

# Introduction aux communications numériques

**Romain Tajan**

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 Transmission en présence de bruit
- 5 Transmission sur fréquence porteuse
- 6 Modulation/ démodulation numérique
- 7 Conclusion

# Plan

- 1 Introduction
  - ▷ Définition
  - ▷ Historique
  - ▷ Modèle OSI
  - ▷ Modèle de Shannon et Weaver
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 Transmission en présence de bruit
- 5 Transmission sur fréquence porteuse
- 6 Modulation/ démodulation numérique

# Plan

- 1 Introduction
- ▷ Définition
- ▷ Historique
- ▷ Modèle OSI
- ▷ Modèle de Shannon et Weaver
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 Transmission en présence de bruit
- 5 Transmission sur fréquence porteuse
- 6 Modulation/ démodulation numérique

# Télécommunications

- **Télécommunication** : Transmission, émission ou réception d'informations par fil, radioélectricité, optique, ou d'autres systèmes électromagnétiques. (Larousse)
  
- **Communications numériques** : synonyme, le mot **numérique** fait référence au contenu transmis : un signal échantillonné et quantifié pouvant donc être envisagé comme une suite de symboles (dont le bit est l'unité)

# Plan

## 1 Introduction

▷ Définition

▷ Historique

▷ Modèle OSI

▷ Modèle de Shannon et Weaver

## 2 Principes de communication en l'absence bruit

## 3 DSP des signaux codés en ligne

## 4 Transmission en présence de bruit

## 5 Transmission sur fréquence porteuse

## 6 Modulation/ démodulation numérique

Avant 1800...

Après 1800

**1837** : Télégraphe électrique

**1897** : Télégraphe sans fil (Marconi)

**1901** : Transmission trans-atlantique

**1924** : Nyquist - Débit maximal pour les communications sans interférences entre symboles dans une bande donnée

**1948** : Shannon/Weaver - Définition formelle pour les transmissions sans perte (erreur)

**1980** : 1ère génération

**1991** : 2ème génération

**2003** : 3ème génération

**2010** : 4ème génération

**2020** : 5ème génération (1Gb/s)

# Plan

## 1 Introduction

▷ Définition

▷ Historique

▷ **Modèle OSI**

▷ Modèle de Shannon et Weaver

## 2 Principes de communication en l'absence bruit

## 3 DSP des signaux codés en ligne

## 4 Transmission en présence de bruit

## 5 Transmission sur fréquence porteuse

## 6 Modulation/ démodulation numérique



- 7 **Application** : Point d'accès aux services réseau
- 6 **Présentation** : Point d'accès aux services réseau
- 5 **Session** : Point d'accès aux services réseau
- 4 **Transport** : Connexion bout à bout, connectabilité et contrôle de flux.
- 3 **Réseau** : Détermine le parcours des données et l'adressage logique (Adresse IP)
- 2 **Liaison** : Adressage physique (Adresse MAC)
- 1 **Physique** : Physique Transmission des signaux sous forme numérique ou analogique

**Couches 7 – 5** : Service final / Format des données / Application

**Couches 3 – 4** : Communications entre deux machines non directement connectées

**Couches 2 – 1** : Communication physique entre deux machines directement connectées

# Plan

## 1 Introduction

▷ Définition

▷ Historique

▷ Modèle OSI

▷ **Modèle de Shannon et Weaver**

## 2 Principes de communication en l'absence bruit

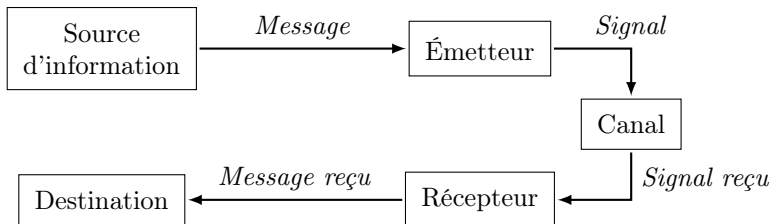
## 3 DSP des signaux codés en ligne

## 4 Transmission en présence de bruit

## 5 Transmission sur fréquence porteuse

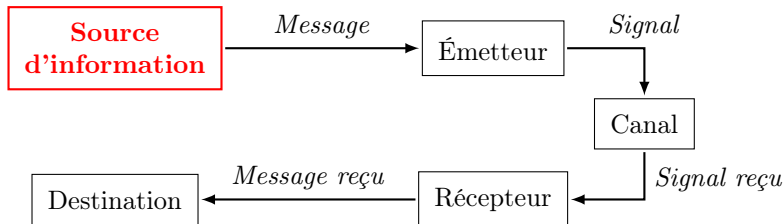
## 6 Modulation/ démodulation numérique

## Modèle de Shannon et Weaver



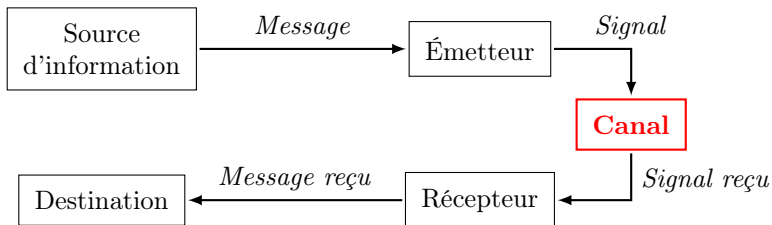
Modèle de Shannon et Weaver, introduit en 1948

## Source d'information



**L'émetteur** convertit les messages délivrés par la source d'information en signaux transmis pouvant être transmis dans le canal.

## Le canal



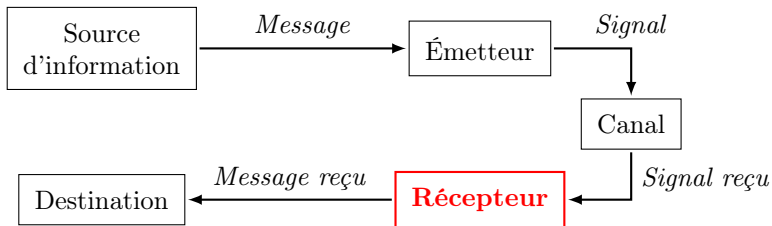
**Média de propagation** entre l'émetteur et le récepteur :

- Câble coaxial
- Paire torsadée
- Air

Ces signaux peuvent être portés par des ondes électro-magnétiques, ondes sonores,

...

## Le récepteur



Le **récepteur** convertit un signal reçu en message compréhensible par la sources.  
**Attention**, des erreurs de transmissions peuvent intervenir ici !

# Plan

## 1 Introduction

## 2 Principes de communication en l'absence bruit

- ▷ Définitions
- ▷ Principes de communications en bande de base
- ▷ Définition mathématique des signaux
- ▷ Interférence entre symboles
- ▷ Diagramme de l'œil

## 3 DSP des signaux codés en ligne

## 4 Transmission en présence de bruit

## 5 Transmission sur fréquence porteuse

# Plan

## 1 Introduction

## 2 Principes de communication en l'absence bruit

### ▷ Définitions

▷ Principes de communications en bande de base

▷ Définition mathématique des signaux

▷ Interférence entre symboles

▷ Diagramme de l'œil

## 3 DSP des signaux codés en ligne

## 4 Transmission en présence de bruit

## 5 Transmission sur fréquence porteuse



## Définitions

Il existe deux grandes familles de systèmes de communications numériques :

- Transmission en bande de base
- Transmission en bande transposée

Une transmission est dite en **bande de base** lorsqu'elle s'effectue autour de la fréquence porteuse  $f_p = 0$  Hz.

*Ce mode de transmission est celui privilégié dans les transmissions filaire.*

Une transmission est dite en **bande transposée** lorsqu'elle s'effectue autour d'une fréquence porteuse  $f_p > 0$  Hz.

*Ce mode de transmission est celui privilégié dans les transmissions sans fil.*

# Plan

## 1 Introduction

## 2 Principes de communication en l'absence bruit

- ▷ Définitions

- ▷ Principes de communications en bande de base

- ▷ Définition mathématique des signaux

- ▷ Interférence entre symboles

- ▷ Diagramme de l'œil

## 3 DSP des signaux codés en ligne

## 4 Transmission en présence de bruit

## 5 Transmission sur fréquence porteuse

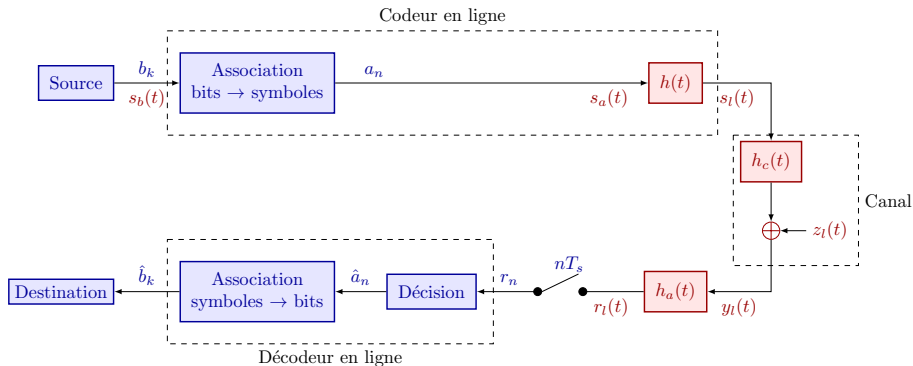


Figure – Architecture de communication en bande de base simplifiée

# Plan

## 1 Introduction

## 2 Principes de communication en l'absence bruit

- ▷ Définitions
- ▷ Principes de communications en bande de base
- ▷ Définition mathématique des signaux
- ▷ Interférence entre symboles
- ▷ Diagramme de l'œil

## 3 DSP des signaux codés en ligne

## 4 Transmission en présence de bruit

## 5 Transmission sur fréquence porteuse

## Définitions de $b_k$ et $s_b(t)$

Le signal à temps discret  $b_k$  représente la **séquence de bits d'informations transmis par la source**. Ces bits sont considérés comme des variables aléatoires discrètes indépendante et identiquement distribuées (iid)

- variables aléatoires discrètes  $b_k \in \{0, 1\}$  suivant une loi de Bernoulli
- $\mathbb{P}(b_k = 0) = p_0$ ,  $\mathbb{P}(b_k = 1) = p_1$ , avec  $p_0 = 1 - p_1$  et  $p_0 \in [0, 1]$

$s_b(t)$  est le signal à temps continu associé à  $b_k$ .  $s_b(t)$  a l'expression suivante

$$s_b(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} b_k \delta(t - kT_b)$$

- $T_b$  est appelé le **temps bit**, il s'exprime en secondes,
- Le **débit binaire** (exprimé en bits/s) est défini comme l'inverse du temps bit :

$$D_b = \frac{1}{T_b}$$

Exemple :  $T_b = 1 \mu s \Rightarrow D_b = 1 \text{ Mbits/s}$

## Association bits $\rightarrow$ symboles

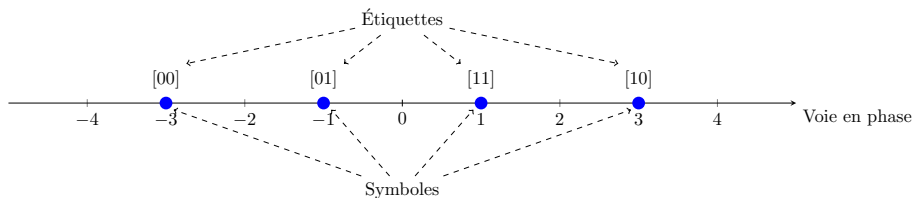
Ce bloc **associe un symbole** pour chaque **étiquette binaire** de  $n_b$  bits.

Pour des étiquettes binaires de  $n_b$  bits, on aura  $M = 2^{n_b}$  symboles.

L'ensemble de ces symboles s'appelle une "**constellation**".

Pour une communication en bande de base, les symboles sont réels

Pour une communication en bande transposée, les symboles sont complexes



## Définition de $a_n$ et $s_a(t)$

Les symboles obtenus en sortie de l'association bits symboles sont notés  $a_n$

$s_a(t)$  est le signal à temps continu associé aux  $a_n$ .  $s_a(t)$  a l'expression suivante

$$s_a(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \delta(t - mT_s)$$

- $T_s$  est appelé le **temps symbole**, il s'exprime en secondes,
- Le **débit symbole** (exprimé en symboles/s) est défini comme l'inverse du temps symbole :

$$D_s = \frac{1}{T_s}$$

- Chaque symbole transportant  $n_b$  bits, le **débit binaire**  $D_b$  s'obtient à partir du débit symbole comme :

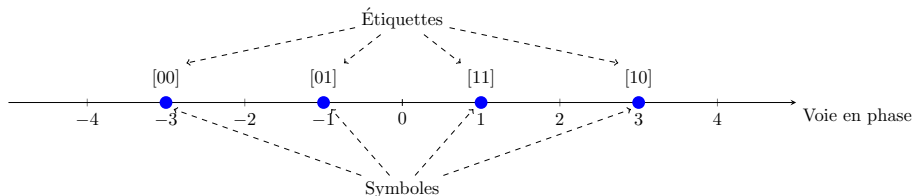
$$D_b = n_b D_s.$$

Exemple :  $T_s = 1\mu s \Rightarrow D_s = 1\text{ Msymboles/s}$ , si  $n_b = 2$  alors  $D_b = n_b D_s = 2\text{ Mbits/s}$

# Quizz time!

**Sortez vos téléphones !**





Pour la constellation ci-dessus. Si le débit binaire est  $D_b = 1 \text{ Mbits/s}$  quel serait le débit symbole  $D_s$  ?

- A**  $D_s = 0.5 \text{ Msymboles/s}$
- B**  $D_s = 1 \text{ Msymboles/s}$
- C**  $D_s = 2 \text{ Msymboles/s}$
- D**  $D_s = 4 \text{ Msymboles/s}$

#QDLE#Q#A\*BCD#30#

Je suis à l'aise avec les concepts de **filtrage**, **réponse impulsionnelle**, **convolution**, **échantillonnage** ...

☐ A Oui

☐ B Non

#QDLE#S#AB#30#

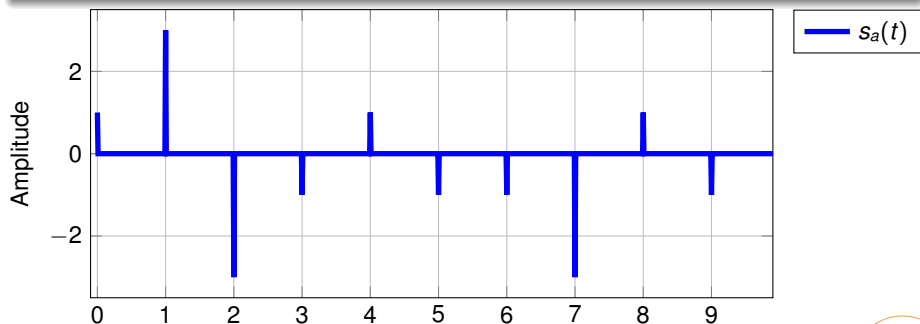
## Filtrage de mise en forme et $s_I(t)$

$h(t)$  est le **filtre de mise en forme à l'émission**. C'est un filtre linéaire invariant par décalage, donc  $s_I(t)$  s'écrit

$$s_I(t) = (h \star s_a)(t)$$

où  $\star$  désigne le produit de convolution.  $s_a(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \delta(t - mT_s)$ , ainsi

$$s_I(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - mT_s)$$



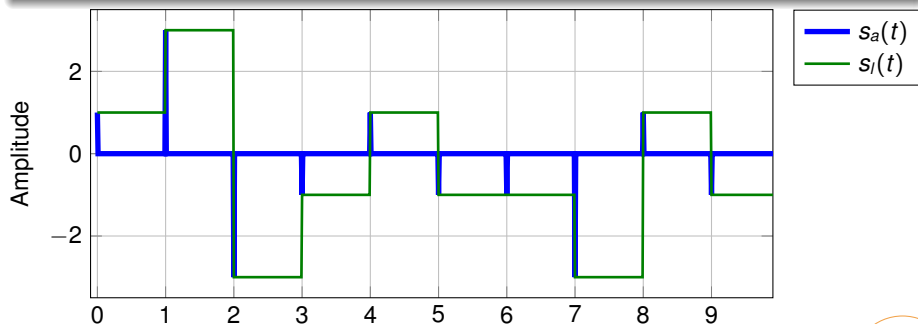
## Filtrage de mise en forme et $s_I(t)$

