

Travaux Pratiques Traitement Numérique du Signal
FILIERE TELECOMMUNICATIONS, 1^E ANNEE - 2022

Table des matières

TRANSFORMEE DE FOURIER DES SIGNAUX DISCRETS.....	5
1.1 OBJECTIFS	5
1.2 RAPPELS SUR LA TRANSFORMEE DE FOURIER ET LE THEOREME DE SHANNON	5
1.2.1 L'échantillonnage	5
1.2.2 Transformée de Fourier Continue (TFC).....	5
1.2.3 Transformée de Fourier Discrète (TFD, ou DFT en anglais).....	6
1.2.4 Théorème de l'échantillonnage de Shannon.....	7
1.3 MISE EN PRATIQUE	9
1.3.1 Fréquence analogique et fréquence discrète.....	9
1.3.2 TFD et fenêtrage	9
1.3.3 Comparaison des types de fenêtres	10
1.3.4 Signal de parole	11
1.3.5 Spectrogramme	11
PARTIE N°2 SYSTEMES A TEMPS DISCRET	13
2.1 OBJECTIFS	13
2.2 RAPPELS SUR LES SYSTEMES A TEMPS DISCRET	13
2.2.1 Introduction.....	13
2.2.2 Définition d'un système à temps discret	14
2.2.3 Système linéaire invariant.....	14
2.2.4 Réponse impulsionnelle et produit de convolution.....	14
2.2.5 Caractéristiques des signaux à temps discret	15
2.2.6 Association de systèmes	15
2.2.7 Transformée en Z	16
2.3 MISE EN PRATIQUE : ETUDE DE FILTRES LINEAIRES.....	17
2.3.1 Schéma bloc	17
2.3.2 Transformée en Z : $H(z)$	17
2.3.3 Réponse impulsionnelle.....	17
2.3.4 Pôles p_i et zéros z_i , stabilité.....	18
2.3.5 Association de systèmes	19
Exercices théoriques supplémentaires.....	19
PARTIE N°3 EFFETS FREQUENTIELS DU FILTRAGE	21
3.1 OBJECTIFS	21
3.2 RAPPELS	21
3.2.1 Réponse fréquentielle d'un filtre linéaire discret	21
3.2.2 Lien entre réponse fréquentielle et diagramme des pôles et zéros	21
3.2.3 Filtrage linéaire	22
3.3 EXERCICES	23
3.3.1 Effet fréquentiel du filtrage	23
3.3.2 Signal de parole bruité.....	23
PARTIE N°4 ANNEXES.....	25
4.1 NOTION DE BRUIT BLANC GAUSSIEN	25
4.2 DEBRUITAGE D'UN SIGNAL DE PAROLE.....	27
4.2.1 Caractérisation des voyelles et notions de formants	27
4.2.2 La fréquence fondamentale	28
4.2.3 Bilan.....	30
4.2.4 Sur le rehaussement monovoie par atténuation spectrale à court terme	30
4.3 FORMULAIRE	32

INTRODUCTION

Au travers de ces séances de Travaux Pratiques, nous traitons des bases du traitement numérique du signal et illustrons le cours de traitement numérique du signal.

Les notions suivantes seront abordées :

- ✓ Transformée de Fourier des signaux discrets
- ✓ Caractéristiques des systèmes à temps discret : linéarité et non linéarité, invariance du système, causalité et stabilité, fonction de transfert

En outre ces TP reposent sur le logiciel Matlab.

Un rappel de cours ou une introduction aux notions étudiées est fait pour chaque thème.

TRANSFORMEE DE FOURIER DES SIGNAUX DISCRETS

1.1 Objectifs

Ce TP a pour objectif l'application de la transformée de Fourier à des signaux discrets. Sont en particulier abordées les notions suivantes:

- Théorème de l'échantillonnage de Shannon
- Lien entre Transformée de Fourier Continue (TFC) d'un signal discret et Transformée de Fourier Discrète (TFD)
- Effet fréquentiel du fenêtrage (apodisation) d'un signal

1.2 Rappels sur la Transformée de Fourier et le théorème de Shannon

1.2.1 L'échantillonnage

Dans le cas du signal discret $x[n]$ obtenu par échantillonnage du signal $x(t)$ à période T_e , on dispose d'une suite d'échantillons, représenté par le signal discret:

$$x = \{x[n]\}_{n=-\infty, \dots, +\infty} = \{x(nT_e)\}_{n=-\infty, \dots, +\infty}$$

Dans la suite, étant donné que l'on ne manipulera que le signal discret, on pourra noter $x(n)$ l'échantillon obtenu à l'instant $t=nT_e$, dans la mesure où cela ne prête pas à ambiguïté : les valeurs du signal continu d'origine $x(t)=x(nT_e)$ seront toujours désignées en faisant figurer t ou T_e , alors que les valeurs du signal échantillonné $x(n)$ se contenteront d'un indice entier n , m , etc...

1.2.2 Transformée de Fourier Continue (TFC)

Dans le cadre des signaux numérisés, l'opération d'échantillonnage transforme l'expression de la transformée de Fourier d'un signal continu en une expression qui dépend d'une somme discrète au lieu d'une intégrale continue. La variable fréquentielle f reste continue. Nous obtenons la Transformée de Fourier Continue d'un signal discret:

$$X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \exp(-j2\pi f n T_e) \quad (\text{TFC})$$

$$x[n] = \frac{1}{f_e} \int_{f_e/2}^{f_e/2} X_e(f) \exp(j2\pi f n T_e) df \quad (\text{TFCI})$$

Suite à l'étude théorique de cette expression, on montre que la forme $X_e(f)$ est une fonction périodique de f , de période $f_e = \frac{1}{T_e}$.

En outre, elle est proportionnelle au spectre du signal continu (condition de Shannon), et peut s'exprimer en fréquence réduite par :

$$X_e(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[n] \exp(-j2\pi f_r n)$$

avec $f_r = \frac{f}{f_e}$ et $f_r \in [-0.5, 0.5]$ ou $[0, 1]$

Le calcul sur ordinateur d'une telle quantité est bien évidemment exclu car

- la série comporte un nombre infini de termes,
- la fréquence varie continûment.

Concernant le premier point, on se restreint en pratique à un nombre d'échantillons fini M , qui seul peut être stocké dans la machine. Tous les autres échantillons sont supposés nuls : on considère un signal à support temporel borné.

$$X_e(f) = \sum_{n=0}^{M-1} x[n] \exp(-j2\pi f n T_e)$$

Concernant le second point, on va opérer une discrétisation dans le domaine fréquentiel, qui conduit à la Transformée de Fourier Discrète.

1.2.3 Transformée de Fourier Discrète (TFD, ou DFT en anglais)

Le principe de la TFD est le même que la TFC mais on introduit un pas d'échantillonnage uniforme en fréquence pour discrétiser l'axe en fréquence. Le nombre de points d'échantillonnage du spectre est noté N . Le spectre est donc calculé sur le domaine fréquentiel $[0, f_e]$ avec un pas de quantification de $\frac{f_e}{N}$. On note k l'indice entier permettant de déterminer la fréquence:

$$f = \frac{k f_e}{N} \quad \text{où} \quad \begin{cases} f_e \text{ est la fréquence d'échantillonnage} \\ N \text{ est le nombre de points pour le calcul de la TFD} \end{cases}$$

La Transformée de Fourier Discrète s'exprime ainsi de façon indépendante de la fréquence d'échantillonnage:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{M-1} x[n] \exp(-j2\pi \frac{kn}{N}) \quad (\text{TFD})$$

Le spectre étant périodique, on prendra $k=[0..N-1]$.

De la même façon que pour le signal temporel, on pourra noter $X(k)$ la transformée discrète, alors que $X(f)$ correspond à la transformée continue. On a $X^{TFD}(k) = X^{TFC}(f)$ pour $f = kf_e/N$. Les noms de variables utilisés permettent de rendre non ambiguë la notation.

Si l'on attribue pour l'échantillonnage en fréquence autant de points que pour le signal temporel ($N=M$), la TFD est réversible. On a dans ce cas:

$$X[k] = \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \exp(-j2\pi \frac{kn}{N}) \quad (\text{TFD réversible})$$

$$x[n] = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} X[k] \exp(j2\pi \frac{kn}{N}) \quad (\text{TFDI})$$

L'avantage de la TFD est que, de part sa structure, elle a permis de développer des algorithmes rapides appelés Transformée de Fourier rapide (TFR) ou Fast Fourier Transform (FFT). La différence entre les deux est uniquement algorithmique; la TFD et la TFR calculent la même chose. Sous *Matlab*, la fonction utilisée pour calculer la TFD s'appelle ainsi FFT.

Les algorithmes rapides utilisent les propriétés de $\exp(j2\pi kn/N)$ afin d'éviter la redondance des calculs. Par rapport à une programmation directe de la TFD, le temps de calcul est divisé par $N/\log_2(N)$: la méthode directe prend $O(N^2)$, la méthode rapide $O(N \cdot \log_2(N))$

Application : avec votre chargé de TP, détailler le rôle des fonctions *fft* et *fftshift* sous Matlab.

