

**PRÁCTICA**  
**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (PARTE II)**

---

**Objetivos**

*El alumno conocerá y aplicará diferentes métodos de solución numérica para la resolución de sistemas de ecuaciones lineales.*

*Al final de esta práctica el alumno podrá:*

1. Resolver sistemas de ecuaciones lineales mediante diversas técnicas de solución numérica (Método de LU, Método de Gauss-Seidel)
2. Implementar dichas técnicas en el lenguaje de programación C

**Antecedentes**

1. Manejar ciclos de repetición en lenguaje C
2. Manejar arreglos y estructuras en lenguaje C
3. Realizar operaciones con matrices
4. Calcular la matriz inversa

**Introducción**

En la solución numérica de sistemas de ecuaciones lineales, existen varios métodos numéricos como el Método de LU y el Método de Gauss-Seidel. En esta práctica emplearemos dichos métodos, por lo que se da una pequeña explicación de cada uno de ellos; aunado a esto se recomienda revisar estos métodos en la bibliografía citada al final de la práctica.

**Método de LU**

El método de descomposición LU para la solución de sistemas de ecuaciones lineales debe su nombre a que se basa en la descomposición de la matriz original de coeficientes (A) en el producto de dos matrices (L y U).

Esto es:  $\boxed{A = LU}$

Donde:

L: Matriz triangular inferior

U: Matriz triangular superior.

Estas matrices son triangulares, y para facilidad de cálculo, cualquiera de ellas puede contener sólo unos en la diagonal principal. En esta práctica seleccionamos a la matriz U con dicha característica.

Por ejemplo, para matrices de 3x3 se escribe:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & 0 \\ l_{21} & l_{22} & 0 \\ l_{31} & l_{32} & l_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & u_{12} & u_{13} \\ 0 & 1 & u_{23} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

**PRÁCTICA**  
**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (PARTE II)**

Si efectuamos la multiplicación de L y U, igualando los elementos de ese producto con los de la matriz A correspondientes, se obtiene:

$$\begin{aligned} a_{11} &= l_{11} & a_{12} &= l_{11}u_{12} & a_{13} &= l_{11}u_{13} \\ a_{21} &= l_{21} & a_{22} &= l_{21}u_{12} + l_{22} & a_{23} &= l_{21}u_{13} + l_{22}u_{23} \\ a_{31} &= l_{31} & a_{32} &= l_{31}u_{12} + l_{32} & a_{33} &= l_{31}u_{13} + l_{32}u_{23} + l_{33} \end{aligned}$$

De aquí que los elementos de L y U son, en este caso:

$$\begin{aligned} l_{11} &= a_{11} & u_{12} &= a_{12}/l_{11} & u_{13} &= a_{13}/l_{11} \\ l_{21} &= a_{21} & l_{22} &= a_{22} - l_{21}u_{12} & u_{23} &= (a_{23} - l_{21}u_{13})/l_{22} \\ l_{31} &= a_{31} & l_{32} &= a_{32} - l_{31}u_{12} & l_{33} &= a_{33} - l_{31}u_{13} - l_{32}u_{23} \end{aligned}$$

Si el sistema de ecuaciones original se escribe como  $A x = b$ , resulta lo mismo escribir  $L U x = b$ . Definiendo a  $U x = Y$ , podemos escribir  $L Y = b$

Resolviendo para Y, encontramos:

$$\begin{aligned} y_1 &= b_1/l_{11} \\ y_2 &= (b_2 - l_{21}y_1)/l_{22} \\ y_3 &= (b_3 - l_{31}y_1 - l_{32}y_2)/l_{33} \end{aligned}$$

Una vez conocidas L, U y b, prosigue encontrar primeramente los valores de "Y" por sustitución progresiva sobre " $L Y = b$ ". Posteriormente se resuelve " $U x = Y$ " por sustitución regresiva para encontrar los valores de "x", obteniendo:

$$\begin{aligned} x_3 &= y_3 \\ x_2 &= y_2 - u_{23}x_3 \\ x_1 &= y_1 - u_{12}x_2 - u_{13}x_3 \end{aligned}$$

