# Содержание

# Введение

Система верстки TEXбыла создана Дональдом Кнутом, профессором Стэнфордского университета в 1977 году. Эта система является специализированным языком программирования, который включает команды, макросы и является аппаратно-независимым, то есть - скажем, это работает одинаково на всех компьютерах, от ПК до Cray. Позже, в начале 1980-х годов, Лэмпорт на базе TEXразработал систему редактирования LATEX. Другое расширение, TEX- Bib TEX, было написано О. Паташником и предназначено для подготовки библиографии. TEXи LATEXстали стандартом для научных публикаций в области естественных наук. В настоящее время на TEXопубликовано большое количество публикаций, включая подробные руководства, подробно описывающие все функции.

Цели и задачи практики:

- Изучить теоретические основы использования текстового редактора LATEX;
- Познакомиться с практическим применением редактора LATEX;
- Вёрстка заданной руководителем главы учебника.

# 1 Признаки возрастания и убывания функции

Рассмотрим вначале самый простой случай — постоянную (на некотором интервале) функцию. Из постоянства функции вытекает равенство нулю её производной. В этом случае говорят, что равенство нулю производной на некотором интервале есть необходимое условие постоянства функции на этом интервале. Можно легко доказать, что и, наоборот, из равенства нулю производной функции на некотором интервале следует её постоянство на этом интервале. В этом случае говорят, что постоянство функции на некотором интервале есть достаточное условие равенства нулю производной этой функции на том же интервале.

Перейдём теперь к рассмотрению возрастающих и убывающих функций. Мы лишь сформулируем необходимые и достаточные условия возрастания и убывания функции на некотором промежутке.

**Теорема 1.1** (Неоходимое условие возрастания функции). *Если дифференцируемая функция* $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, *возрастает на интервале* $(a; b)$, *то* $f(x_0) \geq$ *для любого* $x_0 \in (a; b)$.

Из определения возрастающей функции имеем: для любых $f(x_0) \geq (a; b), x \geq (a; b)$ из $x > (x_0)$ следует, что $f(x) > f(x_0)$, а из $x < (x_0)$ следует, что $f(x) > f(x_0)$.

В обоих случаях $\dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} > 0$, а следовательно, $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{f(x_0)} \geq 0$. т. е. $f'(x_0) \geq 0$.

**Теорема 1.2** (Неоходимое условие убывания функции). *Если дифференцируемая функция* $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, *убывает на интервале* $(a; b)$, *то* $f'(x_0) \leq 0$ *для любого* $x_0 \in (a; b)$.

Доказательство этого утверждения аналогично предылущему. Достаточные признаки монотонности функции вытекают из следующих двух утверждений, которые мы приводим без доказательства.

**Теорема 1.3** (Достаточное условие возрастания функции). *Если функция, $y = f(x)$, $x \in (a; b)$, имеет положительную производную в каждой точке интервала $(a; b)$, то эта функция возрастет на интервале $(a; b)$.*

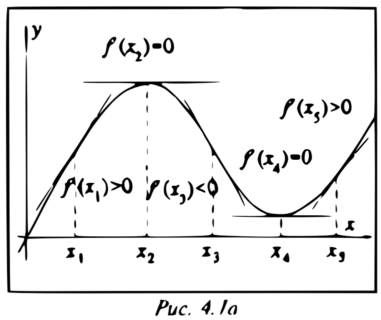


Рис. 1: Возрастающая функция

**Теорема 1.4** (Достаточное условие убывания функции). *Если функция $y = f(x), x \in (a; b)$, имеет отрицательную производную в каждой точке интервала $(a; b)$, то эта функция убывает на интервале $(a; b)$.*

Проиллюстрируем эти условия на рис. 1, на котором приведена функция, возрастающая в интервалах $-\infty < x < x_2$ и $x_4 < x < +\infty$ и убывающая в интервале $x_2 < x < x_4$.

# 2 Экстремумы фунции. Необходимые и достаточные условия экстремума. Вторая производная.

## 2.1 Понятие экстремума функции

**Определение 2.1.** *Точка $x_0$ из области определения функции $f(x)$ называется точкой минимума этой функции, если найдётся такая $\delta$ окрестность $x_0 - \delta; x_0 + \delta$ точки $x_0$, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) > f(x_0)$.*

**Определение 2.2.** *Точка $x_0$ из области определения функции $f(x)$ называется точкой минимума этой функции, если найдется такая $\delta$ окрестность $x_0 - \delta; x_0 + \delta$ точки $x_0$, что для всех $x \neq x_0$ из этой окрестности выполняется неравенство $f(x) < f(x_0)$.*

**Определение 2.3.** *Точки минимума и максимума называются экстремумами функции.*

Рассмотрим график функции $y = f(x)$, $x \in [a; b]$. Точки $x_1$ и $x_3$ являются точками максимума, а $x_2$ и $x_4$ точками минимума. Из рис. 2 видно, что минимум в точке $x_4$ больше максимума данной функции в точке $x_1$.Это объясняется тем, что экстремум функции связан с определением $\delta$-окрестностью точки экстремума, а не со всей областью определения функции. По этой причине употребляется термин локальный экстремум, т. е. экстремум связанный с данным местом. Этим же объясняется и тот факт, что точки $a$ и $b$ не относятся к точкам экстремума. Для них не существует $\delta$-окрестности, принадлежащей области определения функции.