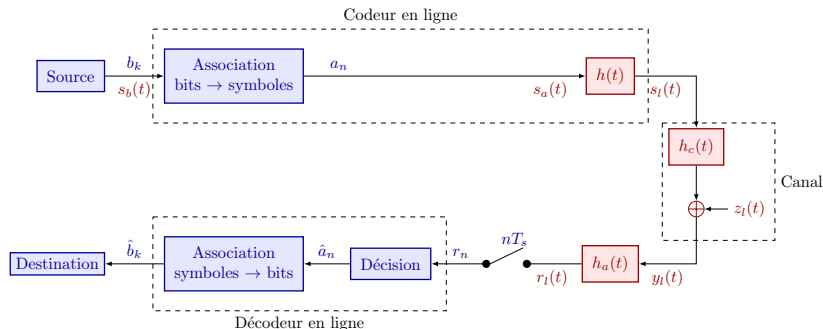
$h(t)$  est le **filtre de mise en forme à l'émission**. C'est un filtre linéaire invariant par décalage, donc  $s_I(t)$  s'écrit

$$s_I(t) = (h \star s_a)(t)$$

où  $\star$  désigne le produit de convolution.  $s_a(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m \delta(t - mT_s)$ , ainsi

$$s_I(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m h(t - mT_s)$$





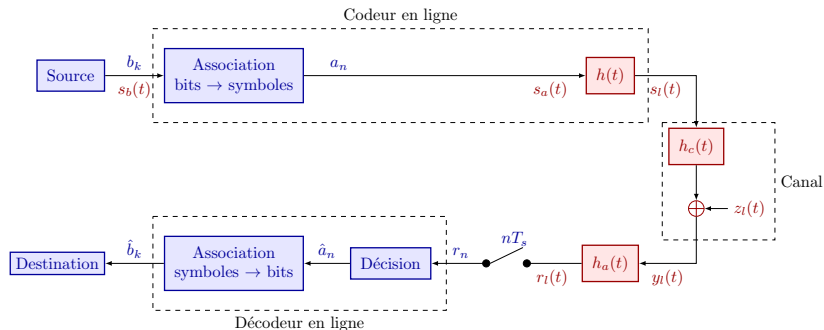
$h_c(t)$  réponse impulsionnelle du **canal de propagation**

$z_l(t)$  un processus aléatoire Gaussien blanc et réel. Ainsi, le signal reçu s'écrit

$$y_l(t) = [h_c \star s_l](t) + z_l(t)$$

Ce qui peut se réécrire

$$y_l(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m [h_c \star h](t - mT_s) + z_l(t)$$



$h_a(t) \in \mathbb{R}$  est le **filtre de réception** (filtre linéaire invariant par décalage)

$$r_l(t) = [h_a \star y_l](t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m g(t - mT_s) + z'_l(t)$$

où

$\rightarrow g(t) = [h_a \star h_c \star h](t)$  **filtre équivalent de la chaîne de communication.**

$\rightarrow z'_l(t) = [h_a \star z_l](t)$  bruit filtré par le filtre de réception.

## Échantillonnage et $r_n$

Après échantillonnage au temps  $T_s$  on obtient

$$r_n = r_l(nT_s) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} a_m g((n-m)T_s) + z'_l(nT_s)$$

Le modèle équivalent entre  $a_n$  et  $r_n$  est alors

$$r_n = a_n g_0 + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} a_{n-m} g_m + z'_n$$

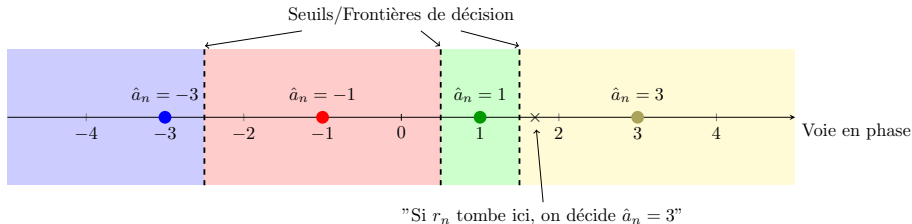
où  $g_n = g(nT_s)$  et  $z'_n = z'_l(nT_s)$ .

## Détection et $\hat{a}_n$

Le modèle équivalent entre  $a_n$  et  $r_n$  est

$$r_n = a_n g_0 + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} a_{n-m} g_m + z'_n$$

Afin d'**estimer la valeur du symbole  $a_n$  la plus probable**, que l'on note  $\hat{a}_n$ , le bloc de **décision** détermine dans quelle région de décision se situe l'échantillon  $r_n$ .

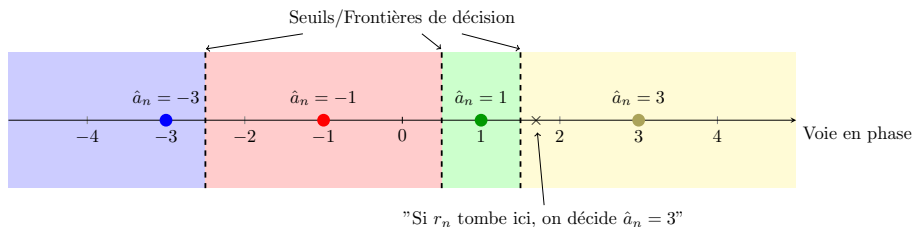


Remarque : les frontières de décision ne sont pas forcément à égale distances entre les symboles



# Quizz time!

**Sortez vos téléphones !**



Dans l'exemple ci-dessus, nous supposons les seuils de décisions suivants  $(-2.5, 0.5, 1.5)$ . Si  $\mathbf{r} = [1.2, -4, 2.1]$ , quels sont les symboles seront décidés ?

- A  $\hat{\mathbf{a}} = [1, -3, -1]$
- B  $\hat{\mathbf{a}} = [1, 3, -3]$
- C  $\hat{\mathbf{a}} = [1, -3, -1]$
- D  $\hat{\mathbf{a}} = [1, -3, 3]$

#QDLE#Q#ABCD\*#60#

# Plan

## 1 Introduction

## 2 Principes de communication en l'absence bruit

- ▷ Définitions
- ▷ Principes de communications en bande de base
- ▷ Définition mathématique des signaux
- ▷ **Interférence entre symboles**
- ▷ Diagramme de l'œil

## 3 DSP des signaux codés en ligne

## 4 Transmission en présence de bruit

## 5 Transmission sur fréquence porteuse

## Interférences entre Symboles (IES)

### Hypothèses

- Absence de déformation liée au canal,  $h_c(t) = \delta(t) \Rightarrow g(t) = [h \star h_a](t)$
- Absence de bruit,  $z'_n = 0$

Expression du signal reçu en l'absence de bruit

$$r_n = g_0 a_n + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} g_m a_{n-m}$$

## Interférences entre Symboles (IES)

### Hypothèses

- Absence de déformation liée au canal,  $h_c(t) = \delta(t) \Rightarrow g(t) = [h \star h_a](t)$
- Absence de bruit,  $z'_n = 0$

Expression du signal reçu en l'absence de bruit

$$r_n = \underbrace{g_0 a_n}_{\text{Symbole d'Intérêt}} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} g_m a_{n-m}$$

## Interférences entre Symboles (IES)

### Hypothèses

- Absence de déformation liée au canal,  $h_c(t) = \delta(t) \Rightarrow g(t) = [h \star h_a](t)$
- Absence de bruit,  $z'_n = 0$

Expression du signal reçu en l'absence de bruit

$$r_n = \underbrace{g_0 a_n}_{\text{Symbole d'Intérêt}} + \underbrace{\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} g_m a_{n-m}}_{\text{IES}}$$

### Interférence Entre Symboles (IES) :

Interférence générée par les symboles  $\dots a_{n-2}, a_{n-1}, a_{n+1}, a_{n+2} \dots$  sur la réception du symbole d'intérêt  $a_n$ .

Il est possible que la communication sans erreur ne puisse se faire si les filtres  $h(t)$  et  $h_a(t)$  sont mal choisis.

## Interférences entre Symboles (IES)

Expression du signal reçu en l'absence de bruit

$$r_n = \underbrace{g_0 a_n}_{\text{Symbole d'Intérêt}} + \underbrace{\sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} g_m a_{n-m}}_{\text{IES}}$$

**Annulation de l'IES si :**  $g_0 \neq 0$  et  $g_m = 0$  pour  $m \neq 0$

**Critère de Nyquist (version temporelle) :**

Si le filtre global  $g(t) = (h \star h_a)(t)$  vérifie

$$g(t) \text{III}_{T_s}(t) = g_0 \delta(t)$$

alors il n'y aura pas d'IES à la réception.

## Interférences entre Symboles (IES)

Expression du signal reçu en l'absence de bruit

$$r_n = \boxed{g_0 a_n} + \sum_{\substack{m=-\infty \\ m \neq 0}}^{\infty} g_m a_{n-m}$$

Symbole d'Intérêt                      IES

**Annulation de l'IES si :**  $g_0 \neq 0$  et  $g_m = 0$  pour  $m \neq 0$

### Critère de Nyquist (version fréquentielle) :

Si la réponse en fréquence du filtre global  $G(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) e^{j2\pi ft} dt = H(f)H_a(f)$  vérifie

$$\frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G\left(f - \frac{m}{T_s}\right) = g_0$$

alors il n'y aura pas d'IES à la réception.

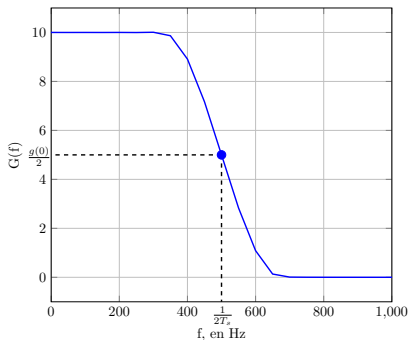


## Remarques sur la version fréquentielle du critère de Nyquist I

Si  $G(f)$  est à support borné  $\left[-\frac{1}{T_s}, \frac{1}{T_s}\right]$ , le critère de Nyquist fréquentiel devient :

*Le point  $\left(\frac{1}{2T_s}, \frac{g_0}{2}\right)$  est un centre de symétrie pour  $G(f)$ ,  $f \in [0, \frac{1}{T_s}]$ .*

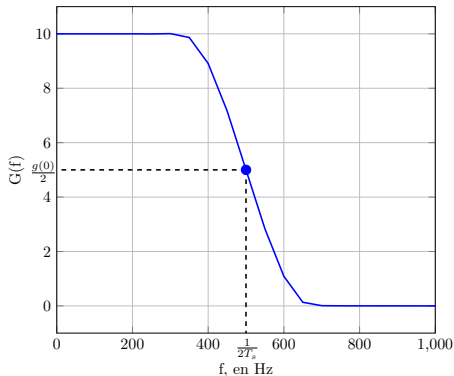
La fréquence  $f = \frac{1}{2T_s}$  est appelée fréquence de Nyquist.



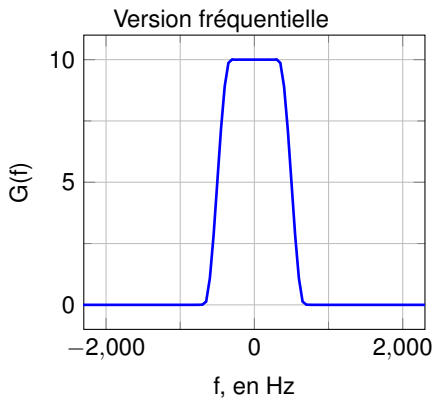
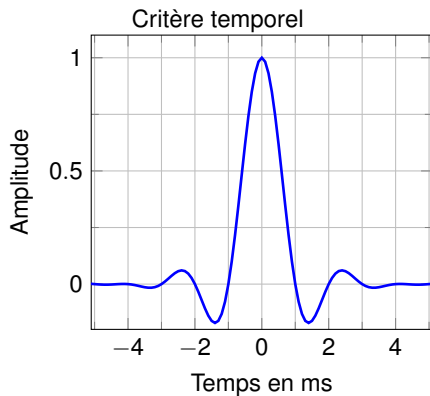
## Remarques sur la version fréquentielle du critère de Nyquist II

Si  $G(f)$  est à support borné  $\left[-\frac{1}{T_s}, \frac{1}{T_s}\right]$ , le critère de Nyquist fréquentiel devient :

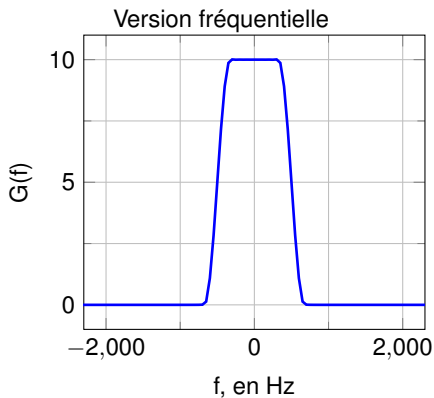
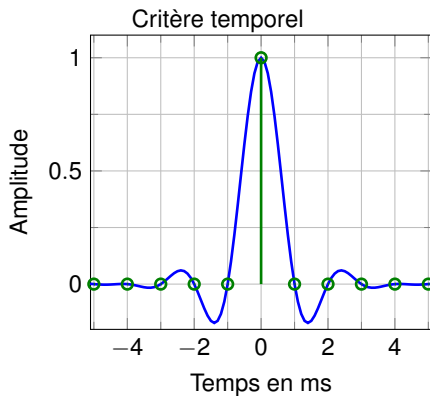
*Le point  $\left(\frac{1}{2T_s}, \frac{g_0}{2}\right)$  est un centre de symétrie pour  $G(f)$ ,  $f \in [0, \frac{1}{T_s}]$ .*



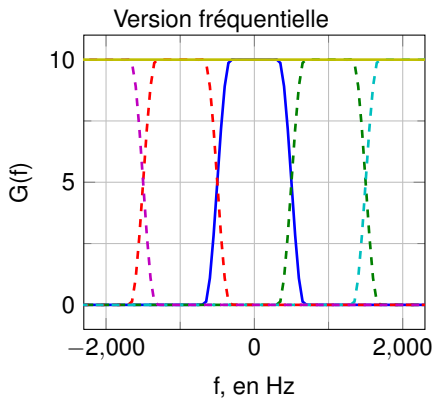
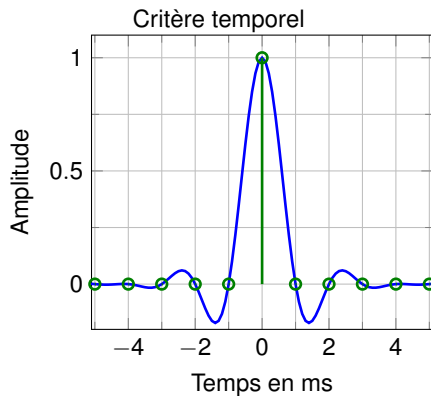
## Exemples de filtres de mise en forme



## Exemples de filtres de mise en forme



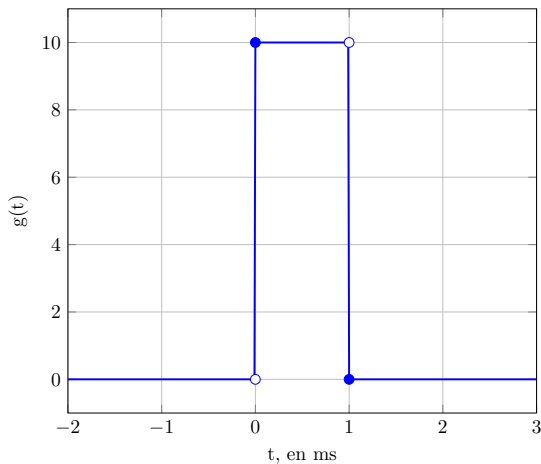
## Exemples de filtres de mise en forme



# Quizz time!

**Sortez vos téléphones !**

## Exercice sur le critère de Nyquist



Ce filtre vérifie-t-il le critère de Nyquist si  $T_s = 1\text{ ms}$  ?

#QDLE#Q#A\*B#45#

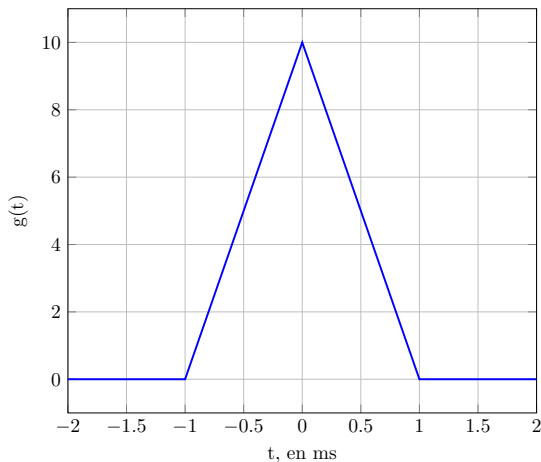
(A)

Oui

(B)

Non

## Exercice sur le critère de Nyquist



Ce filtre vérifie-t-il le critère de Nyquist si  $T_s = 0.5\text{ms}$  ?

