

TD - Communications Numériques

Guillaume Ferré et Romain Tajan

Table des matières

1	Énoncé des exercices	5
	Exercice 1 : Étude d'un modulateur/démodulateur numérique 8-PAM	6
	Exercice 2 : Critère de Nyquist et filtrage adapté	7
	Exercice 3 : Fréquence porteuse	8
	Exercice 4 : Probabilité d'erreur et récepteur optimal	9
	Exercice 5 : Cyclo-stationnarité et DSP des signaux de communications numériques .	10
	Exercice 6 : Étude pratique	12
2	Correction des exercices	13
	Exercice 1 : Étude d'un modulateur/démodulateur numérique 8-PAM	13
	Exercice 2 : Critère de Nyquist et filtrage adapté	15
	Exercice 3 : Probabilité d'erreur et récepteur optimal	18
	Exercice 4 : Cyclo-stationnarité et DSP des signaux de communications numériques .	21

Chapitre 1

Énoncé des exercices

Exercice 1 : Étude d'un modulateur/démodulateur numérique 8-PAM

Dans cet exercice, on considère un modulateur numérique 8-PAM utilisant un étiquetage de Gray.

Question 1. Pour cette modulation, que valent le **nombre de symboles** M et le **nombre de bits par symboles** n_b . Dans le cas général, quelle est la relation entre ces deux grandeurs.

Question 2. Représenter la **constellation des symboles** (ensemble des symboles dans le plan complexe). Faire apparaître sur ce schéma, les étiquettes binaires associées à chacun des symboles d'un étiquetage de Gray.

Question 3. Donner la séquence de symboles associée à la séquence binaire suivante : $\underline{b} = [1, 1, 1, 0, 0, 1, 0, 0, 0]$.

Question 4. Si on souhaite transmettre les **symboles** avec un débit $R_s = 1M\text{symbole}/s$ quel doit être le **débit binaire** ?

Question 5. On étudie maintenant le **décodeur en ligne**. Dessiner les **régions de décisions** associées à chaque symbole.

Question 6. Si on reçoit la séquence suivante $\underline{r}_l = [3.8, -1.1, -7.4]$, quel seront alors les séquences de symboles et de bits décidées.

Exercice 2 : Critère de Nyquist et filtrage adapté

Cet exercice a pour but d'illustrer par un exemple le **critère de Nyquist**. Le contexte que nous considérons ici est le suivant :

- le canal de propagation $h_l(t)$ est supposé à bande passante infinie ($h_l(t) = \delta(t)$),
- le filtre de mise en forme est donné par l'équation suivante :

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < T_s \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.1)$$

Question 1. Donner l'expression mathématique du filtre $g_a(t)$ **adapté** à $g(t)$.

Question 2. Rappeler l'expression de $v(t)$, la convolution de $g(t)$ avec son filtre adapté $g_a(t)$.

Question 3. Montrer que $v(t)$ vérifie le **critère de Nyquist**.

Question 4. Donner l'expression de $r_n = r(nT_s)$ en fonction de A_n et $v(0)$ en l'absence de bruit.

Question 5. Montrer que $g_a(t)$ n'est pas causal. Que faut-il faire pour rendre ce filtre **causal** ?

Question 6. Reprendre la Question 4. Qu'entraîne la causalité des couples de filtres (mise en forme et adapté) sur la réception du premier symbole à estimer ?

Exercice 3 : Fréquence porteuse

Cet exercice adresse la mise sur fréquence porteuse :

1. La transposition en fréquence : passage du signal complexe en bande de base au signal réel sur fréquence porteuse.
2. La reconstruction du signal complexe en bande de base à partir du signal réel sur fréquence porteuse.

Soit $s_l(t)$ un signal "en bande de base" à valeurs **complexes**. On notera $S_l(f) = \mathcal{F}(s_l)$ la transformée de Fourier de s_l . On fait ici l'hypothèse que s_l est de **bande passante** B ce qui se traduit mathématiquement par :

$$\forall f \in \left] -\infty, -\frac{B}{2} \right] \cup \left[\frac{B}{2}, +\infty \right], S_l(f) = 0 \quad (1.2)$$

Soit $s(t)$ le signal sur fréquence porteuse, il est construit à partir de $s_l(t)$ par la relation suivante :

$$s(t) = \Re(s_l(t)e^{j2\pi f_p t}) \quad (1.3)$$

Question 1. Donner l'expression du spectre de $s(t)$ à partir de $S_l(f)$.

Question 2. Faites un dessin, illustrant le module et la phase de $S(f)$.

Question 3. Dédurre de la question précédente une condition sur f_p et B pour que le spectre de $s_l(t)$ se retrouve (à un facteur près) dans celui de $s(t)$.

Question 4. On considère maintenant que la condition de la section précédente est vérifiée. En supposant que $s_l(t)$ est un signal d'énergie finie, donner le lien entre l'énergie de $s_l(t)$ et celle de $s(t)$.

On appelle filtre de Hilbert le filtre dont la réponse en fréquence est la suivante :

$$Q(f) = -j \operatorname{sign}(f) \quad (1.4)$$

Aussi, soit le filtre (appelé filtre analytique) défini par l'équation suivante :

$$A(f) = 1 + jQ(f). \quad (1.5)$$

Question 5. Soit $X(f)$ le spectre du signal à l'entrée du filtre analytique. Soit $Y(f)$ le spectre du signal à sa sortie. Donner l'expression de $Y(f)$ à partir de $X(f)$.