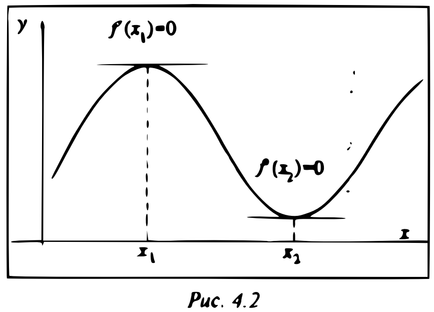


Рис. 2: Минимум и максимум

## 2.2 Необходимые условия существования экстремума

Необходимые условия существования экстремума даёт теорема Ферма, которая известна по школьному курсу, поэтому мы приводим лишь её формулировку.

**Теорема 2.1** (Теорема Ферма)**.** *Если точка $x_0$ является точкой экстремума функции $y = f(x)$ и в этой точке существует производная $f(x_0)$, то $f(x_0) = 0$.*

Эта теорема имеет простой геометрический смысл: касательная к графику функции $y = f(x)$ в точке, удовлетворяющей условиям теоремы Ферма, параллельна оси абсцисс (см.рис. 3)

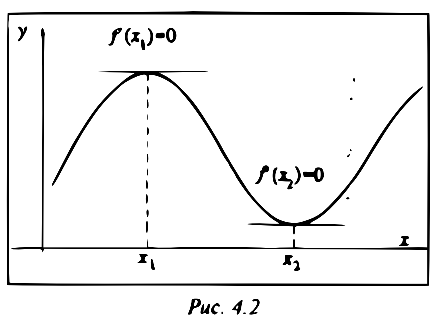


Рис. 3: Касательная к графику функции

**Определение 2.4.** *Точки, в которых производная обращается в нуль или не существует, называются критическими точками (первого рода).*

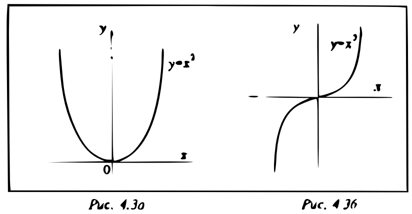


Рис. 4: Производная функции

**Пример 2.1.** Производная функции $f(x) = x^2$ в точке $x_0 = 0$ обращается в нуль и, как видно из рис. 4, в этой точке данная функция имеет экстремум (минимум). Теорема Ферма дает лишь необходимое условие существования экстремума, но не достаточное.

**Пример 2.2.** Производная функции $f(x) = x^3$ в точке $x_0 = 0$ обращается в нуль, а экстремума в этой точке функция не имеет (см.рис. 5). Как показывают следующие примеры, и в тех критических точках, в которых производная не существует, функция также может иметь или не иметь экстремум.

## 2.3 Необходимые условия существования экстремума

**Теорема 2.2** (Первое достаточное условие экстремума)**.** *Пусть функция $y = f(x)$ неприрывна в точке $x_0$ и в некоторой ее $\delta-$ окрестности имеет производную, кроме, быть может, самой точки $x_0$. Тогда:*

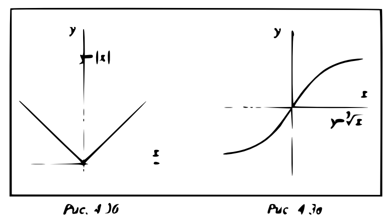

Рис. 5: Производная функции

1) если производная $f'(x)$ при переходе $x$ через точку $x_0$ меняет знак с плюса на минус, то $x_0$ является точкой максимума.

2) если производная $f'(x)$ при переходе $x$ через точку $x_0$ меняет знак с минуса на плюс, то $x_0$ является точкой минимума.

3) если производная $f'(x)$ при переходе $x$ через точку $x_0$ не меняет знак, то в точке $x_0$ функция $f(x)$ не имеет экстемума.

**Пример 2.3.** Исследовать на экстремум функцию $y = f(x) = (2x+1)(x-2)^{2/3}$.

1)Находим производную данной функции $f'(x) =^{10} /_3(x-1)(x-2)^{-1/3}$.

2)Находим критические точки:

а) решая уравнение $f'(x) = 0$, получим $x = 1$.

б) $f(x)$ не существует при $x = 2$.

Следовательно, критические точки: $x = 1$ и $x = 2$.

3) Методом пробных точек определяем знак производной в каждом из интервалов: $(-\infty; 1)$, $(1; 2)$, $(2; +\infty)$ (рис. 6) Имеем таким образом $x_1 = 1$ - точка максимума, а $x_2 = 2$ - точка минимума.

4) Вычисляем значения данной функции в точках экстремума

$y_{max} = f(1) = 3$, $y_{min} = f(2) = 0$.

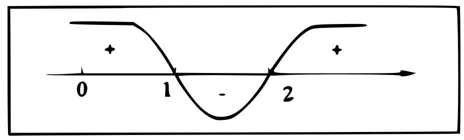


Рис. 4.4

Рис. 6: Точки максимума и минимума

**Теорема 2.3** (Второе достаточное условие экстремума)**.** *Если функция $y = f(x)$ определена и дважды дифференцируема в некоторой окрестности точки $x_0$, причем $f'(x_0) = 0$, а $f'(x_0) \neq 0$, то в точке $x_0$ функция $f(x)$ имеет максимум, если $f'(x_0) < 0$, и минимум, если $f''(x_0) > 0$.*

**Пример 2.4.** Исследовать на экстремум функцию $y = \frac{1}{3}(x^3) - 2x^2 + 3x - 4$.

1)Находим производную $f(x) = (\frac{1}{3}(x^3) - 2x^2 + 3x - 4)' = x^2 - 4x + 3$.

2)Решая уравнение $x^2 - 4x + 3 = 0$, находим критические точки:

$x_1 = 1$ и $x_2 = 3$.

