PRÁCTICA
APROXIMACIÓN Y SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES

Objetivos

El alumno conocerá y aplicará el concepto aproximación numérica. Conocerá y resolverá, utilizando la computadora, ecuaciones algebraicas.

Al final de esta práctica el alumno podrá:

1. *Calcular el error en una aproximación.*
2. *Resolver una ecuación algebraica a través de dos métodos numéricos.*

Antecedentes

1. Manejar ciclos de repetición en lenguaje C
2. Haber empleado sentencias de control de flujo en lenguaje C.

Introducción

Errores de aproximación

En el análisis numérico, al error que existe entre el valor real y el obtenido, se le llama *error de aproximación*.

Tipos de error

Existen varios tipos de error, los cuales se pueden presentar cuando se realizan cálculos numéricos, sin embargo en esta práctica se revisarán aquéllos que se deben considerar cuando se aplican los diferentes métodos numéricos para la resolución de problemas matemáticos.

a) Error por truncamiento.

Al realizar el cálculo de la fracción $\frac{24}{7}$, el resultado aproximado a seis decimales, (debido a que no se puede obtener el valor exacto) es 3.428571...

Si truncamos a dos decimales, es decir 3.42 solamente, su expresión como quebrado sería $\frac{171}{50}$, y esto, como se puede observar, está generando un error.

b) Error por redondeo.

Tomando el ejemplo anterior, si se redondea a dos decimales, es decir 3.43 solamente, su expresión como quebrado sería $\frac{343}{100}$, y esto genera un error, al igual que en el caso anterior.

Ing. Laura Sandoval Montaño
Viridiana del Carmen De Luna Bonilla
Virgilio Green Pérez

Cálculo de error

Cuando se obtiene un valor por aproximación, independientemente del método utilizado, se produce un error. En el análisis numérico es muy conveniente efectuar el cálculo del error con la finalidad de conocer qué tan cercano o lejano está el valor obtenido del valor real:

a) Error absoluto.- Es la diferencia que existe entre el valor real (V_R) y el valor aproximado (V_A). Es decir $\left|V_R - V_A\right|$.

b) Error relativo.- Es la diferencia porcentual que existe entre el valor absoluto y el valor real. Y se calcula como $\frac{\left|V_R - V_A\right|}{V_R} \times 100 = \%Error$.

Ejemplo de cálculo de error

Calcular el error absoluto y relativo de la fracción $\frac{24}{7}$, tratada anteriormente.

a) Error absoluto

1) Por truncamiento

$$\left|\frac{24}{7} - \frac{171}{50}\right| = \frac{3}{350} = 0.00857...$$

2) Por redondeo

$$\left|\frac{24}{7} - \frac{343}{100}\right| = \frac{1}{700} = 0.00142...$$

b) Error relativo

1) Por truncamiento

$$\frac{\left|\frac{24}{7} - \frac{171}{50}\right|}{\frac{24}{7}} \times 100 = \frac{1}{4} = 0.25\%$$

2) Por redondeo

$$\frac{\left|\frac{24}{7} - \frac{343}{100}\right|}{\frac{24}{7}} \times 100 = \frac{1}{24} = 0.0417\%$$

Conclusión: en este caso es mejor realizar redondeo que truncamiento ya que el error es mucho menor. Hay que considerar además, que dependiendo del problema a resolver es importante saber si aún este error es aceptable o no.

Solución de ecuaciones algebraicas

Cuando de una ecuación de una sola variable, se desea calcular sus raíces, existen métodos que permiten encontrar su solución, aun cuando no se pueda despejar a la variable.