#QDLE#Q#AB\*#45#

(A)

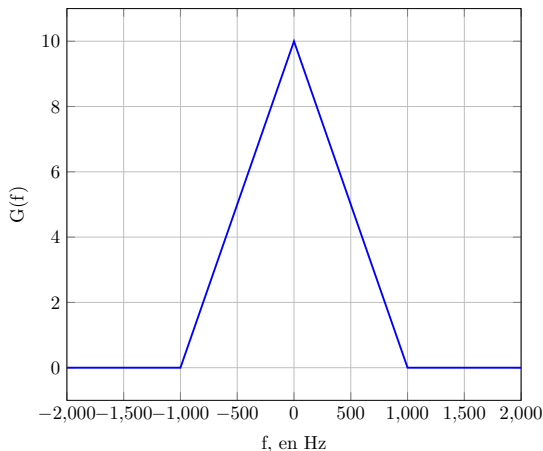
Oui

(B)

Non



## Exercice sur le critère de Nyquist



On considère que  $T_s = 1\text{ms}$ , ce filtre vérifie-t-il le critère de Nyquist ?

#QDLE#Q#A\*B#45#

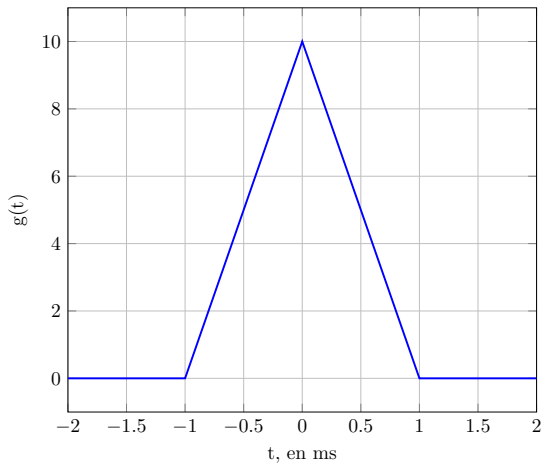
(A)

Oui

(B)

Non

## Exercice sur le critère de Nyquist



Avec ce filtre le débit maximal d'une communication sans interférences entre symboles est de  $D_s = 1 \text{ ksymboles/s}$ ?

#QDLE#Q#A\*B#60#

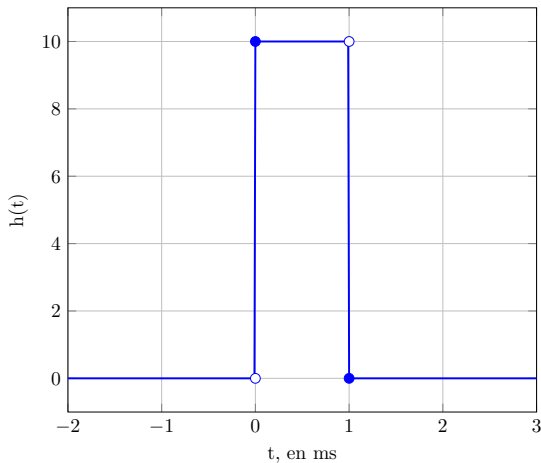
(A)

Oui

(B)

Non

## Exercice sur le critère de Nyquist



Avec ce filtre  $h(t)$  et avec  $h_a(t) = h(t)$  le débit maximal d'une communication sans interférences entre symboles est de  $D_s = 1 \text{ Msymboles/s}$  ?

#QDLE#Q#A\*B#90#

(A)

Oui

(B)

Non

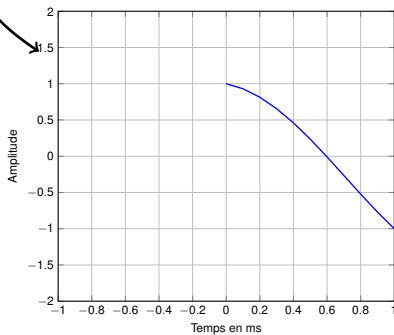
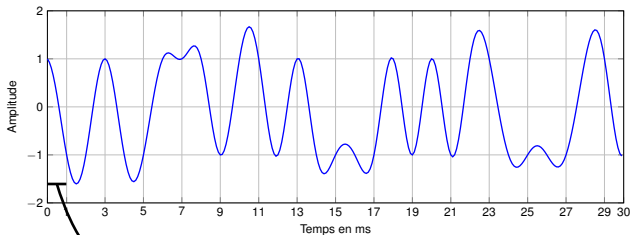
## En conclusion sur le critère de Nyquist

- Les interférences entre symboles sont le résultat d'un mauvais choix du couple  $(h(t), h_a(t))$ .
- Les IES peuvent rendre la communication sans erreur impossible, et ceux, même en l'absence de bruit et de filtre de canal  $(h_c(t) = \delta(t))$ .
- Le **critère de Nyquist** est un critère qui permet de **garantir l'absence d'IES** lors du choix de  $h(t)$  et  $h_a(t)$ .
  - Version temporelle :  $g(t) \text{III}_{T_s}(t) = g_0 \delta(t)$
  - Version fréquentielle :  $\frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{\infty} G\left(f - \frac{m}{T_s}\right) = g_0$

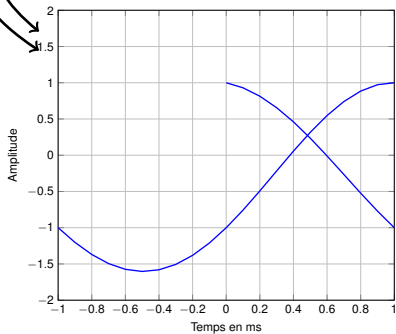
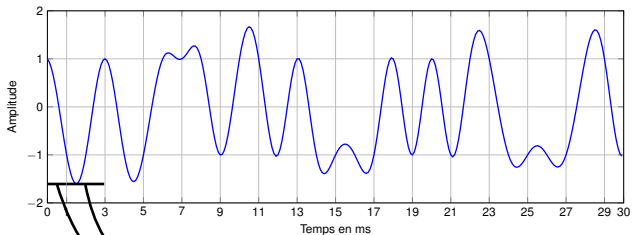
# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
  - ▷ Définitions
  - ▷ Principes de communications en bande de base
  - ▷ Définition mathématique des signaux
  - ▷ Interférence entre symboles
  - ▷ Diagramme de l'œil
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 Transmission en présence de bruit
- 5 Transmission sur fréquence porteuse

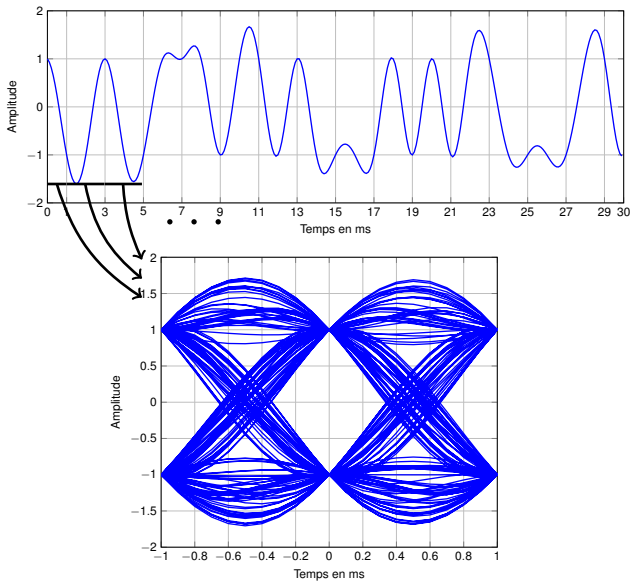
## Diagramme de l'œil



## Diagramme de l'œil

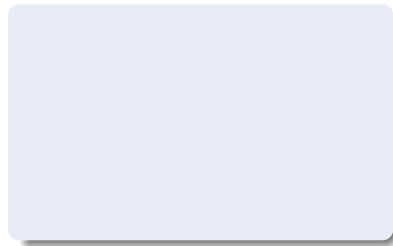
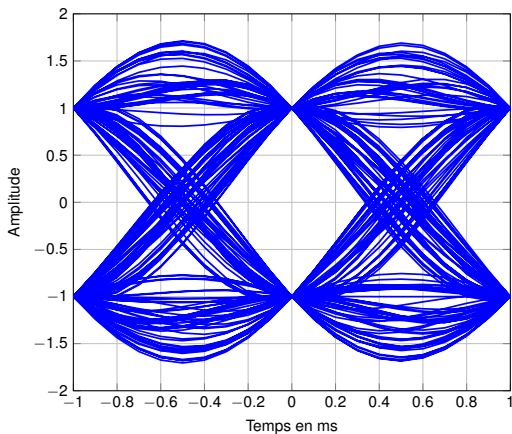


## Diagramme de l'œil

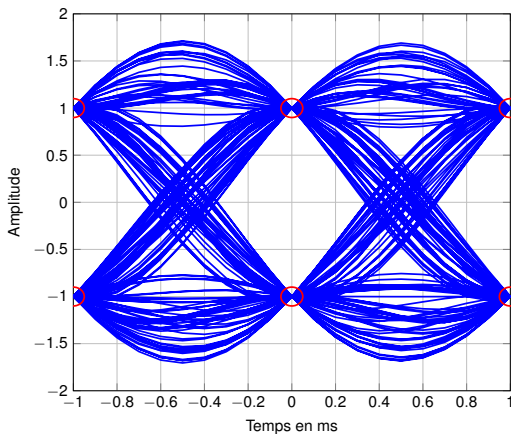




## Analyse du diagramme de l'œil

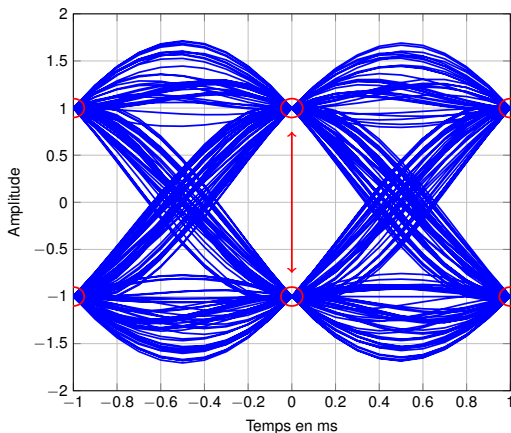


## Analyse du diagramme de l'œil



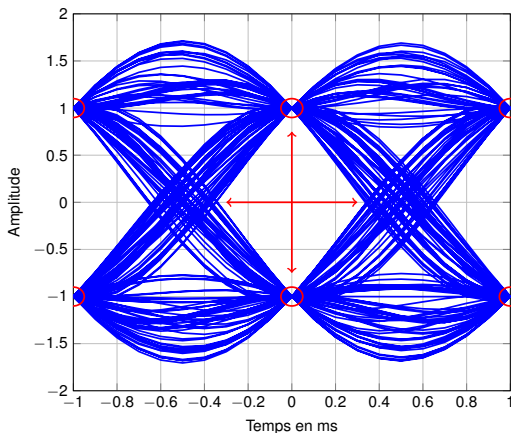
- *Absence d'IES*

## Analyse du diagramme de l'œil



- Absence d'IES
- Ouverture verticale de l'œil :  
**Robustesse au bruit**

## Analyse du diagramme de l'œil



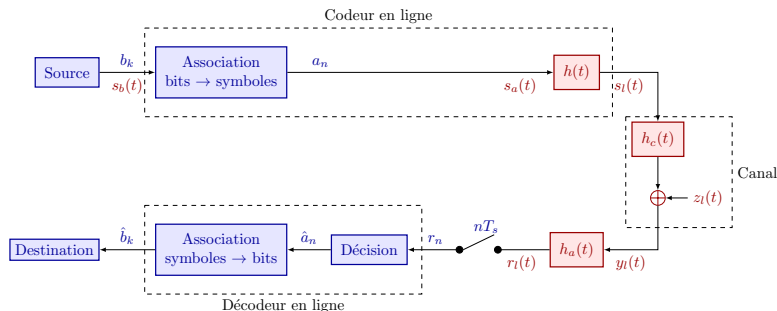
- Absence d'IES
- Ouverture verticale de l'œil :  
**Robustesse au bruit**
- Ouverture horizontale de l'œil :  
**Robustesse aux déphasages de l'échantillonneur**

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
  - ▷ Description
  - ▷ Rappels sur les probabilités
  - ▷ De la VA au processus aléatoire
- 4 Transmission en présence de bruit
- 5 Transmission sur fréquence porteuse
- 6 Modulation/ démodulation numérique

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
  - ▷ Description
  - ▷ Rappels sur les probabilités
  - ▷ De la VA au processus aléatoire
- 4 Transmission en présence de bruit
- 5 Transmission sur fréquence porteuse
- 6 Modulation/ démodulation numérique



Dans cette partie, on s'intéresse à la répartition sur les fréquences de la puissance du signal  $s_l(t)$ .

En pratique cette répartition serait obtenue en calculant  $S_l(f) = TF(s_l(t))$ . Or, le signal  $s_l(t)$  étant aléatoire,  $S_l(f)$  dépend du "tirage" de  $s_l(t)$ .

**$\Rightarrow$  On souhaite donc définir une grandeur qui dépend uniquement des statistiques du message envoyé mais pas du message envoyé.**

# Quizz time!

**Sortez vos téléphones !**



Je suis à l'aise avec les **probabilités** ...

- ☐ A Oui
- ☐ B Non

#QDLE#S#AB#10#

Je suis à l'aise avec les concepts d'**espérance** et de **variance** ...

- ☐ A Oui
- ☐ B Non

#QDLE#S#AB#10#

Je suis à l'aise avec le concepts de **probabilité conditionnelle** ...

- ☐ A Oui
- ☐ B Non

#QDLE#S#AB#10#

Je suis à l'aise avec le concepts de **processus aléatoire** ...

- A Oui
- B Non

#QDLE#S#AB#10#

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 **DSP des signaux codés en ligne**
  - ▷ Description
  - ▷ **Rappels sur les probabilités**
  - ▷ De la VA au processus aléatoire
- 4 Transmission en présence de bruit
- 5 Transmission sur fréquence porteuse
- 6 Modulation/ démodulation numérique

## Variable aléatoire

Une **Variable Aléatoire** (VA) traduit le résultat d'une expérience faisant intervenir le hasard on notera  $X(\omega)$  où  $\omega$  est appelé une épreuve. Les VA considérées dans ce cours peuvent être continues ou discrète.

Une variable aléatoire discrète  $X$  est une VA qui ne peut prendre sa valeur que dans un ensemble discret  $\mathcal{X}$ . Voici quelques exemples pour l'ensemble  $\mathcal{X}$ .

- $\mathcal{X} = \{0, 1\}$
- $\mathcal{X} = \{-1, 1\}$
- $\mathcal{X} = \{-3, -1, 1, 3\}$
- $\mathcal{X} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Une variable aléatoire continue  $X$  est une VA qui ne peut prendre sa valeur que dans un ensemble continu  $\mathcal{X}$ . Voici quelques exemples pour l'ensemble  $\mathcal{X}$ .

- $\mathcal{X} = \mathbb{R}$
- $\mathcal{X} = \mathbb{C}$
- $\mathcal{X} = [0, 1]$

## Probabilité - Loi de probabilité

Soit  $X$  une VA définie sur  $\mathcal{X}$  et  $A$  un ensemble mesurable de  $\mathcal{X}$ . On note  $\mathbb{P}(X \in A)$  la **probabilité que la VA  $X$  appartienne à l'ensemble  $A$** .

### Propriétés :

- $\mathbb{P}(X \in A) \in [0, 1]$ ,
- $\mathbb{P}(X \in \mathcal{X}) = 1$  et  $\mathbb{P}(X \in \emptyset) = 0$ ,
- Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles,

$$\mathbb{P}(X \in A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \in B) - \mathbb{P}(X \in A \cap B)$$

- Soient  $A$  et  $B$  deux ensembles disjoint (tels que  $A \cap B = \emptyset$ ),

$$\mathbb{P}(X \in A \cup B) = \mathbb{P}(X \in A) + \mathbb{P}(X \in B)$$

### Cas des VA discrètes

Soit  $\mathcal{X} = \{x_1, x_2, \dots, x_N\}$ , la loi de probabilité d'une VA discrète est entièrement déterminée par les probabilités  $\mathbb{P}(X = x_i)$  pour tous les  $x_i$ ,  $i \in [1, N]$ .