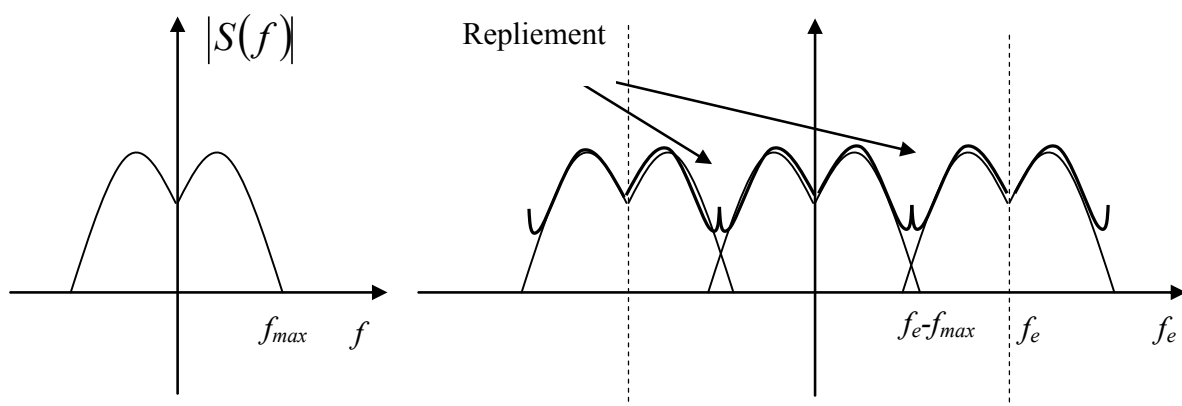
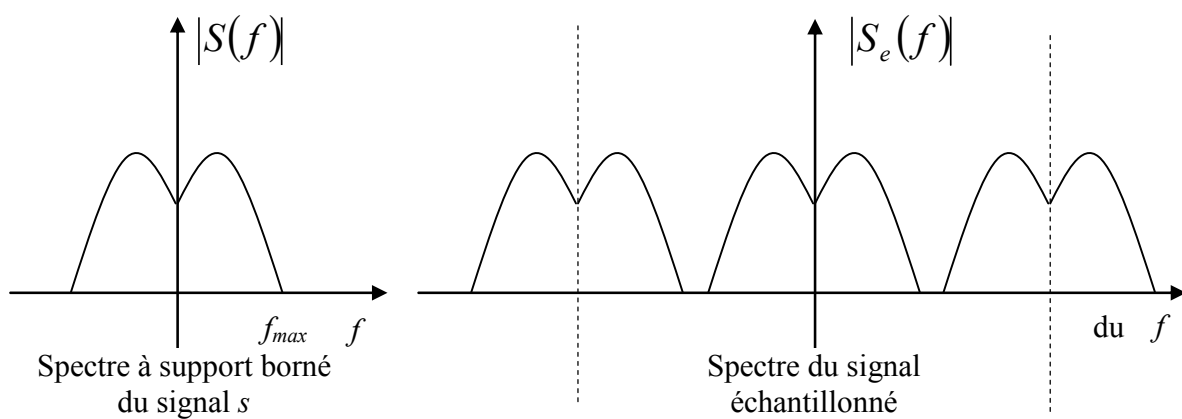
1.2.4 Théorème de l'échantillonnage de Shannon

De nombreux paramètres ont une influence sur l'échantillonnage, notamment le pas de quantification et le temps de réponse du système numérique tant lors de l'acquisition que de la restitution. Cela dit, en augmentant la précision du CAN et en augmentant la rapidité des calculateurs, on peut pallier ces difficultés. Le choix de la fréquence d'échantillonnage joue aussi un rôle. Plus la fréquence d'échantillonnage est grande, plus on dispose d'échantillons pour décrire le signal. En contrepartie, le traitement de ces données est plus lourd. Un compromis est à trouver.

Soit un signal s à spectre $S(f)$ borné, i.e. $\forall f > f_{\max}, |S(f)|=0$; cette limitation du spectre est soit propre au signal traité, soit due à un pré-filtrage passe bas. Le théorème d'échantillonnage de Shannon fixe le choix de la fréquence d'échantillonnage f_e afin d'éviter les distorsions du spectre échantillonné, les phénomènes dits de repliement.

$$f_e \geq 2f_{\max}$$

$\frac{f_e}{2}$ est appelée **fréquence de Shannon**, ou encore **fréquence de Nyquist**, ou **de repliement**.



1.3 Mise en pratique

1.3.1 Fréquence analogique et fréquence discrète

On suppose qu'un signal obtenu comme la somme de plusieurs sinusoïdes a été échantillonné à 12 kHz. On traite les 500 premiers échantillons, en effectuant une transformée de Fourier discrète du bloc $s_e(n)$ sur $N=1024$ points. La transformée de Fourier Discrète $S_e(k)$ contient des pics aux indices $k = 40, 100, 924$ et 984 .

1. Charger le signal 'sommessinusoïdes.wav' sous Matlab (audioread). Vérifier que la fréquence d'échantillonnage est bien 12kHz. Quelle est la durée du son en secondes ?

Calculer la TFD comme indiqué, et afficher son module. Faire un schéma sur papier du résultat obtenu, en faisant figurer l'échelle fréquentielle en fréquence discrète k .

2. Quelle est la relation qui existe entre la fréquence f (en Hz) et la fréquence discrète k de la TFD ?

Compléter le schéma en exprimant l'échelle fréquentielle également en fréquence réelle f (en Hz), et en fréquence réduite $f=f/f_e$.

3. Combien y a-t-il de sinusoïdes ? Quelles sont leurs fréquences réelles ? Commentaires ?

Modifier l'affichage sous Matlab pour tracer la TFD centrée autour de la fréquence 0. (fftshift, voir fiche technique). Modifier l'échelle fréquentielle pour faire figurer les fréquences en Hz.

1.3.2 TFD et fenêtrage

Dans de nombreux cas en traitement du signal (notamment dans le cas du traitement de la parole, le débruitage, etc.), on doit se placer dans des conditions de quasi stationnarité pour effectuer une analyse du signal sur des « trames » d'une durée donnée.

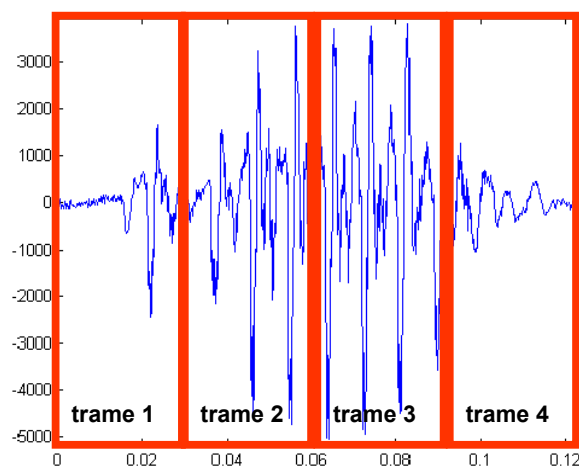


Figure n°3 : Traitement par trame

Pour cela, on effectue un fenêtrage du signal. Le signal fenêtré $x_w(n)$ défini comme le produit du signal et de la fenêtre de pondération :

$$x_w(n) = x(n) \cdot w(n)$$

où $x(n)$ est le signal à analyser et $w(n)$ une fenêtre de pondération (ou fenêtre temporelle) de valeur nulle en dehors de l'intervalle d'observation $[0..M-1]$.

1. Indiquer quelle relation théorique existe entre les Transformées de Fourier Continues $X(f)$, $W(f)$ et $X_w(f)$ des signaux discrets à support non bornés $x(n)$, $w(n)$ et $x_w(n)$. Déduisez-en la relation entre les Transformées de Fourier Discrètes calculées sur les M échantillons $[0..M-1]$ où la fenêtre est non nulle.
2. Définissez un signal sinusoïdal de $M=256$ échantillons, et de période 32 échantillons (donc de fréquence réduite $f^* = 1/32 = 8/256$). On supposera la fréquence d'échantillonnage unitaire $f_e=1$, afin de travailler directement en fréquence réduite.

Quelle serait la TFC théorique d'un tel signal s'il n'était pas limité (fenêtré) à l'intervalle $[0..M-1]$? Faire une figure.

3. Calculez et affichez la TFD du signal fenêtré, calculé sur $N=M=256$ points, puis N points avec $N \gg M$ (on pourra prendre $N \geq 2048$). Faites attention à l'échelle des fréquences.

Rappeler quelle est la TFC d'une fenêtre carrée de largeur M .

Expliquer l'allure du spectre dans chaque cas, à l'aide d'un graphique.

4. Modifier la fréquence de la sinusoïde à $f^* = 8.5/256$. Observez le signal fenêtré et sa TFD pour la fenêtre rectangulaire à $N=M=256$ points. Que peut-on constater ? Expliquer le phénomène à l'aide d'un graphique.

Rmq: On pourra afficher seulement une partie du spectre, afin de pouvoir l'observer de façon précise à l'échantillon près.

