

TS226

-

# Codes convolutifs et codes concaténés associés

**Romain Tajan**

24 octobre 2019

## 1 Introduction

## 2 Code Convolutif

- ▷ Un premier exemple de code convolutif
- ▷ Définition des codes convolutifs
  - Codes convolutifs rékursifs
  - Codes convolutifs systématiques
- ▷ Représentation octale
  - Notation octale des codes non rékursifs
  - Notation octale des codes rékursifs
- ▷ Code convolutif comme machine à états
  - Diagramme d'état des codes convolutifs

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Code Convolutif

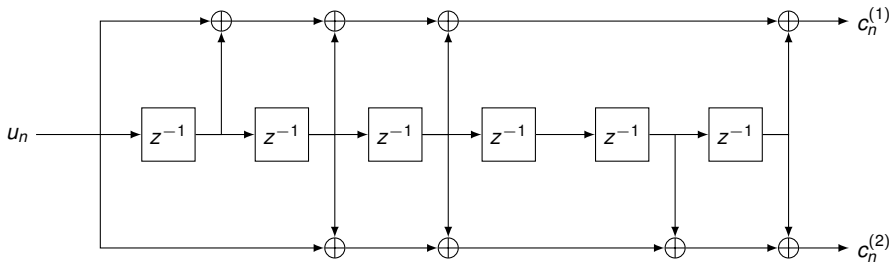
## 1 Introduction

## 2 Code Convolutif

- ▷ Un premier exemple de code convolutif
- ▷ Définition des codes convolutifs
- ▷ Représentation octale
- ▷ Code convolutif comme machine à états

# Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"



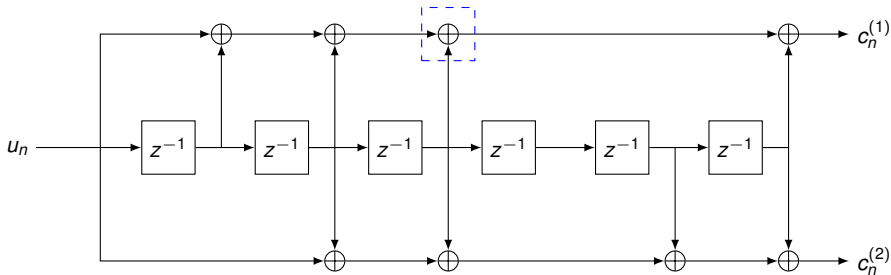
**Message :**  $u = [ \quad 1 \quad \quad 0 \quad \quad 1 \quad \quad 0 \quad \quad 1 \quad \quad \dots ]$

**Mot de code :**  $c = [ \quad \dots \quad ]$

# Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

Addition modulo 2 (XOR)

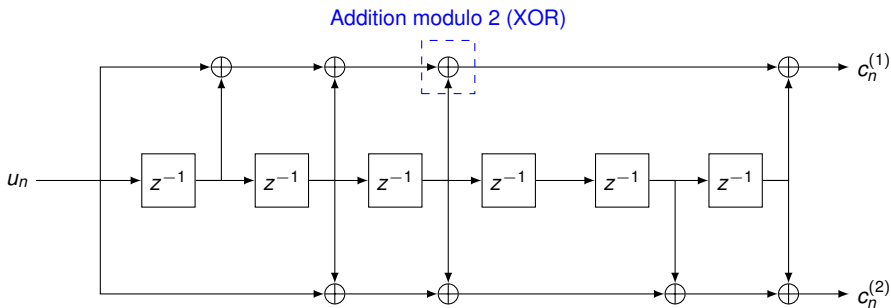


Message :  $u = [ \quad 1 \quad \quad 0 \quad \quad 1 \quad \quad 0 \quad \quad 1 \quad \quad \dots ]$

Mot de code :  $c = [ \quad \dots \quad ]$

# Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

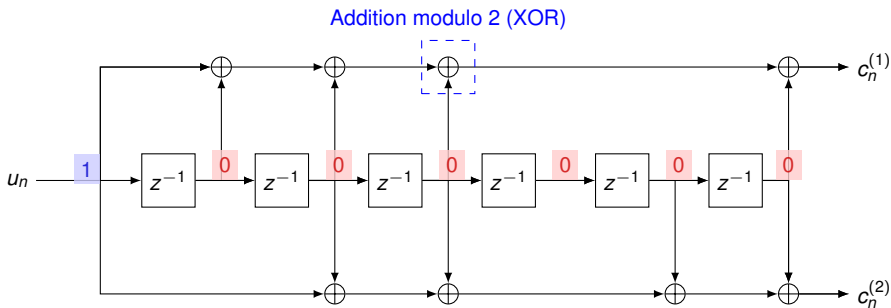


**Message :**  $u = [ \quad 1 \quad \quad 0 \quad \quad 1 \quad \quad 0 \quad \quad 1 \quad \quad \dots ]$

**Mot de code :**  $c = [ \quad c_0^{(1)} \quad c_0^{(2)} \quad \dots ]$

# Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"



