TS226
-
Codes convolutifs et codes concaténés associés

Romain Tajan

24 octobre 2019

Plan

Exemple de QCM

Comment allez vous aujourd'hui ?

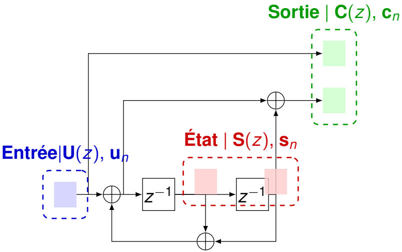
- A Très bien
- B Bien
- C Mal
- D Très mal

#QDLE#S#ABCD#30#

Plan

1. Previously on TS226 . . .
2. Code convolutif comme machine à états
3. Décodage des codes convolutifs
4. Turbo-Codes

Rappels / définitions



- **Entrée** : $\mathbf{U}(z) = [U^{(0)}(z),\ U^{(1)}(z)\ \dots\ U^{(n_b-1)}(z)]$

$\rightarrow$ dans ce cours $n_b = 1 \Rightarrow \mathbf{U}(z) \rightarrow U(z)$

- **État** : $\mathbf{S}(z) = [S^{(0)}(z),\ S^{(1)}(z)\ \dots\ S^{(m-1)}(z)]$

$\rightarrow$ m est appelé "mémoire du code"

$\rightarrow$ $\nu = m + 1$ est appelé "longueur de contrainte"

$\rightarrow$ dans l'exemple $m = 2$

$\rightarrow$ 2^m : nombre d'états

- **Sortie** : $\mathbf{C}(z) = [C^{(0)}(z),\ C^{(1)}(z)\ \dots\ C^{(m-1)}(z)]$

$\rightarrow$ n_s nombre de sorties

$\rightarrow$ dans l'exemple $n_s = 2$

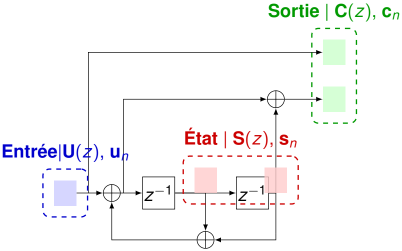
$\rightarrow$ De façon générale : $\mathbf{C}(z) = U(z)\mathbf{G}(z)$

$\rightarrow$ où $\mathbf{G}(z) = [\frac{A^{(1)}(z)}{B^{(1)}(z)}\ \dots\ \frac{A^{(n_s)}(z)}{B^{(n_s)}(z)}]$

- **Rendement du code** : $R = \frac{\#\text{bits d'info. en entrée}}{\#\text{bits codés en sortie}}$

$\rightarrow$ Ici : $R = \frac{n_b}{n_s} = \frac{1}{2}$

Rappels / définitions

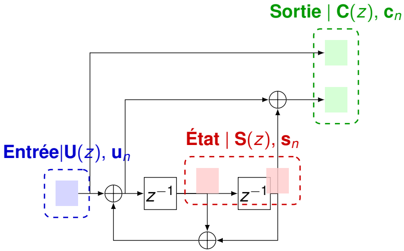


- **Code linéaire**

$\rightarrow$ Si $\mathbf{C}_1(z)$ et $\mathbf{C}_2(z)$ sont deux mots de codes, alors $\mathbf{C}_3(z) = \mathbf{C}_2(z) + \mathbf{C}_1(z)$ est aussi un mot de code.

- **Encodeur récursif / non récursif**
- **Encodeur systématique / non systématique**
- **Notation octale**

Quizz

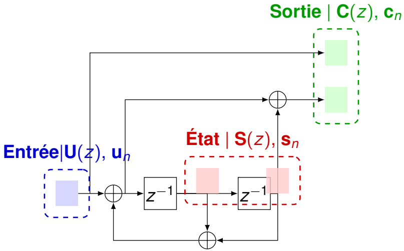


Cet encodeur est récursif :

- Ⓐ Vrai
- Ⓑ Faux

#QDLE#Q#A*B#20#

Quizz

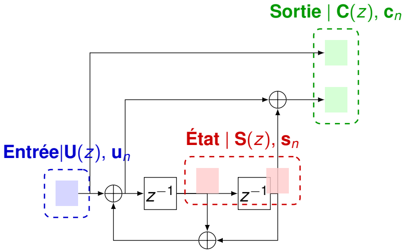


Cet encodeur est systématique :