3)Находим вторую производную: $f'(x) = (f(x))' = 2x - 4$.

4)Определяем знак второй производной в критических точках, для чего вычисляем $f'(1) = -2 < 0$ и $f'(3) = 2 > 0$. Следовательно, $x_1 = 1$- точка минимума, а $x_2 = 3$- точка максимума.

5)Вычисляем максимальное и минимальное значение функции

$y_{max} = f(1) = -{}^{8}/_{3}, y_{min} = f(3) = -4$.

Заметим, что в случае, когда вторая производная в критической точке обращается в нуль или не существует, второе правило нахождения экстремума с помощью второй производной неприменимо. В этом случае исследование функции на экстремум можно проводить по первому правилу.

**Пример 2.5.** Исследовать на экстремум функцию $f(x) = x^4 - 2$.

1)Находим $f(x) = 4x^3$.

2)Решая уравнение $4x^3 = 0$, получаем критическую точку $x = 0$.

3)Находим $f'(x) = 12x^2$.

4)Вычисляем $f'(0) = 0$.

В критической точке вторая производная обращается в нуль, поэтому исследование проводим по первому правилу. Так как $f(x) < 0$ при $x < 0$, а $f(x) > 0$ при $x > 0$,то в точке $x = 0$ данная функция имеет минимум, причем $f_{min} = f(0) = -2$.

# 3 Выпуклость графика функции. Точки перегиба

## 3.1 Выпуклость графика функции

При исследовании поведения функции и формы ее графика полезно установить, на каких интервалах график функции обращен выпуклостью вверх, а на какиз - выпуклостью вниз. Прежде всего выясним понятие выпуклости графика функции, имеющей на некотором интервале неприрывную производную.

**Определение 3.1.** *График функции $y = f(x), x \in (a; b)$ называется выпуклым вверх (вогнутым вниз) на интервале $(a; b)$, если график расположен ниже (точнее не выше) любой своей касательной (см.рис.7). Сама функция $f(x)$ также называется выпуклой вверх (вогнутой вниз).*

**Определение 3.2.** *График функции $y = f(x), x \in (a; b)$ называется выпуклым вниз (вогнутым вниз) на интервале $(a; b)$, если график расположен выше (точнее не ниже) любой своей касательной (см.рис.8). Сама функция $f(x)$ также называется выпуклой вниз (вогнутой вверх ).*

На интервале выпуклости вверх (вогнутости вниз) производная функции убывает. В самом деле, из рис. 7 видно, что с возрастанием аргумента $x$ величина угла $\alpha$, образованного касательной с положительным направлением оси $Ox$, убывает, принимая значения между $\frac{\pi}{2}$ и $\frac{\pi}{-2}$. При этом $\operatorname{tg}\alpha = f(x)$ также убывает, принимая значения между $+\infty$ и $-\infty$.

Из рис. 7 аналогичным образом заключаем, что на интервале выпуклости вниз (вогнутости вверх) производная $f(x)$ возрастает.

Можно показать, что имеют место и обратные утверждения.

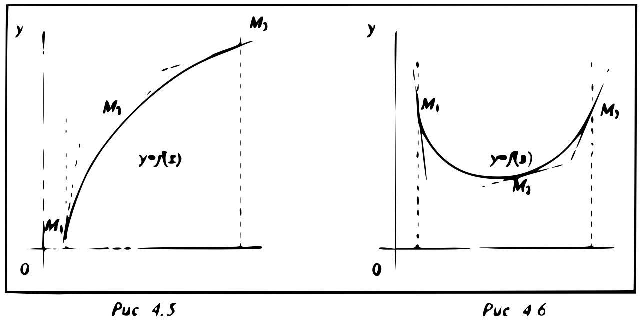


Рис. 7: Интервал выпуклости вверх

**Теорема 3.1** (Достаточное условие выпуклости графика функции)**.** *Если на интервале* $(a; b)$ *дважды дифференцируемая функция* $y = f(x), x \in (a; b)$ *имеет отрицательную (положительную) вторую производную, то график функции является выпуклым вверх (вниз).*

Допустим для определенности, что $f''(x) < 0$ для всех $x \in (a; b)$.

Рассмотрим производную $f'(x)$ как функцию от $x$, а $f^(x)$- как ее первую производную. Тогда функция $f^(x)$ убывает на интервале $(a; b)$, а следовательно, по отмеченному выше график функции $y = f(x)$ на этом интервале является выпуклым вверх. Аналогично, если $f' > 0$ для всех $x \in (a; b)$, то график функции $y = f(x)$ на интервале $(a; b)$ является выпуклым вниз.

Исследовать на выпуклость график функции $y = f(x)$ означает найти те интервалы из области ее определения, в которых вторая производная $f'(x)$ сохраняет свой знак. Заметим, что $f'(x)$ может менять свой знак лишь в точках, где $f'(x) = 0$ или не существует. Такие точки принято называть критическими точками второго рода.

Исследовать на выпуклость график функции $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2x + 1$. Данная функция определена на всей числовой прямой. Находим критические точки второго рода $f(x) = 3x^2 - 6x + 2, f'(x) = 6x - 6, 6x - 6 = 0$, т.е. $x = 1$. Итак, $x = 1$- критическая точка второго рода. Методом пробных точек определяем знак $f'(x)$ в каждом из интервалов $(-\infty, 1)$ и $(1; +\infty)$. Так, при

$x = 0 \in (-\infty, 1)$ имеем, $f'(0) = -6 < 0$, а при $x = 2 \in (1, +\infty)$ имеем $f'(2) = 6 > 0$, итак, в точке $x = 1$ производная $f'(x)$ меняет знак с минуса на плюс. Следовательно, на интервале $(-\infty, 1)$ график данной функции обращен выпуклостью вверх, а на интервале $(1, +\infty)$ - выпуклостью вниз. (см.рис.8).