1.3.3 Comparaison des types de fenêtres

On va ici comparer les propriétés de plusieurs fenêtres:

- la fenêtre rectangulaire
- la fenêtre triangulaire (dite de *Fejer*, ou de *Bartlett*)
- la fenêtre de Hamming
- la fenêtre de Hanning

5. Ecrire un script *Matlab* qui permet de visualiser les différentes fenêtres (fonctions *rectwin*, *triang*, *hamming*, *hanning*). On prendra une taille de $M=16$ échantillons.

Indiquer sur le compte rendu quelles sont les fonctions associées à chacune de ces fenêtres (On pourra utiliser l'aide étendu Matlab: "doc triang"...).

6. Afficher en vis à vis leur spectres d'amplitude (en dB), calculés sur N points avec $N=1024 \gg M$. On utilisera *ylim* afin d'afficher tous les spectres avec la même échelle verticale.

Quel lien peut-on faire entre les TF d'une fenêtre rectangulaire de taille $2M-1$ et une fenêtre triangulaire de taille M ?

1.3.4 Signal de parole

Dans cette partie, nous nous intéressons au cas d'un signal de parole échantillonné à $f_e=8000\text{Hz}$.

7. Charger le signal 'parole1.wav' sous Matlab. Récupérer le module et l'argument de la transformation de Fourier rapide du signal. Que représentent ces grandeurs ?
8. En utilisant la commande *rand* de Matlab, modifier la phase de la transformée de Fourier en la remplaçant par une phase aléatoire.
9. En utilisant la commande *ifft*, reconstruire les signaux de parole avec phase initiale puis celle modifiée. Les écouter en utilisant *soundsc*.

1.3.5 Spectrogramme

Comme on l'a vu, la non stationnarité d'un signal impose de faire une analyse fréquentielle par trame. Une telle analyse produit une TFD par trame, ce qui ne peut être facilement visualisé sous la forme d'un simple graphe. Une solution consiste à associer un code couleur aux amplitudes du module de la TFD, et à afficher l'ensemble des TFD sous la forme d'une image, dans laquelle chaque colonne correspond au spectre d'une fenêtre du signal.

10. Charger le signal "sinusoides.wav", et afficher son spectrogramme

```
spectrogram(x,N,fe);
```

Pourquoi l'affichage s'arrête-t-il à la fréquence $f_e/2$?

Afficher la TFD du signal complet. Quelle information peut-on observer sur le spectrogramme qui n'est pas accessible dans la TFD simple ?

11. Modifier la largeur de fenêtre et le type de fenêtre utilisé dans le spectrogramme.

```
spectrogram(x,N,fe,triang(N));
```

Que constate-t-on pour une fenêtre de taille réduite ($N=64$), ou pour une fenêtre de taille élevée ($N=1024$) ? Quelle différence observe-t-on entre une fenêtre rectangulaire et une fenêtre de hanning ? Expliquer.

Proposer une méthode pour estimer le plus précisément possible les fréquences des sinusoides. Justifier.

12. Charger le signal de parole 'waziwaza.wav', et indiquer sur le spectrogramme les zones fréquentielles qui caractérisent les /z/. Indiquer approximativement les zones formantiques des voyelles prononcées. (voir annexe "Débruiter un signal de parole").

PARTIE N°2 SYSTEMES A TEMPS DISCRET

2.1 Objectifs

Ce TP a pour objectif la définition et l'étude de systèmes à temps discret, et plus particulièrement les systèmes linéaires temporellement invariants (filtres linéaires). Seront abordées les notions suivantes:

- linéarité, invariance, causalité
- réponse impulsionnelle d'un filtre linéaire
- transformée en Z
- stabilité, étude des pôles et des zéros
- association de systèmes en série ou en parallèle

2.2 Rappels sur les systèmes à temps discret

2.2.1 Introduction

Le signal numérique désigne une suite numérique obtenue après échantillonnage et quantification selon la figure n°4.

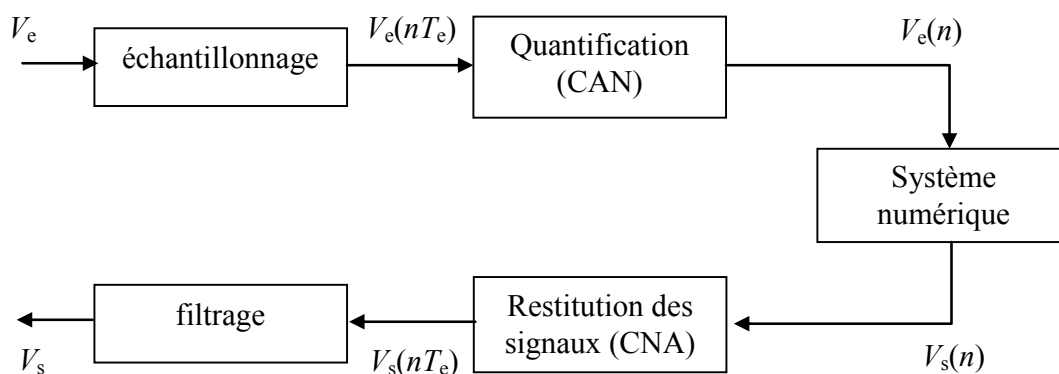


Figure n°4 : évolution du signal à travers une chaîne d'acquisition

où CAN désigne le Convertisseur Analogique Numérique, CNA, le Convertisseur Numérique Analogique et T_e , la période d'échantillonnage.

Différents types de représentation du signal numérique peuvent être envisagés. La représentation *fonctionnelle*, *tabulée*, *séquentielle* et *graphique* (diagramme « bâton »). Parmi les exemples élémentaires de signaux numériques, on retiendra l'impulsion unité, ou suite de Dirac, également appelée « suite unité », ainsi que l'échelon unité et la rampe unité.

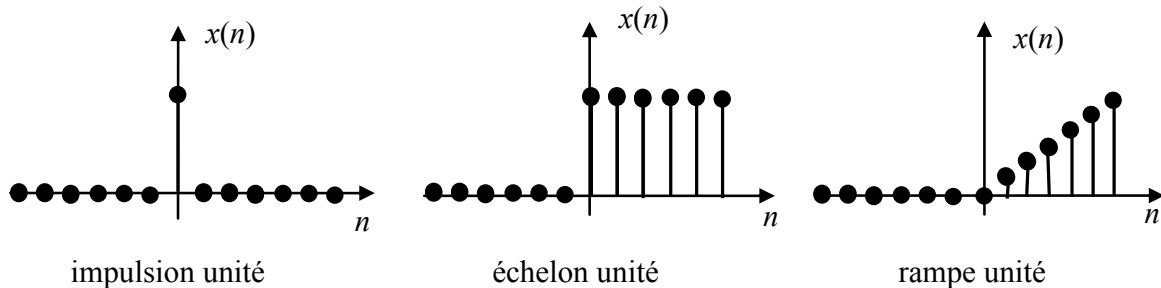


Figure n°5 : signaux de référence

2.2.2 Définition d'un système à temps discret

Les systèmes à temps discret sont des systèmes, ou des opérateurs, qui transforment un signal d'entrée discret $x(n)$ en un signal de sortie discret $y(n)$:

$$x(n) \Rightarrow y(n) = T[x(n)]$$

A titre d'exemples : $y(n) = x(n)$, $y(n) = x(n-1)$, $y(n) = x(n+1)$ traduisent respectivement l'identité, le retard élémentaire et l'avance élémentaire.

2.2.3 Système linéaire invariant

Un système peut avoir un certain nombre de caractéristiques. On s'intéresse en général à **la linéarité, l'invariance, la causalité et la stabilité**.

Un système est dit **linéaire** si $\forall x_1, x_2$ et $\forall a_1, a_2$, on a :

$$T[a_1 x_1(n) + a_2 x_2(n)] = a_1 T[x_1(n)] + a_2 T[x_2(n)]$$

Un système est dit **invariant** si la réponse d'une entrée retardée de l échantillons est une sortie retardée de l échantillons, c'est-à-dire :

$$x(n) \Rightarrow y(n) = T[x(n)] \text{ alors } T[x(n-l)] = y(n-l),$$

et ce, quel que soit le signal d'entrée $x(n)$ et pour tout décalage temporel l .

Cette propriété d'invariance est importante mais sa vérification n'est pas toujours évidente. Un système linéaire invariant porte habituellement le nom de **filtre linéaire**.

2.2.4 Réponse impulsionnelle et produit de convolution

Si l'entrée d'un système est l'impulsion unité $\delta(n)$, la sortie est appelée la réponse impulsionnelle du système.