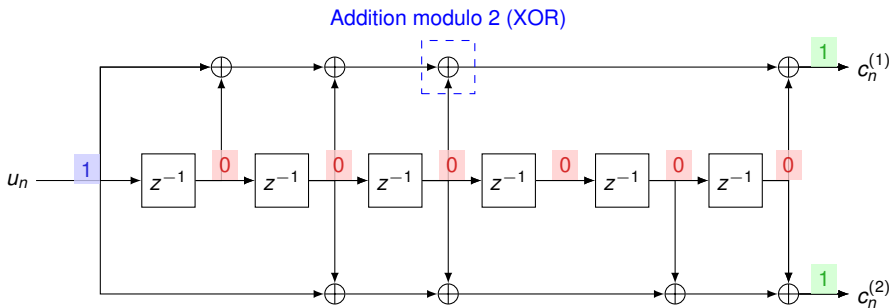
Message :  $u = [ \quad 1 \quad \quad 0 \quad \quad 1 \quad \quad 0 \quad \quad 1 \quad \quad \dots ]$

Mot de code :  $c = [ \quad c_0^{(1)} \quad c_0^{(2)} \quad \dots ]$



# Codes Convolutifs

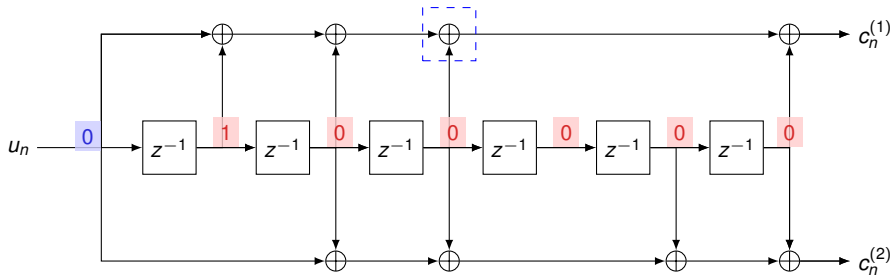
Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"



Message :  $u = [ \quad 1 \quad \quad 0 \quad \quad 1 \quad \quad 0 \quad \quad 1 \quad \quad \dots ]$

Mot de code :  $c = [ \quad 1 \quad 1 \quad \dots ]$

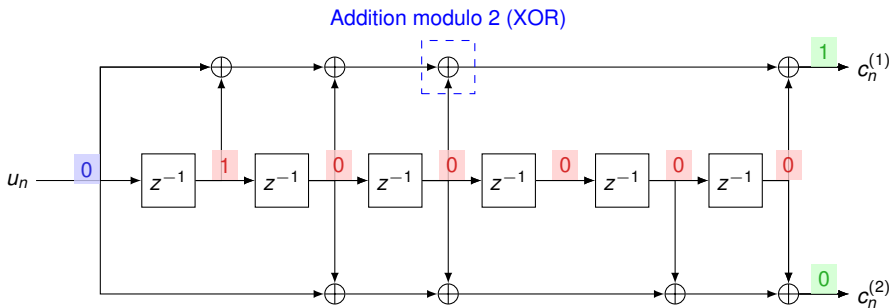
### Addition modulo 2 (XOR)



**Mot de code :**  $\mathbf{c} = [ \quad 1 \quad 1 \quad c_1^{(1)} \quad c_1^{(2)} \quad \dots ]$

# Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

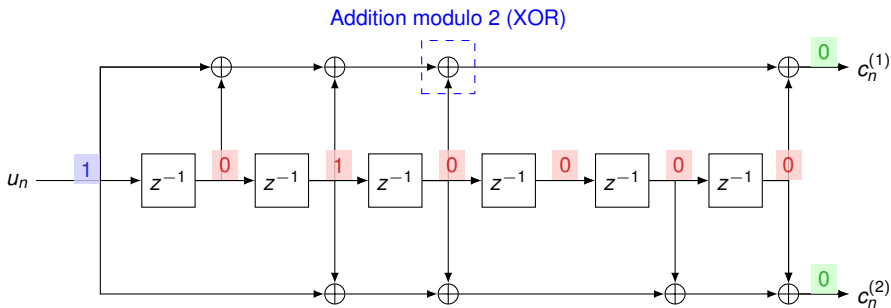


Message :  $u = [ \quad 1 \quad \quad 0 \quad \quad 1 \quad \quad 0 \quad \quad 1 \quad \quad \dots ]$