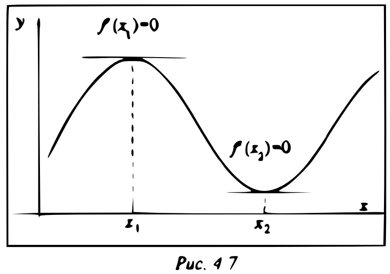


Рис. 8: Интервал выпуклости вниз

## 3.2 Точки перегиба

**Определение 3.3.** *Точка перегиба неприрывной функции $f(x)$, в которой существует касательная и при переходе через которую график функции меняет направление выпуклости, называется точкой перегиба. Согласно определению в точке перегиба касательная к графику функции с одной стороны расположена выше графика, а с другой - ниже, т.е. в точке перегиба касательная пересекает кривую (см. рис. 9).*

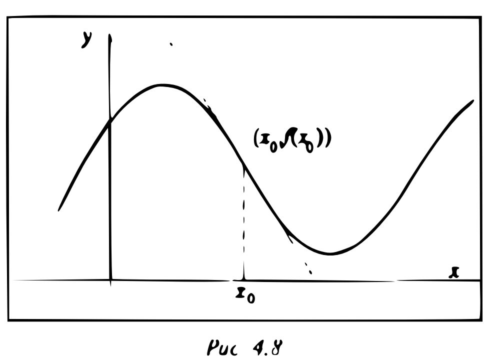


Рис. 9: Точка перегиба

# 4 Асимптоты кривой

**Определение 4.1.** *Прямая, имеющая уравнение $y = kx + b$, называется наклонной асимптотой графика функции $y = f(x)$ при $x \to \infty$, если $\lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx - b) = 0$. Отсюда $k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x}$, $b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx)$. Имеет место и обратное: из последних соотношений следует, что прямая $y = kx + b$ является асимптотой графика функции $y = f(x)$. По выведенным формулам вычисляются угловой коэффициент $k$ и начальная ордината $b$ двух асимптот $y = kx + b$ отдельно при $x \to +\infty$ и при $x \to -\infty$. Очевидно, что если $k = 0$, то уравнение асимптоты примет вид $y = b$.*

**Определение 4.2.** *Асимптота, определяемая уравнением $y = b$, называется горизонтальной асимптотой.*

**Определение 4.3.** *Прямая, имеющая уравнение $x = a$, называется вертикальной асимптотой, если $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$.*

*Для определения вертикальных асимптот следует отыскать те значения $x$, вблизи которых функция $f(x)$ неограниченно возрастает по модулю. Обычно это точки разрыва второго рода данной функции.*

**Пример 4.1.** Найти асимптоты графика функции $f(x) = \frac{x^2+1}{x-2}$.

Так как $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x-2} = \pm\infty$, то прямая $x = 2$ является вертикальной асимптотой. Находим

$k = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{f(x)}{x} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{x^2+1}{x(x-2)=1}$,
$b = \lim\limits_{x\to\infty}(f(x) - kx) = \lim\limits_{x\to\infty}\left\{\frac{x^2+1}{x(x-2)-x}\right\} = \lim\limits_{x\to\infty}\frac{2x+1}{x-2} = 2$.

Итак, прямая, имеющая уравнение $y = x + 2$, является наклонной асимптотой графика данной функции при $x \to \pm\infty$. Таким образом, график данной функции имеет вертикальную асимптоту, имеющую уравнение $y = x + 2$ (см.рис. 10).

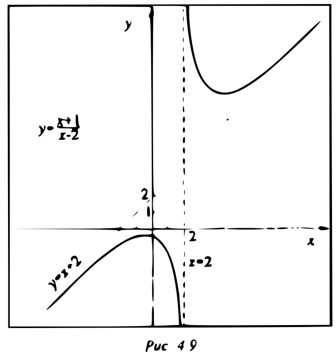


Рис. 10: Вертикальная асимптота

**Общая схема исследования функции и построения графиков**

С учетом изложенного выше можно рекомендовать следующую схему исследования функции и построения ее графика:

1) найти область определения функции;

2) исследовать функцию на четность и нечетность;

3) исследовать функцию на периодичность

4) исследовать функцию на непрерывность, найти точки разрыва;

5) найти критические точки первого рода;

6) найти интервалы монотонности и экстремумы функции;

7) найти критические точки второго рода;

8) найти интервалы выпуклости и точки перегиба;

9) найти асимптоты графика функции;

10) найти точки пересечения графика функции с осями координат (если это возможно);

11) построить график функции.

# 5 Исследование функции в экономике. Нахождение максимума прибыли

В качестве примера рассмотрим задачу выбора оптимального объ-ема производства фирмой, функция прибыли которой может быть смоделирована зависимостьюВ качестве примера рассмотрим задачу выбора оптимального объ-ема производства фирмой, функция прибыли которой может быть смоделирована зависимостью

$$\pi(q) = R(q) - C(q) = q^2 - 8q + 10$$

1. Находим производную этой функции

$$\pi'(q) = R'(q) - C'(q) = 2q - 8$$

2. Приравниваем производную нулю

$$\pi'(q) = 2q - 8 = 0 \rightarrow q_{extr} = 4$$

Является ли объем выпуска, равный четырем оптимальным для фирмы? Чтобы ответить на этот вопрос, надо проанализировать характер изменение знака производной при переходе через точку экстремума.

