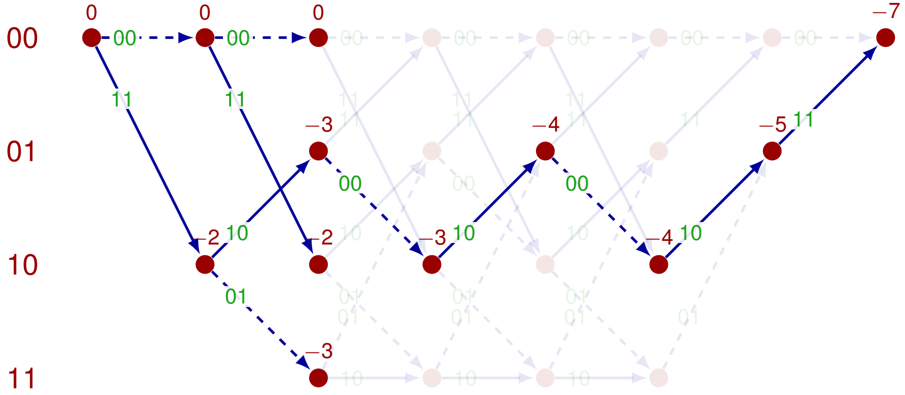
$$\mathbf{y} = [\quad -1,\ -1, \quad -1,\ -1, \quad 1,\ 1, \quad -1,\ 1, \quad 1,\ 1, \quad -1,\ 1, \quad -1,\ -1 \quad]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

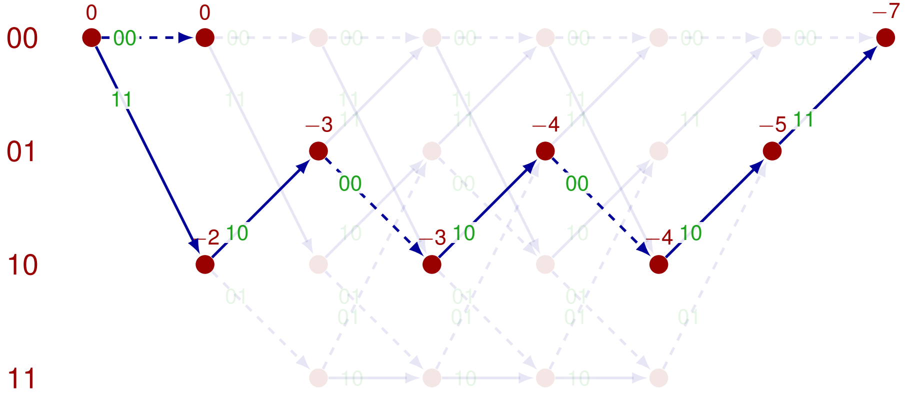
$\mathbf{y} = [\ -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\ ]$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

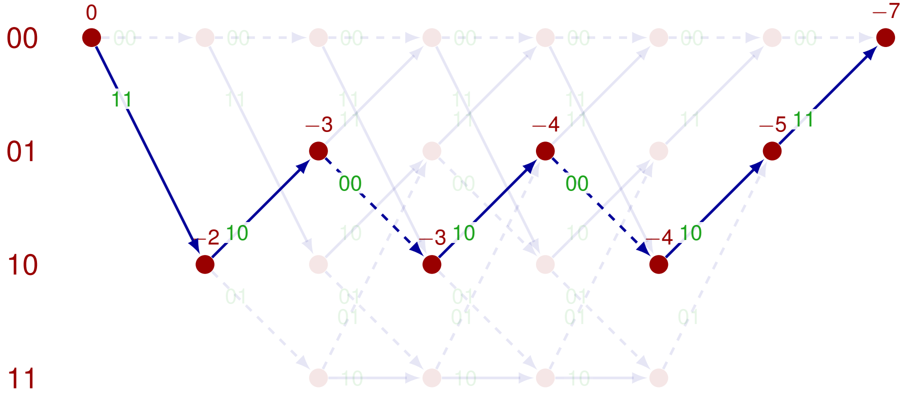
$$\mathbf{y} = [\quad -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\quad]$$



Exemple de question...

Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1,\ -1,\ -1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1,\ 0]$, reçoit-on le message sans erreur ?

$$\mathbf{y} = [\quad -1,\ -1,\quad -1,\ -1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad 1,\ 1,\quad -1,\ 1,\quad -1,\ -1\quad]$$



Plan

1. Previously on TS226 . . .

2. Décodage MAP-Bit des Codes Convolutifs
   - Introduction
   - Décodage MAP-Bit : algorithme BCJR
   - Décodage MAP-Bit : algorithme Log-MAP
   - Décodage MAP-Bit : algorithme Log-MAP

3. Turbo-Codes

Introduction

$$\xrightarrow[\text{Message}]{\mathbf{u}\in\{0,1\}^K} \boxed{\text{Encodeur}} \xrightarrow[\text{Mot de code}]{\mathbf{c}\in\mathcal{C}\subset\{0,1\}^L} \boxed{\begin{array}{c}\text{BPSK}\\ 1-2\mathbf{c}\end{array}} \xrightarrow[\text{Signal transmis}]{\mathbf{x}\in\{-1,1\}^L} \boxed{\begin{array}{c}\text{Canal}\\ p(\mathbf{y}|\mathbf{x})\end{array}} \xrightarrow[\text{Signal observé}]{\mathbf{y}\in\mathbb{R}^\mathbf{L}} \boxed{\text{Décodeur}} \xrightarrow[\text{Message estimé}]{\hat{\mathbf{u}}\in\{0,1\}^K}$$

- Le **décodeur** du **Maximum A Posteriori - Bit** (**MAP-Bit**) est la fonction de **y** définie par

$$\hat{u}_\ell = \arg \max_{u_\ell \in \{0,1\}} \mathbb{P}(U_\ell = u_\ell | \mathbf{y})$$

- **Le décodeur MAP-Bit minimise la probabilité d'erreur binaire.**

- En pratique, on calcule le Logarithme du Rapport de Vraisemblance (LLR) suivant :

$$L(u_\ell) = \log \left(\frac{\mathbb{P}(U_\ell = 0|\mathbf{y})}{\mathbb{P}(U_\ell = 1|\mathbf{y})} \right)$$

- Le signe de $L(u_\ell)$ **représente la décision** : $\hat{u}_\ell = \begin{cases} 0, & \text{si } L(u_\ell) \geq 0 \\ 1, & \text{sinon.} \end{cases}$
- Le **module** de $L(u_\ell)$ i.e. $|L(u_\ell)|$ représente la **fiabilité** de la décision.
- Un décodeur produisant de telles valeurs est dit **souple**.

Algorithme BCJR (Bahl Cocke Jelinek Raviv)

L'algorithme BCJR repose sur deux principes :

1. Les LLR ($L(u_\ell)$) peuvent êtres calculés sur le treillis :

$$L(u_\ell) = \log\left(\frac{\sum_{(s\to s')\in\mathcal{U}_0} \alpha_\ell(s)\gamma_\ell(s,s')\beta_{\ell+1}(s')}{\sum_{(s\to s')\in\mathcal{U}_1} \alpha_\ell(s)\gamma_\ell(s,s')\beta_{\ell+1}(s')}\right)$$

   où

   - $\alpha_\ell(s) = p(s_\ell = s, \mathbf{y}_0^{\ell-1})$ est une **métrique de nœud** appelée **métrique aller**
   - $\beta_\ell(s) = p(\mathbf{y}_\ell^{L-1}|s_\ell = s)$ est une **métrique de nœud** appelée **métrique retour**
   - $\gamma_\ell(s,s') = p(s_{\ell+1} = s'|s_\ell = s, \mathbf{y}_\ell)$ est une **métrique de branche**

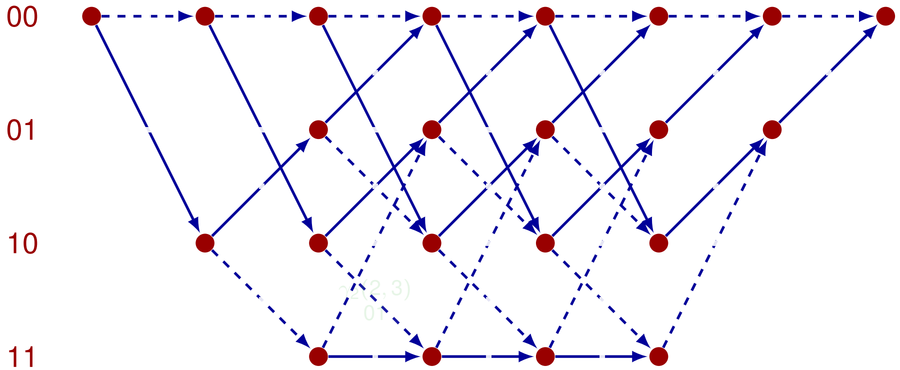
2. Les métriques de nœuds et de branches se calculent elles-mêmes sur le treillis :