Question 6. Reprendre l'illustration de la Question 2 en la complétant avec le spectre du signal analytique de $S(f)$.

Question 7. À partir des deux questions précédentes, proposez une méthode permettant de retrouver $S_l(f)$ à partir de $S(f)$.

Question 8. En suivant le même procédé (spectres + représentation des signaux) proposez une méthode alternative pour retrouver $s_l(t)$ qui commentce par le calcul

$$x(t) = s(t)e^{j2\pi f_p t} \quad (1.6)$$

Question 9. Quel sera l'impact d'un décalage temporel à la réception ?

$$x(t) = s(t)e^{j2\pi f_p (t-\tau)} \quad (1.7)$$

Question 10. Quel serait l'impact d'un décalage fréquentiel à la réception ?

$$x(t) = s(t)e^{j2\pi f'_p t} \quad (1.8)$$

Exercice 4 : Probabilité d'erreur et récepteur optimal

Le but de cet exercice est de vous présenter les calculs de la probabilité d'erreur. Nous ferons les hypothèses suivantes :

- Le mapping considéré est le suivant $Bn = 0 \Rightarrow A_n = -1$ et $Bn = 1 \Rightarrow A_n = 1$,
- Le filtre de réception $g_a(t)$ est le filtre adapté à $g(t)$,
- Le filtre $v(t)$ vérifie le critère de Nyquist,
- Le bruit $n_l(t)$ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $\Gamma_{n_l}(f) = \frac{N_0}{2}$,
- Le bruit $n'_l[k]$ en sortie de filtre adapté et échantillonnage au temps T_s est gaussien moyenne nulle et de variance σ^2 ,

Question 1. Exprimer $r_l[n]$, le $n^{\text{ième}}$ échantillon de $r_l(t)$ échantillonné à T_s , à partir de A_n , de $v(t)$ et du bruit.

Question 2. Démontrer l'expression de la probabilité d'erreur binaire P_b en fonction de $\gamma = \frac{g_0^2}{\sigma^2}$ pour une 2-PAM.

Question 3. Calculer la fonction d'autocorrélation du bruit AWGN $n'_l(t)$ (avant échantillonnage).

Question 4. Faire le même calcul à partir des échantillons discrets : $n'_l(kT_s)$ du bruit filtré puis échantillonné au rythme T_s . Le résultat est-il en accord avec les hypothèses de début d'énoncé ?

Question 5. Dédurre des questions précédentes l'expression de la probabilité d'erreur binaire P_b en fonction de $\frac{E_b}{N_0}$ pour une 2-PAM, dans le cadre d'un récepteur optimal.

Exercice 5 : Cyclo-stationnarité et DSP des signaux de communications numériques

Le but de cet exercice est de vous présenter les calculs couramment réalisés pour le calcul de la Densité Spectrale de Puissance (DSP) d'un signal modulé en ligne.

Soit $\{A_k\}_{k \in \mathbb{Z}}$ la séquence des symboles délivrée par le codeur en ligne. Les symboles forment un processus à temps discret stationnaire de moyenne $m_A = \mathbb{E}(A_k)$ et d'auto-corrélation $R_A[k] = \mathbb{E}(A_n A_{n-k}^*)$. Cette séquence étant transmise avec un débit symbole $R_s = T_s^{-1}$, le signal à temps continu, correspondant à cette transmission est

$$s_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \delta(t - kT_s) \quad (1.9)$$

Le signal transmis en bande de base $s_l(t)$ est alors obtenu en filtrant $s_s(t)$ par le filtre de mise en forme de réponse impulsionnelle $g(t)$. L'expression de $s_l(t)$ est la suivante :

$$s_l(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_s) \quad (1.10)$$

Pour cet exercice $g(t)$ nous supposons que $g(t)$ est borné et à support borné :

- il existe $C \in \mathbb{R}$ tel que $|g(t)| \leq C$
- il existe un intervalle $I \subset \mathbb{R}$ tel que $g(t) = 0$ pour tout $t \notin I$.

Question 1. Montrer que $s_l(t)$ est un processus cyclo-stationnaire de période T_s .

1.1. Calculer $m_{s_l}(t) = \mathbb{E}(s_l(t))$

1.2. Montrer que la fonction $t \mapsto m_{s_l}(t)$ est **périodique** de période T_s .

1.3. Calculer la fonction d'**auto-corrélation** $R_{s_l}(t, \tau) = \mathbb{E}(s_l(t)s_l^*(t - \tau))$.

1.4. Montrer que la fonction $t \mapsto R_{s_l}(t, \tau)$ est périodique de période T_s .

Question 2. Calculer $\bar{m}_{s_l} = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} m_{s_l}(t) dt$

Question 3. Calculer la fonction d'**auto-corrélation moyennée** $\bar{R}_{s_l}(\tau) = \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} R_{s_l}(t, \tau) dt$.

Question 4. Démontrer la formule de Bennet en calculant la **Densité Spectrale de Puissance** (DSP) de $s_l(t)$.