## Fonction de répartition et densité de probabilité

Dans le cas où  $X$  est une VA réelle ( $\mathcal{X} \subset \mathbb{R}$ ), on définit la **fonction de répartition** de cette VA comme la fonction

$$F_X(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$$

### Propriétés :

- $F_X(x) \in [0, 1]$ ,
- $F_X(-\infty) = 0$  et  $F_X(\infty) = 1$ ,
- Si  $x_1 \geq x_2$  alors  $F_X(x_1) \geq F_X(x_2)$ ,

On définit la **densité de probabilité** de cette VA comme la fonction

$$f_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx}$$

### Propriétés :

- $f_X(x) \geq 0$ ,
- $\mathbb{P}(x_1 \leq X \leq x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f_X(x) dx$ ,
- $\mathbb{P}(-\infty \leq X \leq +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$



## Espérance

### Cas des variables aléatoires discrètes :

Pour une VA discrète  $X$  dans l'ensemble  $\mathcal{X} = \{x_1, \dots, x_N\}$ , l'**espérance** de cette variable aléatoire est définie comme

$$\mathbb{E}[X] = \sum_{k=1}^N x_k \mathbb{P}(X = x_k)$$

Plus généralement, soit  $h$  une fonction,

$$\mathbb{E}[h(X)] = \sum_{k=1}^N h(x_k) \mathbb{P}(X = x_k)$$

### Cas des variables aléatoires continues :

Pour une VA discrète  $X$  continue, l'**espérance** de cette variable aléatoire est définie comme

$$\mathbb{E}[X] = \int_{\mathbb{R}} x f_X(x) dx$$

Plus généralement, soit  $h$  une fonction,

$$\mathbb{E}[h(X)] = \int_{\mathbb{R}} h(x) f_X(x) dx$$

## Propriétés de l'espérance

- $\mathbb{E}[aX + b] = a\mathbb{E}[X] + b$
- soient  $X$  et  $Y$  deux VA,  $\mathbb{E}[X + Y] = \mathbb{E}[X] + \mathbb{E}[Y]$
- soient  $X$  et  $Y$  deux VA indépendante,  $\mathbb{E}[XY] = \mathbb{E}[X]\mathbb{E}[Y]$

## Exemples

### Cas des variables aléatoires discrètes :

On considère  $\mathcal{X} = \{-1, 1\}$ , soit  $X$  une VA telle que  $\mathbb{P}(X = -1) = p, p \in [0, 1]$

- que vaut  $\mathbb{P}(X = 1)$  ?
- que vaut  $\mathbb{E}[X]$  ?

### Cas des variables aléatoires continues :

On considère  $\mathcal{X} = \mathbb{R}$ , soit  $X$  une VA de densité de probabilité

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{si } x \in [0, 2] \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

- Montrer que  $\int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x) dx = 1$
- que vaut  $\mathbb{E}[X]$  ?

## Variance

La variance d'une VA est définie comme

$$\text{VAR}(X) = \mathbb{E} \left[ |X - \mathbb{E}[X]|^2 \right] = \mathbb{E} \left[ |X|^2 \right] - |\mathbb{E}[X]|^2$$

L'écart-type est défini comme la racine carrée de la variance.

## Exercice - Loi uniforme discrète

On considère qu'une transmission s'effectue en utilisant des symboles BPSK. Ces symboles BPSK sont tirés aléatoirement dans un alphabet  $\{-g_0, g_0\}$ .

Soit  $A_n$  la VA représentant l'envoi d'un symbole. On suppose  $A_n$  uniformément distribué (ie  $\mathbb{P}(A_n = g_0) = \mathbb{P}(A_n = -g_0) = \frac{1}{2}$ )

- que vaut  $\mathbb{E}[X]$  ?
- que vaut  $VAR(A_n)$  ?

## Exemple de VA - Loi Gaussienne

La densité de probabilité d'une VA  $X$  Gaussienne de moyenne  $\mu$  et de variance  $\sigma^2$  est la suivante :

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

On note également :  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

### Propriétés :

→ soient  $X$  et  $Y$  telles que  $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$  et  $Y = aX + b$ , alors

$$Y \sim \mathcal{N}(a\mu + b, b^2\sigma^2)$$

→ En particulier, si  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$  et  $Y = \sigma X + \mu$ , alors  $Y \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$

→ on note

$$\Phi(u) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^u e^{-\frac{x^2}{2}} dx$$

→ Intervalles de confiance  $\pm\sigma \rightarrow 67\%$  et  $\pm 3\sigma \rightarrow 99\%$

## Exercice - Loi Gaussienne

Soit  $Z_n$  une VA vérifiant  $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .

Soit  $R_n$  une VA définie comme  $R_n = g_0 + Z_n$ .

- Quelle est la loi de  $R_n$  ?
- Calculer la probabilité  $\mathbb{P}(R_n < 0)$  en utilisant la fonction  $\Phi(x)$ .
- Supposons que  $g_0 = 1$  et que  $\sigma^2 = \frac{1}{16}$  évaluer dans ce cas  $\mathbb{P}(R_n < 0)$ .

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
  - ▷ Description
  - ▷ Rappels sur les probabilités
  - ▷ De la VA au processus aléatoire
- 4 Transmission en présence de bruit
- 5 Transmission sur fréquence porteuse
- 6 Modulation/ démodulation numérique



## Processus aléatoire

Un **processus aléatoire** (un signal aléatoire) peut être considéré comme une fonction de deux paramètres un **évènement**  $\omega$  et un **temps**  $t$ .

⇒ c'est une VA qui dépend du temps et où les densité de probabilité, moyenne et variance ... peuvent varier en fonction du temps. Un processus aléatoire sera noté  $X(\omega, t)$  (processus à temps continu) ou  $X(\omega, k)$  (processus à temps discret).

Par la suite, on omettra la variable  $\omega$  et on notera  $X(t)$  et  $X(k)$  (ou  $X_k$ )

### Remarque

Un PA peut être à valeurs discrètes ou continues et à temps discret, continu.

## Moyenne et fonction d'autocorrélation d'un processus

En général, on caractérise un PA par sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation.

- On définit la moyenne d'ensemble (moyenne spatiale ou espérance) d'un PA comme :

$$\mathbb{E} [X(t)] = \int_{-\infty}^{+\infty} x f_{X(t)}(x) dx$$

Où  $f_{X(t)}(x)$  est la densité de probabilité à l'instant "t"

## Moyenne et fonction d'autocorrélation d'un processus

- On définit la fonction d'autocorrélation d'un PA comme :

$$R_X(t_1, t_2) = \mathbb{E} [X(t_1)X^*(t_2)]$$

Souvent, on préférera écrire

$$R_X(t, \tau) = \mathbb{E} [X(t)X^*(t - \tau)]$$

La fonction d'autocorrélation permet de **caractériser le lien entre deux instants**  $t_1$  et  $t_2$  d'un PA.

Généralement, on est conduit à émettre des hypothèses sur le PA afin de simplifier les calculs de sa moyenne et de son autocorrélation. Pour cela on fait l'hypothèse de **stationnarité**

## Stationnarité au sens large

Un PA est dit stationnaire au sens large si sa moyenne et sa fonction d'autocorrélation ne dépendent pas de  $t$

$$\rightarrow m_X(t) = m_X = \text{constante}$$

$$\rightarrow R_X(t, \tau) = R_X(\tau)$$

### Quelques propriétés de $R_X(\tau)$

$$\rightarrow \text{si } X(t) \in \mathbb{R} \text{ alors, } R_X(\tau) = R_X(-\tau) \text{ (parité de la fonction)}$$

$$\rightarrow \text{si } X(t) \in \mathbb{C} \text{ alors, } R_X(\tau) = R_X^*(-\tau) \text{ (symétrie hermitienne)}$$

$$\rightarrow \forall \tau \quad |R_X(\tau)| \leq R_X(0) \text{ (max en 0)}$$

$$\rightarrow \text{La puissance moyenne du PA est définie comme } P_X = \mathbb{E} [|X(t)|^2] = R_X(0)$$

## Densité Spectrale de Puissance

La Densité Spectrale de Puissance (DSP) caractérise la distribution de l'énergie en fréquence d'un PA. C'est le pendant de la transformée de Fourier pour les signaux non aléatoires (déterministes).

Pour les PA stationnaires au sens large, le théorème de Wiener Kintchine montre que la DSP s'obtient en calculant la **TF de la fonction d'autocorrélation**. Ainsi, la DSP est obtenue comme

$$\Gamma_X(f) = TF(R_X(\tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} R_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

pour les PA à temps continus et pour les PA à temps discrets :

$$\Gamma_X(f) = TFD(R_X(k)) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} R_X(k) e^{-j2\pi f k T_e}$$

où  $T_e$  est la période d'échantillonnage.

## DSP des signaux cyclo-stationnaires

Sur la couche PHY les signaux que nous manipulons sont souvent **cyclostationnaire**.

Un PA est dit **cyclostationnaire** (au sens large) de période  $T_s$  si ces propriétés statistiques sont périodiques de période  $T_s$

- $m_X(t) = m_X(t + T_s)$
- $R_X(t, \tau) = R_X(t + T_s, \tau)$ .

Pour les PA cyclo-stationnaires au sens large, la DSP s'obtient en calculant

$$\Gamma_X(f) = TF(\tilde{R}_X(\tau)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \tilde{R}_X(\tau) e^{-j2\pi f\tau} d\tau$$

où

$$\tilde{R}_X(\tau) = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} R_X(t, \tau) dt$$

est l'autocorrélation moyennée sur une période de cyclostationnarité.

## Formule du filtrage d'un PA

- Le signal  $y(t)$  obtenu par filtrage d'un PA  $x(t)$  par le filtre linéaire invariant par décalage  $h(t)$  est un PA.
- $y(t)$  conserve les propriétés de stationnarité, cyclostationnarité de  $x(t)$ .
- On montre en particulier que  $\Gamma_Y(f) = |H(f)|^2 \Gamma_X(f)$

## Formule de Bennett

Soit  $A_m$  un processus aléatoire à temps discret stationnaire et  $X(t)$  défini comme

$$X(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} A_m h(t - mT_s)$$

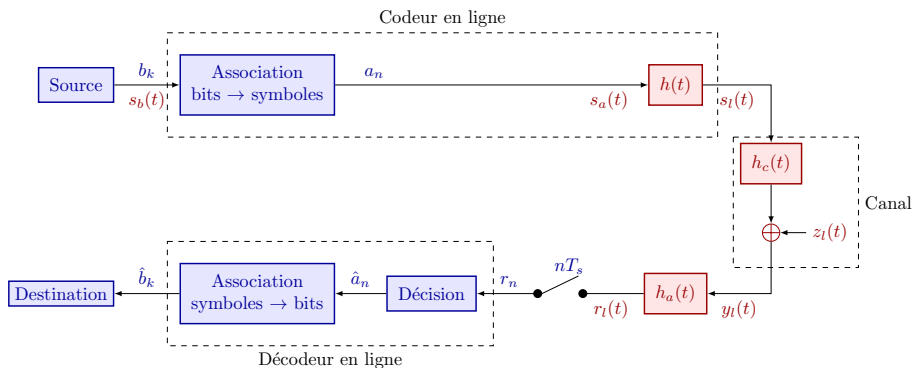
alors

- $X(t)$  est cyclostationnaire de période  $T_s$
- La DSP de  $X(t)$  est donnée par :

$$\Gamma_X(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} R_A[m] e^{-j2\pi f m T_s} |H(f)|^2$$

## Exercice

On considère la chaîne de communication suivante



Calculer la DSP de  $s_l(t)$  lorsque  $h(t)$  est le filtre porte entre 0 et  $T_s$ .



# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 **Transmission en présence de bruit**
  - ▷ Cas d'une modulation binaire
  - ▷ Cas d'une modulation M-aire
  - ▷ Récepteur optimal
  - ▷ Partage optimal du canal de Nyquist
  - ▷ Lien entre  $P_b$  et  $E_b/N_0$
- 5 Transmission sur fréquence porteuse

## Probabilité d'erreur symbole/binaire

**Probabilité d'erreur symbole** : probabilité qu'un symbole décidé au récepteur ("symbole reçu")  $\hat{A}_n$  soit différent du symbole émis  $A_n$  correspondant.

$$P_s = \mathbb{P}(\hat{A}_n \neq A_n)$$

**Probabilité d'erreur binaire** : probabilité qu'un bit décidé au récepteur ("bit reçu")  $\hat{B}_k$  soit différent du bit émis  $B_k$  correspondant.

$$P_b = \mathbb{P}(\hat{B}_k \neq B_k)$$

## Probabilité d'erreur symbole/binaire

**Probabilité d'erreur symbole** : probabilité qu'un symbole décidé au récepteur ("symbole reçu")  $\hat{A}_n$  soit différent du symbole émis  $A_n$  correspondant.

$$\begin{aligned} P_s &= \mathbb{P}(\hat{A}_n \neq A_n) \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(A_n = a) \mathbb{P}(\hat{A}_n \neq A_n | A_n = a) \end{aligned}$$

**Probabilité d'erreur binaire** : probabilité qu'un bit décidé au récepteur ("bit reçu")  $\hat{B}_k$  soit différent du bit émis  $B_k$  correspondant.

$$P_b = \mathbb{P}(\hat{B}_k \neq B_k)$$

## Probabilité d'erreur symbole/binaire

**Probabilité d'erreur symbole** : probabilité qu'un symbole décidé au récepteur ("symbole reçu")  $\hat{A}_n$  soit différent du symbole émis  $A_n$  correspondant.

$$\begin{aligned} P_s &= \mathbb{P}(\hat{A}_n \neq A_n) \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(A_n = a) \mathbb{P}(\hat{A}_n \neq A_n | A_n = a) \end{aligned}$$

**Probabilité d'erreur binaire** : probabilité qu'un bit décidé au récepteur ("bit reçu")  $\hat{B}_k$  soit différent du bit émis  $B_k$  correspondant.

$$\begin{aligned} P_b &= \mathbb{P}(\hat{B}_k \neq B_k) \\ &= \mathbb{P}(B_k = 0) \mathbb{P}(\hat{B}_k \neq B_k | B_k = 0) + \mathbb{P}(B_k = 1) \mathbb{P}(\hat{B}_k \neq B_k | B_k = 1) \end{aligned}$$

## Probabilité d'erreur symbole/binaire

**Probabilité d'erreur symbole** : probabilité qu'un symbole décidé au récepteur ("symbole reçu")  $\hat{A}_n$  soit différent du symbole émis  $A_n$  correspondant.

$$\begin{aligned} P_s &= \mathbb{P}(\hat{A}_n \neq A_n) \\ &= \sum_{a \in \mathcal{A}} \mathbb{P}(A_n = a) \mathbb{P}(\hat{A}_n \neq A_n | A_n = a) \end{aligned}$$

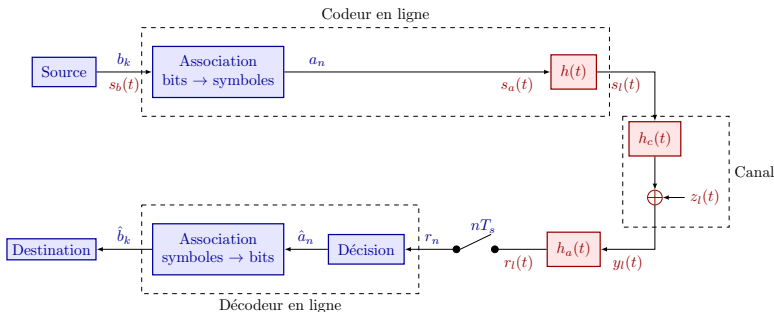
**Probabilité d'erreur binaire** : probabilité qu'un bit décidé au récepteur ("bit reçu")  $\hat{B}_k$  soit différent du bit émis  $B_k$  correspondant.

$$\begin{aligned} P_b &= \mathbb{P}(\hat{B}_k \neq B_k) \\ &= \mathbb{P}(B_k = 0) \mathbb{P}(\hat{B}_k \neq B_k | B_k = 0) + \mathbb{P}(B_k = 1) \mathbb{P}(\hat{B}_k \neq B_k | B_k = 1) \\ &= \mathbb{P}(B_k = 0) \mathbb{P}(\hat{B}_k = 1 | B_k = 0) + \mathbb{P}(B_k = 1) \mathbb{P}(\hat{B}_k = 0 | B_k = 1) \end{aligned}$$

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence de bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 **Transmission en présence de bruit**
  - ▷ Cas d'une modulation binaire
  - ▷ Cas d'une modulation M-aire
  - ▷ Récepteur optimal
  - ▷ Partage optimal du canal de Nyquist
  - ▷ Lien entre  $P_b$  et  $E_b/N_0$
- 5 Transmission sur fréquence porteuse