$$\begin{aligned}
\alpha_{\ell+1}(s') &= \sum_{s\in\mathcal{S}} \alpha_\ell(s)\gamma_\ell(s,s') \\
\beta_\ell(s) &= \sum_{s'\in\mathcal{S}} \beta_{\ell+1}(s')\gamma_\ell(s,s') \\
\gamma_\ell(s,s') &= \frac{p(u_\ell(s\to s'))}{2\pi\sigma^2}\exp\left(-\frac{||\mathbf{y}_\ell - \mathbf{x}_\ell(s\to s')||^2}{2\sigma^2}\right)
\end{aligned}$$

Métrique de branche $\gamma_\ell(s, s')$

$$\gamma_\ell(s, s') = \frac{p(u_\ell(s \to s'))}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{||\mathbf{y}_\ell - \mathbf{x}_\ell(s \to s')||^2}{2\sigma^2}\right)$$

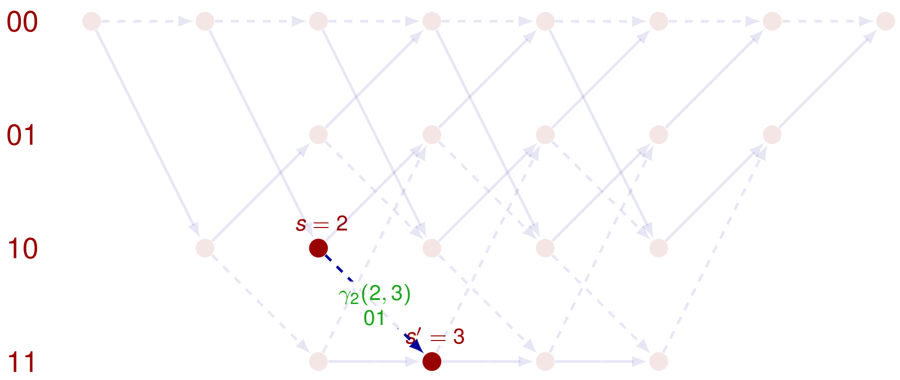
$$\mathbf{y} = [\quad \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}_1, \quad \mathbf{y}_2, \quad \mathbf{y}_3, \quad \mathbf{y}_4, \quad \mathbf{y}_5, \quad \mathbf{y}_6 \quad]$$



Métrique de branche $\gamma_\ell(s, s')$

$$\gamma_\ell(s, s') = \frac{p(u_\ell(s \to s'))}{2\pi\sigma^2} \exp\left(-\frac{||\mathbf{y}_\ell - \mathbf{x}_\ell(s \to s')||^2}{2\sigma^2}\right)$$

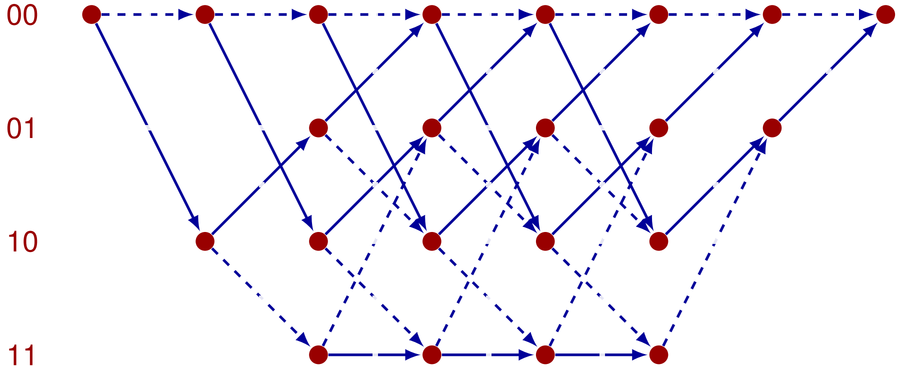
$\mathbf{y} = [\quad \mathbf{y}_0, \quad \mathbf{y}_1, \quad \mathbf{y}_2, \quad \mathbf{y}_3, \quad \mathbf{y}_4, \quad \mathbf{y}_5, \quad \mathbf{y}_6 \quad]$