Question 5. Application numérique : calculer et représenter la DSP du signal $s_l(t)$ pour les hypothèses suivantes :

- les symboles sont 2-PAM ($A_k \in \{-1, 1\}$) uniformément et identiquement distribués
- Le filtre de mise en forme possède l'expression suivante :

$$g(t) = \begin{cases} 1, & \text{si } 0 \leq t < T_s \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad (1.11)$$

Question 6. Application numérique : calculer et représenter la DSP du signal $s_l(t)$ pour les hypothèses suivantes :

- les symboles sont 2-OOK (On Off Keying) ($A_k \in \{0, 1\}$) uniformément et identiquement distribués

— Le filtre de mise en forme possède l'expression suivante :

$$g(t) = \begin{cases} 1, \text{ si } 0 \leq t < T_s \\ 0, \text{ sinon} \end{cases} \quad (1.12)$$

Exercice 6 : Étude pratique

Dans la pratique les signaux à traiter sont discrets. Les écritures précédentes des signaux à temps continu n'ont qu'un intérêt pédagogique et permettent de ne pas alourdir les calculs théoriques. Dans cette partie, vous allez à partir des résultats théoriques précédents faire l'analyse pratique d'une communication numérique en bande de base. Aux hypothèses précédentes, nous rajoutons désormais les suivantes :

⇒ Hypothèses :

- La fréquence d'échantillonnage du CNA est : $f_e = \frac{1}{T_e} = 8\text{kHz} \Rightarrow$ les versions discrètes $s_l[n]$ et $g[n]$ respectivement du signal $s_l(t)$ et du filtre $g(t)$ sont donc obtenues par échantillonnage à $T_e = 1/f_e$,
- Les filtres $g(t)$ et $g_a(t)$ sont les mêmes que ceux utilisés lors de l'étude théorique,
- Le débit symbole $D_s = 2\text{kSymboles/s} \Rightarrow T_s = 0.5\text{ms}$,
- La séquence de bits à émettre est de durée finie et vaut : $\underline{b} = [0100100111]$,
- On considère que les symboles émis appartiennent à une constellation 4-PAM $\Rightarrow M = 4$ et $\forall k \ A_k \in \{\pm 1, \pm 3\}$,
- Tous les vecteurs considérés seront des vecteurs lignes.

Question 1. Quelle est la période d'échantillonnage de \underline{b} ?

Question 2. Quel est le nombre de symbole à émettre ?

Question 3. Si on note \underline{S} le vecteur de symboles à émettre, donner les valeurs de \underline{S} , en déduire sa dimension.

Question 4. Quelle est la période d'échantillonnage de \underline{S} ?

Question 5. Quelle est l'expression discrète de $g[n]$, en déduire l'expression du vecteur \underline{g} contenant les échantillons de $g[n]$. On notera F_{se} le nombre d'échantillons de \underline{g} .

Question 6. On souhaite que l'énergie des filtres ($g(t)$ et $g_a(t)$) soit normalisée, quel facteur de normalisation doit être appliqué à \underline{g} ?

Question 7. Tracer l'allure du signal continu $s_l(t)$, en déduire son allure discrète.

Question 8. Calculer et la tracer la convolution de \underline{g} avec \underline{S} . Que constatez-vous ?

Question 9. Que devez vous faire pour que le résultat soit cohérent avec l'allure attendu de $s_l[n]$?

Question 10. Représenter l'allure de la DSP de $s_l[n]$.

Question 11. Si on définit la largeur de bande de $s_l[n]$ comme étant égale à la largeur du lobe principal de la DSP, combien vaut-elle ?

Question 12. On considère que la variance du bruit AWGN vaut $\sigma_{n_i}^2 = 1/16$, tracer dans ce cas la constellation des symboles détectés $r_l[n]$ dans un intervalle de confiance de $\pm 3\sigma_{n_i}$ autour de chaque symbole possible (soit 99,7% de confiance).

Question 13. Dans les conditions précédentes de bruit, que pensez-vous de la fiabilité de cette communication numérique ?

Chapitre 2

Correction des exercices

Exercice 1 : Étude d'un modulateur/démodulateur numérique 8-PAM

Dans cet exercice, on considère un modulateur numérique 8-PAM utilisant un étiquetage de Gray.

Question 1. De façon générale, pour une M -PAM, M -QAM, M -PSK, M **représente le nombre de symboles**. Le **nombre de bits par symboles** est alors donné par la relation

$$n_b = \log_2(M)$$

en effet, les nombre de symboles pouvant être indexés par des étiquettes différentes de n_b bits est $M = 2^{n_b}$. Dans le cas d'une 8-PAM, il y a donc 8 symboles et $n_b = 3$ bits par symboles.

Question 2. Pour une 8-PAM, les symboles possibles sont $\{\pm 1, \pm 3, \pm 5, \pm 7\}$. Le diagramme de constellation est donné en Figure

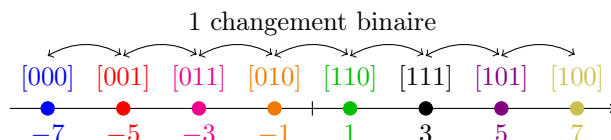


FIGURE 2.1 – Constellation d'une modulation 8-PAM avec étiquetage de Gray.

Cette modulation ne contient que des symboles réels (i.e. dans \mathbb{R}). Certaines modulations numériques possèdent des symboles complexes (i.e. dans \mathbb{C}), par exemple les M -PSK, M -QAM, ou plus généralement les modulations M -APSK.

L'**étiquetage de Gray** est garanti par le fait que **deux étiquettes attribuées à des symboles voisins ne diffèrent que par au plus 1 bit**. L'étiquetage proposé n'est pas le seul étiquetage de Gray, en effet, toute permutation des étiquettes va fonctionner.

Supposons maintenant que ces symboles sont transmis dans un canal à bruit blanc additif gaussien. Parmi tous les étiquetages possibles, les étiquetages de Gray permettent de **minimiser la probabilité d'erreur binaire à probabilité d'erreur symbole donnée**. En effet, les erreurs sur symboles les plus probables (celles entre voisins immédiats) n'engendreront, par construction, qu'une seule erreur binaire.