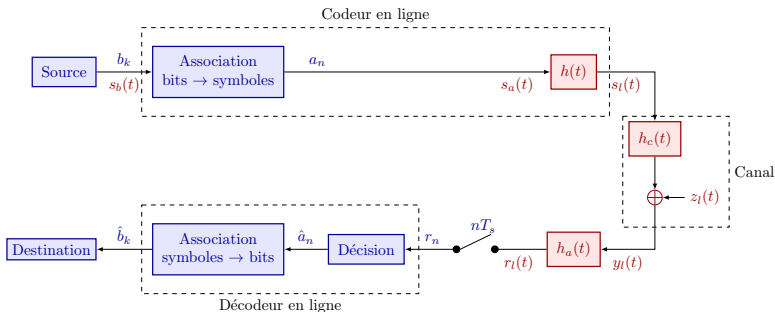
# Cas d'une modulation binaire



## Hypothèses :

→ le filtre global  $g(t) = (h \star h_c \star h_a)(t)$  vérifie le critère de Nyquist ( $g(kT_s) = g_0\delta_k$ ),

# Cas d'une modulation binaire



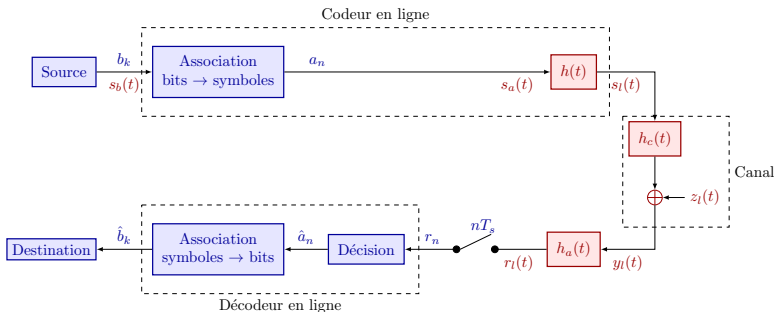
## Hypothèses :

→ le filtre global  $g(t) = (h \star h_c \star h_a)(t)$  vérifie le critère de Nyquist ( $g(kT_s) = g_0\delta_k$ ),

$$\Rightarrow \text{Signal reçu : } R_n = g_0 A_n + Z'_n$$



# Cas d'une modulation binaire



## Hypothèses :

→ le filtre global  $g(t) = (h \star h_c \star h_a)(t)$  vérifie le critère de Nyquist ( $g(kT_s) = g_0\delta_k$ ),

$$\Rightarrow \text{Signal reçu : } R_n = g_0 A_n + Z'_n$$

→ les bits  $B_k$  sont indépendants et identiquement distribués tels que

$$\mathbb{P}(B_k = 0) = p_0 \text{ et } \mathbb{P}(B_k = 1) = p_1 = 1 - p_0,$$

→ les symboles  $A_n$  sont indépendants et identiquement distribués dans  $\mathcal{A} = \{-1, 1\}$ ,

→ les échantillons de bruit  $Z'_n$  sont indépendants des symboles émis  $A_n$  et  $Z'_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$

# Quizz time!

**Sortez vos téléphones !**

- Soit  $A$  une variable aléatoire dans l'alphabet de symboles BPSK  $\{-1, 1\}$ .
- Soit  $Z$  une variable aléatoire telle que  $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .
- $A$  et  $Z$  sont indépendants.
- On définit la variable aléatoire  $R = g_0 A + Z$ ,  $g_0 \in \mathbb{R}^+$ .

Quelle est la loi de  $R$  conditionnellement à  $A = 1$  ?

- A**  $\mathcal{N}(g_0, \sigma^2)$
- B**  $\mathcal{N}(-g_0, \sigma^2)$
- C**  $\mathcal{N}(g_0, g_0^2 + \sigma^2)$
- D**  $\mathcal{N}(g_0, g_0^2 \sigma^2)$

#QDLE#Q#A\*BCD#60#

- Soit  $A$  une variable aléatoire dans l'alphabet de symboles BPSK  $\{-1, 1\}$ .
- Soit  $Z$  une variable aléatoire telle que  $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .
- $A$  et  $Z$  sont indépendants.
- On définit la variable aléatoire  $R = g_0 A + Z$ ,  $g_0 \in \mathbb{R}^+$ .

Que vaut la probabilité d'erreur conditionnement à  $A = 1$  si la décision est prise selon la règle :  $R \geq \gamma \Rightarrow \hat{A} = 1$  et  $R < \gamma \Rightarrow \hat{A} = -1$  ?

- ☐ A  $\mathbb{P}(R < \gamma)$
- ☐ B  $\mathbb{P}(R > \gamma)$
- ☐ C  $\mathbb{P}(R < \gamma | A = 1)$
- ☐ D  $\mathbb{P}(R > \gamma | A = 1)$

#QDLE#Q#ABC\*D#60#

**Signal reçu :**  $R_n = g_0 A_n + Z'_n$

On suppose pour la suite  $g_0 \in \mathbb{R}^+$ .

**Décision :**

$$\rightarrow R_n \geq \gamma \Rightarrow \hat{A}_n = 1, \hat{B}_n = 1$$

$$\rightarrow R_n \leq \gamma \Rightarrow \hat{A}_n = -1, \hat{B}_n = 0$$

**Remarque :** Dans le cas binaire ( $M=2$ ),  $P_b = P_s$ .

**Signal reçu** :  $R_n = g_0 A_n + Z'_n$

On suppose pour la suite  $g_0 \in \mathbb{R}^+$ .

**Décision** :

$$\rightarrow R_n \geq \gamma \Rightarrow \hat{A}_n = 1, \hat{B}_n = 1$$

$$\rightarrow R_n \leq \gamma \Rightarrow \hat{A}_n = -1, \hat{B}_n = 0$$

**Comment choisir  $\gamma$  afin de minimiser  $P_b$  ?**

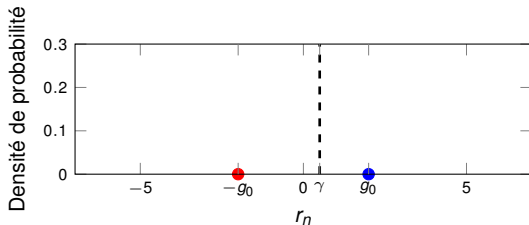
**Remarque** : Dans le cas binaire ( $M=2$ ),  $P_b = P_s$ .

En reprenant la formule précédente

$$P_b = p_0 \mathbb{P}(\hat{B}_n = 1 | B_n = 0) + p_1 \mathbb{P}(\hat{B}_n = 0 | B_n = 1)$$

$$\mathbb{P}(\hat{B}_k = 1 | B_k = 0)$$

$$\mathbb{P}(\hat{B}_n = 0 | B_n = 1)$$



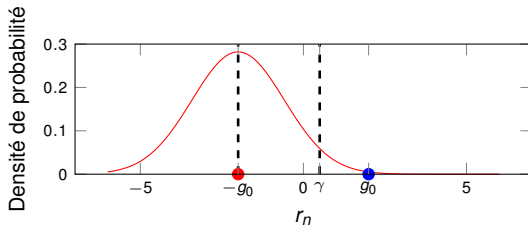
En reprenant la formule précédente

$$P_b = p_0 \mathbb{P}(\hat{B}_n = 1 | B_n = 0) + p_1 \mathbb{P}(\hat{B}_n = 0 | B_n = 1)$$

$$\mathbb{P}(\hat{B}_k = 1 | B_k = 0)$$

$$R_n = -g_0 + Z'_n \Rightarrow R_n \sim f_{Z'}(z + g_0)$$

$$\mathbb{P}(\hat{B}_n = 0 | B_n = 1)$$





En reprenant la formule précédente

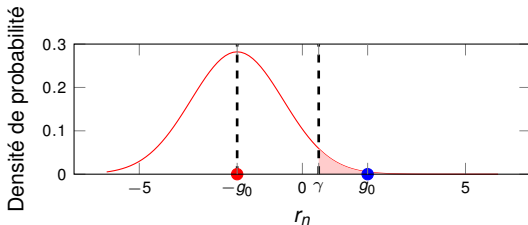
$$P_b = p_0 \mathbb{P}(\hat{B}_n = 1 | B_n = 0) + p_1 \mathbb{P}(\hat{B}_n = 0 | B_n = 1)$$

$$\mathbb{P}(\hat{B}_k = 1 | B_k = 0)$$

$$R_n = -g_0 + Z'_n \Rightarrow R_n \sim f_{Z'}(z + g_0)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\hat{B}_n = 1 | B_n = 0) &= \mathbb{P}(R_n \geq \gamma | B_n = 0) \\ &= \mathbb{P}(-g_0 + Z'_n \geq \gamma) \\ &= \int_{\gamma}^{+\infty} f_{Z'}(z + g_0) dz \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\hat{B}_n = 0 | B_n = 1)$$



En reprenant la formule précédente

$$P_b = p_0 \mathbb{P}(\hat{B}_n = 1 | B_n = 0) + p_1 \mathbb{P}(\hat{B}_n = 0 | B_n = 1)$$

$$\mathbb{P}(\hat{B}_k = 1 | B_k = 0)$$

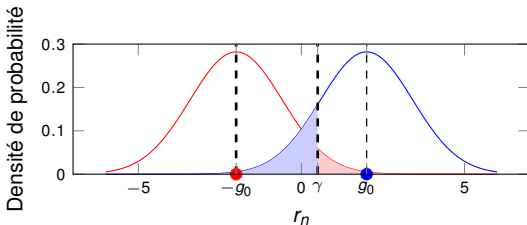
$$R_n = -g_0 + Z'_n \Rightarrow R_n \sim f_{Z'}(z + g_0)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\hat{B}_n = 1 | B_n = 0) &= \mathbb{P}(R_n \geq \gamma | B_n = 0) \\ &= \mathbb{P}(-g_0 + Z'_n \geq \gamma) \\ &= \int_{\gamma}^{+\infty} f_{Z'}(z + g_0) dz \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}(\hat{B}_n = 0 | B_n = 1)$$

$$R_n = g_0 + Z'_n \Rightarrow R_n \sim f_{Z'}(z - g_0)$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\hat{B}_n = 0 | B_n = 1) &= \mathbb{P}(R_n \leq \gamma | B_k = 1) \\ &= \mathbb{P}(g_0 + Z'_n \leq \gamma) \\ &= \int_{-\infty}^{\gamma} f_{Z'}(z - g_0) dz \end{aligned}$$



On obtient finalement

$$\begin{aligned} P_b(\gamma) &= p_0 \mathbb{P}(\hat{B}_n = 1 | B_n = 0) + p_1 \mathbb{P}(\hat{B}_n = 0 | B_n = 1) \\ &= p_0 \int_{\gamma}^{+\infty} f_Z(z + g_0) dz + p_1 \int_{-\infty}^{\gamma} f_Z(z - g_0) dz \end{aligned}$$

### Choix optimal pour $\gamma^*(p_0)$

Minimiser  $P_b$  revient à annuler  $\frac{dP_b(\gamma)}{d\gamma}$ , ainsi :

$$-p_0 f_Z(z + g_0) + p_1 f_Z(z - g_0) = 0 \Rightarrow \frac{f_Z(\gamma - g_0)}{f_Z(\gamma + g_0)} = \frac{p_0}{p_1}$$

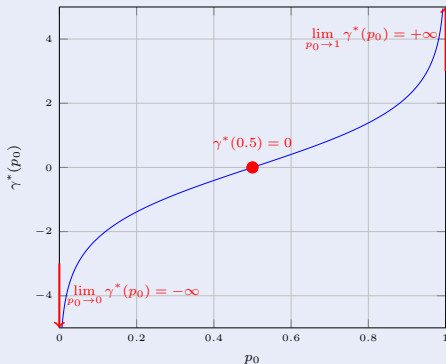
Comme le bruit considéré est gaussien, centré de variance  $\sigma^2$

$$f_Z(z) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{\frac{-z^2}{2\sigma^2}}$$

On en déduit alors que :

$$\gamma^*(p_0) = \log\left(\frac{p_0}{1 - p_0}\right) \frac{\sigma^2}{2g_0}$$

# Évolution de $\gamma$



## Cas particuliers

- $\lim_{p_0 \rightarrow 0} \gamma^*(p_0) = -\infty$
- $\lim_{p_0 \rightarrow 1} \gamma^*(p_0) = +\infty$
- $\gamma^*(0.5) = 0 \Rightarrow$  si les symboles sont équiprobables ( $p_0 = p_1$ ), le seuil est au milieu.

# Quizz time!

**Sortez vos téléphones !**

- Soit  $A$  une variable aléatoire dans l'alphabet de symboles  $\{0, 1\}$ .
- Soit  $Z$  une variable aléatoire telle que  $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .
- $A$  et  $Z$  sont indépendants.
- On définit la variable aléatoire  $R = g_0 A + Z$ ,  $g_0 \in \mathbb{R}^+$ .
- Soit la règle de décision :  $R \geq \gamma \Rightarrow \hat{A} = 1$  et  $R < \gamma \Rightarrow \hat{A} = 0$

Si  $A$  est distribuée de manière uniforme, quelle est la valeur optimale de  $\gamma$  pour minimiser la probabilité d'erreur binaire ?

- ☐ A  $+\infty$
- ☐ B 1
- ☐ C 0.5
- ☐ D 0

#QDLE#Q#ABC\*D#60#

- Soit  $A$  une variable aléatoire dans l'alphabet de symboles  $\{0, 1\}$ .
- Soit  $Z$  une variable aléatoire telle que  $Z \sim \mathcal{N}(0, \sigma^2)$ .
- $A$  et  $Z$  sont indépendants.
- On définit la variable aléatoire  $R = g_0 A + Z$ ,  $g_0 \in \mathbb{R}^+$ .
- Soit la règle de décision :  $R \geq \gamma \Rightarrow \hat{A} = 1$  et  $R < \gamma \Rightarrow \hat{A} = 0$

Quelle est la "pire" valeur pour la probabilité d'erreur d'une décision binaire ?

- A 1
- B 0
- C 0.5
- D  $+\infty$

#QDLE#Q#AB\*CD#60#

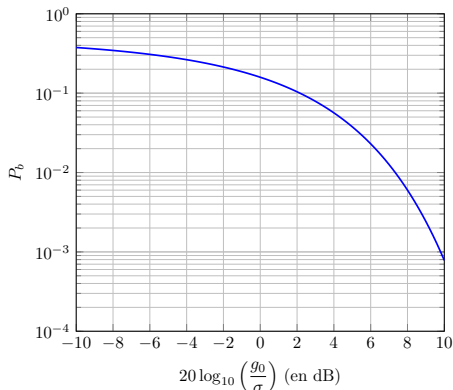
## Calcul de $P_b$ pour $p_0 = p_1 = 0.5$

En utilisant le seuil optimal  $\gamma = 0$ , on obtient :

$$\begin{aligned}P_b &= 0.5 \int_0^{+\infty} f_Z(z + g_0) dz + 0.5 \int_{-\infty}^0 f_Z(z - g_0) dz \\&= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z+g_0)^2}{2\sigma^2}} dz + 0.5 \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(z-g_0)^2}{2\sigma^2}} dz \\&= 0.5 \int_{\frac{g_0}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z'^2}{2}} dz' + 0.5 \int_{\frac{g_0}{\sigma}}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z'^2}{2}} dz' \\&= Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)\end{aligned}$$



## Tracé de $P_b = Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)$



Le rapport  $\frac{g_0}{\sigma}$  est appelé **Rapport Signal sur Bruit** (RSB ou SNR). C'est un paramètre important pour la couche PHY. Il est habituellement exprimé en dB. Ici,  $\frac{g_0}{\sigma}$  est un **rapport d'amplitudes**. On le rencontre également comme un rapport d'énergies noté  $\frac{E_b}{N_0}$  (voir plus loin dans le cours)

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence de bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 **Transmission en présence de bruit**
  - ▷ Cas d'une modulation binaire
  - ▷ **Cas d'une modulation M-aire**
  - ▷ Récepteur optimal
  - ▷ Partage optimal du canal de Nyquist
  - ▷ Lien entre  $P_b$  et  $E_b/N_0$
- 5 Transmission sur fréquence porteuse

## Probabilité d'erreur symbole

Supposons que la constellation soit la suivante  $\mathcal{A} = \{a_0, \dots, a_{M-1}\}$

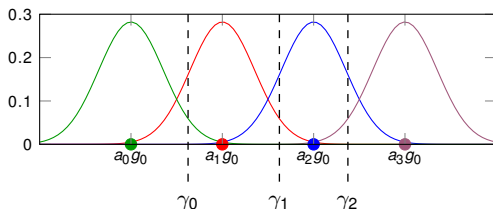
Alors  $P_s$  s'écrit

$$\begin{aligned} P_s &= \mathbb{P}(\hat{A}_n \neq A_n) \\ &= \sum_{i=0}^{M-1} \mathbb{P}(A_n = a_i) \mathbb{P}(\hat{A}_n \neq A_n | A_n = a_i) \end{aligned}$$

Si de plus les **symboles sont équiprobables**,  $\forall i \mathbb{P}(A_n = a_i) = \frac{1}{M}$  il vient que

$$P_s = \frac{1}{M} \sum_{i=0}^{M-1} \mathbb{P}(\hat{A}_n \neq A_n | A_n = a_i)$$