Mot de code :  $c = [ \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad \dots ]$

# Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

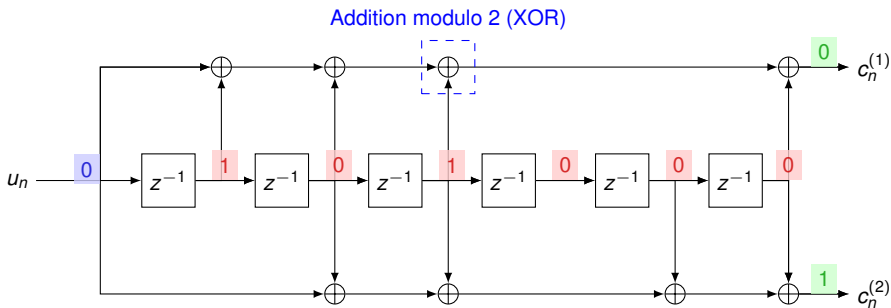


Message :  $u = [ \quad 1 \quad \quad 0 \quad \quad 1 \quad \quad 0 \quad \quad 1 \quad \quad \dots ]$

Mot de code :  $c = [ \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad \dots ]$

# Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

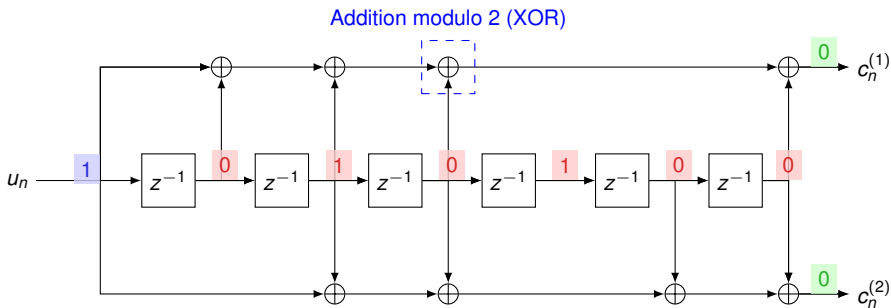


Message :  $u = [ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \dots ]$

Mot de code :  $c = [ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 ]$

# Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"

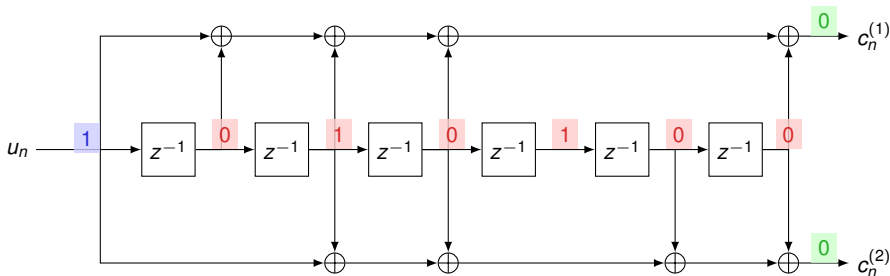


Message :  $u = [ 1 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 1 \quad \dots ]$

Mot de code :  $c = [ 1 \quad 1 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 0 \quad 0 \quad \dots ]$

## Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"



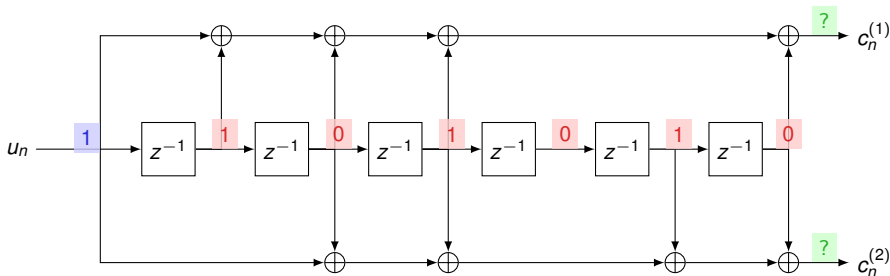
Quel est le prochain état ?