Question 3. L'association bits/symboles présentée en Figure 2 est réalisée en groupant les bits de \mathbf{b} 3 par 3 et en utilisant l'étiquetage de la Figure 2. On obtient donc

$$\underline{b} = [\underbrace{1, 1, 1}_{s_0=3}, \underbrace{0, 0, 1}_{s_1=-5}, \underbrace{0, 0, 0}_{s_2=-7}]$$

d'où

$$\underline{s} = [3, -5, -7]$$

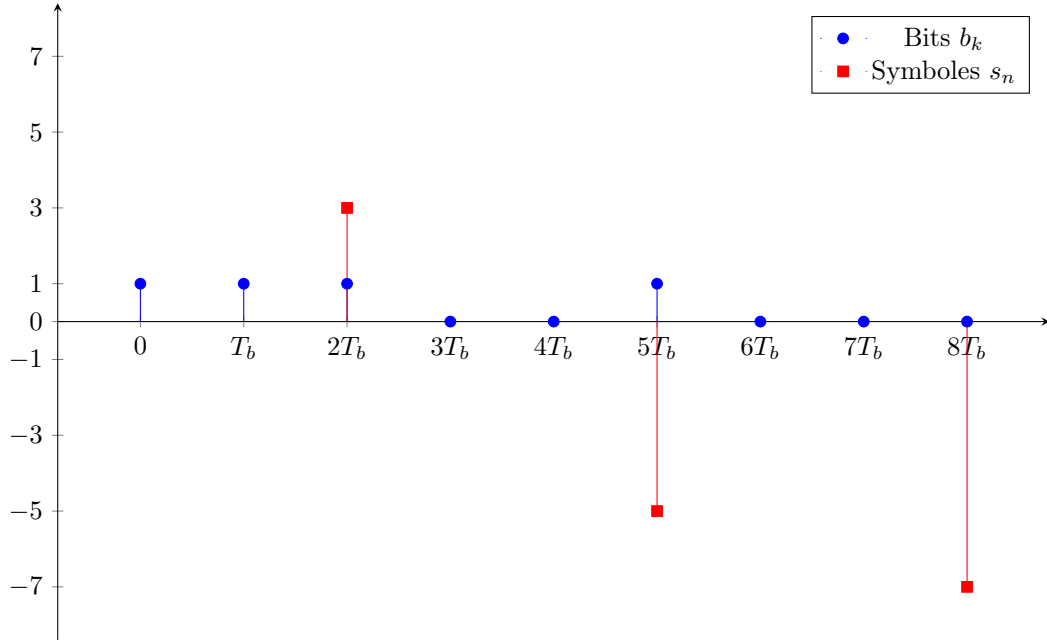


FIGURE 2.2 – Lien entre T_s et T_b .

Question 4. T_s est le temps écoulé entre les transmissions de deux symboles successifs. Par définition, l'association bit/symbole doit avoir réunie n_b bits pour constituer un symbole. Comme illustré en Figure 2.2 on aura alors $T_s = n_b T_b$. Or $T_b = D_b^{-1}$ et $T_s = D_s^{-1}$, on en déduit $D_b = n_b D_s$ soit dans notre cas $D_b = 3 \text{ Mbits/s}$.

Exercice 2 : Critère de Nyquist et filtrage adapté

Question 1. Pour rappel, le **filtre adapté** est le **filtre de réception maximisant le rapport signal à bruit aux instants des décisions** (juste après l'échantillonneur aux instants nT_s dans la Figure ??). Son expression mathématique est la suivante :

$$g_a(t) = \lambda g^*(-t)$$

où $\lambda \in \mathbb{C}^*$. λ est un paramètre qui ne changera pas les performances du récepteur, il peut donc être choisi à convenance. Un premier choix courant est de considérer $\lambda = 1$.

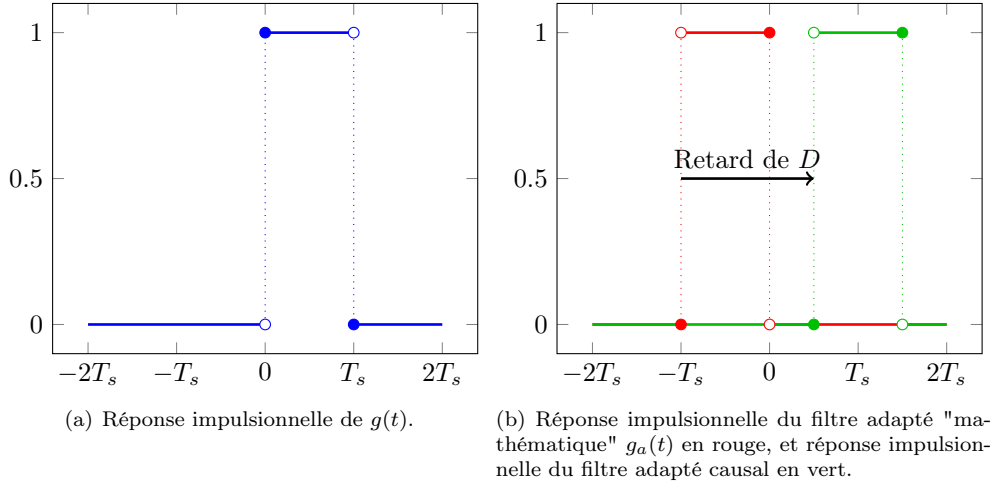


FIGURE 2.3 – Réponses impulsionnelles du filtre de mise en forme (à gauche), du filtre adapté et du filtre adapté causal (à droite)