- Ⓐ Vrai
- Ⓑ Faux

#QDLE#Q#A*B#20#

Quizz



La notation octale de cet encodeur est :

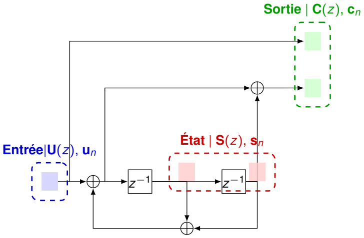
- A $(7, 5)_8$
- B $(1, \frac{5}{7})_8$
- C $(1, \frac{7}{5})_8$
- D $(5, 7)_8$

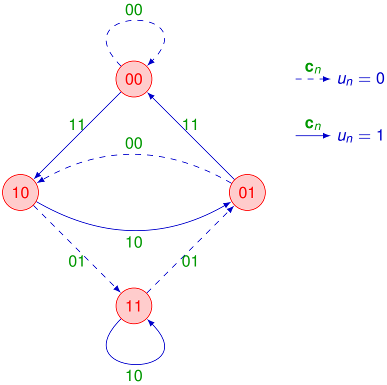
#QDLE#Q#ABC*D#20#

Plan

1. Previously on TS226 . . .
2. Code convolutif comme machine à états
   - ▷ Diagramme d'état des codes convolutifs
   - ▷ Treillis des codes convolutifs
3. Décodage des codes convolutifs
4. Turbo-Codes

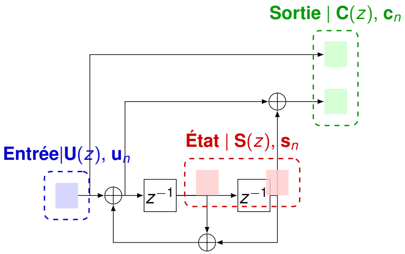
Rappels / définitions

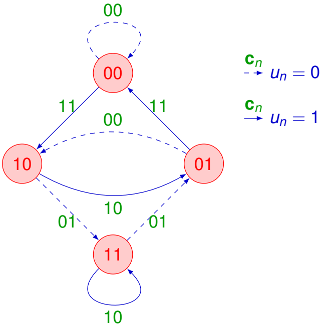




- Message ⇔ chemin dans le graphe
- Mot de code ⇔ étiquettes le long du chemin dans le graphe
- Nécessité de définir (au moins) un état initial

Rappels / définitions



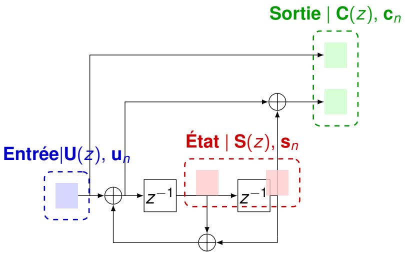


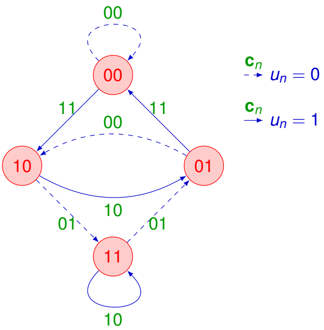
Si $\mathbf{u} = [0,\ 1,\ 1,\ 0]$, en supposant que $\mathbf{s}_0 = [0,\ 0]$ quelle sera la sortie de l’encodeur :

- Ⓐ $\mathbf{c} = [0, 0,\ 0, 1,\ 0, 1,\ 1, 1]$
- Ⓑ $\mathbf{c} = [0, 0,\ 1, 1,\ 0, 1,\ 1, 1]$
- Ⓒ $\mathbf{c} = [1, 0,\ 1, 1,\ 1, 0,\ 0, 1]$
- Ⓓ $\mathbf{c} = [0, 0,\ 1, 1,\ 1, 0,\ 0, 0]$

#QDLE#Q#ABCD*#30#

Rappels / définitions

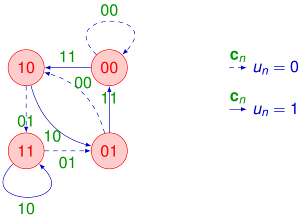




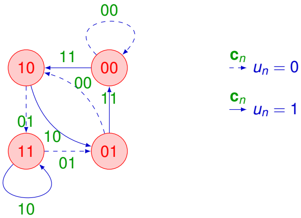
Quel est le poids de Hamming minimal pour un mot de code $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$?