- ☐ A [0, 1, 0, 1, 0, 1]
- ☐ B [1, 0, 1, 0, 1, 0]
- ☐ C [1, 0, 1, 1, 0, 0]
- ☐ D Aucune des réponses A, B ou C.

#QDLE#Q#AB\*CD#30#

## Codes Convolutifs

Un paradigme différent du codage en bloc : encodage "en ligne"



Quel est la sortie ?

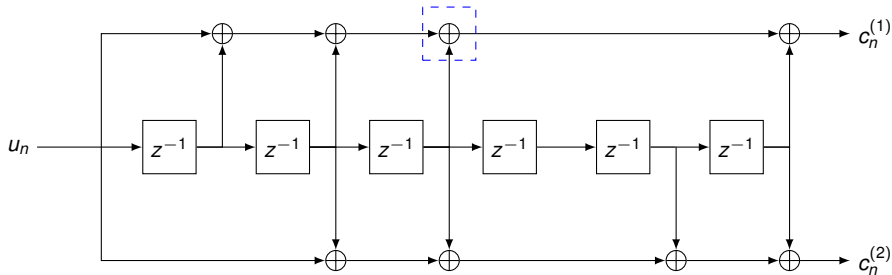
- ☐ A [0, 1]
- ☐ B [1, 0]
- ☐ C [0, 0]
- ☐ D [1, 1]

#QDLE#Q#ABCD\*#30#



# Codes Convolutifs : retour sur l'exemple

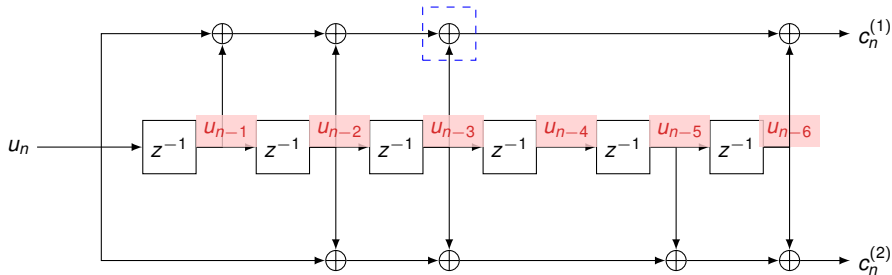
Addition modulo 2 (XOR)



$$c_n^{(2)} =$$

# Codes Convolutifs : retour sur l'exemple

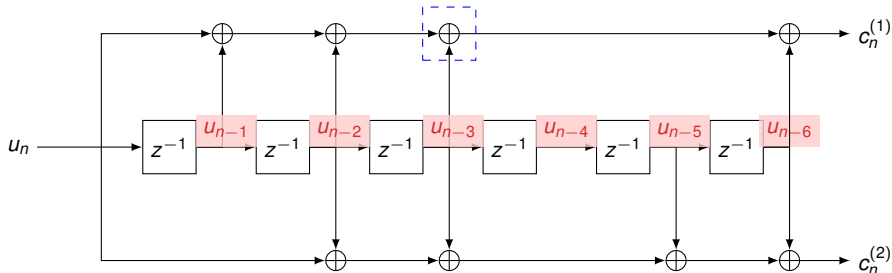
Addition modulo 2 (XOR)



$$c_n^{(2)} =$$

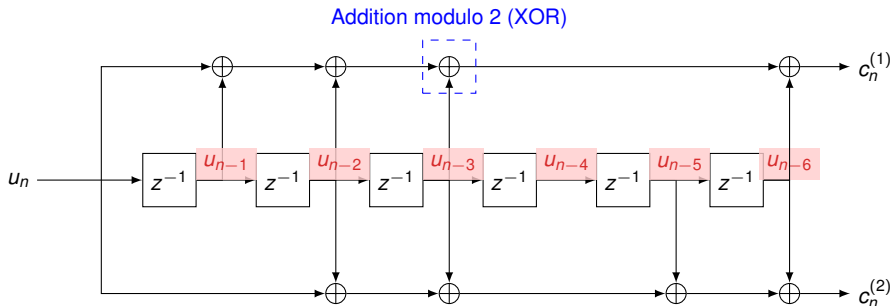
# Codes Convolutifs : retour sur l'exemple