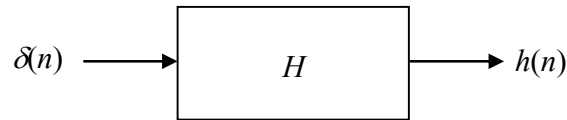


Figure n°6 : réponse impulsionnelle

Un signal numérique quelconque peut s'écrire comme une somme pondérée d'impulsions unités translatées :

$$x(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) \delta(n-k).$$

La sortie d'un système linéaire invariant (SLI) peut donc s'exprimer sous la forme

$$y(n) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} x(k) h(n-k).$$

Cela correspond au produit de convolution entre l'entrée et la réponse impulsionnelle :

$$y(n) = x(n) * h(n)$$

2.2.5 Caractéristiques des signaux à temps discret

Un système linéaire invariant est **causal** si seulement si sa sortie à n'importe quel instant n (i.e. $y(n)$), dépend seulement du présent et du passé (i.e. $x(n)$, $x(n-1)$, ..., $y(n-1)$, $y(n-2)$, etc.). La sortie d'un système causal satisfait donc :

$$y(n) = F[y(n-1), K, x(n), x(n-1), x(n-2), K] \text{ où } F \text{ est une fonction arbitraire.}$$

Sa réponse impulsionnelle satisfait alors

$$h(k) = 0 \text{ pour } k < 0$$

Un système est dit **anticausal** si sa sortie de rang n ne dépend que des entrées de rang supérieur ou égal à n .

Un système linéaire invariant est **stable** si et seulement si sa réponse impulsionnelle satisfait la condition suivante :

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} |h(k)| < \infty$$

Une autre interprétation consiste à dire que si une entrée bornée conduit à une sortie bornée. Il s'agit dans ce cas d'une stabilité au sens large.

La stabilité peut aussi être étudiée à partir de la transformée en z de la réponse impulsionnelle. Si les pôles sont situés à l'intérieur du disque unité dans le plan z , le système causal est stable.

2.2.6 Association de systèmes

Lorsque l'on associe plusieurs systèmes, on peut distinguer deux structures élémentaires : l'association en série et celle en parallèle, représentée respectivement sur les figures 7 et 8 :

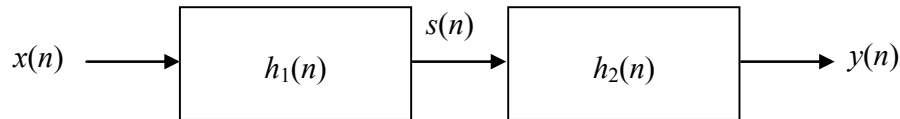


Figure n°7 : association en série

La réponse impulsionnelle du système $h(n)$ définie par $h(n) = h_1(n) * h_2(n)$

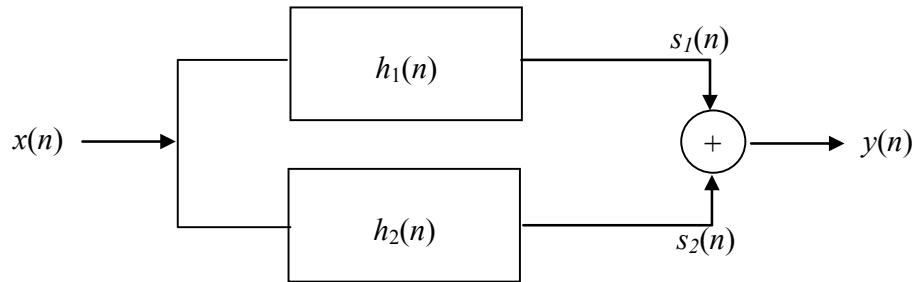


Figure n°8 : association en parallèle

La réponse impulsionnelle du système $h(n)$ définie par $h(n) = h_1(n) + h_2(n)$.

2.2.7 Transformée en Z

La transformée en Z est un outil central pour l'analyse des filtres linéaires et des signaux.

La transformée en Z d'un signal $x(n)$ est définie par:

$$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n)z^{-n}$$

La fonction de transfert en Z d'un filtre linéaire est définie comme la transformée en Z de sa réponse impulsionnelle:

$$H(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h(n)z^{-n}$$

Pour un filtre RII d'équation aux différences générale

$$\sum_{k=0}^{K-1} a(k)y(n-k) = \sum_{l=0}^{L-1} b(l)x(n-l)$$

on peut montrer (en remplaçant x par une impulsion et y par h) que sa fonction de transfert est

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{l=0}^{L-1} b(l)z^{-l}}{\sum_{k=0}^{K-1} a(k)z^{-k}}$$

Pour un filtre RIF, $A(z)=1$, $H(z)$ est donc égal au polynôme $B(z)$.

2.3 Mise en pratique : étude de filtres linéaires

Les filtres linéaires peuvent être manipulés à travers plusieurs représentations différentes, qu'il est important de maîtriser :

- Equation aux différences : coefficients $a(n)$ et $b(n)$
- Schéma numérique
- Transformée en Z : $H(z)$
- Réponse impulsionnelle : $h(n)$
- Pôles et zéros : p_i et z_i

Nous manipulerons ces représentations à la fois à travers des calculs à la main et par la programmation sous Matlab.

Notons T un système discret d'entrée x et de sortie y : $y=T[x]$. Nous allons étudier dans la suite 4 filtres T_1 , T_2 , T_3 et T_4 , régis respectivement par les équations aux différences suivantes:

$$y(n) = x(n) - x(n-1) \quad (1)$$

$$y(n) = 2y(n-1) + x(n) \quad (2)$$

$$y(n) = \frac{1}{3}y(n-1) + \frac{1}{3}x(n) + \frac{1}{3}x(n-1) \quad (3)$$

$$y(n) = \frac{1}{3}y(n-1) + \frac{2}{3}x(n) - \frac{2}{3}x(n-1) \quad (4)$$

2.3.1 Schéma bloc

Pour chacun des filtres, dessinez le schéma numérique correspondant à une implémentation causale du filtre, en faisant apparaître les éléments de gain, retard et addition.

2.3.2 Transformée en Z : $H(z)$

13. Rappelez l'équation liant un signal $x(n)$ à sa transformée en z : $X(z)$.

Rappelez la définition de la fonction de transfert en z $H(z)$ d'un filtre linéaire.

14. Calculez la transformée en Z des équations aux différences relatives aux transformations précédentes.

En déduire les fonctions de transfert en Z $H_1(z)$, $H_2(z)$, $H_3(z)$ et $H_4(z)$.

15. Déterminez à partir de la transformée en Z quels filtres sont RIF (à réponse impulsionnelle finie) et lesquels sont RII (à réponse impulsionnelle infinie).

2.3.3 Réponse impulsionnelle

16. Rappelez la définition de la réponse impulsionnelle. Calculez à la main la réponse impulsionnelle des filtres à partir de l'équation aux différences.

Pour démarrer le calcul de la séquence de sortie d'un système, on considère que l'on a $x(n)=y(n)=0$ pour $n<0$ (sauf le cas particulier où l'on dispose d'informations sur l'initialisation du système).

17. Dédurre des transformées en z $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)}$ de chaque filtre les coefficients $b(n)$ et $a(n)$ associés au numérateur et dénominateur, que l'on utilisera pour définir le filtre sous Matlab.
18. Calculer la réponse impulsionnelle de chaque filtre sous Matlab (voir fonction `freqz`, `impz`). L'entrée x (impulsion) et la sortie y (réponse impulsionnelle) du filtre seront affichées dans la même figure l'une en dessous de l'autre. Précisez également les labels des axes, et le titre de chaque graphique.
- Vérifiez que les résultats obtenus correspondent aux calculs théoriques.
19. A quoi reconnaît-on un filtre RIF au niveau de sa réponse impulsionnelle ? Comparer avec les coefficients $b(n)$.

2.3.4 Pôles p_i et zéros z_i , stabilité

20. Calculez à la main les pôles et les zéros des filtres.
21. Affichez les pôles et les zéros de chaque filtre avec Matlab. (voir fonction `zplane`)
- Calculez les valeurs numériques des pôles et des zéros des filtres avec Matlab.
- Vérifiez que le graphique et les valeurs numériques sont conformes aux calculs théoriques.
22. Donner trois critères différents pour la stabilité d'un filtre linéaire. Parmi les filtres étudiés, lesquels sont stables ? Justifier de plusieurs manières différentes.
- Expliquer pourquoi les filtres RIF sont toujours stables.
23. Construisez un signal d'entrée borné qui soit un bruit blanc ($x=\text{rand}(1,N);$), et filtrez le. Que constatez-vous au niveau de la sortie pour le filtre non-stable ?

2.3.5 Association de systèmes

On considère à présent les associations suivantes :

$$T_{34}=T_3[T_4[.]], T_{43}=T_4[T_3[.]] \text{ et } T_{3+4}=T_3[.] + T_4[.]$$

24. Calculer à la main les fonctions de transfert en Z de $T_3[T_4[.]]$, $T_4[T_3[.]]$ et $T_3[.] + T_4[.]$.
25. Calculer sous Matlab et afficher les réponses impulsionnelles des transformations $T_3[T_4[.]]$ et $T_3[.] + T_4[.]$, par filtrage d'une impulsion.
26. Déterminer à la main la relation existant entre les coefficients b et a associés au filtre équivalent à T_{34} , et les coefficients b_3 , a_3 , b_4 et a_4 associés aux filtres T_3 et T_4 . (Indice, utiliser la transformée en z).
27. Calculer à l'aide de Matlab ces coefficients a et b (Rmq: le produit de deux polynôme est équivalent à la convolution de leurs coefficients. Fonction 'conv'). Vérifier que la réponse impulsionnelle du filtre ainsi obtenu est conforme aux résultats précédents.
28. Faire de même pour T_{3+4} .