- A 2
- B 3
- C 4
- D 5
- E 6

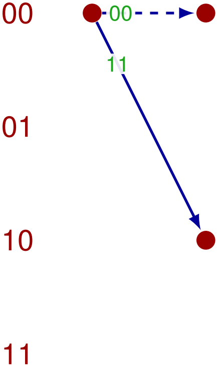
#QDLE#Q#ABCD*E#30#

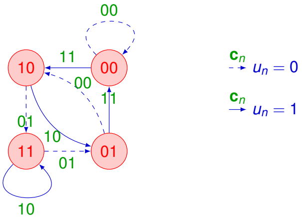


Treillis : représentation de la machine à états faisant explicitement apparaître le temps.

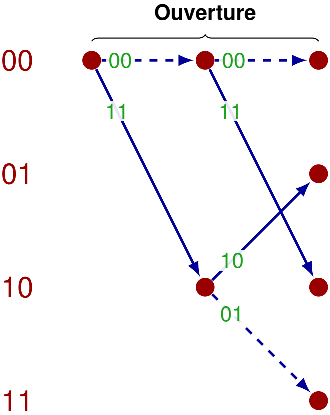


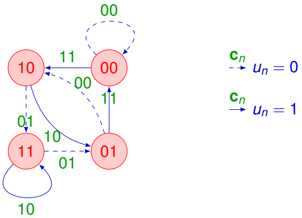
Treillis : représentation de la machine à états faisant explicitement apparaître le temps.



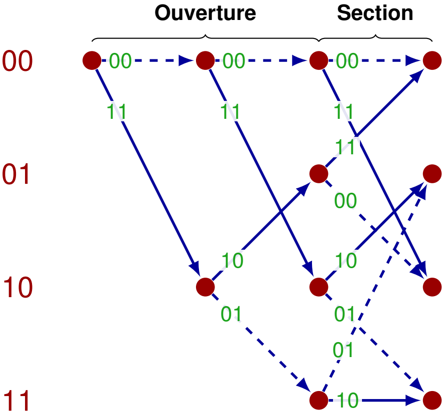


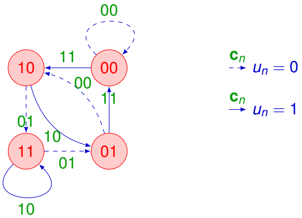
Treillis : représentation de la machine à états faisant explicitement apparaître le temps.



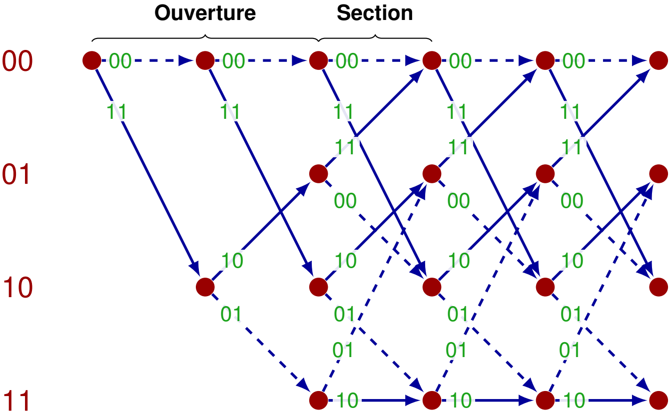


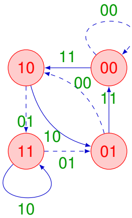
Treillis : représentation de la machine à états faisant explicitement apparaître le temps.





Treillis : représentation de la machine à états faisant explicitement apparaître le temps.