Por ejemplo, sea el siguiente sistema de ecuaciones, factorizando la matriz en LU:

Las matrices de factores L y U de A son:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 24 \\ 4 \end{bmatrix} \Rightarrow L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & -9 \end{bmatrix}; \quad U = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Resolver la ecuación  $L Y = b$

por sustitución progresiva para obtener los elementos del vector auxiliar Y:  $[L][Y]=[b]$

Donde:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 4 & -3 & 0 \\ 3 & -5 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 24 \\ 4 \end{bmatrix} \quad \begin{aligned} y_1 &= 9 \\ y_2 &= 4 \\ y_3 &= -1 \end{aligned}$$

**PRÁCTICA**  
**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (PARTE II)**

---

Resolver la ecuación  $U x = Y$   
para encontrar los elementos de  
 $x$ , por sustitución regresiva:

$$[U][x]=[Y]$$



$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}$$

De donde se obtiene:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 6$$

$$x_3 = -1$$

A continuación se presenta el algoritmo, en pseudocódigo, de la descomposición de la matriz  $A$  en  $L$  y  $U$ , donde el programador puede seleccionar la matriz que contendrá la diagonal principal unitaria (como se mencionó anteriormente).

```
DESDE k = 1 HASTA n
  U(k,k)=1
  L(k,k) = A(k,k) -  $\sum_{s=1}^{k-1} L(k,s) * U(s,k)$ 
  DESDE i = (k+1) HASTA n
    L(i,k) = A(i,k) -  $\sum_{s=1}^{k-1} L(i,s) * U(s,k)$ 
  FIN
  DESDE j = (k+1) HASTA n
    U(k,j) =  $\frac{A(k,j) - \sum_{s=1}^{k-1} L(k,s) * U(s,j)}{L(k,k)}$ 
  FIN
FIN
```

**PRÁCTICA**  
**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (PARTE II)**

---

**Método de Gauss-Seidel**

El método de Gauss-Seidel, es un método iterativo y por lo mismo, resulta ser un método bastante eficiente.

El paso inicial de este método consiste en despejar por cada ecuación una variable diferente, así se obtiene un conjunto de ecuaciones. Considerando el siguiente sistema de ecuaciones lineales, se muestra a su derecha la ecuación resultante en la que de la ecuación 1 despejamos  $x_1$ , de la 2 despejamos  $x_2$  y así sucesivamente.

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = b_1 & x_1 = & \frac{b_1 - a_{12}x_2 - \dots - a_{1n}x_n}{a_{11}} \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = b_2 & x_2 = & \frac{b_2 - a_{21}x_1 - \dots - a_{2n}x_n}{a_{22}} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \dots + a_{nn}x_n = b_n & x_n = & \frac{b_n - a_{n1}x_1 - \dots - a_{nn-1}x_{n-1}}{a_{nn}} \end{array}$$

Para comenzar el proceso iterativo, le damos un valor inicial a las variables  $x_2, x_3, \dots, x_n$ ; sustituyendo estos valores en la ecuación de  $x_1$ , obtenemos un primer valor para éste; luego utilizamos este nuevo valor para sustituirlo en la siguiente ecuación y obtener un valor para  $x_2$ ; y continuamos consecutivamente hasta llegar a  $x_n$ ; con esto completamos la primera iteración. Aplicamos nuevamente las ecuaciones para obtener nuevos valores de  $x_1, x_2, \dots, x_n$  completando de esta manera otra iteración. Este proceso iterativo termina cuando, sacando la diferencia entre cada uno de los valores de la iteración actual con la anterior, se tiene un valor menor de tolerancia.