Exercices théoriques supplémentaires

1. Faites l'étude des filtres T_6 et T_7 associé aux équations aux différences suivantes (fonction de transfert en Z, pôle, zéros, stabilité) :

$$y(n) = \frac{3}{4}y(n-1) + \frac{5}{8}y(n-2) + x(n) - x(n-1) \quad (6)$$

$$y(n) = 2y(n-1) + x(n) - 4x(n-2) \quad (7)$$

Pour le filtre T_7 , calculer la sortie associée à un bruit blanc avant et après simplification.

2. On désire implanter un filtre T_8 qui est RIF, mais non causal:

$$y(n) = \frac{1}{4}x(n+1) + \frac{1}{2}x(n) + \frac{1}{4}x(n-1) \quad (8)$$

Calculez sa transformée en Z, et exprimez ce filtre comme l'association d'un délai négatif et d'un filtre RIF causal.

Implanter l'avance sous *Matlab*. Implanter l'ensemble du filtre, et l'appliquer à une succession de pics espacés d'au moins 2 échantillons. Vérifier visuellement que le retard est bien nul (sortie alignée avec l'entrée). Est-ce possible avec un filtre causal ?

3. Considérer les systèmes suivants, qui ne sont pas linéaires invariants. Indiquer pour chacun s'il est non linéaire ou non invariant, en justifiant.

$$y(n) = (-1)^n x(n) \quad (9)$$

$$y(n) = x(n)^2 \quad (10)$$

Rmq: T_9 et T_{10} sont des opérations point à point.

$$y(n) = x(n).x(n-1) \quad (11)$$

$$y(n) = x(n) - x(0) \quad (12)$$

$$y(n) = x(2n) \quad (13)$$

Rmq: T_{13} est une opération de sous-échantillonnage, qui permet de diminuer le nombre d'échantillons à traiter, mais n'est pas un filtrage au sens où nous l'entendons ici.

4. Pour chacun des filtres T_1 à T_4 , calculez à la main la réponse impulsionnelle à partir de la fonction de transfert en Z . Pour les filtres RII, on rappellera le développement en série entières de $\frac{1}{1 - p_0 z^{-1}}$, ainsi que son domaine de validité.

5. Comment effectuer le chemin inverse, c'est-à-dire retrouver la transformée en Z à partir de la réponse impulsionnelle ?

PARTIE N°3 EFFETS FREQUENTIELS DU FILTRAGE

3.1 Objectifs

Ce TP a pour objectif d'étudier la notion de filtre linéaire d'un point de vue fréquentiel. Sont en particulier abordés les notions suivantes:

- Lien entre diagramme des pôles et zéros et réponse fréquentielle d'un filtre
- Caractérisation d'un filtre discret passe-haut, passe-bas
- Débruitage par élimination de fréquences

Est également abordée la notion de bruit aléatoire.

3.2 Rappels

3.2.1 Réponse fréquentielle d'un filtre linéaire discret

La réponse fréquentielle d'un filtre de fonction de transfert en Z $H(z)$ est la TFC de la réponse impulsionnelle $h[n]$ considérée à période d'échantillonnage T_e :

$$H(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h[n] \exp(-j2\pi f n T_e)$$

Cette réponse $H(f)$ est périodique de période fréquentielle f_e (à cause de l'échantillonnage à fréquence f_e), et correspond exactement à la valeur de la fonction de transfert $H(z)$ restreinte au sur le cercle unité:

$$H(f) = H(z) \quad \text{pour } z = \exp\left(j2\pi \frac{f}{f_e}\right)$$

3.2.2 Lien entre réponse fréquentielle et diagramme des pôles et zéros

Pour un filtre rationnel général (RIF ou RII) d'équation aux différences

$$\sum_{k=0}^{K-1} a(k)y(n-k) = \sum_{l=0}^{L-1} b(l)x(n-l)$$

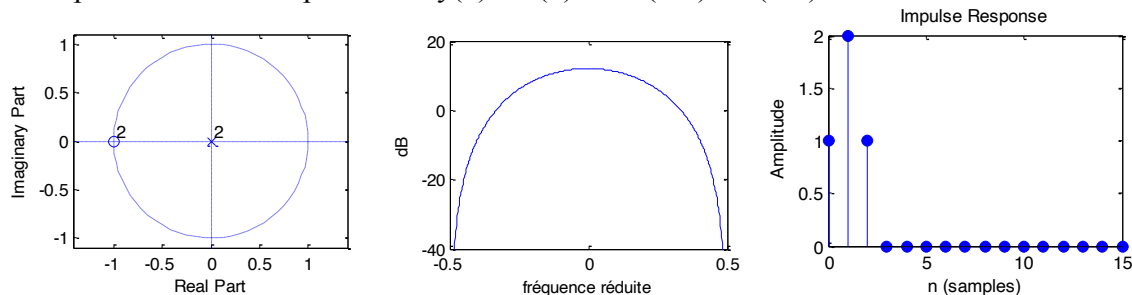
on peut montrer (en remplaçant x par une impulsion et y par h) que sa fonction de transfert est

$$H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{l=0}^{L-1} b(l)z^{-l}}{\sum_{k=0}^{K-1} a(k)z^{-k}}$$

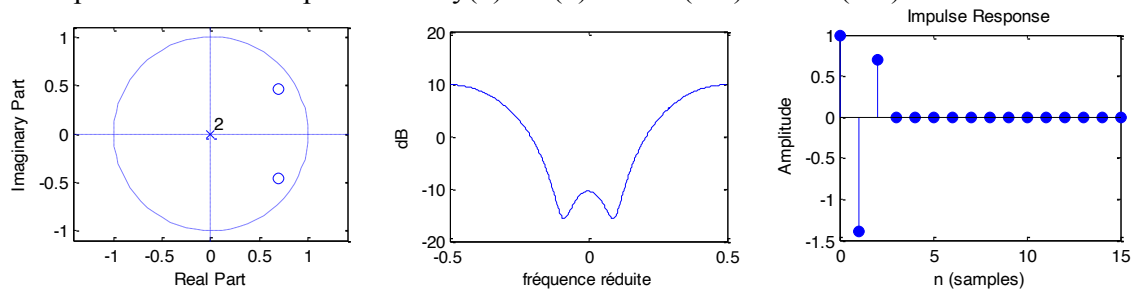
Pour un filtre RIF, $A(z)=1$, $H(z)$ est donc égal au polynôme $B(z)$.

Cette écriture permet de mettre en évidence la forme de $H(z)$ en fonction des pôles et des zéros du filtre: $|H(z)|$ est faible à proximité des zéros (racines de $B(z)$), et $|H(z)|$ est élevé à proximité des pôles (racines de $A(z)$). En rapprochant ce fait du lien entre $H(f)$ et $H(z)$, il est possible d'expliquer la forme générale de la réponse impulsionnelle en fonction de la position des pôles et des zéros.

Exemple d'un filtre RIF passe bas: $y(n) = x(n) + 2x(n-1) + x(n-2)$:

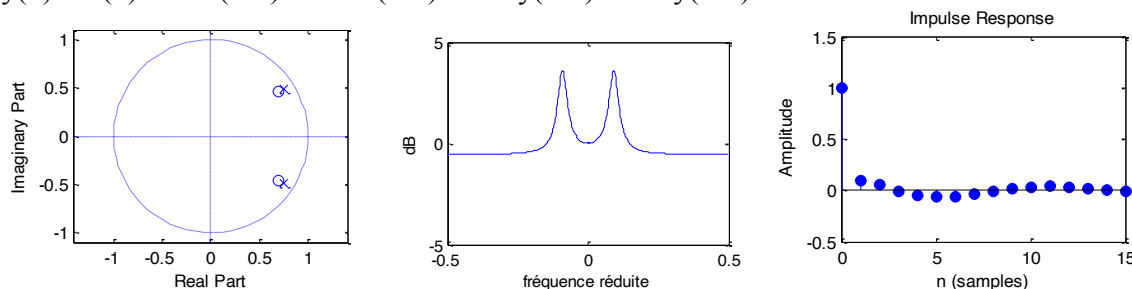


Exemple d'un filtre RIF passe-haut: $y(n) = x(n) - 1.4x(n-1) + 0.7x(n-2)$:



Exemple d'un filtre RII peigne (sélection de fréquence):

$y(n) = x(n) - 1.4x(n-1) + 0.7x(n-2) + 1.5y(n-1) - 0.8y(n-2)$:



3.2.3 Filtrage linéaire

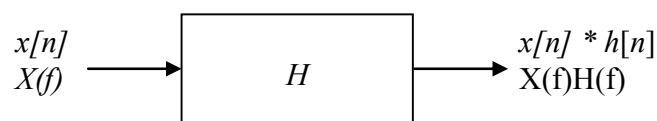


Figure n°1 : Réponse d'un filtre en fréquence

3.3 Exercices

Dans la suite, on va manipuler les filtres T_3 et T_4 du TP2. Récupérez le code permettant de définir les coefficients de ces deux filtres.