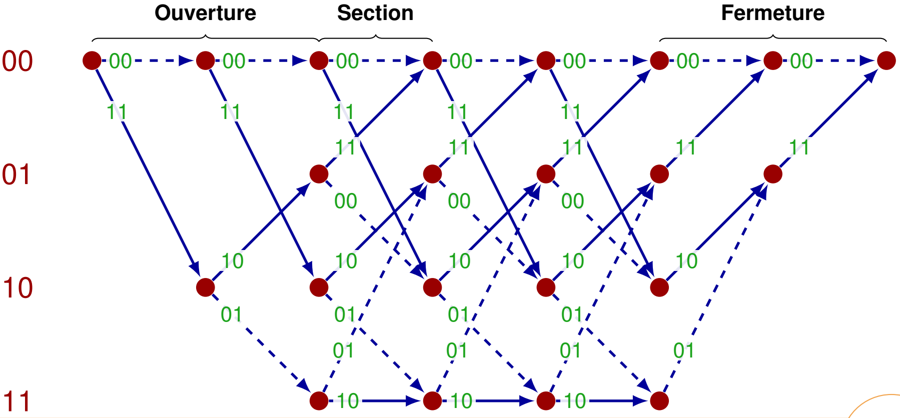


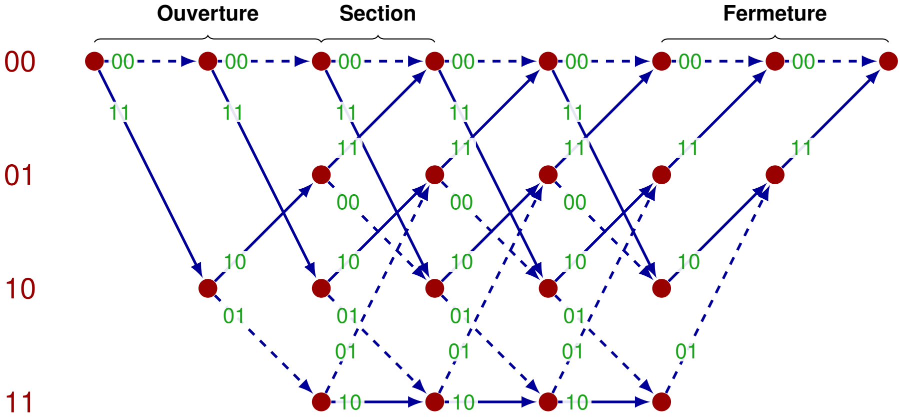


$\mathbf{c}_n$ ⇢ $u_n = 0$

$\mathbf{c}_n$ → $u_n = 1$

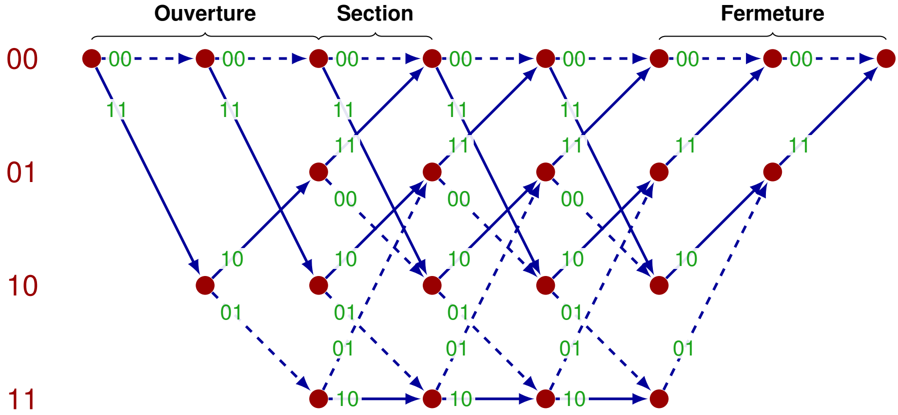
Treillis : représentation de la machine à états faisant explicitement apparaître le temps.





Remarques

- Fermer $\Rightarrow N = n_s(m+K) \Rightarrow R = \dfrac{K}{n_s(m+K)} \leq \dfrac{1}{n_s}$
- Fermer $\Rightarrow$ améliore la probabilité d'erreur



Sur ce treillis, combien de mots de codes $\mathbf{c} \neq \mathbf{0}$ ont un poids de Hamming de 5 ?