## Exemple 4 – PAM, $M = 4$

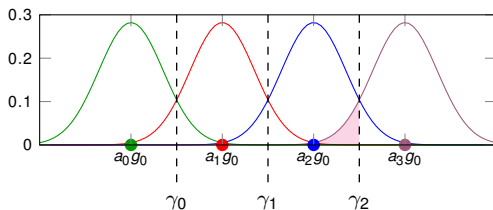


**Constellation** :  $\mathcal{A} = \{-3, -1, 1, 3\}$

Comme pour le cas binaire,

- les seuils optimaux  $(\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2)$  dépendent de toutes les probabilités  $\mathbb{P}(A_n = a_i)$
- **si tous les symboles sont équiprobables, les seuils optimaux se trouvent au milieu de chaque intervalle**

## Exemple 4 – PAM, $M = 4$



**Constellation** :  $\mathcal{A} = \{-3, -1, 1, 3\} \Rightarrow (\gamma_0, \gamma_1, \gamma_2) = (-2g_0, 0, 2g_0)$

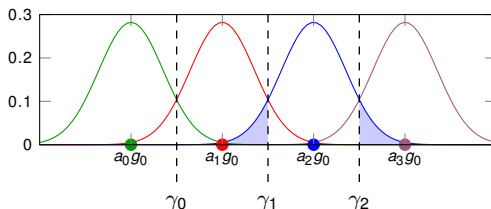
On en déduit les probabilités conditionnelles

$\Rightarrow$  **Aux extrémités** :

$$\mathbb{P}(\text{erreur} | A_n = a_0) = \mathbb{P}(\hat{A}_n \neq A_n | A_n = a_0) = \int_{\gamma_0}^{+\infty} f_{Z'}(z - a_0g_0) dz$$

$$\mathbb{P}(\text{erreur} | A_n = a_3) = \mathbb{P}(\hat{A}_n \neq A_n | A_n = a_3) = \int_{-\infty}^{\gamma_2} f_{Z'}(z - a_3g_0) dz$$

## Exemple 4 – PAM, $M = 4$

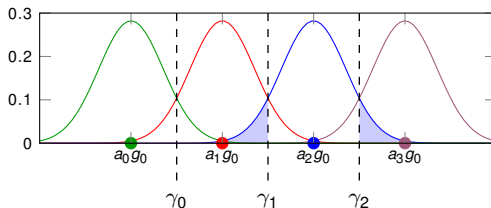


⇒ À l'intérieur :

$$\mathbb{P}(\text{erreur} | A_n = a_1) = \mathbb{P}(\hat{A}_n \neq A_n | A_n = a_1) = \int_{-\infty}^{\gamma_0} f_{Z'}(z - a_1 g_0) dz + \int_{\gamma_1}^{+\infty} f_{Z'}(z - a_1 g_0) dz$$

$$\mathbb{P}(\text{erreur} | A_n = a_2) = \mathbb{P}(\hat{A}_n \neq A_n | A_n = a_2) = \int_{-\infty}^{\gamma_1} f_{Z'}(z - a_2 g_0) dz + \int_{\gamma_2}^{+\infty} f_{Z'}(z - a_2 g_0) dz$$

## Exemple 4 – PAM, $M = 4$



À l'instar des résultats obtenus dans le cas binaire, on trouve (en utilisant les seuils optimaux)  $\Rightarrow$   
À l'intérieur :

$$\mathbb{P}(\text{erreur} | A_n = a_0) = \mathbb{P}(\text{erreur} | A_n = a_3) = Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)$$

$$\mathbb{P}(\text{erreur} | A_n = a_1) = \mathbb{P}(\text{erreur} | A_n = a_2) = 2Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)$$

Ainsi, pour  $M = 4$ , on trouve

$$P_s = \frac{3}{2} Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)$$

## Généralisation $\forall M, M - PAM$

Ainsi, quelque soit  $M$ , on trouve

$$P_s = 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)$$

### Cas particuliers :

- $M = 2 : P_s = Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)$
- $M = 4 : P_s = \frac{3}{2} Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)$
- $M \rightarrow \infty : P_s = 2Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)$



# Quizz time!

**Sortez vos téléphones !**

Nous venons de montrer les probabilités d'erreur symbole suivantes pour une modulation  $M - PAM$  avec des symboles équiprobables :

$$P_s = 2 \frac{M-1}{M} Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)$$

Soit  $\sigma^2 \in \mathbb{R}^{+*}$  et  $g_0 = 1$ . Laquelle de ces affirmations est correcte ?

- ☐ A  $P_s$  est une fonction croissante de  $M$ .
- ☐ B  $\forall M, P_s < 1$
- ☐ C Ni A ni B
- ☐ D A et B

#QDLE#Q#ABCD\*#60#

## Expression de $P_b \forall M, M - PAM$

Pour un étiquetage quelconque, on peut montrer l'inégalité suivante

$$P_b \geq \frac{P_s}{\log_2(M)}$$

Pour un **étiquetage de Gray**

$$P_b \simeq \frac{P_s}{\log_2(M)}$$

Ainsi, quelque soit  $M$ , on trouve

$$P_b = 2 \frac{M-1}{\log_2(M)M} Q\left(\frac{g_0}{\sigma}\right)$$

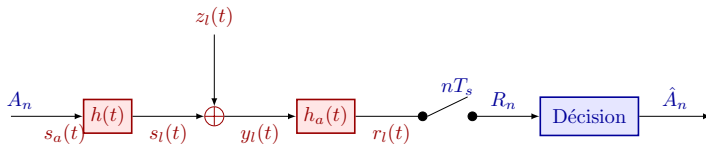
# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 **Transmission en présence de bruit**
  - ▷ Cas d'une modulation binaire
  - ▷ Cas d'une modulation M-aire
  - ▷ **Récepteur optimal**
  - ▷ Partage optimal du canal de Nyquist
  - ▷ Lien entre  $P_b$  et  $E_b/N_0$
- 5 Transmission sur fréquence porteuse

Précédemment, on a montré que la probabilité d'erreur binaire  $P_b$  était une fonction décroissante du rapport  $\frac{g_0}{\sigma}$ .

Ainsi, maximiser  $\Rightarrow$  minimiser  $P_b$ .

Un **filtre adapté** est un filtre linéaire qui maximise le rapport  $\frac{g_0}{\sigma}$  aux instants de décisions  $nT_s$



Si  $g(t) = (h \star h_a)(t)$  vérifie le critère de Nyquist alors

$$R_n = g_0 A_n + Z'_n$$

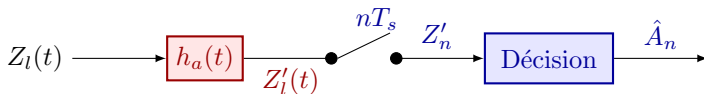
Où  $g_0$  est défini par

$$g_0 = \int_{-\infty}^{\infty} h(u) h_a(-u) du$$

ou encore par

$$g_0 = \int_{-\infty}^{\infty} H(f) H_a(f) df$$

avec  $H(f)$  et  $H_a(f)$  les TF de  $h$  et  $h_a$ .



On définit  $Z_l(t)$  comme un processus aléatoire, stationnaire, gaussien, centré, tel que sa DSP vérifie  $\Gamma_{Z_l}(f) = \frac{N_0}{2}$ .

**On cherche à déterminer**  $\sigma^2 = R_{Z'_n}(0) = \mathbb{E} [|Z_l(nT_s)|^2]$ .

En utilisant la formule de filtrage on obtient alors

$$m_{Z'_l}(t) = 0$$

et

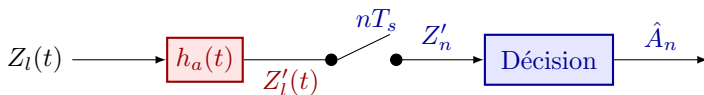
$$\Gamma_{Z'_l}(f) = \frac{N_0}{2} |H_a(f)|^2.$$

En utilisant la DSP de  $Z'_l(t)$  on obtient

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |H_a(f)|^2 df = \frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h_a(t)|^2 dt$$

où la seconde égalité est obtenue en utilisant l'égalité de Parseval.

## Expression du filtre adapté



En remplaçant  $g_0$  et  $\sigma$ , on obtient

$$\frac{g_0^2}{\sigma^2} = \frac{\left( \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) h_a(-u) dt \right)^2}{\frac{N_0}{2} \int_{-\infty}^{+\infty} |h_a(t)|^2 dt}$$

En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwartz :

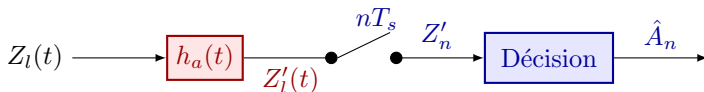
$$\left( \int_{-\infty}^{+\infty} u(t) v(t) dt \right)^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} u(t)^2 dt \int_{-\infty}^{+\infty} v(t)^2 dt$$

avec égalité si  $u(x) = \lambda v(x)$ . On en déduit

$$\left( \frac{g_0^2}{\sigma^2} \right)_{\max} = \frac{2}{N_0} \int_{-\infty}^{+\infty} |h(t)|^2 dt, \text{ pour } h_a(t) = \lambda h(-t) (\forall \lambda \in \mathbb{R}^+)$$



## Expression de $P_{b,min}$



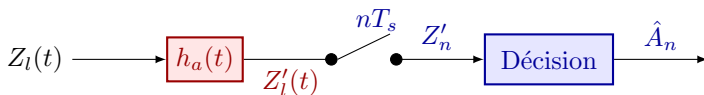
Le SNR sera maximal pour  $h_a(t) = h^*(-t)$ . En écrivant  $E_h = \int_{\mathbb{R}} |h|^2(t) dt$ , on obtient

$$\left( \frac{g_0^2}{\sigma^2} \right)_{max} = \frac{2E_h}{N_0}$$

De plus la probabilité d'erreur binaire est donnée par

$$P_{b,min} = 2 \frac{M-1}{M \log_2(M)} Q \left( \sqrt{\frac{2E_h}{N_0}} \right)$$

## Remarques

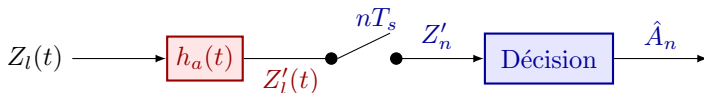


- le filtre global  $g(t) = \int_{\mathbb{R}} h(u)h_a(t-u)du = \int_{\mathbb{R}} h(u)h(u-t)du = R_h(t)$  **auto-corrélation déterministe de  $h(t)$** .
- $h(t)$  causal  $\Rightarrow h_a(t)$  non-causal.  
 En pratique, on rend ce filtre causal en retardant sa réponse impulsionnelle d'une durée  $T \geq T_h$  ( $T_h$  étant la "longueur" de  $h(t)$ ).  
 En général on prend  $h_a(t) = h(t - T_h)$ . Donc  $g(t) = R_h(t - T_h)$ , ce qui implique que l'instant optimal de décision est en  $t = T_h$  car  $R_h(t)$  est max en zéro.

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence de bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 **Transmission en présence de bruit**
  - ▷ Cas d'une modulation binaire
  - ▷ Cas d'une modulation M-aire
  - ▷ Récepteur optimal
  - ▷ **Partage optimal du canal de Nyquist**
  - ▷ Lien entre  $P_b$  et  $E_b/N_0$
- 5 Transmission sur fréquence porteuse

## Filtres demi-Nyquist



Dans le cas où la réponse en fréquence du canal  $H_l(f)$  peut être considérée comme "plate" (hypothèse de cette section), la réponse globale du système est  $G(f) = H(f)H_a(f)$ . Afin d'avoir un canal de Nyquist  $N_y(f)$ , une solution simple consiste à prendre :

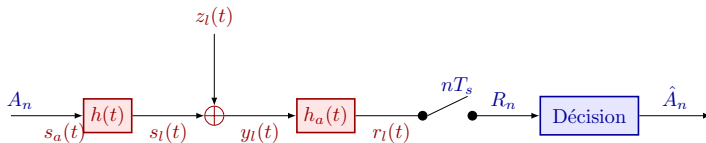
$$H(f) = H_a(f) = \sqrt{N_y(f)}$$

On va donc utiliser le même filtre à l'émission et à la réception.  
Ce résultat ne pourra être mise en œuvre que si  $g(t)$  possède une symétrie paire.  
⇒ On appelle  $h(t)$ , **un filtre demi-Nyquist**

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 **Transmission en présence de bruit**
  - ▷ Cas d'une modulation binaire
  - ▷ Cas d'une modulation M-aire
  - ▷ Récepteur optimal
  - ▷ Partage optimal du canal de Nyquist
  - ▷ Lien entre  $P_b$  et  $E_b/N_0$
- 5 Transmission sur fréquence porteuse

# Expression de $P_{b,min}$ en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$



Dans les parties précédentes, on a montré

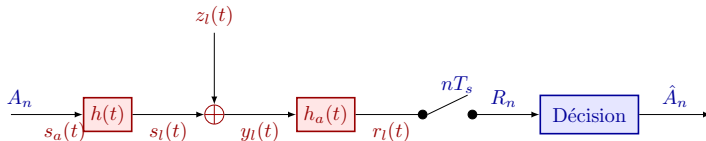
$$P_{b,min} = 2 \frac{M-1}{M \log_2(M)} Q \left( \sqrt{\frac{2E_h}{N_0}} \right)$$

On cherche maintenant à exprimer  $P_{b,min}$  en fonction de  $\frac{E_b}{N_0}$  où  $E_b$  est l'**énergie moyenne par bit d'information transmis** et est définie par

$$E_b = PT_b = \frac{P}{D_b}$$

où  $P$  représente la puissance moyenne du **signal utile transmis** et  $T_b$  est le temps bit.

# Expression de $P_{b,min}$ en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$



Le signal transmis s'écrit

$$s_l(t) = \sum_n A_n h(t - nT_s)$$

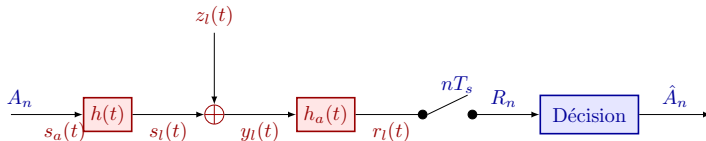
Comme  $s_l(t)$  est un signal cyclo-stationnaire, on montre que

$$P = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{s_l}(f) df$$

Aussi, on a montré précédemment que  $\Gamma_{s_l}(f) = \frac{\sigma_a^2 |H(f)|^2}{T_s}$ . En conséquence, on obtient

$$P = \frac{\sigma_a^2 E_h}{T_s}$$

# Expression de $P_{b,min}$ en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$



Le signal transmis s'écrit

$$s_l(t) = \sum_n A_n h(t - nT_s)$$

Comme  $s_l(t)$  est un signal cyclo-stationnaire, on montre que

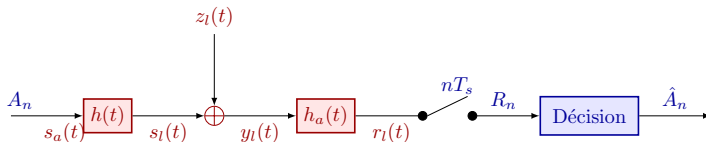
$$P = \int_{\mathbb{R}} \Gamma_{s_l}(f) df$$

Aussi, on a montré précédemment que  $\Gamma_{s_l}(f) = \frac{\sigma_a^2 |H(f)|^2}{T_s}$ . En conséquence, on obtient

$$P = \frac{\sigma_a^2 E_h}{T_s}$$



# Expression de $P_{b,min}$ en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$



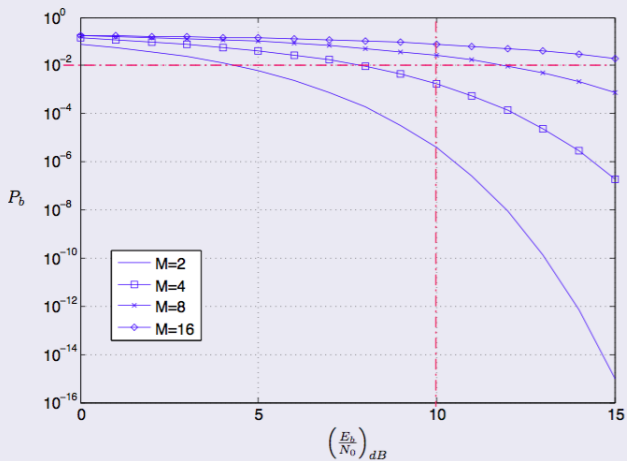
Ainsi :  $E_b = PT_b = \frac{\sigma_a^2 E_h}{T_s} T_b = \frac{\sigma_a^2 E_h}{\log_2(M)}$

On en déduit

$$P_{b,min} = 2 \frac{M-1}{M \log_2(M)} Q \left( \sqrt{\frac{2 \log_2(M)}{\sigma_a^2} \frac{E_b}{N_0}} \right)$$

Pour une  $M - PAM$ ,  $\sigma_a^2 = \frac{M^2-1}{3}$  On en déduit

$$P_{b,min} = 2 \frac{M-1}{M \log_2(M)} Q \left( \sqrt{\frac{6 \log_2(M)}{M^2-1} \frac{E_b}{N_0}} \right)$$



# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 Transmission en présence de bruit
- 5 **Transmission sur fréquence porteuse**
  - ▷ Introduction
  - ▷ Enveloppe complexe d'un signal passe bande
  - ▷ Enveloppe complexe par projections orthogonales
- 6 Modulation/ démodulation numérique

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 Transmission en présence de bruit
- 5 **Transmission sur fréquence porteuse**
  - ▷ Introduction
  - ▷ Enveloppe complexe d'un signal passe bande
  - ▷ Enveloppe complexe par projections orthogonales
- 6 Modulation/ démodulation numérique

# Transmission sur fréquence porteuse

Dans cette partie, nous nous intéressons aux **communications en bande transposée** aussi appelées **communications sur fréquence porteuse**.