3.3.1 Effet fréquentiel du filtrage

1. Créer un signal de $M=256$ échantillons correspondant à la superposition de trois sinusoïdes de fréquences différentes (une basse fréquence, une moyenne fréquence, une haute-fréquences):

$$x(n) = \cos(2\pi \frac{4}{256} n) + \cos(2\pi \frac{32}{256} n) + \cos(2\pi \frac{124}{256} n)$$

2. Appliquer le filtre T_3 au signal x suivant. (Effectuer le filtrage dans le domaine temporel, c'est-à-dire en utilisant la fonction *filter*).

Visualiser le signal d'origine x , et le signal filtré y , ainsi que leurs TFD respectives $X(k)$ et $Y(k)$ (on prendra une TFD à $N=M=256$ points).

S'agit-il d'un filtre qui conserve les basses-fréquences (passe-bas) ou les hautes-fréquences (passe-haut) ?

Comment cela se traduit-il dans le domaine temporel ?

3. Afficher la réponse fréquentielle du filtre (On fera attention à calculer la réponse impulsionnelle sur un nombre suffisant d'échantillons ($N \geq 256$)).

```
[H,W]=freqz(b,a,N,'whole');
plot(W,abs(H));
```

Montrez graphiquement que la relation suivante est vérifiée sur l'exemple précédent de la somme des trois sinusoïdes.

$$Y(f) = X(f) H(f)$$

4. Mêmes questions avec T_4 .

3.3.2 Signal de parole bruité

Le rapport signal sur bruit (Signal to Noise Ratio, SNR) d'un signal bruité $x[n]=s[n]+e[n]$ est défini comme le rapport entre la puissance du signal non bruité $s[n]$ et la puissance du bruit $e[n]$:

$$RSB(x) = \frac{P_s}{P_e} = \frac{\sum_n s[n]^2}{\sum_n e[n]^2}$$

$$RSB_{dB}(x) = 10 \log_{10}(RSB(x)) = P_s^{dB} - P_e^{dB}$$

Dans cette partie, nous nous intéressons au cas d'un signal de parole échantillonné à $f_e=8000\text{Hz}$. Ce signal est bruité par un signal sinusoïdal additif de fréquence $f_b=0.2 \times f_e$.

5. Charger le signal 'parole1.wav' noté $s[n]$ et rajouter le bruit. L'écouter en utilisant *soundsc*.
6. Calculer la puissance de $s[n]$ et ajuster le bruit pour obtenir un RSB_{dB} de 15dB. Visualiser le spectrogramme en utilisant *spectrogram*.

3.3.2.1 Débruitage par transformée de Fourier

7. Dans le domaine spectral, déterminer l'indice des fréquences du bruit.
8. Annuler le module de la transformée de Fourier du signal pour ces fréquences. Reconstruire le signal filtré par transformée inverse et l'écouter en utilisant *soundsc*.

3.3.2.2 Débruitage par filtrage fréquentiel

Nous considérons à présent le filtre suivant :

$$H_1(z) = 1 - 2r \cos\left(2\pi \frac{f_0}{f_s}\right) z^{-1} + r^2 z^{-2} \text{ pour } 0 \leq f_0 \leq \frac{f_s}{2}, 0.9 \leq r \leq 1$$

9. De quel type est ce filtre ? Faire varier la valeur de r et visualiser la transformée de Fourier des différentes réponses impulsionnelles.
10. Filtrer le signal de parole bruité en utilisant le filtre H_1 en fixant r à 1, le reconstituer puis écouter le résultat. Comparer les spectrogrammes des signaux filtrés en utilisant les deux méthodes.

PARTIE N°4 ANNEXES

4.1 Notion de bruit blanc gaussien

Une séquence Gaussienne de Bruit Blanc Gaussien Centré a trois propriétés caractéristiques

Blanc

La notion de blancheur implique que tous ses échantillons sont décorrélés, i.e.

$$R_{BB}(t_i, t_j) = \sigma^2 \delta_{ii, jj} \quad (1)$$

où $\delta_{ii, jj}$, le symbole de Kronecker, est tel que $\delta_{ii, jj} = 0$ si $t_i \neq t_j$ et $\delta_{ii, jj} = 1$ si $t_i = t_j$. De manière général, un processus blanc est stationnaire. On a donc $R_{BB}(l) = \sigma^2 \delta(l)$.

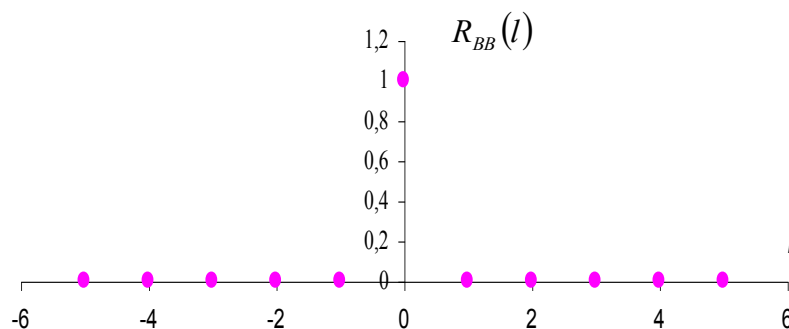


Figure n° 9 : fonction d'autocorrélation du bruit blanc

Centré

Sa moyenne est nulle

Gaussien

Un processus aléatoire est un processus gaussien si pour tout ensemble d'instants $\{t_i\}$, le vecteur ligne aléatoire correspondant $X = [X_1, \dots, X_n]$, a une densité de probabilité conjointe multidimensionnelle gaussienne - $X_i = X(t_i)$ -.

Chaque X_i possède une densité de probabilité marginale.

$$p_{x_i}(x_i) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_{x_i}} \exp \left\{ -\frac{[x_i - m_{x_i}]^2}{2\sigma_{x_i}^2} \right\} ; \quad (2)$$

si le processus est réel et $N=1$ (cas mono-dimensionnel), sa densité de probabilité est définie par

$$p(x;t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_x(t)} \exp \left\{ -\frac{[x - m_x(t)]^2}{2\sigma_x^2(t)} \right\} ; \quad (3)$$

si le processus est complexe et $N=1$, sa densité de probabilité est définie par

$$p(x;t) = \frac{1}{\pi\sigma_x^2(t)} \exp \left\{ -\frac{[x - m_x(t)]^2}{\sigma_x^2(t)} \right\} ; \quad (4)$$

si le processus est réel et de dimension N , sa densité de probabilité est définie par

$$p(x;t) = \frac{1}{(\sqrt{2\pi})^N |C_{xx}|^{1/2}} \exp \left\{ -\frac{1}{2} [x - m_x(t)] C_{xx}^{-1} [x - m_x(t)]^T \right\} ; \quad (5)$$

si le processus est complexe et de dimension N , sa densité de probabilité est définie par

$$p(x;t) = \frac{1}{\pi^N |C_{xx}|} \exp \left\{ [x - m_x(t)] C_{xx}^{-1} [x - m_x(t)]^{*T} \right\} ; \quad (6)$$

C_{xx} est la matrice d'autocovariance.

4.2 Débruitage d'un signal de parole

Le rehaussement du signal de parole consiste en l'amélioration d'un ou de plusieurs aspects perceptifs du signal vocal quand ce dernier est perturbé par un bruit dû à l'environnement et/ou à la transmission. Un traitement de débruitage est ainsi souhaitable dans une voiture, lors de conversations main libre, dégradées par le bruit du moteur et les conditions du trajet (pluie, fenêtre ouverte, etc.). La situation est comparable dans le domaine de l'aéronautique, lors de communications entre le pilote et la tour de contrôle. C'est aussi le cas dans les situations suivantes :

- les postes de téléphone situés dans des environnements où les bruits des conversations et des équipements informatiques perturbent les communications ;
- les vidéophones et systèmes de téléconférence ;
- la restauration d'enregistrements anciens ;
- les systèmes de reconnaissance utilisés dans des environnements bruités.

Nous supposons ici qu'un seul microphone est utilisé pour la prise de son et nous cherchons à réduire le bruit sans introduire de distorsion trop importante sur le signal utile.

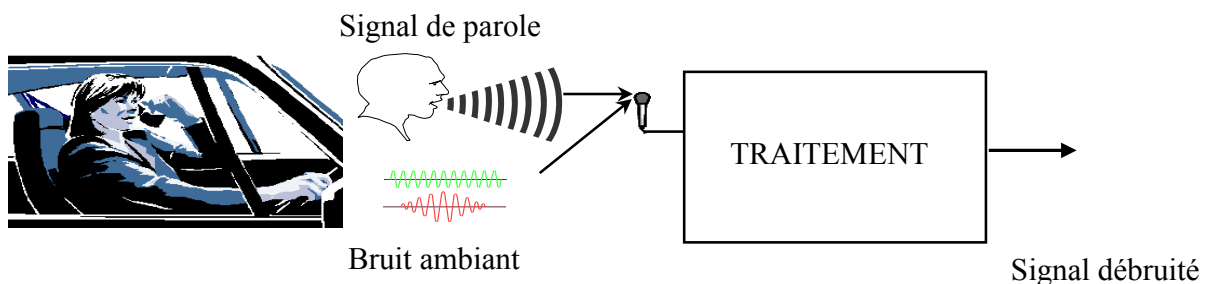


Figure n°1 : débruitage du signal de parole

Nous nous placerons dans le cas simple où le bruit additif est un bruit blanc.