Por ejemplo, sea el siguiente sistema de ecuaciones lineales:

$$\begin{array}{l} 3x_1 + x_2 + 2x_3 = 4 \\ 4x_1 + 5x_2 + 6x_3 = 24 \\ 1x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 9 \end{array}$$

Despejamos  $x_1, x_2$  y  $x_3$  de la ecuación 1, 2 y 3, respectivamente.

$$\begin{array}{l} x_1 = \frac{4 - x_2 - 2x_3}{3} \\ x_2 = \frac{24 - 4x_1 - 6x_3}{5} \\ x_3 = \frac{9 - x_1 - 2x_2}{3} \end{array}$$

**PRÁCTICA**  
**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (PARTE II)**

---

$$x_1 = \frac{4 - 0 - 2(0)}{3} = 1.33333$$

$$x_2 = \frac{24 - 4(1.33333) - 6(0)}{5} = 3.73333$$

$$x_3 = \frac{9 - (1.33333) - 2(3.73333)}{3} = 0.06667$$

De la primera iteración tenemos que:

$$x_1 = 1.33333$$

$$x_2 = 3.73333$$

$$x_3 = 0.06667$$

← Damos valores iniciales a  $x_2$  y  $x_3$  de cero y obtenemos un primer valor de  $x_1$ .

← Obtenemos un valor para  $x_2$ , utilizando  $x_3$  y el nuevo valor de  $x_1$ .

← Y luego para  $x_3$ , utilizamos los nuevos valores de  $x_1$  y  $x_2$ .

*Iteración 2*

$$x_1 = \frac{4 - (3.73333) - 2(0.06667)}{3} = 0.04444$$

$$x_2 = \frac{24 - 4(0.04444) - 6(0.06667)}{5} = 4.68444$$

$$x_3 = \frac{9 - (0.04444) - 2(4.68444)}{3} = -0.13777$$

← Para la segunda iteración se usa  $x_2 = 3.73333$  y  $x_3 = 0.06667$  para obtener los nuevos valores. Y procedemos de la misma manera que en la iteración anterior.

Calculamos los errores: para una tolerancia de 0.1

Error  $x_1$ :

$$|0.04444 - 1.33333| = 1.288$$

Error  $x_2$ :

$$|4.68444 - 3.73333| = 0.95111$$

Error  $x_3$ :

$$|-0.13777 - 0.06666| = 0.20444$$

Como los errores obtenidos, en general, son todavía grandes, continuamos con la siguiente iteración, realizando el mismo procedimiento.

*Iteración 3*

$$x_1 = \frac{4 - (4.68444) - 2(-0.13777)}{3} = -0.13629$$

$$x_2 = \frac{24 - 4(-0.13629) - 6(-0.13777)}{5} = 5.07437$$

$$x_3 = \frac{9 - (-0.13629) - 2(5.07437)}{3} = -0.33748$$

Error  $x_1$ :

$$|-0.13629 - (-0.04444)| = 0.18074$$

Error  $x_2$ :

$$|5.07437 - 4.68444| = 0.38992$$

Error  $x_3$ :

$$|-0.33748 - (-0.13777)| = 0.19970$$

errores mayores a la tolerancia de 0.1

**PRÁCTICA**  
**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (PARTE II)**

---

*Iteración 4*

$$x_1 = \frac{4 - 5.07437 - 2(-0.33748)}{3} = -0.13313$$

$$x_2 = \frac{24 - 4(-0.13313) - 6(-0.33748)}{5} = 5.31148$$

$$x_3 = \frac{9 - (-0.13313) - 2(5.31148)}{3} = -0.49661$$

Error  $x_1$ :

$$|-0.13313 - (-0.13629)| = 0.00316$$

Error  $x_2$ :

$$|5.31148 - 5.07437| = 0.23711$$

Error  $x_3$ :

$$|-0.49661 - (-0.33748)| = 0.15913$$

errores mayores a la tolerancia de 0.1

*Iteración 5*

$$x_1 = \frac{4 - (5.31148) - 2(-0.49661)}{3} = -0.10608$$

$$x_2 = \frac{24 - 4(-0.10608) - 6(-0.49661)}{5} = 5.48080$$

$$x_3 = \frac{9 - (-0.10608) - 2(5.48080)}{3} = -0.61850$$

Error  $x_1$ :

$$|-0.10608 - (-0.13313)| = 0.27048$$

Error  $x_2$ :

$$|5.48080 - 5.31148| = 0.16931$$

Error  $x_3$ :