- A 4
- B 5
- C 6
- D 7

#QDLE#Q#AB*CD#30#

Plan

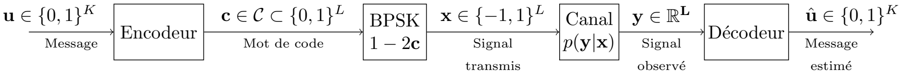
1. Previously on TS226 . . .

2. Code convolutif comme machine à états

3. Décodage des codes convolutifs
   - ▷ Décodage MAP, ML, et MAP-Bit
   - ▷ Décodeur ML des codes convolutifs
   - ▷ Décodeur MAP-Bit des codes convolutifs

4. Turbo-Codes

Décodage du Maximum a Posteriori



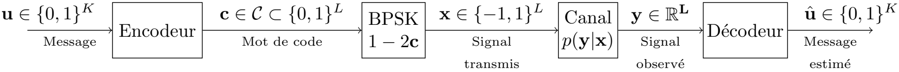
$\mathbf{u} \in \{0,1\}^K$ Message → Encodeur → $\mathbf{c} \in \mathcal{C} \subset \{0,1\}^L$ Mot de code → BPSK $1-2\mathbf{c}$ → $\mathbf{x} \in \{-1,1\}^L$ Signal transmis → Canal $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ → $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^\mathbf{L}$ Signal observé → Décodeur → $\hat{\mathbf{u}} \in \{0,1\}^K$ Message estimé

Définition

- Le couple **encodeur/BPSK** sera vu comme une fonction (bijective) de **u** :

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$$

Décodage du Maximum a Posteriori



Définition

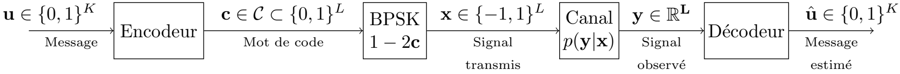
- Le couple **encodeur/BPSK** sera vu comme une fonction (bijective) de **u** :

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$$

- Un **décodeur** est une fonction de **y** définie dans $\{0,1\}^K$:

$$\hat{\mathbf{u}} = \Psi(\mathbf{y})$$

Décodage du Maximum a Posteriori



Définition

- Le couple **encodeur/BPSK** sera vu comme une fonction (bijective) de **u** :

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$$

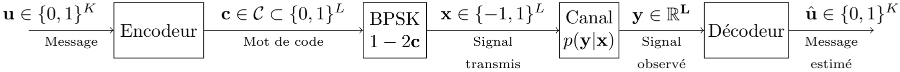
- Un **décodeur** est une fonction de **y** définie dans $\{0,1\}^K$:

$$\hat{\mathbf{u}} = \Psi(\mathbf{y})$$

- Le **décodeur** du **Maximum A Posteriori** (**MAP**) est la fonction de **y** définie par :

$$\Psi_{MAP}(\mathbf{y}) = \underset{\mathbf{u} \in \{0,1\}^K}{\operatorname{argmax}} \ \mathbb{P}(\mathbf{U} = \mathbf{u} | \mathbf{y})$$

Décodage du Maximum a Posteriori



$\mathbf{u} \in \{0,1\}^K$ Message → Encodeur → $\mathbf{c} \in \mathcal{C} \subset \{0,1\}^L$ Mot de code → BPSK $1 - 2\mathbf{c}$ → $\mathbf{x} \in \{-1,1\}^L$ Signal transmis → Canal $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ → $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{L}}$ Signal observé → Décodeur → $\hat{\mathbf{u}} \in \{0,1\}^K$ Message estimé

Définition

- Le couple **encodeur/BPSK** sera vu comme une fonction (bijective) de **u** :

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$$

- Un **décodeur** est une fonction de **y** définie dans $\{0,1\}^K$:

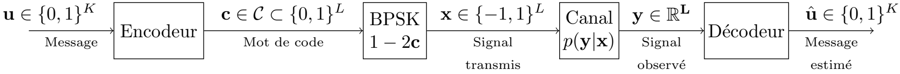
$$\hat{\mathbf{u}} = \Psi(\mathbf{y})$$

- Le **décodeur** du **Maximum A Posteriori** (**MAP**) est la fonction de **y** définie par :

$$\Psi_{MAP}(\mathbf{y}) = \underset{\mathbf{u} \in \{0,1\}^K}{\text{argmax}} \ \mathbb{P}(\mathbf{U} = \mathbf{u}|\mathbf{y})$$