3. Анализируем характер изменения знака производной

При $q < q_{extr} = 4 \rightarrow \pi'(q0) < 0$ и прибыль убывает.

При $q > q_{extr} = 4 \rightarrow \pi'(q0) > 0$ и прибыль возрастает.

Следовательно, в точке экстремума $q_{extr} = 4$ прибыль принимает минимальное значение, и таким образом этот объем производства не является оптимальным для фирмы.

# 6 Эластичность и ее применение в экономическом анализе

Важнейшим направлением применения дифференциального ис-числения в экономике является введение с его помощью понятия эластичности. Коэффициент эластичности показывает относительное изменение исследуемого экономического показателя под действием единичного относительного изменения экономического фактора, от которого он зависит при неизменных остальных влияющих на него факторах.

## 6.1 Эластичность функции и ее геометрический смысл

Пусть величина $y$ зависит от $x$, и эта зависимость описывается функцией $y = f(x)$. Изменение независимой переменной $x(\Delta x)$ приводит в силу функциональной зависимости к изменению переменной $y(\Delta y)$. Встает вопрос, как измерить чувствительность зависимой переменной $y$ к изменению $x$ Одним из показателей реагирования одной переменной на изменение другой служит производная

$$y = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x},$$

характеризующая скорость изменения функции с изменением аргумента $x$. Однако в экономике этот показатель неудобен тем, что он зависит от выбора единиц измерения. Например, если мы рассмотрим фунцию спроса на сахар $(Q)$ от его цены $(P)$, то увидим, что значение производной при каждой цене $P$ (изменяемой в рублях)

$$Q_p = \lim_{\Delta p \to 0} \frac{\Delta Q}{\Delta P}$$

зависит от того, измеряется ли спрос на сахар в киллограммах или центнерах. В первом случае производная измеряется в кг/руб., во втором - ц/руб., соответственно ее значение при одном и том же значении цены будет различным в зависимости от едениц измерения величины спроса. Поэтому для измерения чувствительности изменения фунции к изменению аргумента в экономике изучают связь не абсолютных изменений переменных $x$ и $y$ ($\Delta x$) и $\Delta y$), а их относительных или процентных изменений.

Эластичностью функции $y = f(x)$ называется предел отношения относительных изменений переменных $y$ и $x$.

Если эластичность изменения переменной $y$ при переменной $x$ обозначить $E_x(y)$,то, используя определение прозводной, получаем

$$E_x(y) = \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{\Delta y}{y})/(\frac{\Delta x}{x}) = \lim_{\Delta x \to 0} (\frac{\Delta y}{\Delta x}) \cdot (\frac{x}{y}) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} \cdot \frac{x}{y},$$

$$E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = f'(x) \cdot \frac{x}{y} = \frac{f'(x)}{\frac{y}{x}} = \frac{f'(x)}{\frac{f(x)}{x}} = \frac{Mf}{Af},$$

где $Mf$ - маржинальое значение функции $f$ в точке $x$ (см.ниже гл.6), $Af$ - среднее значение фунцкции в точке $x$. Эту эластичность называют также предельной или точечной эластичностью.

Т.е. эластичностью может быть выражена в виде отношения предельной ($Mf$) или средней ($Af$) величин.

Так как $dlny = \frac{dy}{y}$, а $dlnx = \frac{dx}{x}$, то эластичность можно предствить в форме "логарифмической производной"$E_x(y) = \frac{dlny}{dlnx}$.

**Определение 6.1** (Геометрическая интерпретация эластичности)**.** *Подобно произвоной, эластичность имеет простую геометрическую интерпретацию.*

Рассмотрим убывающую вогнутую функцию $y = f(x)$ (рис.11)

Найдем эластичность этой функции в произвольной точке $C$ с координатами $(x, y)$. Для этого проведем касательную $AB$ к функции $y = f(x)$ в точке $C$.

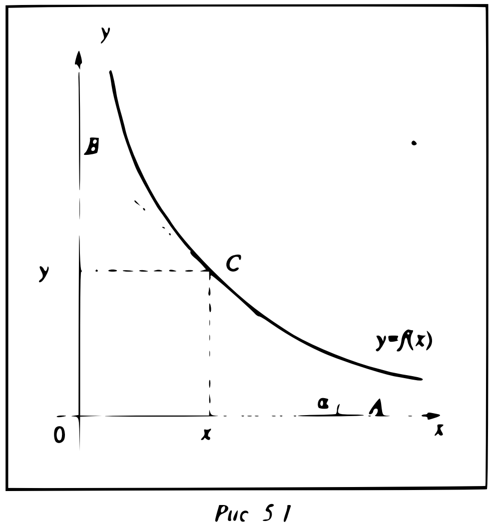


Рис. 11: Вогнутая функция

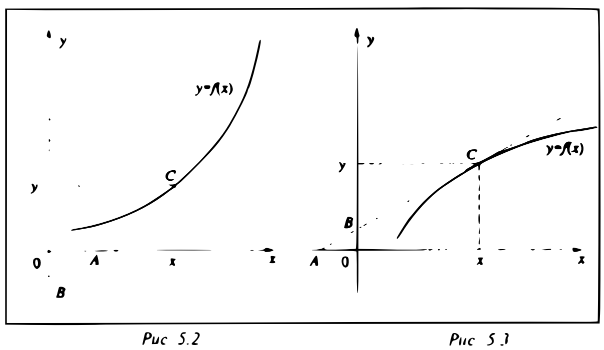


Рис. 12: Выпуклая функция

Из $\Delta ACX$ $AX = \frac{CX}{\operatorname{tg}\alpha}$

Т.к. производная функции $y = f(x)$ в точке $C$ равна $\operatorname{tg}(180 - \alpha)$, то $tg\alpha = -f(x)$.