Addition modulo 2 (XOR)



$$c_n^{(2)} = 1 \cdot u_n + 0 \cdot u_{n-1} + 1 \cdot u_{n-2} + 1 \cdot u_{n-3} + 0 \cdot u_{n-4} + 1 \cdot u_{n-5} + 1 \cdot u_{n-6}$$

# Codes Convolutifs : retour sur l'exemple



$$c_n^{(2)} = 1 \cdot u_n + 0 \cdot u_{n-1} + 1 \cdot u_{n-2} + 1 \cdot u_{n-3} + 0 \cdot u_{n-4} + 1 \cdot u_{n-5} + 1 \cdot u_{n-6}$$

On remarque :  $c_n^{(i)} = \sum_{k=0}^m g_k^{(i)} u_{n-k}$

En utilisant la TZ :  $C^{(i)}(z) = U(z)G^{(i)}(z)$

Ici :  $\mathbf{g}^{(1)} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]$   
 $\mathbf{g}^{(2)} = [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]$

## Code Convolutif : définition

### Code convolutif

**Code Convolutif (CC)** : code tel que ses **mots de codes** sont obtenu par **filtrages numériques linéaires** à valeurs dans  $\mathbb{F}_2 = \{0, 1\}$  des messages binaires.

**Message** :  $U(z) = \sum_{k=0}^{+\infty} u_k z^{-k}$  [transformée en  $Z$  de la séquence message  $(u_k)_{k \in \mathbb{N}}$ ]

**Mot de code** :  $\mathbf{C}(z) = [C^{(0)}(z), C^{(1)}(z), \dots, C^{(n_s-1)}(z)]$  [ $C^{(i)}(z)$  sortie du filtre  $i$ ]

$$C^{(i)}(z) = U(z)G^{(i)}(z)$$

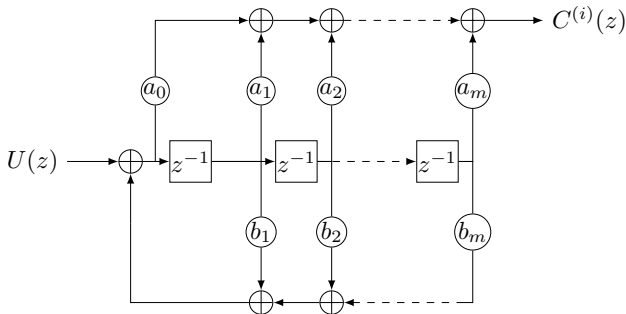
**Attention** : de façon générale  $G^{(i)}(z)$  est défini comme suit :

$$G^{(i)}(z) = \frac{a_0^{(i)} + a_1^{(i)}z^{-1} + \dots + a_m^{(i)}z^{-m}}{1 + b_1^{(i)}z^{-1} + \dots + b_m^{(i)}z^{-m}}$$

## Encodeur récursif / Non récursif

Un encodeur est dit **récursif** s'il existe une boucle de rétroaction de sa sortie sur son entrée (s'il existe  $i$  tel que  $B^{(i)}(z) \neq 1$ ).

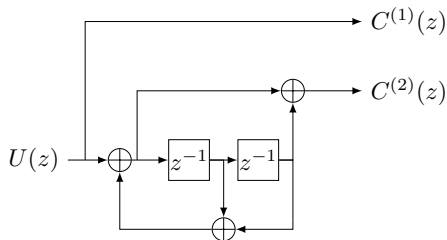
$$G^{(i)}(z) = \frac{a_0^{(i)} + a_1^{(i)}z^{-1} + \dots + a_m^{(i)}z^{-m}}{1 + b_1^{(i)}z^{-1} + \dots + b_m^{(i)}z^{-m}}$$



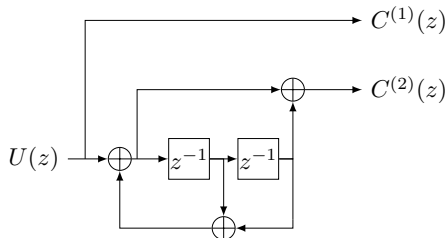
# Encodeur systématique / Non systématique

Un encodeur est dit **systématique** s'il existe une sortie  $i$  telle que  $C^{(i)}(z) = U(z)$ .

$\Leftrightarrow$  S'il existe une sortie  $i$  telle que  $G^{(i)}(z) = 1$ .