- **Probabilité d'erreur trame** : $P_e = \mathbb{P}(\mathbf{U} \neq \hat{\mathbf{U}})$

Décodage du Maximum a Posteriori



$\mathbf{u} \in \{0,1\}^K$ Message

Encodeur

$\mathbf{c} \in \mathcal{C} \subset \{0,1\}^L$ Mot de code

BPSK $1-2\mathbf{c}$

$\mathbf{x} \in \{-1,1\}^L$ Signal transmis

Canal $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{L}}$ Signal observé

Décodeur

$\hat{\mathbf{u}} \in \{0,1\}^K$ Message estimé

Définition

- Le couple **encodeur/BPSK** sera vu comme une fonction (bijective) de **u** :

$$\mathbf{x} = \Phi(\mathbf{u})$$

- Un **décodeur** est une fonction de **y** définie dans $\{0,1\}^K$:

$$\hat{\mathbf{u}} = \Psi(\mathbf{y})$$

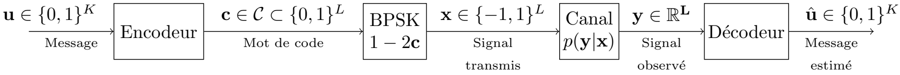
- Le **décodeur** du **Maximum A Posteriori** (**MAP**) est la fonction de **y** définie par :

$$\Psi_{MAP}(\mathbf{y}) = \underset{\mathbf{u}\in\{0,1\}^K}{\operatorname{argmax}} \mathbb{P}(\mathbf{U} = \mathbf{u}|\mathbf{y})$$

- **Probabilité d'erreur trame** : $P_e = \mathbb{P}(\mathbf{U} \neq \hat{\mathbf{U}})$

Le décodeur MAP minimise P_e !

Décodage du Maximum de Vraisemblance (ML)

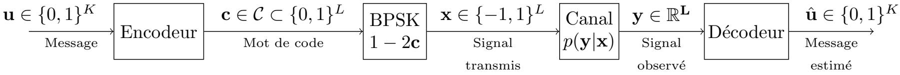


Définition

- Le **décodeur** du **Maximum de vraisemblance** (**ML**) est la fonction de **y** définie par :

$$\Psi_{ML}(\mathbf{y}) = \underset{\mathbf{u}\in\{0,1\}^K}{\operatorname{argmax}}\, p(\mathbf{y}|\mathbf{u}) = \underset{\mathbf{x}\in 1-2\mathcal{C}}{\operatorname{argmax}}\, p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$$

Décodage du Maximum de Vraisemblance (ML)



$\mathbf{u} \in \{0,1\}^K$ Message

Encodeur

$\mathbf{c} \in \mathcal{C} \subset \{0,1\}^L$ Mot de code

BPSK $1 - 2\mathbf{c}$

$\mathbf{x} \in \{-1,1\}^L$ Signal transmis

Canal $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{L}}$ Signal observé

Décodeur

$\hat{\mathbf{u}} \in \{0,1\}^K$ Message estimé

Définition

- Le **décodeur** du **Maximum de vraisemblance** (**ML**) est la fonction de **y** définie par :

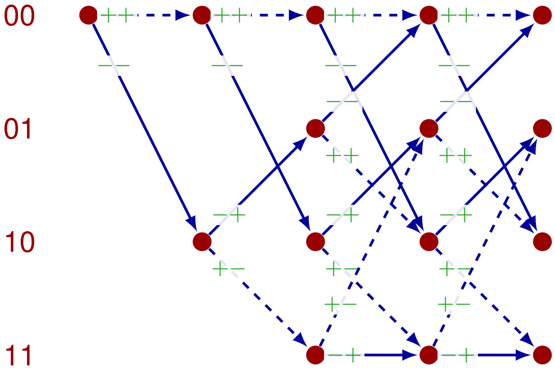
$$\Psi_{ML}(\mathbf{y}) = \underset{\mathbf{u}\in\{0,1\}^K}{\text{argmax}} \; p(\mathbf{y}|\mathbf{u}) = \underset{\mathbf{x}\in 1-2\mathcal{C}}{\text{argmax}} \, p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$$