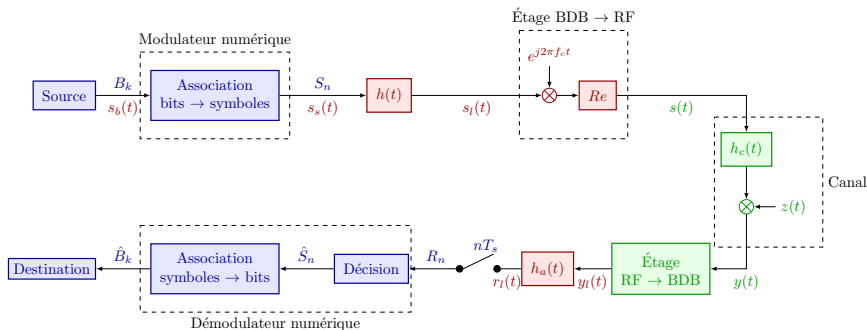
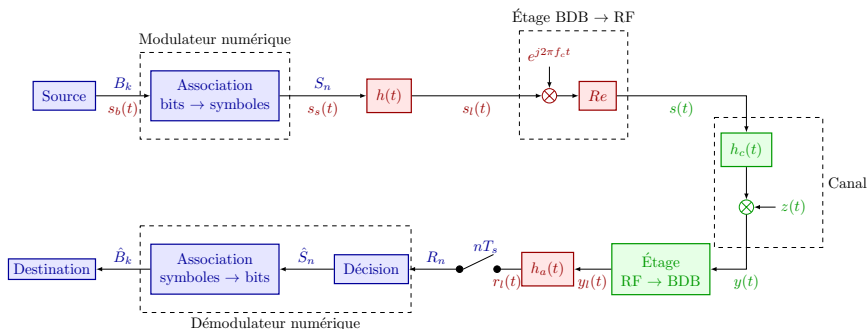
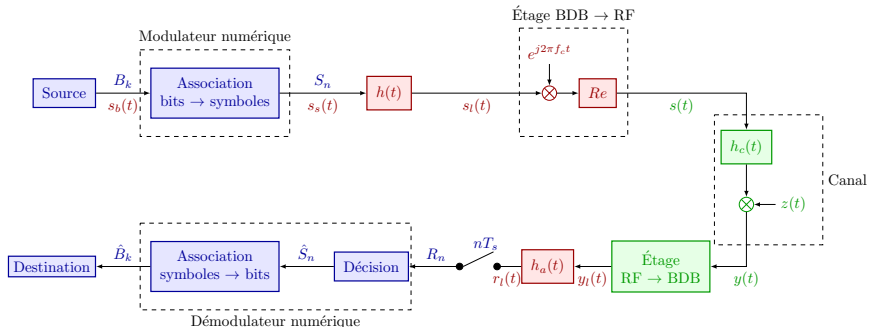


Figure – Modèle complexe de l'architecture sur fréquence porteuse



### Définitions :

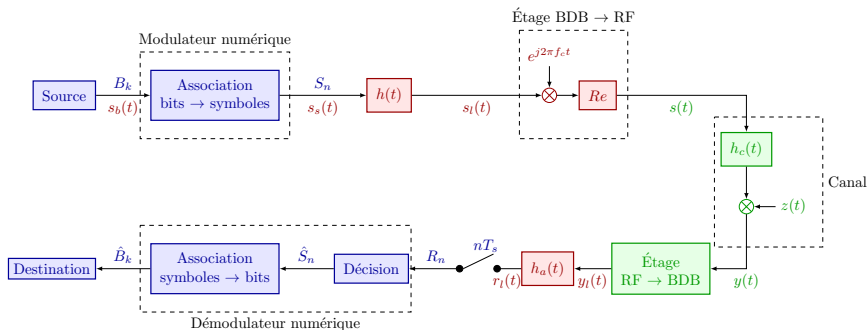
- $\rightarrow f_c$  : **fréquence porteuse** en Hz,
- $\rightarrow S_k = A_k e^{j\phi_k}$  : **symboles complexes**,
- $\rightarrow s_s(t), s_l(t), y_l(t), r_l(t)$  sont des **signaux complexes** ( $\in \mathbb{C}$ ),
- $\rightarrow s(t), y(t), z(t)$  sont des **signaux réels** ( $\in \mathbb{R}$ ),



## Objectifs :

- montrer qu'il est possible d'étendre les classes de symboles de  $\mathbb{R}$  à  $\mathbb{C}$
- montrer que le degré de liberté introduit par la modulation en  $e^{j2\pi f_c t}$  permet de "jouer" amplitudes et/ou phases et/ou fréquences
- présenter les architectures de base des communications numériques pour les transmissions sans-fil

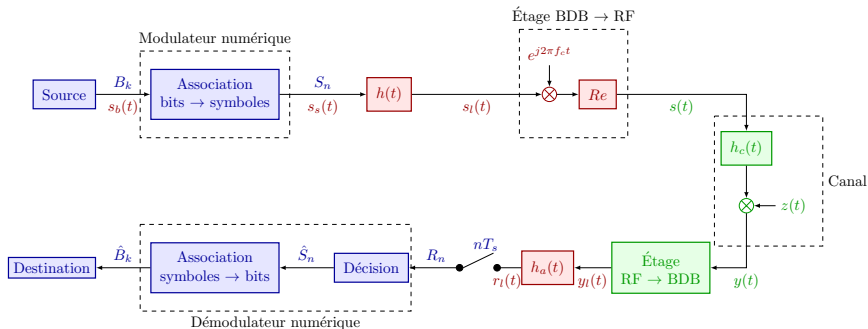
# Pourquoi communiquer sur fréquence porteuse ?



- Physique (taille des antennes, propagation des ondes électro-magnétiques dans l'air/le vide, etc...)
- Débits atteignables
- Standards de communications



# Hypothèses



→ Le modèle de canal considéré est le suivant

$$H_c(f) = \begin{cases} 1, & \text{si } |f - f_c| \leq \frac{B_c}{2} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}$$

où  $H_c(f)$  est la transformée de Fourier de  $h_c(t)$  et  $B_c$  représente la **bande passante** du canal (aussi appelé **bande de cohérence**)

→  $z(t) \sim \mathcal{N}(0, \sigma_z^2)$  et est blanc

→ la bande passante du signal  $s(t)$ , notée  $B$  vérifie  $B \leq B_c$

# Plan

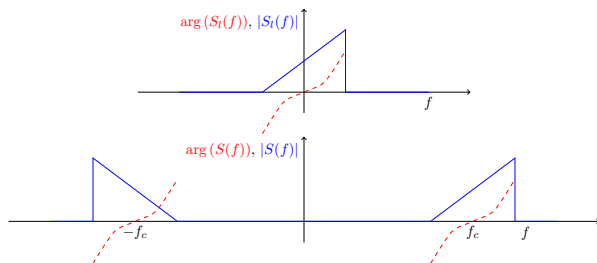
- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 Transmission en présence de bruit
- 5 Transmission sur fréquence porteuse**
  - ▷ Introduction
  - ▷ Enveloppe complexe d'un signal passe bande**
  - ▷ Enveloppe complexe par projections orthogonales
- 6 Modulation/ démodulation numérique

## Rappels

- Si  $s(t)$  est un **signal réel** alors sa Transformée de Fourier présente une **symétrie hermitienne**  
ie.  $S(f) = S^*(-f)$  où  $S(f) = TF(s(t)) \Rightarrow |S(f)|$  est pair et  $\arg(S(f))$  est impair
- $TF(s(t)e^{j2\pi f_c t}) = S(f - f_c)$

### Remarque :

Le spectre d'un signal réel étant symétrique, seule la connaissance de  $S(f)$  pour  $f \geq 0$  est nécessaire pour reconstruire  $S(f)$  et donc  $s(t)$



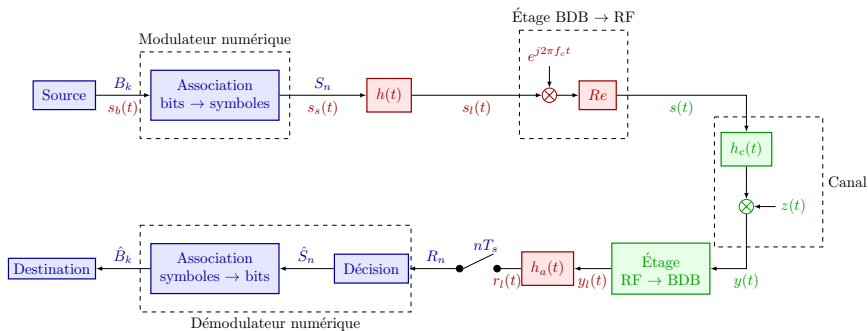
De cette approche, on conclut que pour tout signal passe bande  $s(t) \in \mathbb{R}$  correspond une unique enveloppe complexe  $s_I(t)$ . En conséquence, un signal passe bande se décompose comme

$$s(t) = \text{Re}(s_I(t)e^{j2\pi f_c t})$$

qui se réécrit

$$\begin{aligned} s(t) &= \text{Re}(s_I(t)) \cos(2\pi f_c t) - \text{Im}(s_I(t)) \sin(2\pi f_c t) \\ &= p(t) \cos(2\pi f_c t) - q(t) \sin(2\pi f_c t) \end{aligned}$$

- On retrouve l'expression initiale de  $s(t)$
- $p(t)$  module l'amplitude de la porteuse **en phase** (cosinus)
- $q(t)$  module l'amplitude de la porteuse **en quadrature** (sinus)

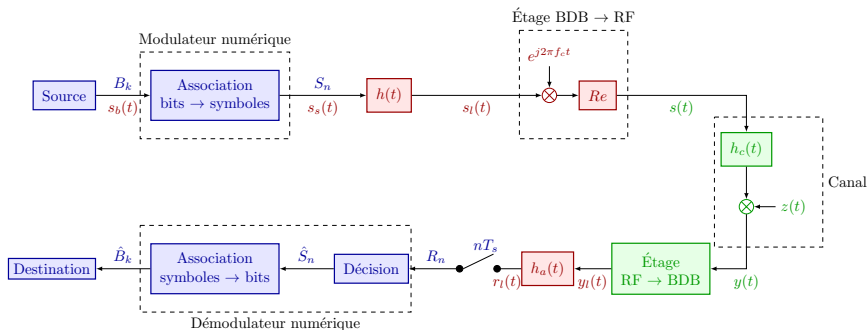


Le signal  $s(t)$  s'exprime de la façon suivante

$$s(t) = Re(s_l(t)e^{j2\pi f_c t}) = p(t) \cos(2\pi f_c t) - q(t) \sin(2\pi f_c t)$$

⇒  $p(t)$  et  $q(t)$  véhiculent le message binaire

Le signal complexe  $s_l(t) = p(t) + jq(t)$ , associé au signal réel  $s(t)$ , s'appelle son **enveloppe complexe par rapport à  $f_c$** .



Afin d'**extraire l'information** binaire contenue dans  $s(t)$ , il faut être capable d'**extraire l'enveloppe complexe**  $s_l(t)$  à partir du signal reçu  $y(t)$ .

$\Rightarrow$  Montrons comment réaliser cette opération.

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 Transmission en présence de bruit
- 5 **Transmission sur fréquence porteuse**
  - ▷ Introduction
  - ▷ Enveloppe complexe d'un signal passe bande
  - ▷ **Enveloppe complexe par projections orthogonales**
- 6 Modulation/ démodulation numérique

# Extraction de l'enveloppe complexe à partir de l'observation de $s(t)$

Il existe plusieurs approches afin de retrouver l'enveloppe complexe  $s_I(t)$  à partir de  $s(t)$ .

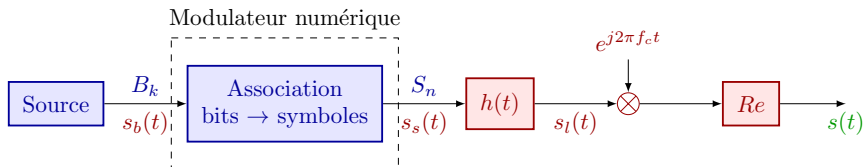
- Filtrage de Hilbert,
- Projections orthogonales

Dans ce cours on ne va s'intéresser qu'à la seconde approche.

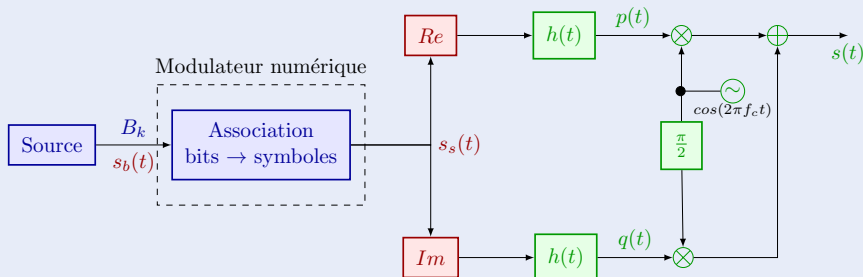


## Architecture d'émission

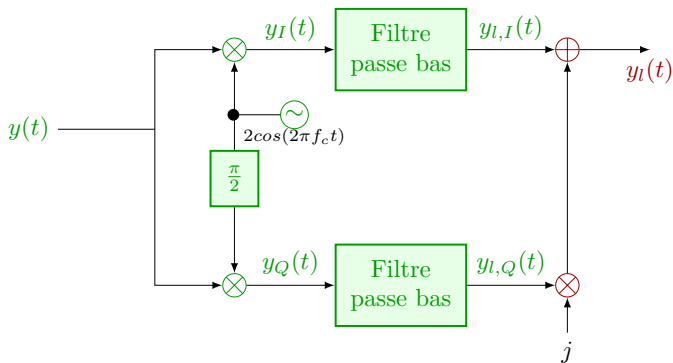
Si on considère un modèle d'émetteur  $\mathbb{R}$  et non  $\mathbb{C}$ , à partir de l'expression de  $s(t)$  il vient que



est en pratique implémentée comme

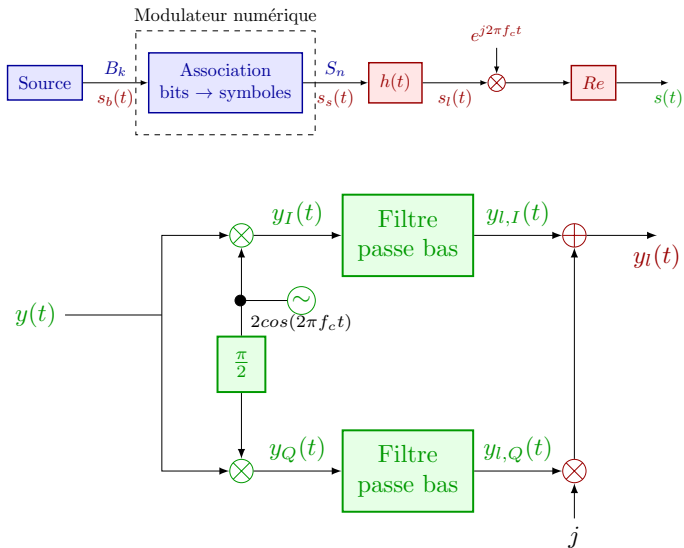


## Architecture de réception correspondante



Cette architecture constitue le bloc "RF  $\rightarrow$  BDB" et est appelé un **démodulateur I/Q cohérent**

Montrons que cette architecture de réception permet bien de retrouver  $s_I(t)$  en l'absence de bruit et de canal.