Algunos de estos métodos son:

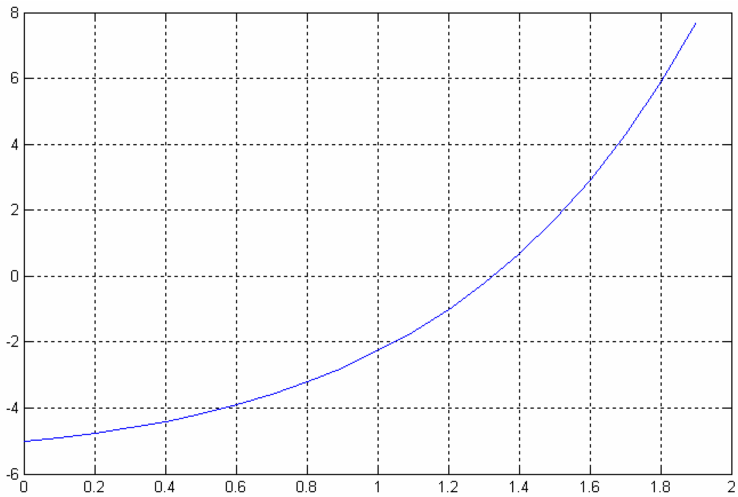
a) Método de bisección o búsqueda binaria

Este método consiste en buscar por medio de un intervalo dado, la raíz de una ecuación. Esto se hace primero dando los extremos del intervalo [a,b] donde se encuentra la raíz; así se puede observar si hay un cambio de signo en la evaluación de ambos puntos en la ecuación; si esto es cierto, se obtiene un tercer punto, que es el punto medio del intervalo, y se evalúa en la función. Ahora se verifica en qué intervalo entre [a,c] y [c,b] sigue estando el cambio de signo; donde esté el cambio de signo se considerará como el nuevo intervalo de búsqueda, este proceso se continúa hasta que la diferencia que haya entre los extremos del intervalo sea pequeña (nombrado tolerancia), siendo la solución el punto intermedio.

El algoritmo del método de bisección se presenta a continuación:

```
a = inicio_intervalo
b = fin_intervalo
REPETIR
    c = (a+b)/2
    SI f(c)*f(a)<0
        b = c
    CASO CONTRARIO
        a = c
HASTA |a – b|<tolerancia o f(c) = 0
```

Ejemplo:
De la siguiente ecuación $f(x) = xe^{x} - 5$ obtener el valor de la raíz.



De la gráfica, se observa que la raíz está entre 1.2 y 1.4, por lo que éste será el rango inicial.

Siguiendo el algoritmo, y tomando como tolerancia 0.002, los resultados de cada iteración se presentan en la siguiente tabla:

iteración 1)		iteración 2)	
a = 1.2	f(a) = -1.016	a = 1.3	F(a) = -0.2299
c = 1.3	f(c) = -0.2299	c = 1.35	F(c) = 0.20752
b = 1.4	f(b) = 0.67728	b = 1.4	F(b) = 0.67728
iteración 3)		iteración 4)	
a = 1.3	f(a) = -0.2299	a = 1.325	F(a) = -0.0151
c = 1.325	f(c) = -0.0151	c = 1.3375	F(c) = 0.09522
b = 1.35	f(b) = 0.2075	b = 1.35	F(b) = 0.2075
iteración 5)		iteración 6)	
a = 1.325	f(a) = -0.0151	a = 1.325	F(a) = -0.0151
c = 1.33125	f(c) = 0.03981	c = 1.328125	F(c) = 0.01229
b = 1.3375	f(b) = 0.09522	b = 1.33125	F(b) = 0.03981
iteración 7)		iteración 8)	
a = 1.325	f(a) = -0.0151	a = 1.3265625	F(a) = -0.0014
c = 1.3265625	f(c) = -0.0014	c = 1.32734375	F(c) =0.00543
b = 1.328125	f(b) = 0.01229	b = 1.328125	F(b) = 0.01229

Terminada la octava iteración se puede decir que la raíz está muy cerca de 1.32734375 que es el último valor obtenido en el centro del intervalo.

b) Método de Newton-Raphson

Este método para calcular la raíz de una ecuación algebraica es, al igual que el de bisección, es iterativo, pero la diferencia radica en que hay que darle un valor a la raíz, y las iteraciones se realizan utilizando la fórmula $x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$, donde

f ’(x) es la derivada de la función.

Las iteraciones se suspenden cuando se llega a una cierta tolerancia o se ha encontrado la raíz.