- **Le décodeur ML est équivalent au décodeur MAP si les mots de codes sont équiprobables.**

- **Sur le canal AWGN sans mémoire, le décodeur ML est équivalent à la fonction suivante :**

$$\Psi_{ML}(\mathbf{y}) = \underset{\mathbf{x}\in 1-2\mathcal{C}}{\text{argmin}} \, ||\mathbf{y} - \mathbf{x}||_2^2 = \underset{\mathbf{x}\in 1-2\mathcal{C}}{\text{argmax}} \sum_{n=0}^{N-1} x_n y_n$$

Quizz

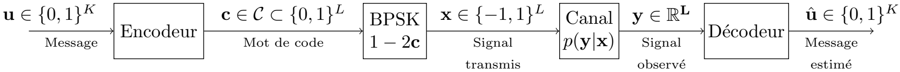


Soit le signal observé $\mathbf{y} = [-1,\ -1,\ -1,\ -1,\ 1,\ 1,\ -1,\ 1]$, sachant que $\mathbf{u} = [1,\ 1,\ 0,\ 1]$, reçoit-on le message sans erreur ?

- Ⓐ Oui
- Ⓑ Non

#QDLE#Q#A*B#30#

Décodage du Maximum A Posteriori - Bit (MAP-Bit)



$\mathbf{u} \in \{0,1\}^K$ Message → Encodeur → $\mathbf{c} \in \mathcal{C} \subset \{0,1\}^L$ Mot de code → BPSK $1 - 2\mathbf{c}$ → $\mathbf{x} \in \{-1,1\}^L$ Signal transmis → Canal $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$ → $\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{L}}$ Signal observé → Décodeur → $\hat{\mathbf{u}} \in \{0,1\}^K$ Message estimé

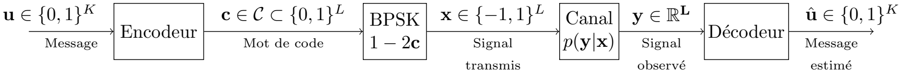
Définition

- Le **décodeur** du **Maximum A Posteriori - Bit** (**MAP-Bit**) est la fonction de **y** définie par :

$$\hat{u}_i = (\Psi_{MAP-Bit}(\mathbf{y}))_i = \arg \max_{u_i \in \{0,1\}} \mathbb{P}(U_i = u_i|\mathbf{y})$$

- **Probabilité d'erreur binaire** : $P_b = \dfrac{1}{K} \sum_{i=0}^{K-1} \mathbb{P}(U_i \neq \hat{U}_i)$

Décodage du Maximum A Posteriori - Bit (MAP-Bit)



$\mathbf{u} \in \{0,1\}^K$ Message

Encodeur

$\mathbf{c} \in \mathcal{C} \subset \{0,1\}^L$ Mot de code

BPSK $1-2\mathbf{c}$

$\mathbf{x} \in \{-1,1\}^L$ Signal transmis

Canal $p(\mathbf{y}|\mathbf{x})$

$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^{\mathbf{L}}$ Signal observé

Décodeur

$\hat{\mathbf{u}} \in \{0,1\}^K$ Message estimé

Définition

- Le **décodeur** du **Maximum A Posteriori - Bit** (**MAP-Bit**) est la fonction de **y** définie par :

$$\hat{u}_i = (\Psi_{MAP-Bit}(\mathbf{y}))_i = \arg \max_{u_i \in \{0,1\}} \mathbb{P}(U_i = u_i|\mathbf{y})$$

- **Probabilité d'erreur binaire** : $P_b = \frac{1}{K}\sum_{i=0}^{K-1} \mathbb{P}(U_i \neq \hat{U}_i)$

Le décodeur MAP-Bit minimise la probabilité d'erreur binaire.

Dernier QCM

Comment avez-vous trouvé ce cours ?

- A Très difficile
- B Difficile
- C Moyen
- D Simple
- E Très simple

#QDLE#S#ABCDE#30#

Plan

1. Previously on TS226 . . .
2. Code convolutif comme machine à états
3. Décodage des codes convolutifs
4. Turbo-Codes