On suppose que  $y(t) = s(t)$  (pas de canal, pas de bruit)

→ Sur la voie I :

$$y_I(t) = 2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k h(t - kT_s) \cos(2\pi f_c t + \phi_k) \cos(2\pi f_c t)$$

→ Sur la voie Q :

$$y_Q(t) = -2 \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k h(t - kT_s) \cos(2\pi f_c t + \phi_k) \sin(2\pi f_c t)$$

En utilisant les formules trigonométriques classiques, on obtient

→ Sur la voie I :

$$y_I(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k h(t - kT_s) \cos(\phi_k) + \text{signaux à } 2f_c$$

→ Sur la voie Q :

$$y_Q(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k h(t - kT_s) \sin(\phi_k) + \text{signaux à } 2f_c$$

Après filtrage passe bas de fréquence de coupure inférieure à  $2f_c$ , on a

→ Sur la voie I :

$$y_{I,I}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k h(t - kT_s) \cos(\phi_k)$$

→ Sur la voie Q :

$$y_{I,Q}(t) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k h(t - kT_s) \sin(\phi_k)$$

On reconstruit  $y_I(t)$  comme

$$y_I(t) = y_{I,I}(t) + jy_{I,Q}(t)$$

On vérifie

$$\begin{aligned} y_I(t) &= y_{I,I}(t) + jy_{I,Q}(t) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k h(t - kT_s) \cos(\phi_k) + j \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k h(t - kT_s) \sin(\phi_k) \\ &= \sum_{k \in \mathbb{Z}} A_k h(t - kT_s) (\cos(\phi_k) + j \sin(\phi_k)) \\ &= s_I(t) \end{aligned}$$

(1)

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 Transmission en présence de bruit
- 5 Transmission sur fréquence porteuse
- 6 **Modulation/ démodulation numérique**
  - ▷ Introduction
  - ▷ Les différentes modulations numériques
  - ▷ Performances des modulations numériques

# Plan

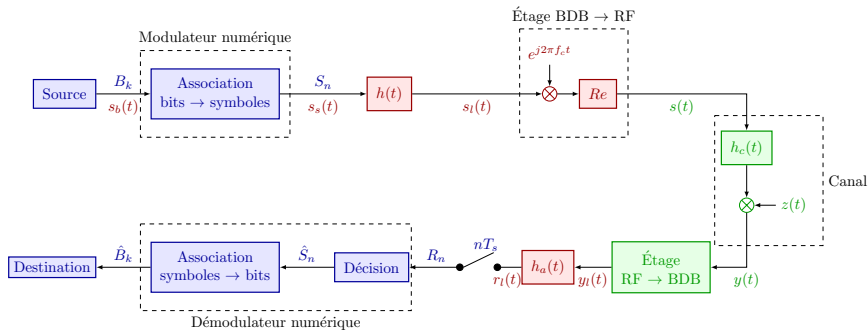
- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 Transmission en présence de bruit
- 5 Transmission sur fréquence porteuse
- 6 Modulation/ démodulation numérique**
  - ▷ Introduction
  - ▷ Les différentes modulations numériques
  - ▷ Performances des modulations numériques

- La transmission sur fréquence porteuse amène des degrés de libertés supplémentaires
- Ces degrés de liberté proviennent de l'utilisation de la fonction sinusoïdale  $e^{j2\pi f_c t}$
- Les symboles émis se différencient, non plus seulement grâce à leur niveau d' amplitude, mais également grâce à leur niveau de phase

Les symboles deviennent complexes : de  $S_k = A_k$  en bande de base, on passe à  $S_k = A_k e^{j\phi_k}$  en bande transposée.

L'opération consistant à associer à une étiquette binaire, un symbole  $S_k = A_k e^{j\phi_k}$  s'appelle **modulation numérique**. L'opération inverse s'appelle **démodulation numérique**.





L'enveloppe complexe du signal émis s'écrit alors

$$s_l(t) = \sum_{k \in \mathbb{K}} A_k e^{j\phi_k} h(t - kT_s)$$

## Canal de Nyquist et récepteur optimal

Tous les résultats énoncés dans le cas réel vis à vis de l'IES et de la réception optimale restent vrais pour le cas complexe.

- $h(t)$  et  $h_a(t)$  **doivent être demi-Nyquist**
- $h_a(t) = \lambda h^*(-t)$  ( $\lambda \in \mathbb{R}^+$ )

En faisant les hypothèses que

- le canal est à bande passante infinie
- les étages RF ne déforment pas le signal

le signal reçu s'écrit

$$r_n = g_0 A_n e^{j\phi_n} + z'_n$$

où  $z'_n$  représente l'enveloppe complexe du bruit  $z(t)$  filtré.

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 Transmission en présence de bruit
- 5 Transmission sur fréquence porteuse
- 6 Modulation/ démodulation numérique**
  - ▷ Introduction
  - ▷ Les différentes modulations numériques**
  - ▷ Performances des modulations numériques

Dans la section précédente, on a montré que **lors d'une transmission en bande transposée** les symboles transmis pouvaient être considérés comme complexes. On définit alors différentes modulations numériques (parmi les plus populaires)

## Modulations numériques

On note les modulations

- d'**amplitude** (M-ASK : Amplitude Shift Keying  $\Leftrightarrow$  M-PAM)
- de **phase** (M-PSK : Phase Shift Keying)
- d'**amplitude** et de **phase** (M-APK : Amplitude Phase Keying)
- de **fréquence** (M-FSK : Frequency Shift Keying)

Quelque soit le type de modulation utilisé, on notera le symbole

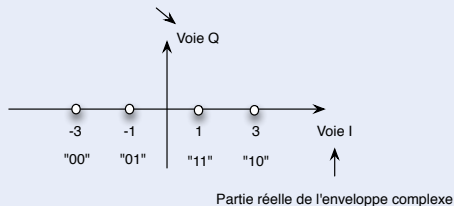
$$S_n = A_n e^{j\phi_n}$$

- $A_n$  et  $\phi_n$  représentent respectivement le module et la phase de  $S_n$
- $A_n$  et  $\phi_n$  sont généralement des variables aléatoires discrètes indépendantes et généralement distribuées de manière uniforme
- $A_n$  et  $\phi_n$  sont obtenus à partir d'un ensemble de  $n_b = \log_2(M)$  bits et du diagramme de constellation considéré
- l'étiquetage considéré est toujours un **étiquetage de Gray**
- pour toutes les modulations numériques, on a

$$s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n h(t - nT_s) \cos(2\pi f_c t + \phi_n)$$

## Modulation M-ASK

Partie imaginaire de l'enveloppe complexe



⇒ Comme pour les codes en ligne, à chaque symbole de la constellation est associé une étiquette binaire (étiquetage).

## Modulation M-PSK

C'est une modulation de phase  $\Rightarrow \forall n A_n = 1$  et  $\phi_n$  représente la phase aléatoire émis pendant  $[nT_s, (n+1)T_s]$ , d'où

$$s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(t - nT_s) \cos(2\pi f_c t + \phi_n)$$

avec  $\phi_n = \frac{2\pi i}{M} + \phi_{ini}$  où  $i \in \{0, \dots, M-1\}$  et  $\phi_{ini}$  une phase initiale.

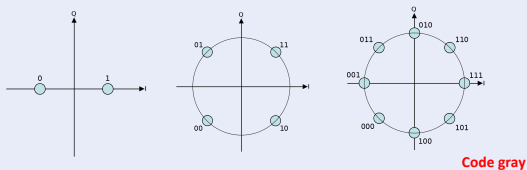


Figure – Modulations BPSK, QPSK ( $\phi_{ini} = \frac{\pi}{4}$ ) et 8-PSK

## Modulation M-APK

C'est une modulation d'amplitude et de phase (combinaison M-ASK et M-PSK)  $\Rightarrow \forall n A_n$  et  $\phi_n$  distribuées uniformément dans un ensemble de valeurs discrète dépendant de  $M$ , d'où

$$s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} A_n h(t - nT_s) \cos(2\pi f_c t + \phi_n)$$

Les modulations M-APK offrent le meilleur compromis (puissance,  $P_b$ ) à bande passante fixée, en effet

- Plus  $M$  augmente, plus une M-ASK consomme de l'énergie,
- Plus  $M$  augmente, plus une M-PSK a sa  $P_b$  qui se dégrade

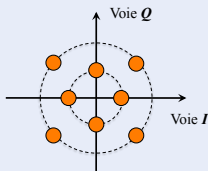


Figure – Modulation 8-APK



## Modulation M-APK (M-QAM)

Cas particulier de M-APK  $\Rightarrow$  les  $S_n$  sont distribués dans un plan rectangulaire

$$\Rightarrow S_n \in \{\pm 1 \pm j, \pm 3 \pm j, \pm 3 \pm 3j, \pm 1 \pm 3j, \text{etc}\}$$

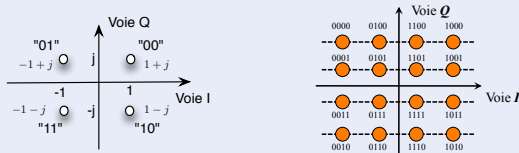


Figure – Modulations 4-QAM et 16-QAM

## Modulation M-FSK

C'est une modulation de fréquence  $\Rightarrow \forall n A_n = 1$  et  $\phi_n = 2\pi f_n t + \phi_{ini}$  où  $f_n$  représente la fréquence aléatoire émise pendant  $[nT_s, (n+1)T_s]$ , d'où

$$s(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} h(t - nT_s) \cos(2\pi(f_c + f_n)t + \phi_{ini})$$

où

- $f_n \ll f_c$ ,
- $f_n \in \left\{ (2i - (M - 1)) \frac{\Delta f}{2} \right\}$ , où  $i \in \{0, \dots, M - 1\}$ ,
- $\Delta f$  est l'écart entre porteuses adjacentes,
- $\phi_{ini}$  est une phase initiale,

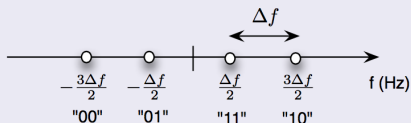


Figure – Modulation 4-FSK

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 Transmission en présence de bruit
- 5 Transmission sur fréquence porteuse
- 6 Modulation/ démodulation numérique**
  - ▷ Introduction
  - ▷ Les différentes modulations numériques
  - ▷ Performances des modulations numériques**

## $P_b$ en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$

Les détails des différents calculs de  $P_b$  sont disponibles dans le chapitre 4 du livre : "**Digital communications**" de John G. Proakis.

$$\rightarrow \text{M-ASK : } P_b = 2 \frac{M-1}{M \log_2(M)} Q \left( \sqrt{\frac{6 \log_2(M)}{M^2-1}} \frac{E_b}{N_0} \right)$$

$$\rightarrow \text{M-PSK : } P_b = 2Q \left( \sqrt{2 \log_2(M) \sin^2 \left( \frac{\pi}{M} \right)} \frac{E_b}{N_0} \right)$$

$$\rightarrow \text{M-FSK : } P_b = 2Q \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right)$$

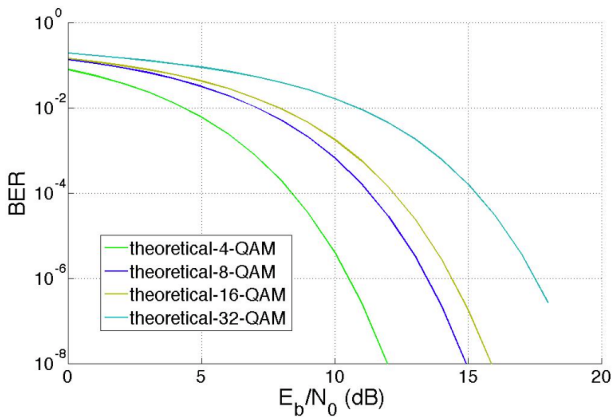


Figure – Évolution de  $P_b$  pour des M-QAM

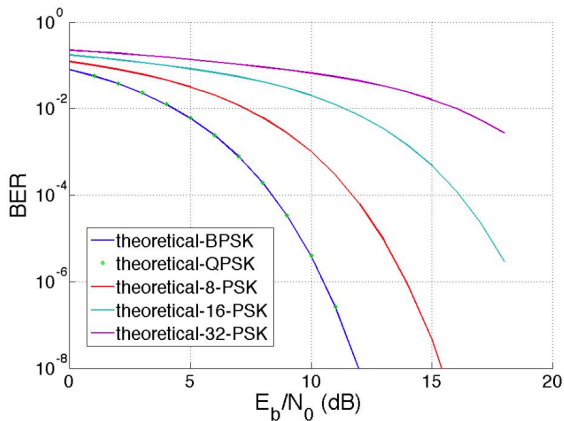


Figure – Évolution de  $P_b$  pour des M-PSK

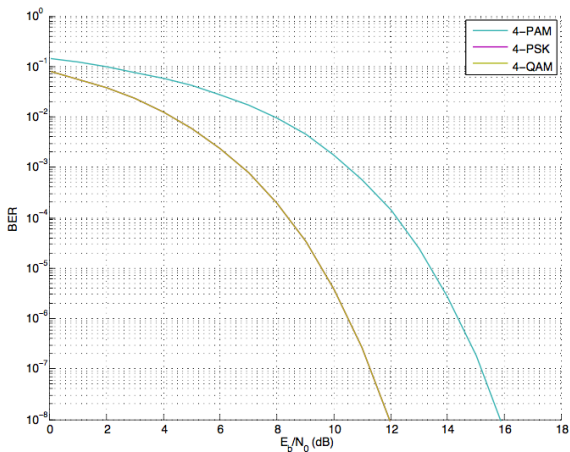


Figure – Comparaison de  $P_b$  pour  $M = 4$  pour différentes modulations numériques

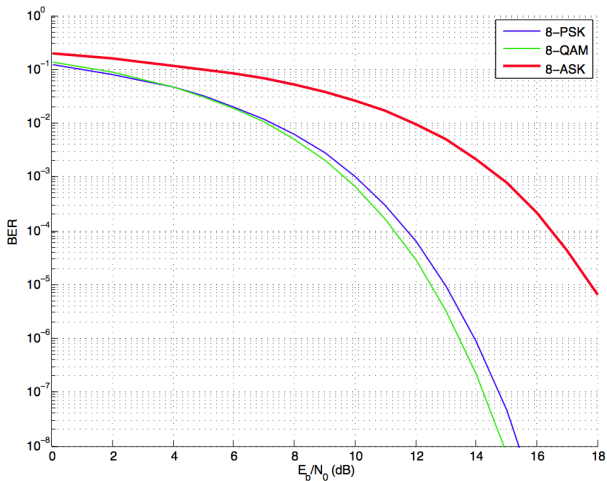
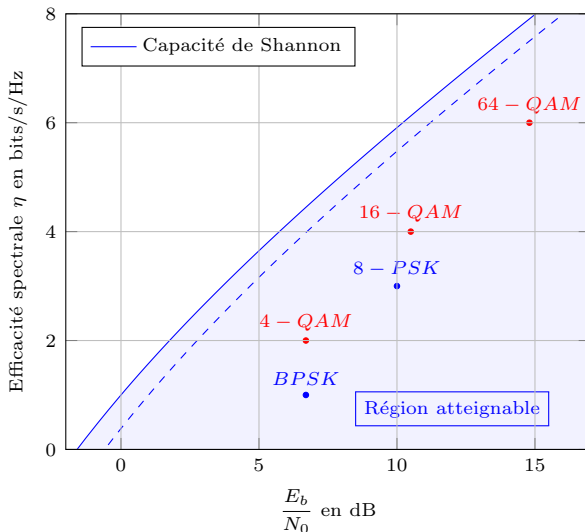


Figure – Comparaison de  $P_b$  pour  $M = 8$  pour différentes modulations numériques



# Efficacité spectrale $\eta = \frac{D_b}{B}$ en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$



Ces points sont obtenus pour une qualité de service ( $P_b$ ) de  $10^{-3}$  sans codage de canal.

# Plan

- 1 Introduction
- 2 Principes de communication en l'absence bruit
- 3 DSP des signaux codés en ligne
- 4 Transmission en présence de bruit
- 5 Transmission sur fréquence porteuse
- 6 Modulation/ démodulation numérique
- 7 Conclusion

Lors de la conception d'un système de communications numériques, trouver le meilleur compromis entre les différents paramètres de conception est fondamental. Les objectifs du concepteur peuvent être les suivants :

- Maximiser l'efficacité spectrale  $\eta = \frac{D_b}{B}$  (bits/s/Hz)
- Minimiser la probabilité d'erreur binaire  $P_b$
- Minimiser la puissance émise  $E_b$
- Minimiser la bande passante  $B$
- Minimiser la complexité du système
- etc
- Toute combinaison des objectifs précédents

Contact : Romain Tajan

- THE END -