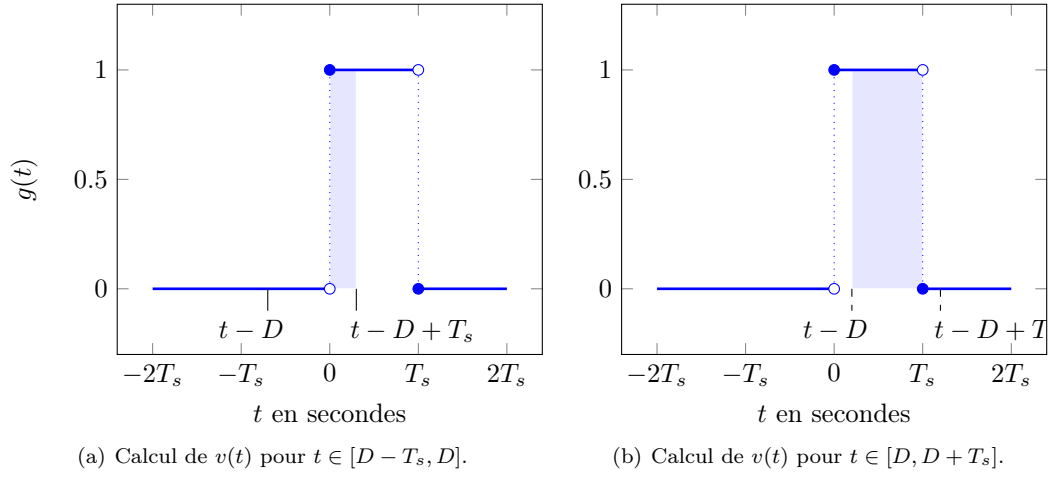
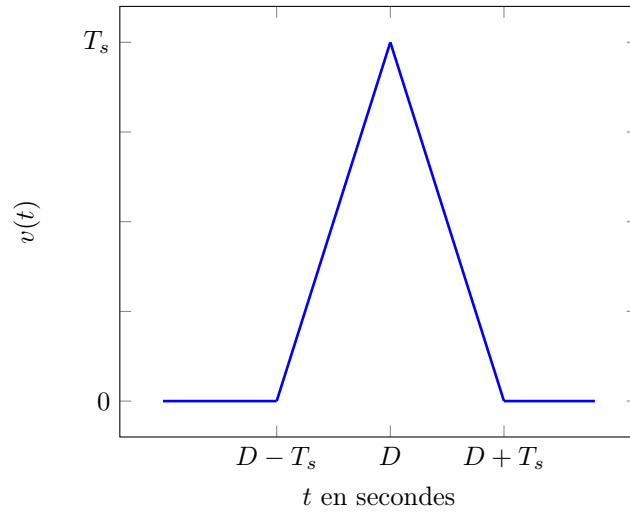
Filtre adapté causal : $g_c(t) = g^*(D - t)$ avec D un retard tel que $D \geq T_s$. Il convient de remarquer que si $g(t)$ avait un support de durée Δ , il faudrait choisir $D \geq \Delta$.

Question 2. On souhaite calculer $v(t) = (g \star g_c)(t)$. On part de l'expression intégrale du produit de convolution.

$$\begin{aligned} v(t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) g_c(t - u) du \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) g^*(D - t + u) du \\ &= \int_{t-D}^{t-D+T_s} g(u) du \end{aligned}$$

On obtient finalement l'expression suivante pour $v(t)$

$$v(t) = \begin{cases} t - D + T_s, & \text{si } t \in [D - T_s, D] \\ -t + D + T_s, & \text{si } t \in [D, D + T_s] \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases} \quad (2.1)$$

FIGURE 2.4 – Illustration du calcul de $v(t)$.FIGURE 2.5 – Réponse impulsionnelle du filtre global $v(t)$.

Question 3. Montrer que $v(t)$ vérifie le **critère de Nyquist**.

Question 4. Dessiner le signal transmis $s_l(t)$, le signal reçu après filtrage adapté $r_l(t)$ et le signal numérique $r_l[n] = r_l(nT_s)$ pour la séquence de symboles trouvée dans la question 3 de l'exercice 1.

Question 5. Qu'entraîne la causalité des couples de filtres (mise en forme et adapté) sur la réception du premier symbole à estimer ?

Exercice 3 : Probabilité d'erreur et récepteur optimal

Le but de cet exercice est de vous présenter les calculs de la probabilité d'erreur. Nous ferons les hypothèses suivantes :

- Le mapping considéré est le suivant $Bn = 0 \Rightarrow A_n = -1$ et $Bn = 1 \Rightarrow A_n = 1$,
- Le filtre de réception $g_a(t)$ est le filtre adapté à $g(t)$,
- Le filtre $v(t)$ vérifie le critère de Nyquist,
- Le bruit $n_l(t)$ est un bruit blanc gaussien de moyenne nulle et de densité spectrale de puissance $\Gamma_{n_l}(f) = \frac{N_0}{2}$,
- Le bruit $n'_l[k]$ en sortie de filtre adapté et échantillonnage au temps T_s est gaussien moyenne nulle et de variance σ^2 ,

Question 1. On repart de l'expression à temps continu :

$$r_l(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k v(t - kT_s)$$

On obtient

$$\begin{aligned} r_l[n] &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k v((n - k)T_s) + n'_l[n] \\ &= A_n v(0) + n'_l[n] \end{aligned}$$

Question 2. Pour calculer P_b nous allons d'abord utiliser la formule des probabilités totales :

$$P_{b,n} = \mathbb{P}(\hat{B}_n = 0 | B_n = 1) \mathbb{P}(B_n = 1) + \mathbb{P}(\hat{B}_n = 1 | B_n = 0) \mathbb{P}(B_n = 0)$$

Il convient maintenant d'utiliser le principe de la décision. À savoir, la décision $\hat{B}_n = 1$ est prise si et seulement si $r_l[n] \geq 0$ (en effet, dans ce cas $\hat{A}_n = 1$ est décidé, ce qui revient à $\hat{B}_n = 1$).