Ce document s'organise de la manière suivante : dans un premier temps, quelques notions sur la parole sont données telles que les notions de voisement/non voisement, fréquence fondamentale, etc. Puis, une présentation théorique de l'approche de rehaussement est réalisée.

4.2.1 Caractérisation des voyelles et notions de formants

Par essence, le signal de parole est *non stationnaire* ; cependant, on peut faire une hypothèse de quasi-stationnarité, notamment pour des voyelles, sur une durée de 40 ms. En fenêtrant le signal de parole en trames de 10 à 40 ms, on peut faire apparaître un caractère pseudopériodique ou/et aléatoire. Plusieurs cas peuvent être envisagés :

- les trames **voisées** qui présentent un caractère périodique ou pseudo périodique ;
- les trames non voisées ou aléatoires ;
- les « bruits voisés » qui sont une combinaison simultanée des deux cas précédents ;
- les **trames mixtes** représentant les zones de transition entre des sons voisé et non voisé.

Le spectre d'un signal voisé est riche en fréquences harmoniques de la fréquence fondamentale. Si l'on regarde la figure 2, on constate en outre que l'enveloppe spectrale du signal analysé décroît doucement vers les hautes fréquences. Ses résonances sont appelées *formants* et notées $F1$, $F2$, etc. dans l'ordre des fréquences croissantes. Les deux premiers caractérisent en général la voyelle prononcée alors que les deux suivants sont plutôt liés au locuteur. Pour un locuteur masculin, tous les formants sont inférieurs à 5 kHz.

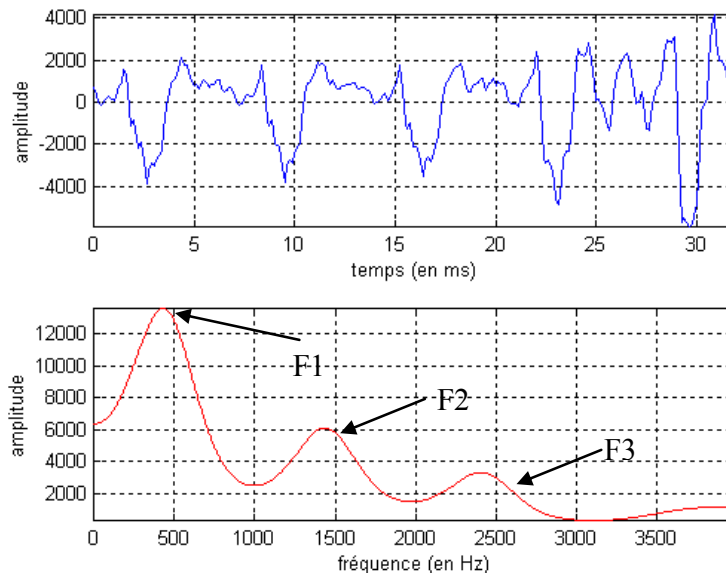


Figure 2 : mise en évidence des trois premiers formants pour le segment voisé analysé

On peut aussi observer les formants sur un spectrogramme. Le spectrogramme est une représentation graphique fréquence×temps, qui traduit l'évolution de la richesse spectrale du signal au cours du temps ; la présence de formants correspond alors à ces gammes de fréquence dont l'énergie est particulièrement élevée et qui apparaissent sous la forme de bandes sensiblement parallèles à l'axe des abscisses. Quand le spectrogramme est en couleur, on adopte généralement une palette allant du rouge pour représenter une forte énergie au bleu pour représenter une faible énergie. C'est notamment le cas à la figure 3.

4.2.2 La fréquence fondamentale

Lorsque les cordes vocales oscillent de façon quasi-périodique, le signal de parole émis est lui aussi quasi-périodique ; il est dit *voisé*, c'est notamment le cas lorsque l'on prononce des voyelles telles que le /a/. La période du signal est alors appelée période fondamentale.

On nomme l'inverse de cette période, la fréquence fondamentale ou *pitch*. La valeur moyenne du pitch est variable selon les locuteurs. Basse et de l'ordre de 80 à 200 Hz pour les hommes, elle peut atteindre 600 Hz pour les enfants, la voix féminine ayant une fréquence fondamentale comprise de manière générale entre 150 et 450 Hz.

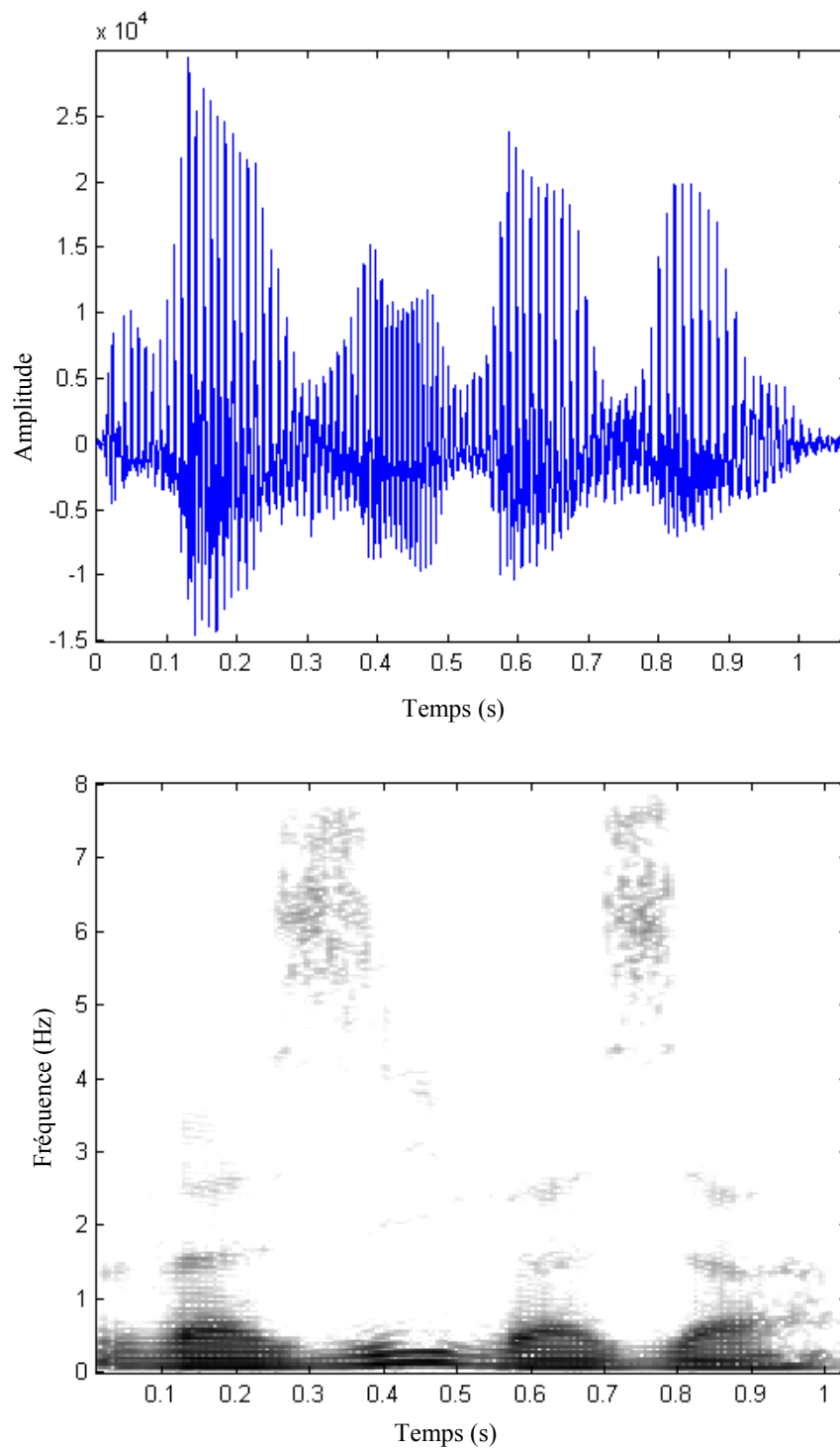


Figure 3 : spectrogramme d'un signal « waziwaza ¹ » mettant en évidence la présence de [z]

¹ Nous remercions Matra et l'ENST pour la base de données de signaux audio qu'elles ont bien voulu nous fournir.

4.2.3 Bilan

On retiendra de cette brève présentation du signal de parole deux de ses caractéristiques majeures :

son caractère non-stationnaire (nécessitant un traitement par frames),

et son éventuelle nature quasi-périodique, à laquelle se rapportent les notions de voisement et de non voisement.