# Quizz Encodeur Récursif, Encodeur Systématique



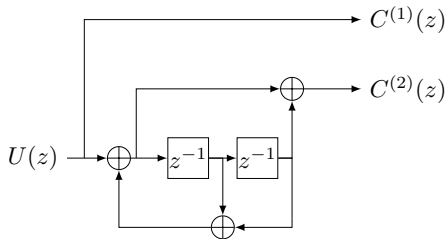
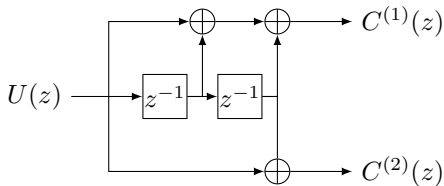
Cet encodeur est :

- ☐ A Récursif et systématique,
- ☐ B Récursif et non systématique,
- ☐ C Non Récursif et systématique,
- ☐ D Non Récursif et non systématique,

#QDLE#Q#A\*BCD#30#



# Quizz Encodeur Récursif, Encodeur Systématique

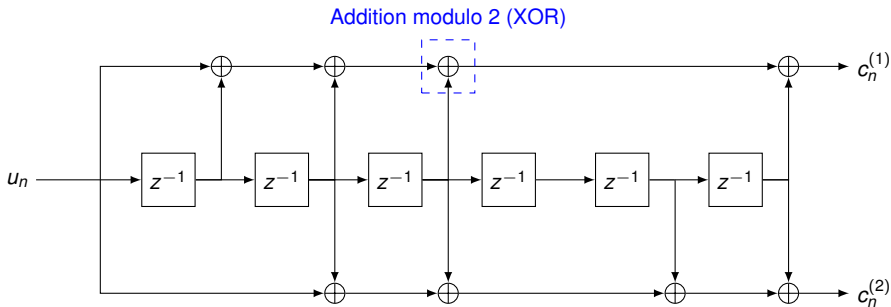


Ces deux encodeurs produisent le même code ?

- ☐ A Vrai
- ☐ B Faux

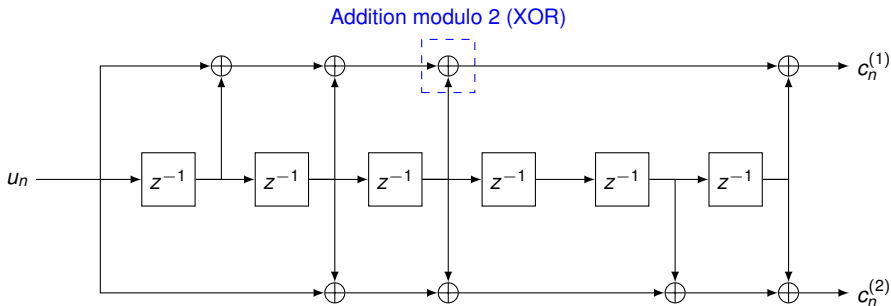
#QDLE#Q#A\*B#30#

# Notation octale des codes convolutifs



**Exemple :**  $\mathbf{g}^{(1)} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]$      $\mathbf{g}^{(2)} = [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]$

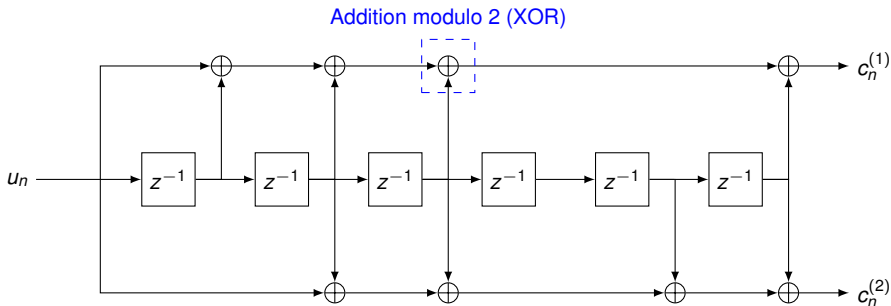
# Notation octale des codes convolutifs



Exemple :  $\mathbf{g}^{(1)} = [1 \ 1 \ 1 \ 1 \ 0 \ 0 \ 1]$      $\mathbf{g}^{(2)} = [1 \ 0 \ 1 \ 1 \ 0 \ 1 \ 1]$