On obtient donc

$$\begin{aligned} P_{b,n} &= \mathbb{P}(r_l[n] < 0 | B_n = 1) \mathbb{P}(B_n = 1) + \mathbb{P}(r_l[n] \geq 0 | B_n = 0) \mathbb{P}(B_n = 0) \\ &= 0.5 \mathbb{P}(r_l[n] < 0 | B_n = 1) + 0.5 \mathbb{P}(r_l[n] \geq 0 | B_n = 0) \end{aligned}$$

Or, $\mathbb{P}(r_l[n] < 0 | B_n = 1) = \mathbb{P}(r_l[n] < 0 | A_n = 1)$ on obtient donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(r_l[n] < 0 | A_n = 1) &= \int_{-\infty}^0 p_{R_n|A_n}(r|1) dr \\ &= \int_{-\infty}^0 \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{(r+v(0))^2}{2\sigma^2}} dr \\ &= \int_{v(0)/\sigma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} dr \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{v(0)^2}{\sigma^2}}\right) \end{aligned}$$

De même, $\mathbb{P}(r_l[n] \geq 0 | B_n = 0) = \mathbb{P}(r_l[n] \geq 0 | A_n = -1)$ on obtient donc

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(r_l[n] \geq 0 | A_n = -1) &= \int_0^{+\infty} p_{R_n|A_n}(r| -1) dr \\ &= \int_0^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma^2} e^{-\frac{(r+v(0))^2}{2\sigma^2}} dr \\ &= \int_{v(0)/\sigma}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{r^2}{2}} dr \\ &= Q\left(\sqrt{\frac{v(0)^2}{\sigma^2}}\right) \end{aligned}$$

On remarque que l'expression obtenue ne dépend pas de n d'où finalement

$$P_b = Q\left(\sqrt{\frac{v(0)^2}{\sigma^2}}\right)$$

Question 3. Le bruit en sortie de filtre adapté a pour expression :

$$n'_l(t) = \int_{\mathbb{R}} n_l(u) g_a(t-u) du$$

Afin de calculer son autocorrélation, nous allons calculer sa DSP.

$$\Gamma_{n'_l}(f) = |G_a(f)|^2 \Gamma_{n_l}(f) = \frac{N_0}{2} |G_a(f)|^2$$

ce qui donne la fonction d'autocorrélation suivante

$$\begin{aligned} R_{n'_l}(\tau) &= \mathcal{F}^{-1}\left(\Gamma_{n'_l}(f)\right) \\ &= \frac{N_0}{2} \mathcal{F}^{-1}\left(|G_a(f)|^2\right) \\ &= \frac{N_0}{2} R_{g_a}(\tau) \end{aligned}$$

où $R_{g_a}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} g_a(u) g_a^*(u-\tau) du$. Il convient de remarquer que comme $g_a(t) = g^*(-t)$ nous avons $R_{g_a}(\tau) = v(\tau)$.

Question 4. Pour les échantillons discrets, $n'_l[k] = n'_l(kT_s)$ nous allons calculer la fonction d'autocorrélation suivante :

$$\begin{aligned} R_{n'_l}[k, n] &= \mathbb{E}(n'_l[n] n'_l^*[n-k]) \\ &= \mathbb{E}(n'_l(nT_s) n'_l^*((n-k)T_s)) \\ &= R_{n'_l}(kT_s) \\ &= \frac{N_0}{2} v(kT_s) \\ &= \frac{N_0}{2} v(0) \delta_k \end{aligned}$$

On observe ici que le bruit en sortie de filtre adapté (demi-Nyquist) et d'échantillonneur est stationnaire, décorré et de variance $\frac{N_0}{2} v(0)$. Les hypothèses de début d'énoncé sont bonnes si on considère

$$\sigma^2 = \frac{N_0}{2} v(0)$$

Pour être complet, il faudrait aussi montrer que le bruit $n'_l[k]$ est un bruit gaussien centré. La première propriété vient du fait que $n_l(t)$ est un bruit gaussien donc $n'_l(t)$ l'est aussi et par conséquent $n'_l[k]$ est bien gaussien. Pour la moyenne nulle, on remarque que $\mathbb{E}(n'_l[k]) = \mathbb{E}(n'_l(kT_s)) = 0$ car $n_l(t)$ est centré par hypothèse.

Question 5. Par définition on a $E_b = PT_b$ où P est la puissance de $s_l(t)$ et T_b est le temps bit. La puissance P est obtenue en intégrant la DSP de s_l calculée dans l'exercice précédent :

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{s_l}(f)df = \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} |G(f)|^2 df = \frac{1}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} V(f)df = \frac{v(0)}{T_s}$$

En exprimant N_0 à l'aide de la question précédente, on obtient alors le rapport signal à bruit par bit d'information suivant

$$\frac{E_b}{N_0} = \frac{v(0)^2 T_b}{T_s 2\sigma^2} = \frac{v(0)^2}{2\sigma^2}$$

où la dernière expression provient du fait que pour une BPSK, $T_s = T_b$.

