

PRÁCTICA
SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (PARTE I)

Objetivos

El alumno conocerá y aplicará diferentes métodos de solución numérica para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.

Al final de esta práctica el alumno podrá:

1. Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante diversas técnicas de solución numérica (Eliminación Gaussiana y Gauss-Jordan)
2. Implementar dichas técnicas en el lenguaje de programación C

Antecedentes

1. Manejar ciclos de repetición en lenguaje C
2. Manejar arreglos y estructuras en lenguaje C
3. Realizar operaciones con matrices
4. Calcular la matriz inversa

Introducción

Existen varios métodos para la solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales, entre ellos están: Eliminación Gaussiana y Gauss-Jordan. Esta práctica se enfoca a dichos métodos por lo que a continuación se da una pequeña explicación de cada uno de ellos; aunado a esto se recomienda revisar estos métodos en la bibliografía citada al final de la práctica.

Eliminación Gaussiana

Este método propone la eliminación progresiva de variables en el sistema de ecuaciones, manejando una matriz cuadrada hasta dejarla en su forma triangular, para así encontrar el valor de una variable y dejar las demás ecuaciones con 2, 3, 4, ..., n variables consecutivamente, para de igual forma ir encontrando el valor de la segunda, tercera, ..., enésima variable haciendo una sustitución hacia atrás.

Este proceso se realiza mediante la utilización de operaciones básicas tales como la suma, resta, multiplicación y división; es muy frecuente la multiplicación de un renglón por una constante, y la suma de éste con otro renglón, ya que de esta manera se puede llegar hasta obtener una ecuación en donde el coeficiente de una variable sea 0.

Al renglón que se selecciona para realizar este proceso se le llama renglón *pivote*.

Por ejemplo, sea el sistema de ecuaciones:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 9 \\4x_1 + 5x_2 + 6x_3 &= 24 \\3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 4\end{aligned}$$

Las operaciones realizadas en la aplicación del método de Eliminación Gaussiana para la obtención de los valores de las variables se presentan a continuación:

Elaborada por:

Ing. Laura Sandoval Montaña
Viridiana del Carmen De Luna Bonilla
Virgilio Green Pérez

Programación Avanzada y Métodos Numéricos

PRÁCTICA
SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (PARTE I)

$$\begin{array}{r} -4x_1 - 8x_2 - 12x_3 = -36 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ \hline -3x_2 - 6x_3 = -12 \end{array}$$

⇐ Seleccionamos la primera ecuación como pivote y la multiplicamos por -4 y el resultado de ésta se la sumamos a la segunda. Esto simplificará el sistema.

$$\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ 0x_1 - 3x_2 - 6x_3 = -12 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \end{array}$$

⇐ La nueva ecuación encontrada, la sustituimos en el segundo renglón.

$$\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ 0x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 0x_1 - 5x_2 - 7x_3 = -23 \end{array}$$

⇐ Luego, la primera se multiplica por -3 y se le suma a la tercera; y la segunda ecuación se divide entre -3.

$$\begin{array}{r} x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \\ 0x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 0x_1 + 0x_2 + 3x_3 = -3 \end{array}$$

⇐ Ahora se multiplica la segunda por 5 y se le suma a la tercera.

⇐ En este momento ya tenemos el valor de x_3

$$\begin{aligned} x_3 &= \frac{-3}{3} = -1 \\ x_2 &= 4 - 2x_3 = 4 - 2(-1) = 6 \\ x_1 &= 9 - 3x_3 - 2x_2 = 9 - 3(-1) - 2(6) = 0 \end{aligned}$$

⇐ Ahora simplemente se procede a hacer la sustitución hacia atrás, y automáticamente se van obteniendo los valores de las otras incógnitas

El pseudocódigo para la triangulación de un sistema de n ecuaciones, con n incógnitas es:

```
DESDE i = 1 HASTA n
  DESDE j = i+1 HASTA n
    cte = A(j,i)/A(i,i)
    DESDE k = i HASTA n
      A(j,k) = A(j,k) - cte*A(i,k)
    FIN
    B(j) = B(j) - cte*B(i)
  FIN
FIN
```

donde: A es la matriz de los coeficientes de las incógnitas y B es el vector de términos independientes.

NOTA: Las limitantes que presenta este pseudocódigo es que si encuentra algún cero dentro de la diagonal principal, mientras va haciendo la eliminación, el algoritmo no podrá continuar ya que tratará de realizar una división entre cero.

Método De Gauss-Jordan

Este método constituye una variación del método de Eliminación de Gauss. Este procedimiento se diferencia del método Gaussiano, porque ahora no se busca obtener una matriz triangular, sino obtener la matriz identidad, siguiendo los mismos pasos de multiplicar por constantes los renglones y sumarlos a los demás.