Следовательно, $AX = \frac{f(x)}{-f'(x)} = -\frac{f(x)}{f'(x)}$.

Из подобия треугольников $CBY$ и $CAX$ следует, что

$$\frac{CB}{CA} = \frac{CY}{AX} = \frac{OX}{AX} = \frac{f'(x)x}{f(x)} = -E_x(y)$$

Таким образом, $E_x(y) = -\frac{CB}{CA}$. т.е. геометрическая эластичность убывающей функции равна отношению расстояний по касательной от точки $C$ с координатами $(x, f(x))$ до ее пересечения с осями $Y$ и $X$, взятому, соответственно, со знаком минус.

В случае выпуклой и вогнутой возрастающих функций (рис. 11 и рис.12) эластичность по абсолютной величине также будет равна отношению $\frac{CB}{CA}$, а знак эластичности будет определяться направлением отрезков $CB$ и $CA$.

Если точки $A$ и $B$ лежат по одну сторону от точки $C$ на касательной, как на рисунках 5.2, 5.3, то в формуле надо выбрать знак плюс . Если $A$ и $B$ лежат по разные стороны, от т. $C$, как на первом рисунке, то в формуле надо выбрать знак минус (доказательство для двух последних рисунков вы можете провести самостоятельно).

Отметим также, что эластичность функции, изображенной на рис.5.2, больше еденицы (так как $CB > CA$) на рис.5.3 - меньше еденицы (так как $CB < CA$).

**Дискретный случай.**

В дискретном случае, а также при приближенном определении эластичности по дискретному набору данных, определение эластичности уже не столь однозначно, как в неприрывном случае, поскольку в относительном изменении $\delta x = \frac{\Delta x}{x} = \frac{x_2 - x_1}{x}$ не ясно, что брать в качестве $x$: первоначальное значение ($x = x_1$), конечное значение ($x = x_2$) или среднее значение $x = \frac{x_1 + x + 2}{2}$. В зависимости от этого выбора различают:

конечную(процентную) эластичность

$$E_x(y) = (\frac{y_2 - y_1}{y} / \frac{x_2 - x_1}{x_1},$$

среднуюю (дуговую) эластичность

$$E_x(y) = (\frac{2(y_2 - y_1)}{y_1 + y_2} / \frac{2(x_2 - x_1)}{x_1 + x_2},$$

а также логарифмическую эластичность

$$E_x(y) = \frac{\Delta \ln y}{\Delta \ln x} = \frac{\ln y_2 - \ln y_1}{\ln x_1 - \ln x_2} = \ln(\frac{y_2}{y_1})/(\frac{x_2}{x_1}).$$

Все эти выражения мало отличаются друг от друга при небольших относительных (процентыных) изменений величин $x$ и $y$.

Отметим, что для всех эластичностей используется один и тот же символ $E_x(y)$, ибо из контекста бывает ясно, о какой эластичности идет речь.

## 6.2 Свойства эластичности и эластичность элементарных функций

**Определение 6.2.** *Свойства эластичности:*

*1. Эластичность - безразмерная величина, значение которой не зависит от того, в каких единицах измерены величины $y$ и $x$: $E_ax(by) = E_x(y)$.*

$$E_ax(by) = \frac{d(by)}{d(ax)} \cdot \frac{ax}{by} = \frac{b(dy)}{a(dx)} \cdot \frac{ax}{by} = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = E_x(y).$$

*2. Эластичности взаимно обратных функций - взаимно обратные величины:*

$$E_x(y) = \frac{1}{E_x(y)} \leftarrow E_x(y) = \frac{dy}{dx} \cdot \frac{x}{y} = \frac{1}{\frac{dx}{dy} \cdot \frac{y}{x}} = \frac{1}{E_y(x)}.$$

*Например, эластичность величины спроса по цене обратна эластичности цены по величине спроса* $\left(E_p(Q) = \frac{1}{E_q(p)}\right)$.

*3. Эластичность произведения двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента $x$, равна сумме эластичностей: $E_x(uv) = E_x(u) + E_x(v)$.*

$$E_x(uv) = \frac{d(uv)}{dx} \cdot \frac{x}{uv} = \frac{v\left(\frac{du}{dx}\right) + u\left(\frac{dv}{dx}\right)}{uv} \cdot x = \frac{du}{dx} \cdot \frac{x}{u} + \frac{dv}{dx} \cdot \frac{x}{v} = E_x(u) + E_x(v).$$

*4. Эластичность частного двух функций $u(x)$ и $v(x)$, зависящих от одного и того же аргумента $x$, равна разности эластичностей*

$$E_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{d\frac{u}{v}}{dx} \cdot \frac{x}{\frac{u}{v}} = \frac{vdu - udv}{v^2} \cdot \frac{xv}{u} = \frac{du}{dx} \cdot \frac{x}{u} - \frac{dv}{dx} \cdot \frac{x}{v} = E_x(u) - E_x(v).$$

*5. Эластичность суммы двух функций $u(x)$ и $v(x)$ может быть найдена по формуле:*

$$E_x(u+v) = \frac{d(u+v)}{dx} \cdot \frac{x}{u+v} = \left(\frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}\right) \cdot \frac{x}{u+v} = \frac{uE_x(u) + vE_x(v)}{u+v}.$$