On obtient finalement l'expression de P_b comme fonction de $\frac{E_b}{N_0}$:

$$P_b = Q\left(\sqrt{2\frac{E_b}{N_0}}\right)$$

Exercice 4 : Cyclo-stationnarité et DSP des signaux de communications numériques

Question 1.

1.1.

$$\begin{aligned}
 m_{s_l}(t) &= \mathbb{E}(s_l(t)) \\
 &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} s_k g(t - kT_s)\right) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(s_k) g(t - kT_s) \\
 &= m_A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT_s)
 \end{aligned}$$

Le passage de la deuxième à la troisième ligne est assuré en remarquant que la somme ne comporte en réalité qu'un nombre fini de termes non nuls.

1.2. Pour cela on montre directement que $m_{s_l}(t + T_s) = m_{s_l}(t)$.

$$\begin{aligned}
 m_{s_l}(t + T_s) &= m_A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT_s + T_s) \\
 &= m_A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT_s), \text{ c.v. } k \leftarrow k - 1 \\
 &= m_{s_l}(t)
 \end{aligned}$$

1.3.

$$\begin{aligned}
 R_{s_l}(t, \tau) &= \mathbb{E}(s_l(t) s_l^*(t - \tau)) \\
 &= \mathbb{E}\left(\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} A_k A_{k'}^* g(t - kT_s) g^*(t - \tau - k'T_s)\right) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \mathbb{E}(A_k A_{k'}^*) g(t - kT_s) g^*(t - \tau - k'T_s) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} R_A[k - k'] g(t - kT_s) g^*(t - \tau - k'T_s)
 \end{aligned}$$

De la même façon que pour la Question 1.1, l'inversion de l'espérance et des sommes est assuré en observant que les sommes ne comportent qu'un nombre fini de termes. La dernière équation est obtenue en utilisant la définition de $R_A[k]$.

1.4. Pour cela on montre directement que $R_{s_l}(t + T_s, \tau) = R_{s_l}(t, \tau)$.

$$\begin{aligned}
 R_{s_l}(t + T_s, \tau) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} R_A[k - k'] g(t - kT_s + T_s) g^*(t + T_s - \tau - k'T_s) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} R_A[k - k'] g(t - kT_s) g^*(t - \tau - k'T_s) \text{ c.v. } k \leftarrow k - 1, k' \leftarrow k' - 1 \\
 &= R_{s_l}(t, \tau) \\
 &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] g(t - kT_s) g^*(t - \tau - kT_s + dT_s) \text{ c.v. } k \leftarrow k, d \leftarrow k - k'
 \end{aligned}$$

Question 2.

$$\begin{aligned}
 \bar{m}_{s_l} &= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} m_{s_l}(t) dt \\
 &= \frac{m_A}{T_s} \int_0^{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} g(t - kT_s) dt \\
 &= \frac{m_A}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^{T_s} g(t - kT_s) dt \\
 &= \frac{m_A}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-kT_s}^{-(k-1)T_s} g(t) dt, \quad t \leftarrow t - kT_s \\
 &= \frac{m_A}{T_s} \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) dt, \text{ relation de Chasles}
 \end{aligned}$$

Question 3.

$$\begin{aligned}
 \bar{R}_{s_l}(\tau) &= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} R_{s_l}(t, \tau) dt \\
 &= \frac{1}{T_s} \int_0^{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] g(t - kT_s) g^*(t - \tau - kT_s + dT_s) dt \\
 &= \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] \int_0^{T_s} g(t - kT_s) g^*(t - \tau - kT_s + dT_s) dt \\
 &= \frac{1}{T_s} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{-kT_s}^{-(k-1)T_s} g(t) g^*(t - \tau + dT_s) dt \quad t \leftarrow t - kT_s \\
 &= \frac{1}{T_s} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] \int_{-\infty}^{+\infty} g(t) g^*(t - (\tau - dT_s)) dt \\
 &= \frac{1}{T_s} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] v(\tau - dT_s)
 \end{aligned}$$

où $v(\tau) = \int_{\mathbb{R}} g(t) g^*(t - \tau) dt$. On reconnaît dans l'expression de $v(t)$ la convolution entre $g(t)$ et $\check{g}(t) = g^*(-t)$. Cette remarque nous permet de lier le spectre de $v(t)$ à celui de $g(t)$, en effet en

prenant la transformée de Fourier de part et d'autre nous avons

$$\begin{aligned}
 V(f) &= \mathcal{F}(v) \\
 &= \mathcal{F}(g)\mathcal{F}(\check{g}) \\
 &= G(f)G^*(f) \\
 &= |G(f)|^2
 \end{aligned}$$

Question 4. Afin de démontrer la formule de Bennet, nous partirons de la définition de la DSP comme transformée de Fourier de la fonction d'auto-corrélation moyennée

$$\Gamma_{s_l}(f) = \mathcal{F}(\bar{R}_{s_l}(\tau))$$

$$\begin{aligned}
 \Gamma_{s_l}(f) &= \mathcal{F}(\bar{R}_{s_l}(\tau)) \\
 &= \frac{1}{T_s} \mathcal{F}\left(\sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d]v(\tau - dT_s)\right) \\
 &= \frac{1}{T_s} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d]\mathcal{F}(v(\tau - dT_s)) \\
 &= \frac{1}{T_s} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d]e^{-j2\pi f dT_s} \mathcal{F}(v(\tau)) \\
 &= \frac{V(f)}{T_s} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d]e^{-j2\pi f dT_s} \\
 &= \frac{|G(f)|^2}{T_s} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d]e^{-j2\pi f dT_s}
 \end{aligned}$$

Il est ici intéressant d'interpréter la formule de Bennet de la façon suivante : la DSP de $s_l(t)$ ($\Gamma_{s_l}(f)$) est obtenue comme le produit entre la DSP de $s_s(t)$ ($\Gamma_{s_s}(f) = \frac{1}{T_s} \sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d]e^{-j2\pi f dT_s}$) et le module carré de la fonction de transfert du filtre de mise en forme ($|G(f)|^2$).