Récursion "aller" : calcul des $\alpha_\ell(s)$

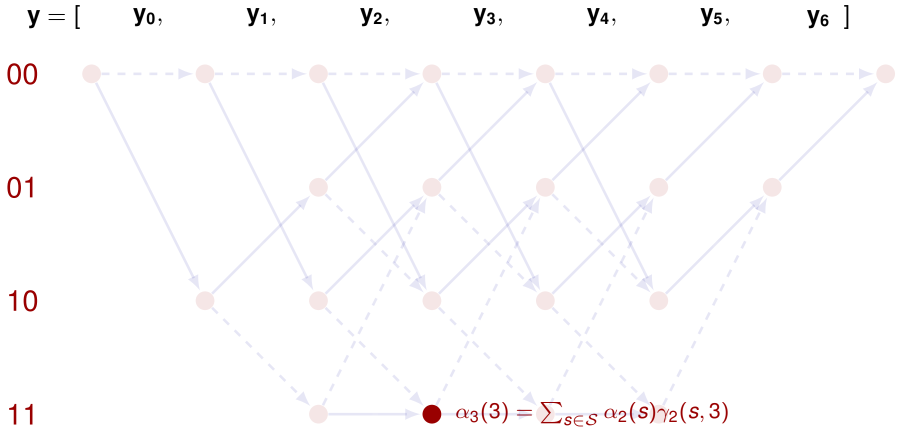
$$\alpha_{\ell+1}(s') = \sum_{s \in \mathcal{S}} \alpha_\ell(s)\gamma_\ell(s, s')$$

$\mathbf{y} = [\ \mathbf{y}_0,\ \mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2,\ \mathbf{y}_3,\ \mathbf{y}_4,\ \mathbf{y}_5,\ \mathbf{y}_6\ ]$



Récursion "aller" : calcul des $\alpha_\ell(s)$

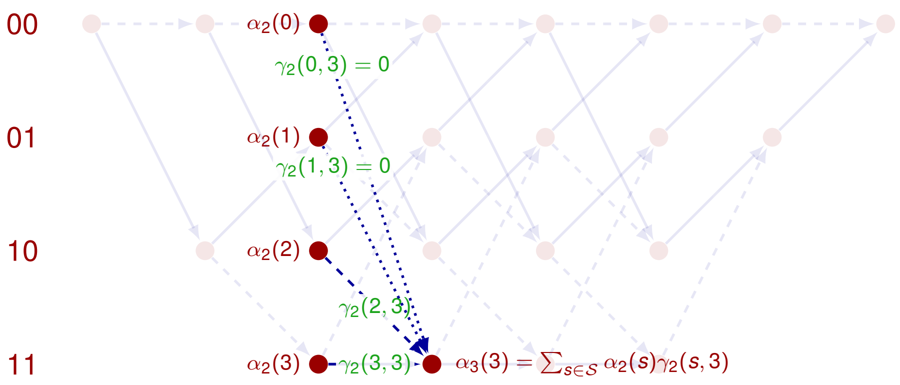
$$\alpha_{\ell+1}(s') = \sum_{s\in\mathcal{S}} \alpha_\ell(s)\gamma_\ell(s,s')$$



Récursion "aller" : calcul des $\alpha_\ell(s)$

$$\alpha_{\ell+1}(s') = \sum_{s \in \mathcal{S}} \alpha_\ell(s)\gamma_\ell(s, s')$$

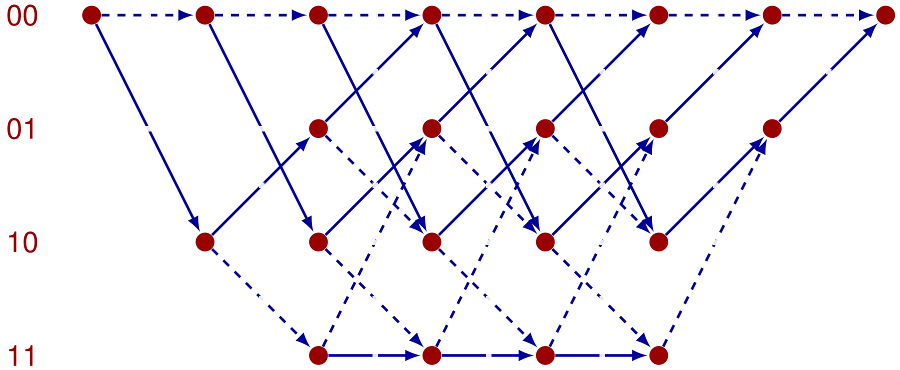
$\mathbf{y} = [\ \mathbf{y}_0, \ \mathbf{y}_1, \ \mathbf{y}_2, \ \mathbf{y}_3, \ \mathbf{y}_4, \ \mathbf{y}_5, \ \mathbf{y}_6\ ]$