Por ejemplo, sea el siguiente sistema de ecuaciones:

Elaborada por:

Ing. Laura Sandoval Montaña
Viridiana del Carmen De Luna Bonilla
Virgilio Green Pérez

Programación Avanzada y Métodos Numéricos

PRÁCTICA
SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (PARTE I)

$$\begin{array}{l}
 x + 2y + 3z = 9 \\
 4x + 5y + 6z = 24 \\
 3x + y + 2z = 4
 \end{array}
 \xrightarrow{\text{paso 1}}
 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 4 & 5 & 6 & 24 \\ 3 & 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}
 \xrightarrow{\substack{R_2 = r_2 - 4r_1 \\ R_3 = r_3 - 3r_1}}
 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & -3 & -6 & -12 \\ 0 & -5 & -7 & -23 \end{bmatrix}
 \rightarrow$$

$$\xrightarrow{R_2 = -\frac{1}{3}r_2}
 \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 9 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & -5 & -7 & -23 \end{bmatrix}
 \xrightarrow{\substack{R_1 = r_1 - 2r_2 \\ R_3 = r_3 + 5r_2}}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 3 & -3 \end{bmatrix}
 \xrightarrow{R_3 = \frac{1}{3}r_3}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
 \rightarrow$$

$$\xrightarrow{\substack{R_1 = r_1 + r_3 \\ R_2 = r_2 - 2r_3}}
 \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}
 \xrightarrow{\text{solución final}}
 \begin{bmatrix} x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 & 6 \\ 0 & 0 & z & -1 \end{bmatrix}$$

El pseudocódigo que realiza el método de Gauss-Jordan es:

```

DESDE i = 1 HASTA n
  Se normaliza el renglón pivote
  cte = A(i,i)
  DESDE j = 1 HASTA n
    A(i,j) = A(i,j)/cte
  FIN
  B(i)=B(i)/cte

  Sigue el algoritmo de eliminación gaussiana
  DESDE j = i+1 HASTA n
    cte = A(j,i)
    DESDE k = 0 HASTA n
      A(j,k) = A(j,k)-cte*A(i,k)
    FIN
    B(j) = B(j)-cte*B(i)
  FIN
FIN

Se realiza la eliminación inversa
DESDE i = n hasta 1
  DESDE j = (i-1) hasta 1
    cte = A(j,i)
    A(j,i) = A(j,i)-cte*A(i,i)
    B(j) = B(j)-cte*B(i)
  FIN
FIN
FIN
  
```

Elaborada por:

Ing. Laura Sandoval Montaña
 Viridiana del Carmen De Luna Bonilla
 Virgilio Green Pérez

Programación Avanzada y Métodos Numéricos

PRÁCTICA
SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (PARTE I)

Como se puede observar, es una modificación del pseudocódigo que se utilizó para la eliminación gaussiana; se le agregaron líneas de código tanto para normalizar el renglón pivote requerido en la eliminación hacia abajo, así como para la eliminación inversa y obtener la solución completa del sistema.

NOTA: Este pseudocódigo, al igual que el usado para la eliminación gaussiana, tiene la particularidad que no admite tampoco ceros en la diagonal principal, cuando realiza la eliminación hacia abajo.

Bibliografía

BURDEN, L. R. , FAIRES, J.D.

Análisis Numérico

7ª. Edición

México

Thomson International, 2003

CHAPRA, Steven C, CANALE, Raymond P.

Métodos Numéricos para Ingenieros

3ª. Edición

México

Mc. Graw-Hill, 1999

GERALD, Curtis F.

Análisis Numérico

6ª. Edición

México

Prentice Hall, 2001

PRÁCTICA
SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (PARTE I)

EJERCICIOS PROPUESTOS

1. Elaborar un programa que implemente la Eliminación Gaussiana para un sistema de ecuaciones lineales de 3 x 3.
2. Utilizando el programa anterior, resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}5x_1 + 3x_2 - 8x_3 &= 85.3 \\ -x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 14.32 \\ 4x_1 - 6x_2 + x_3 &= 17.61\end{aligned}$$

3. Modificar el programa del inciso 1 para que solucione la limitante de no aceptar ceros en la diagonal principal, intercambiando el renglón con el cero, por otro de los que están abajo del mismo. Y verificar con el siguiente sistema:

$$\begin{aligned}x_1 + 2x_2 + 3x_3 &= 2.4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 &= 6.4 \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &= 7.6\end{aligned}$$

4. Utilizando el sistema de ecuaciones del inciso 2, resolverlo por Gauss-Jordan.
5. Elaborar un programa que implemente el método de Gauss-Jordan, para sistemas de hasta 5 incógnitas. Y que resuelva la limitante de ceros en la diagonal principal, intercambiando por otro renglón por debajo de la característica. Utilice el sistema de ecuaciones del inciso 3, para su comprobación.
6. Con el programa anterior resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 22.26 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 8x_5 &= 9.95 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 54.81 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 7.49 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 8x_4 - 11x_5 &= 76.81\end{aligned}$$

7. Elaborar un programa que lea de un archivo un sistema de ecuaciones de 3 x 3 junto con el vector \bar{b} y que lo resuelva por Gauss-Jordan.

9`dfcZgcf`dcXfz`XlgY< Uf`gi`g`dfcd]cg`Y`YfW]cgzgjYa dfY`mWUbXc`WVfUdcf`Vta d`Yrc`Y`cV`Yhj`c`XY`UdfzV]V`