**Определение 6.3.** *Эластичности элементарных функций:*

*1. Эластичность степенной функции $y = x^\alpha$ постоянна и равна показателю степени $\alpha$: $E_x(x^\alpha) = \alpha$.*

$$E_x(x^\alpha) = \frac{dx^\alpha}{dx} \cdot \frac{x}{x^\alpha} = \frac{\alpha x^{\alpha-1} \cdot x}{x^\alpha} = \alpha.$$

*2. Эластичность показательной функции $y = a^x$ пропорциаbональна $x$:*

$$E_x(a^x) = \frac{da^x}{dx} \cdot \frac{x}{a^x} = a^x \cdot x \cdot \frac{\ln a}{a^x} = x \cdot \ln a.$$

*3. Эластичность линейной функции $y = ax + bE_x(ax+b) = \frac{ax}{ax+b}$.*

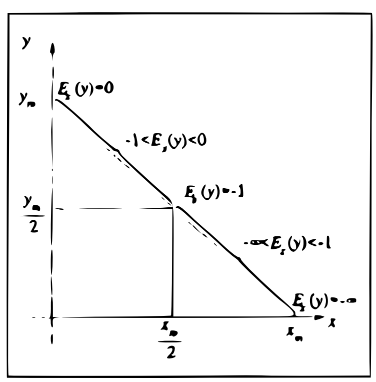


Рис. 5 4

Рис. 13: График линейной функции

$E_x(ax+b) = \frac{d(ax+b)}{dx} \cdot \frac{x}{ax+b} = \frac{ax}{ax+b}$

*Если график линейной функции имеет отрицательный наклон* ($a < 0$), *то эластичность функции меняется от нуля в точке* $y_m$ *пересечения графиком оси* $y$ *до минус бесконечности* ($-\infty$) *в точке пересечения оси* $x$*, проходя через значение* ($-1$) *в средней точке. Таким образом, хотя прямая имеет постоянный наклон, ее эластичность зависит не только от наклона, но и от того, в какой точке* $x$ *мы ее находим на рис. 13. Функция с бесконечной эластичностью во всех точках называется совершенно эластичной, с нулевой эластичностью во всех точках - совершенно неэластичной.*

## 6.3 Применение эластичности в экономическом анализе

### 6.3.1 Виды эластичностей в экономике

*-Эластичность спроца по цене(прямая)* $E_p(q) = \left(\frac{dq}{q}\right) / \left(\frac{dp}{p}\right) = \frac{dq}{dp} \cdot \frac{p}{q}$,

показывающая относительное изменение (выражение в процентах) величины спроса на какое-либо благо при изменении цены этого блага на один процент и характеризующая чувствительность потребителей к изменению цен на продукцию. Если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине больше единицы, то спрос называют эластичным (совершенно эластичным при

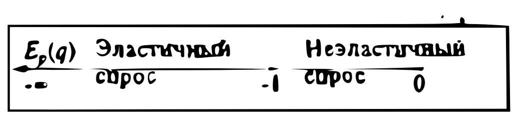


Рис. 14:

бесконечно большой величине эластичности спроса). Если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине меньше единицы, то спрос называют неэластичным (совершенно неэластичным при нулевой эластичности спроса).

И наконец, если ценовая эластичность спроса по абсолютной величине равна единице, то говорят о спросе с еденичной эластичностью.

*-Эластичность спроса по доходу* $E_I(q) = \left(\frac{dq}{q}\right) / \left(\frac{dI}{I}\right) = \frac{dq}{dI} \cdot \frac{I}{q}$,

характеризующая относительное изменение (в процентах) величины спроса на какое-либо благо при изменеии дохода потребителей этого блага на один процент. Положительная эластичность спроса по доходу характеризует нормальные (качественные) товары, а отрицательная величина - малоценные (некачественные) товары.

Так, высокий положительный коэффициент спроса по доходу в отрасли указывает, что ее вклад в экономический рост больше, чем процветание в будущем. Наоборот, если коэффициент эластичности спроса на продукцию отрасли по доходу имеет небольшое положительное или отрицательное значение, то ее может ожидать застой или перспектива сокращения производства.

*-Перекрестная эластичность спроса по цене*

$E_{Pi}(q_i) = \left(\frac{dq_i}{q_i}\right) / \left(\frac{dp_i}{P_i}\right) = \frac{dq_i}{dp_i} \cdot \frac{p_i}{q_i}$,

характеризующая относительное изменение (в процентах) величины спроса на одно благо при изменении цены на другое благо (замещающее или дополняющее его в потреблении) на один процент. Положительный знак перекрестной эластичности спроса по цене свидетельствует о замещаемости благ, а отрицательный - о дополняемости.

*-Ценовая эластичность ресурсов*

$E_{Pi}(R_i) = \left(\frac{dR_i}{R_i}\right) / \left(\frac{dp_i}{P_i}\right) = \frac{dR_i}{dp_i} \cdot \frac{p_i}{R_i}$,

характеризующая относительное изменение (в процентах) величины спроса на какой-либо ресурс (например, труд) при изменении цены этого ресурса (соответственно, заработной платы) на один процент.

*-Эластичность замещения одного ресурса другим*

$E_{Rj}(R_i) = \left(\frac{dR_i}{R_i}\right) / \left(\frac{dR_j}{R_j}\right) = \frac{dR_i}{dR_j} \cdot \frac{R_j}{R_i}$,

характеризующая необходимое изменение (в процентах) величины одного ресурса (например, капитала) при изменении количества другого ресурса (например, труда) на один процент с тем, чтобы выпуск при этом не изменился.