El algoritmo del método de Newton-Raphson es:

x_0 = valor_inicial
REPETIR

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}$$

HASTA $|x_{n+1} - x_n|$<tolerancia o $f(x_{n+1}) = 0$

Ing. Laura Sandoval Montaño
Viridiana del Carmen De Luna Bonilla
Virgilio Green Pérez

Ejemplo:

Tomando la misma ecuación del ejemplo de la aplicación del método de bisección $f(x) = xe^x - 5$, obtener la raíz utilizando ahora el método de Newton-Raphson.

Como se requiere la derivada de la función, se calcula y se obtiene: $f'(x) = xe^x + e^x$

Siguiendo el algoritmo y tomando como valor inicial 1.4 y una tolerancia de 0.002, los resultados de cada iteración se presentan en la siguiente tabla:

iteración 1)
$x_n = 1.2$
$x_{n+1} = 1.339078$

iteración 2)
$x_n = 1.339078$
$x_{n+1} = 1.326833$

iteración 3)
$x_n = 1.326833$
$x_{n+1} = 1.326725$

Comparando este método con el anterior, se observa que el método de Newton-Raphson, hace menos iteraciones para llegar al resultado, y obtiene un valor más cercano al real.

Para ambos métodos, los datos iniciales son de suma importancia ya que de esto dependerá si el proceso converge (se acerca a la solución) o no.

PRÁCTICA
APROXIMACIÓN Y SOLUCIÓN NUMÉRICA DE ECUACIONES

Ejercicios propuestos

1) Elabore un programa que reciba dos números de tipo *float*, y que calcule el error absoluto y el error relativo. Considere que el primer número sea el valor real, y el segundo el valor aproximado.

2) De la ecuación $f(x) = x^2 + 9x + 4$, elabore un programa que implemente el método de bisección, y calcule el error relativo en cada iteración. Considere el intervalo [-1,0] para la raíz en $x = -0.468871126$, o el intervalo [-10,-8.3] para la raíz en $x = -8.531128874$.

3) De la ecuación $f(x) = x\ln(x) - 5$, elabore un programa que implemente el método de bisección, y calcule el error relativo en cada iteración. Considere el intervalo [3,4], y la raíz en $x = 3.768679464$.

4) Elabore un programa que implemente el método de bisección, para la ecuación $f(x) = x^2 e^x - 2$ y calcule el error relativo en cada iteración. Los resultados los debe guardar en un archivo llamado "bisecc.txt". Considere el intervalo [0,1], y la raíz en $x = 0.901201032$

5) Considere la ecuación del inciso 2, elabore un programa que implemente el método de Newton-Raphson, y calcule el error relativo en cada iteración. Considere como valor inicial *0* para la raíz en $x = -0.468871126$, o *-10* para la raíz en $x = -8.531128874$.

6) Elabore un programa que implemente el método de Newton-Rapshon para la ecuación del inciso 3, y calcule el error relativo en cada iteración. Asigne *4* como valor inicial.

7) Considere la ecuación del inciso 4, elabore un programa que implemente el método de Newton-Raphson, y calcule el error relativo en cada iteración. Los resultados los debe guardar en un archivo llamado "newton.txt". Considere como valor inicial *1*.

8) Elabore un programa que implemente el método de bisección para resolver polinomios de orden *n*. El programa deberá recibir el grado máximo del polinomio, los coeficientes de cada uno de los términos, indicando con un *0* si ese término no existe, y el intervalo en el cual deberá aplicar el método. *NOTA: Dentro del intervalo deberá existir una raíz para que pueda converger el método.*

9) Elabore un programa que implemente el método de Newton-Raphson para resolver polinomios de orden *n*, el programa deberá recibir el grado máximo del polinomio, los coeficientes de cada uno de los términos, indicando con un *0* si el término en cuestión es nulo, y un valor inicial.

10) Utilizando el código de los incisos 8 y 9, implemente un programa para resolver numéricamente polinomios de orden *n*, dejando que el usuario escoja la opción de resolución por bisección o por Newton-Raphson.

El profesor podr§ dise¶ar sus propios ejercicios, siempre y cuando cubra por completo el objetivo de la pr§ctica.

Elaborada por:
Ing. Laura Sandoval Montaño
Viridiana del Carmen De Luna Bonilla
Virgilio Green Pérez