$$|-0.61850 - (-0.49661)| = 0.12189$$

errores mayores a la tolerancia de 0.1

*Iteración 6*

$$x_1 = \frac{4 - (5.48080) - 2(-0.61850)}{3} = -0.08126$$

$$x_2 = \frac{24 - 4(-0.08126) - 6(-0.61850)}{5} = 5.60721$$

$$x_3 = \frac{9 - (-0.08126) - 2(5.60721)}{3} = -0.71105$$

Error  $x_1$ :

$$|-0.08126 - (-0.10608)| = 0.02482$$

Error  $x_2$ :

$$|5.60721 - 5.48080| = 0.12641$$

Error  $x_3$ :

$$|-0.71105 - (-0.61850)| = 0.09255$$

errores mayores a la tolerancia de 0.1

*Iteración 7*

$$x_1 = \frac{4 - (5.60721) - 2(-0.71105)}{3} = -0.06170$$

$$x_2 = \frac{24 - 4(-0.06170) - 6(-0.71105)}{5} = 5.70263$$

$$x_3 = \frac{9 - (-0.06170) - 2(5.70263)}{3} = -0.78118$$

Error  $x_1$ :

$$|-0.06170 - (-0.08126)| = 0.01956$$

Error  $x_2$ :

$$|5.70263 - 5.60721| = 0.09541$$

Error  $x_3$ :

$$|-0.78118 - (-0.71105)| = 0.07012$$

errores menores a la tolerancia de 0.1

**PRÁCTICA**  
**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (PARTE II)**

---

Como la tolerancia se cumple en estos tres casos, aquí termina el proceso de iteraciones. Entonces tenemos una solución del sistema de ecuaciones:

$$x_1 = -0.06170$$

$$x_2 = 5.70263$$

$$x_3 = -0.78118$$

La tolerancia fijada en este ejercicio es muy grande por lo que los resultados no están muy cercanos al valor exacto:

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 6$$

$$x_3 = -1$$

Se recomienda utilizar una tolerancia mucho menor.

### **Bibliografía**

BURDEN, L. R. , FAIRES, J.D.

*Análisis Numérico*

7ª. Edición

México

Thomson International, 2003

CHAPRA, Steven C, CANALE, Raymond P.

*Métodos Numéricos para Ingenieros*

3ª. Edición

México

Mc. Graw-Hill, 1999

GERALD, Curtis F.

*Análisis Numérico*

6ª. Edición

México

Prentice Hall, 2001

**PRÁCTICA**  
**SOLUCIÓN NUMÉRICA DE SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES (PARTE II)**

---

**EJERCICIOS PROPUESTOS**

1. Elaborar un programa que implemente el método de LU, para resolver sistemas de 3 incógnitas.
2. Con el programa anterior, resolver el siguiente sistema de ecuaciones.

$$\begin{aligned}5x_1 + 3x_2 - 8x_3 &= 85.3 \\ -x_1 + 4x_2 - 6x_3 &= 14.32 \\ 4x_1 - 6x_2 + x_3 &= 17.61\end{aligned}$$

3. Elaborar un programa que implemente el método de Gauss-Seidel, para resolver sistemas de 3 incógnitas. *TIP: Sólo es implementar en funciones, las ecuaciones resultantes del despeje de las ecuaciones del sistema.*
4. Utilizando el programa anterior, resolver el sistema de ecuaciones del inciso 2. Recordar que el sistema de ecuaciones debe estar acomodado.
5. Resolver el siguiente sistema de ecuaciones utilizando el método de LU. *TIP: Implementar el algoritmo visto anteriormente y obtener ciclos adicionales para calcular Y y X.*

$$\begin{aligned}4x_1 + 2x_2 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 &= 22.26 \\ 5x_1 + x_2 + x_3 - 3x_4 + 8x_5 &= 9.95 \\ 5x_1 + 7x_2 + 2x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= 54.81 \\ x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 5x_5 &= 7.49 \\ 3x_1 + 2x_2 + 6x_3 - 8x_4 - 11x_5 &= 76.81\end{aligned}$$

9`dfcZgcf'dcXfz`X]gY< Uf'gi g'dfcd]cg`YfVW]cgžg]Ya dfY'mWUbXc`WVfUdcf`Vtza d`Yfrc`Y`cV`Yh] c`XY`UdfzVW]W`