↓  
**1**

# Notation octale des codes convolutifs

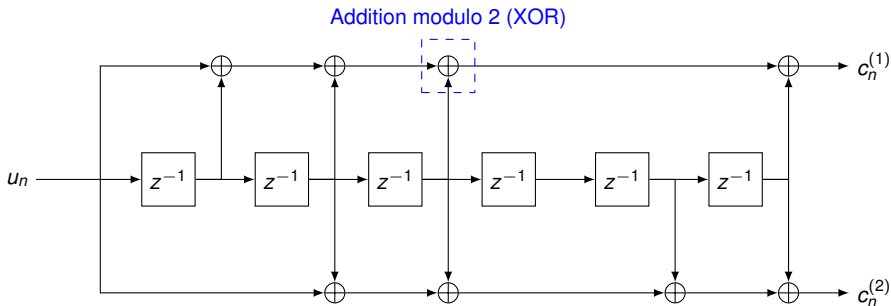


Exemple :  $\mathbf{g}^{(1)} = [1 \text{ } \color{red}{1} \text{ } \color{red}{1} \text{ } \color{red}{1} \text{ } \color{blue}{0} \text{ } \color{blue}{0} \text{ } 1]$      $\mathbf{g}^{(2)} = [1 \text{ } 0 \text{ } 1 \text{ } 1 \text{ } 0 \text{ } 1 \text{ } 1]$

$\color{red}{\downarrow}$   
 $\color{red}{7}$

$\color{blue}{\downarrow}$   
 $\color{blue}{1}$

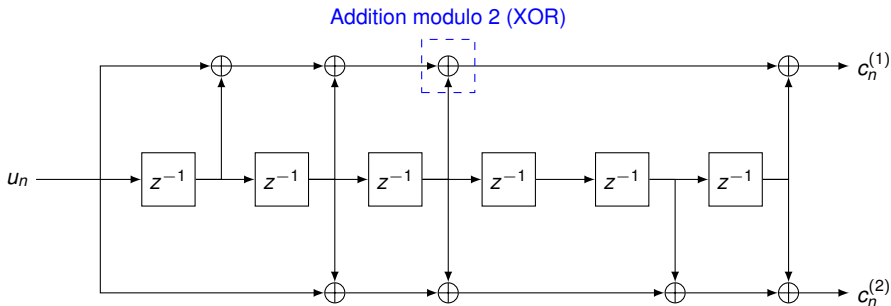
# Notation octale des codes convolutifs



Exemple :  $\mathbf{g}^{(1)} = [1 \text{ (green)} 1 \text{ (red)} 1 \text{ (red)} 1 \text{ (red)} 0 0 1]$      $\mathbf{g}^{(2)} = [1 0 1 1 0 1 1]$

↓ ↓ ↓  
1   7   1

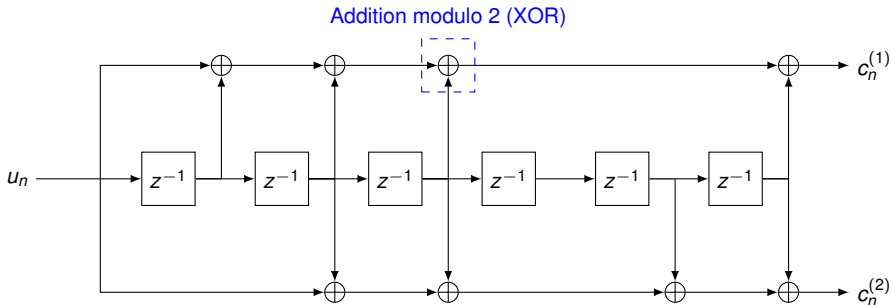
# Notation octale des codes convolutifs



Exemple :  $\mathbf{g}^{(1)} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1]$      $\mathbf{g}^{(2)} = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1]$

↓ ↓ ↓                      ↓ ↓ ↓  
1 7 1                      1 3 3

# Notation octale des codes convolutifs

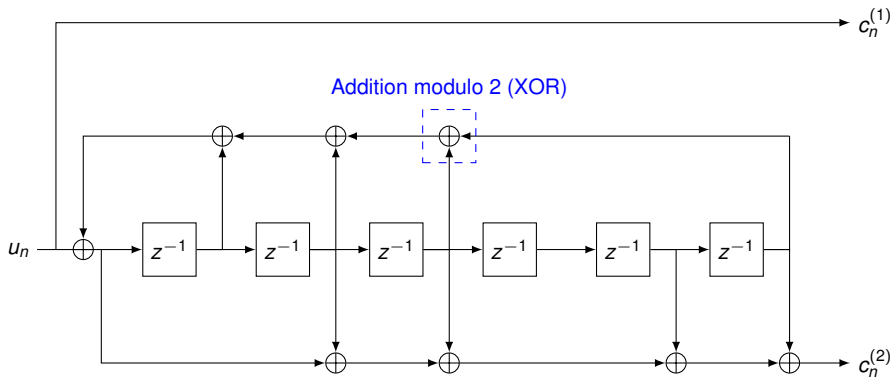


Exemple :  $g^{(1)} = [1\ 1\ 1\ 1\ 0\ 0\ 1]$      $g^{(2)} = [1\ 0\ 1\ 1\ 0\ 1\ 1]$