De plus, cette relation permet aussi de comprendre pourquoi le filtre g est appelé "filtre de mise en forme". En effet, dans la plupart des cas $\Gamma_{s_s}(f) = C$ donc

$$\Gamma_{s_l}(f) \propto |G(f)|^2$$

Choisir $G(f)$ revient donc à choisir l'allure de la DSP du signal transmis. Une corolaire intéressante est donc : g détermine la bande passante d'une transmission (ensemble des fréquences sur lesquelles la transmission est effectuée).

Question 5. Nous allons ici utiliser directement la formule de Bennet. Pour cela, quelques résultats préliminaires sont nécessaires. Nous avons

$$\mathbb{E}(A_k) = 1 * \mathbb{P}(A_k = 1) + -1 * \mathbb{P}(A_k = -1) = 0.5 - 0.5 = 0$$

de plus

$$\begin{aligned}
R_A[k] &= \mathbb{E}(A_n A_{n-k}^*) \\
&= \begin{cases} \mathbb{E}(|A_n|^2), & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{E}(A_n) \mathbb{E}(A_{n-k}^*), & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 1, & \text{si } k = 0 \\ 0, & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

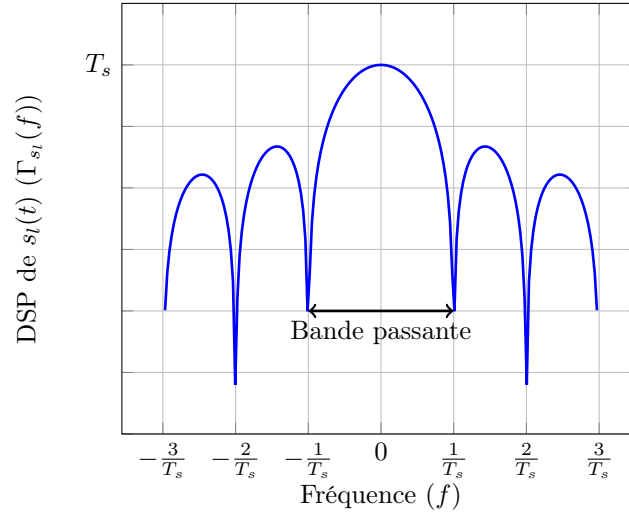
Donc dans l'expression de la formule de Bennet, nous avons $\sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] e^{-j2\pi f d T_s} = 1$.

Il nous reste à calculer $G(f)$. Pour cela on remarque que $g(t) = \Pi_{T_s}(t - T_s/2)$ où Π_{T_s} est la porte centrée autour de $t = 0$ de largeur T_s . En passant à la transformée de Fourier à il vient

$$\begin{aligned}
G(f) &= e^{j\pi T_s f} \mathcal{F}(\Pi_{T_s}(t)) \\
&= e^{j\pi T_s f} T_s \frac{\sin(\pi T_s f)}{\pi T_s f} \\
&= e^{j\pi T_s f} T_s \text{sinc}(T_s f)
\end{aligned}$$

Finalement on obtient la relation suivante :

$$\Gamma_{s_l}(f) = T_s \text{sinc}^2(T_s f)$$



Question 6. Comme pour la question précédente, nous allons ici utiliser directement la formule de Bennet. Ici, nous avons

$$\mathbb{E}(A_k) = 0 * \mathbb{P}(A_k = 0) + 1 * \mathbb{P}(A_k = 1) = 0.5$$

de plus

$$\begin{aligned}
R_A[k] &= \mathbb{E}(A_n A_{n-k}^*) \\
&= \begin{cases} \mathbb{E}(|A_n|^2), & \text{si } k = 0 \\ \mathbb{E}(A_n) \mathbb{E}(A_{n-k}^*), & \text{sinon} \end{cases} \\
&= \begin{cases} 0.5, & \text{si } k = 0 \\ 0.25, & \text{sinon} \end{cases}
\end{aligned}$$

Ce qui donne

$$R_A[k] = 0.25 + 0.25\delta[k]$$

où $\delta[k]$ est la notation δ de Kronecker. Donc dans l'expression de la formule de Bennet, nous avons

$$\sum_{d=-\infty}^{+\infty} R_A[d] e^{-j2\pi f d T_s} = 0.25 \sum_{d=-\infty}^{+\infty} e^{-j2\pi f d T_s} + 0.25 = 0.25 + \frac{0.25}{T_s} \text{III}_{T_s^{-1}}(f)$$

$G(f)$ sera identique à celui de la question précédente, on obtient donc :

$$\begin{aligned}
\Gamma_{s_l}(f) &= 0.25 T_s \text{sinc}^2(T_s f) + 0.25 \text{sinc}^2(T_s f) \text{III}_{T_s^{-1}}(f) \\
&= 0.25 T_s \text{sinc}^2(T_s f) + 0.25 \delta(f)
\end{aligned}$$