### 6.3.2 Факторы, опеределяющие эластичность спроса

**1. Заменяемость блага в потреблении**

*Эластичность спроса по цене тем выше, чем выше замещаемость блага.*

Замещаемость блага обычно характеризуется наличием и количеством заместителей, а также степенью агрегированное блага. Чем больше у потребителей возможностей заместить потребление данного блага потреблением других благ, тем выше эластичность спроса на это благо. Степень агрегированное блага определяется широтой определения данного блага, тем какое количество разнородных благ входит в понятие данного блага. Например, благо "молочные продукты" включает в себя молоко, кефир, ряженку, простоквашу и другие продукты. Чем выше степень агрегированное блага, тем меньше у него субститутов (и тем меньше у потребителей возможностей заместить потребление данного блага потреблением других благ), и тем ниже эластичность спроса на это благо. Например, эластичность спроса на моющие средства ниже, чем на стиральный порошок, а эластичность спроса на мыло вообще ниже, чем эластичность спроса на мыло конкретной марки. Правильное определение степени агрегированное блага (с целью определения его эластичности) особенно важно при определении ценовой и налоговой политики. Так, например, эластичность водки относительно низкая и казалось бы, что увеличение акцизов на нее должно привести к увеличению поступлений в бюджет (поскольку при неэластичном спросе выручка растет с увеличением цены). Однако происшедшее в декабре 1993 года повышение ставки акцизов до 90 процентов привело к существенному снижению спроса на отечественные ликеро-водочные изделия, потере конкурентоспособности отрасли по цене и резкому сокращению доходов в бюджет. Причина - неправильное определение степени агрегированное водки, которая должна включать в себя не только отечественную водку, но и импортную (в том числе и из стран ближнего зарубежья). Именно продажа импортной водки и заняла в это время преимущественное место в торговой сети. Спустя несколько месяцев председателем правительства РФ Виктором Черномырдиным было подписано новое постановление, которым снижалась ставка акцизов на отечественную водку до 85 процентов и, одновременно, повышалась ставка акцизов до 250 процентов на импортную водку. Подобные провалы правительственной политики происходили не только в России, но и в странах с развитой рыночной экономикой (и экономической теорией). Так, например, введение в 80-е годы 6 процентов налога на бензин в Вашингтоне (округ Колумбия), эластичность спроса на который по оценкам экономистов составляла 0.2, привело к 33 процентам падению спроса (что соответствует эластичности 5.5) и через 2 месяца налог был отменен. Причина этого - "узкое"определение бензина в штате Washington D.C., не включившее в себя бензин из соседних штатов Meriland и Virginia, которым потребители и стали заменять подорожавший в Вашингтоне бензин.

**2. Удельный вес в доходе**

*Эластичность спроса по цене тем выше, чем выше удельный вес расходов на данное благо в доходе потребителя.*

Например, спрос потребителя на спички, практически не изменится, даже если их цена возрастет в несколько раз, что свидетельствует о его низкой эластичности.

**3. Субъективная необходимость**

*Эластичность спроса по цене тем выше, чем ниже субъективная необходимость в данном благе.*

Обычно считают, что спрос на предметы роскоши более эластичен, чем спрос на предметы первой необходимости. Это не совсем правильно, поскольку решающим фактором здесь является именно субъективная необходимость в данном благе, которая на отдельные предметы роскоши может в силу моды, традиций или других причин может быть достаточно высокой и приводить к низкой эластичности спроса на него. Примером этому служит спрос на цветы 8 марта или 1 сентября.

**4. Фактор времени**

*Эластичность спроса по цене обычно выше, чем больше промежу-ток времени.*

Другими словами, долгосрочная эластичность спроса предполагается выше, чем краткосрочная эластичность. Это обычно обосновывается тем, что за долгосрочный промежуток времени потребители могут изменить привычки и найти больше заменителей данному благу. Однако, при этом не учитывается формирование запаса и время износа блага, оказывающие существенное влияние на решения потребителей и действующие иногда в сторону понижения эластичности с течением времени, особенно для товаров длительного пользования, а также товаров первой необходимости в периоды резкого повышения цен. Например, запасы круп, макаронных изделий, консервов и других товаров, сделанные домашними хозяйствами в России в декабре 1991 года до резкого повышения цен, привели к резкому сокращению спроса на эти товары в начале следующего года и, следовательно, большой краткосрочной эластичности спроса. С течением времени запасы стали истощаться и эластичность спроса на эти товары уменьшилась.

# Заключение

В результате практики я самостоятельно познакомился с программой верстки и теорией LaTeX, позже мне удалось самостоятельно напечатать назначенную мне главу из учебника математических методов в экономике.

Символы и элементы управления довольно просты и запоминаемы, одним из преимуществ является также то, что программа абсолютно бесплатна и позволяет создавать документы с удобным дизайном даже для печати в достаточно короткие сроки.

# Список использованных источников


1. Кнут, Д.Э. Всё про ТЕХ /Д.Э. Кнут — Изд-во Вильямс, 2003 — 548 с.

2. Львовский, С.М. Набор и вёрстка в системе LaTeX/С.М. Львовский — М.: Изд-во МЦНМО, 2014 — 448 с.

3. Кудрявцева, Л.Д. Курс математического анализа. / Кудрявцева, Л.Д. — Изд-во Дрофа, 2004 — 720 с.

4. Самоучитель LaTeX [Электронный ресурс] - URL: https://www.andreyolegovich.ru/PC/LaTeX.phpcompilati (дата обращения: 15.11.2023). - Загл. с экрана. - Яз. рус.