↓ ↓ ↓      ↓ ↓ ↓  
1 7 1      1 3 3

Ce code est noté  $(171, 133)_8$

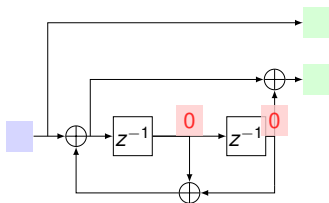
# Notation octale des codes convolutifs récurrents



Ce code est noté  $(1, \frac{133}{171})_8$  ou  $(100, \frac{133}{171})_8$ .



# Diagramme d'état d'un code convolutif

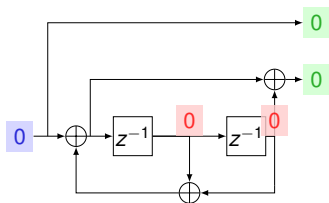


00

$c_n \rightarrow u_n = 0$

$c_n \rightarrow u_n = 1$

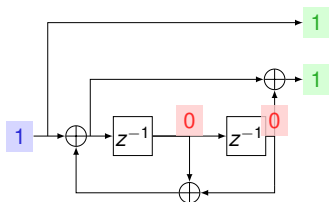
# Diagramme d'état d'un code convolutif



$$\mathbf{c}_n \rightarrow u_n = 0$$

$$\mathbf{c}_n \rightarrow u_n = 1$$

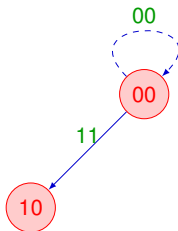
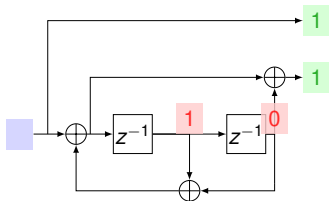
# Diagramme d'état d'un code convolutif



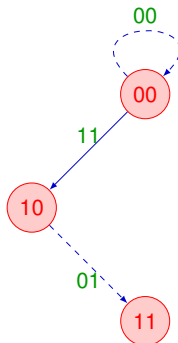
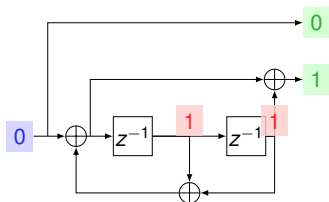
$c_n$   
 $\rightarrow u_n = 0$

$c_n$   
 $\rightarrow u_n = 1$

## Diagramme d'état d'un code convolutif


$$\mathbf{c}_n \rightarrow u_n = 0$$
$$\mathbf{c}_n \rightarrow u_n = 1$$

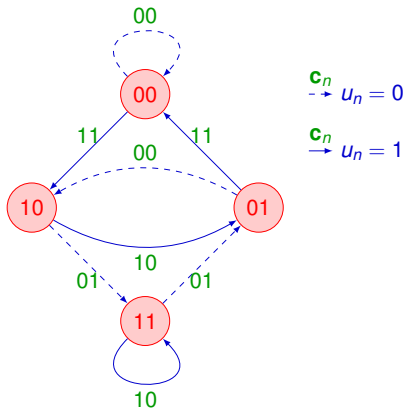
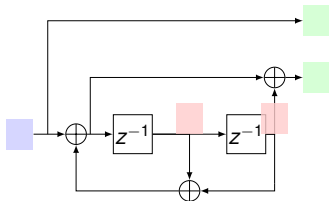
# Diagramme d'état d'un code convolutif



$c_n$   
 $\rightarrow u_n = 0$

$c_n$   
 $\rightarrow u_n = 1$

# Diagramme d'état d'un code convolutif



# Dernier QCM

Comment avez-vous trouvé ce cours ?

- ☐ A Très difficile
- ☐ B Difficile
- ☐ C Moyen
- ☐ D Simple
- ☐ E Très simple

#QDLE#S#ABCDE#30#