La parole est un moyen de communication au même titre que l'écriture. On attend donc d'un message vocal qu'il soit intelligible, c'est à dire facile à comprendre.

Mais le signal de parole peut être dégradé par un bruit additif, notamment lors de communications longue-distance sur des lignes bruitées, ou lorsque l'on utilise un téléphone portable dans une voiture. Des traitements de débruitage du signal peuvent alors être mis en œuvre. Dans le chapitre suivant, nous nous proposons de faire l'état de l'art des méthodes de rehaussement qui utilisent un unique microphone.

4.2.4 Sur le rehaussement monovoie par atténuation spectrale à court terme

Les solutions élaborées pour le débruitage sont multiples. Certaines emploient plusieurs microphones ; on peut effectuer un rehaussement bivoie, en plaçant un premier microphone directionnel à proximité du locuteur alors qu'un second microphone, omnidirectionnel, est positionné le plus près possible de la source de bruit. Ici, nous focalisons notre attention sur une approche de rehaussement de type monovoie. Une des difficultés dans ce contexte est d'obtenir une bonne approximation des données statistiques du bruit perturbateur.

Les techniques de rehaussement par atténuation spectrale à court terme consistent à appliquer une atténuation spectrale, dépendant de l'estimation du bruit additif, à chaque composante fréquentielle. Plus précisément, ces méthodes nécessitent les opérations suivantes :

1. On effectue un traitement tous les N échantillons. La durée des tranches d'analyse est comprise entre 20 et 40 ms. Les blocs que l'on traite successivement peuvent être en outre disjoints ou se recouvrir partiellement ; on adopte d'ailleurs couramment un recouvrement de 50 %. Dans le contexte de la téléphonie, où le signal est échantillonné à 8 kHz, on peut travailler sur des blocs de 256 échantillons dont le recouvrement s'élève à 128 échantillons.
2. Puis, on applique une règle de suppression de bruit au spectre du signal bruité fenêtré $Y_w(f)$, que l'on nomme aussi spectre du signal à court terme, pour en atténuer chaque canal fréquentiel et obtenir ainsi $\hat{S}_w(f)$, l'estimation du spectre à court terme du signal de parole original.

$$\hat{S}_w(f) = H_w(f, B(f)) Y_w(f) \quad (7)$$

Cette règle varie selon les méthodes utilisées et dépend de manière générale de la variance du bruit additif dont on fait une estimation préalable ; on peut tirer avantage des instants de « silence », où seul le bruit additif est présent, pour évaluer et/ou actualiser la variance du bruit. On en fait alors une approximation long terme, en supposant le bruit ergodique² :

² « Ergodique au sens de la moyenne » revient à dire que l'on peut approximer la moyenne d'ensemble du processus, c'est à dire l'espérance mathématique par la moyenne temporelle.

3. Une transformation de Fourier inverse permet enfin d'avoir une estimation du signal fenêtré. Puis on procède à la reconstruction du signal, en appliquant une méthode dite d'addition-recouvrement (addition de l'ensemble des signaux fenêtrés débruités).

Le schéma de principe de rehaussement par atténuation spectrale est donné à la figure 4.

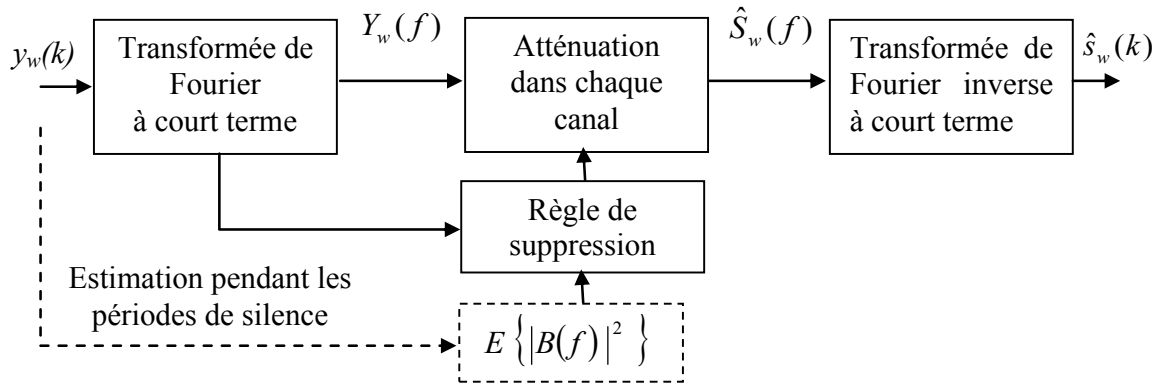


Figure 4 : schéma de principe de rehaussement par atténuation spectrale

Parmi les méthodes qui obéissent à ce type de traitement, la soustraction spectrale est l'une des techniques les plus employées par les traiteurs de signal de parole.

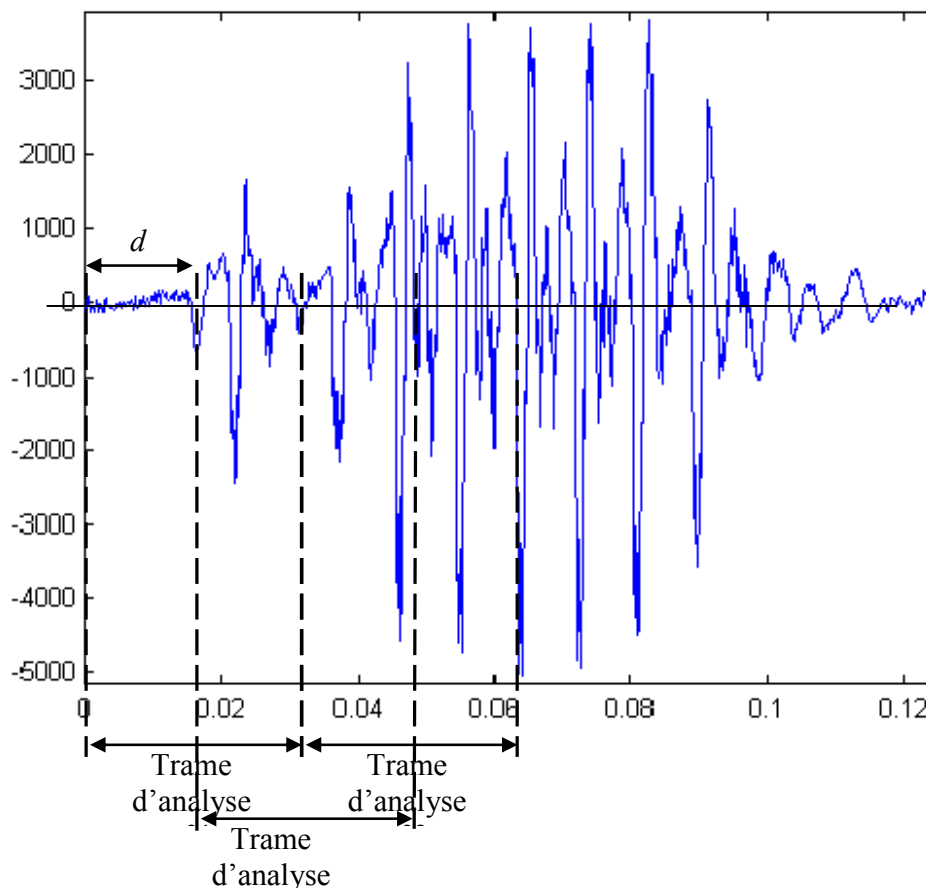


Figure n°5 : Traitement par trame avec recouvrement d'un signal

4.3 Formulaire

Domaine continu	Domaine discret
$X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \exp(-pt) dt$	$X(z) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x(n) z^{-n}$
Equation différentielle à coefficients constants $\sum_{k=0}^{K-1} C_k \frac{d^k y(t)}{dt^k} = \sum_{l=0}^{L-1} D_l \frac{d^l x(t)}{dt^l}$	Equation récurrentes $\sum_{k=0}^{K-1} a(k) y(n-k) = \sum_{l=0}^{L-1} b(l) x(n-l)$
fréquence : $p = j\omega = j2\pi f$	fréquence : $z = \exp(j\omega T_e) = \exp(j2\pi f / f_e)$
Fonction de Transfert $H(p) = \frac{\sum_{l=0}^{L-1} D_l p^l}{\sum_{k=0}^{K-1} C_k p^k}$	Fonction de Transfert $H(z) = \frac{B(z)}{A(z)} = \frac{\sum_{l=0}^{L-1} b(l) z^{-l}}{\sum_{k=0}^{K-1} a(k) z^{-k}}$
Stabilité (système causaux) : pôles à partie réelle négatives	Stabilité (système causaux) : pôles à l'intérieur du cercle unité

On rappelle en outre que $\sum_{n=0}^{N-1} a^n = \frac{1-a^N}{1-a}$, d'où $\sum_{n=0}^{+\infty} a^n = \frac{1}{1-a}$ pour $|a| < 1$.