Récursion "retour" : calcul des $\beta_\ell(s)$

$$\beta_\ell(s) = \sum_{s' \in \mathcal{S}} \beta_{\ell+1}(s')\gamma_\ell(s, s')$$

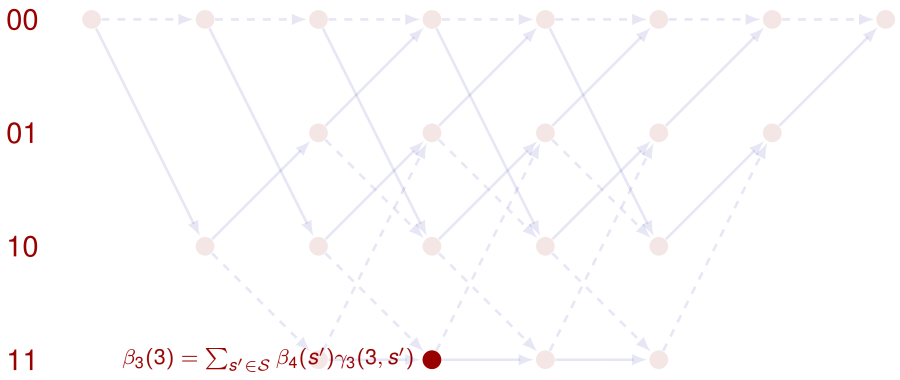
$\mathbf{y} = [\ \mathbf{y}_0,\ \mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2,\ \mathbf{y}_3,\ \mathbf{y}_4,\ \mathbf{y}_5,\ \mathbf{y}_6\ ]$



Récursion "retour" : calcul des $\beta_\ell(s)$

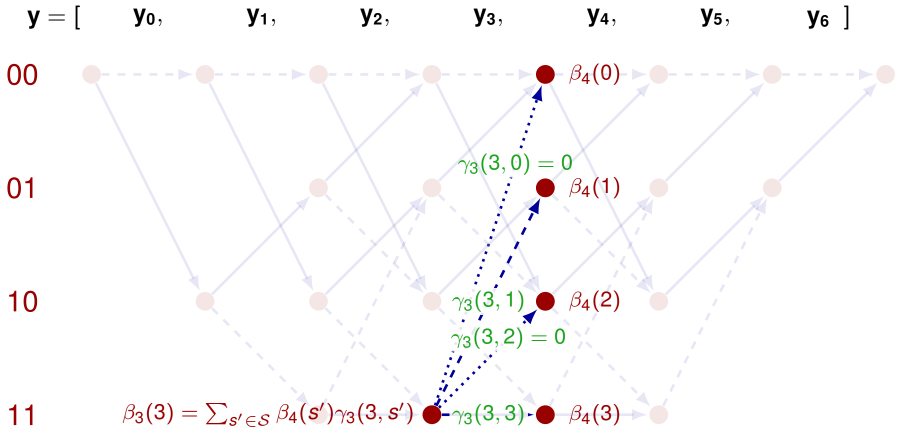
$$\beta_\ell(s) = \sum_{s' \in \mathcal{S}} \beta_{\ell+1}(s')\gamma_\ell(s, s')$$

$\mathbf{y} = [\ \mathbf{y}_0,\ \mathbf{y}_1,\ \mathbf{y}_2,\ \mathbf{y}_3,\ \mathbf{y}_4,\ \mathbf{y}_5,\ \mathbf{y}_6\ ]$



Récursion "retour" : calcul des $\beta_\ell(s)$

$$\beta_\ell(s) = \sum_{s' \in \mathcal{S}} \beta_{\ell+1}(s')\gamma_\ell(s,s')$$



Dernier QCM

Comment avez-vous trouvé ce cours ?

- A Très difficile
- B Difficile
- C Moyen
- D Simple
- E Très simple

#QDLE#S#ABCDE#30#

Plan

1. Previously on TS226 . . .
2. Décodage MAP-Bit des Codes Convolutifs
3. Turbo-Codes