复变函数与积分变换

马越

北京理工大学

yuema.bit@gmail.com

2018 年 9 月 19 日

个人简介

- 姓名：马越
- 工作单位：三院车辆工程系特种车辆研究所
- 职称：副教授
- 联系方式：
  手机：18618194096
  座机：68918489
  邮箱：armcynicism@bit.edu.cn，yuema.bit@gmail.com
- 办公地点：@9#435
- 研究方向：智能车辆的动力学及其控制，混合动力车辆控制，计算智能及边缘计算

课程简介

课程组成

由复变函数 (1-5 章) 和积分变换 (第 6 章) 两部分组成

教材

包革军, 邢宇明, 盖云英等, 复变函数与积分变换 (第三版), 科学出版社

参考书

1. 詹姆斯 ▪ 沃德 ▪ 布朗 (作者), 张继龙 (译者), 复变函数及其应用, 机械工业出版社
2. Tristan Needham, 复分析: 可视化方法, 人民邮电出版社
3. 龚昇, 简明复分析, 中国科技大学出版社

课程简介

对象	复变函数 (自变量为复数的函数)
主要任务	研究复变数之间的相互关系主要是复数域上的微积分
主要内容	复数与复变函数、解析函数、复变函数的积分、级数、留数、共形映射、傅立叶变换和拉普拉斯变换等

学习方法

- 高等数学中的概念在复数域中的推广. 注意相似点和不同点, 更要注意推广方法
- 用大学的学习方法学习, 即注重概念、方法的学习, 重视定理的证明
- 将大学学到的知识和方法尽可能用到本课的学习

http://u.163.com/n3MF3hbW 提取码: *zJrMHXgf*

引言

世界著名数学家 M.Kline 指出：[a]

[a]莫里斯　克莱因. 古今数学思想.　上海科学技术出版社

- 19 世纪最独特的创造是复变函数理论：象微积分的直接扩展统治了 18 世纪那样，该数学分支几乎统治了 19 世纪。
- 曾被称为这个世纪的数学享受，也曾作为抽象科学中最和谐的理论。

- 16 世纪，在解代数方程时引进复数:
  1545 年，意大利 Cardan 在方程 $x(10-x)=40$ 时，首先产生了负数开平方的思想。方程的根：$x=5\pm\sqrt{-15}$. 两个根的和是 10，乘积是 40。
- 为使负数开平方有意义，引入了虚数，使实数域扩大到复数域。Bombelli、Leibniz 等都利用了复数。
- 在 18 世纪以前，对复数的概念及性质了解得不清楚，用它们进行计算又得到一些矛盾. 人们一直把复数看作不能接受的“虚数”-笛卡尔

引言

- 直到 18 世纪，J.D’Alembert(1717-1783) 与 L.Euler(1707-1783) 等人建立了复数的几何解释。逐步阐明了复数的几何意义和物理意义，澄清了复数的概念
- Euler 系统地建立了复数理论，创建了复变函数论的一些基本定理，并首创用符号“i”作为虚数的单位。
- 应用复数和复变函数研究了流体力学等方面的一些问题. 复数被广泛承认接受，复变函数论顺利建立和发展.

到 19 世纪，完全奠定了复变函数的理论基础三位代表人物:

- A.L.Cauchy （1789-1866)：应用积分方法研究复变函数
- K.Weierstrass(1815-1897) 应用级数方法研究复变函数
- G.F.B.Riemann (1826-1866) 应用几何方法研究复变函数

通过他们的努力，复变函数形成了系统的理论，且渗透到了数学的许多分支；同时，它在热力学，流体力学、电学和经典控制理论等方面也得到了广泛的应用.

复变函数的基本思想[1]

1. 开集上的每个可微复值函数都能局部地展开成幂级数：即它是解析的：比无穷次光滑可导还好，可以局部展开为收敛的幂级数。
2. 单连通区域中的解析函数的周线积分与积分路径无关
3. 在一个点的某个解析的局部给定的每个函数，可以唯一扩充成整体解析的函数。

一个解析函数的局部行为唯一决定了它的整体行为。

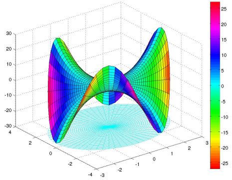
- 用自然的方式解释了实分析中的很多生硬问题。
- 有简洁的结构，积分性质完全由奇点性质决定。这一性质对计算的简化也是非常可观的-数学是避免计算的艺术-民间传说
- 有十分漂亮的几何直观，与拓扑学联系紧密。

如果说实变函数研究的是怪物的话，那复变函数研究的就是尤物。-知乎某网友

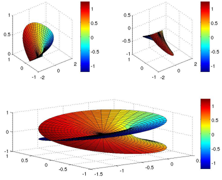
[1]埃伯哈德. 蔡德勒 数学指南-实用数学手册 科学出版社

引言

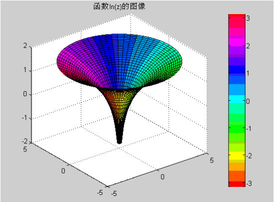
复变函数之美



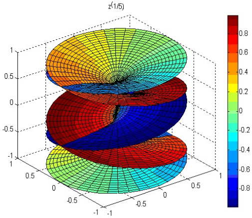
(a)



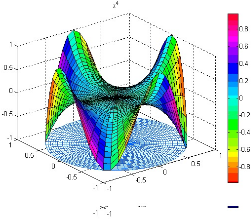
(b)



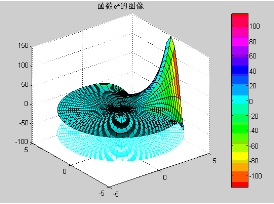
(c)



(d)



(e)



(f)

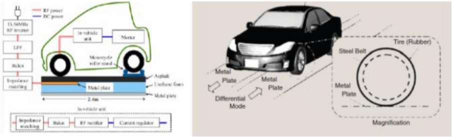
引言

复变函数的应用

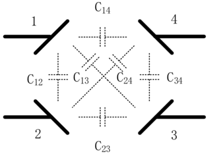
- 数学和物理领域
  - 解代数方程。如 $x^2+1=0$ 在实数范围内无解，引入复数则可以得到解。
    Gauss 用复数理论证明了代数基本定理。
  - 积分的计算，如 $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x(x^2+1)}dx$
  - 求解偏微分方程，如
    $$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}=0$$
    具体应用在平面稳定流动 (水、空气的流速与几乎时间无关)
- 工程领域：
  - 应用于计算绕流问题中的压力、力矩：飞机机翼剖面压力的计算，解决机翼造型问题。
  - 计算渗流问题。
    例如：大坝、钻井的浸润曲线。
  - 平面热传导问题、电 (磁) 场强度。
    例如：热炉中温度的计算。

复变函数的应用 (续)

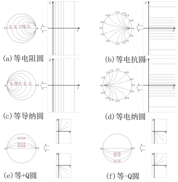
- 新能源汽车：无线充电



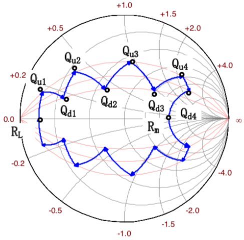
(a)



(b)



(c)



(d)

复变函数的应用 (续)

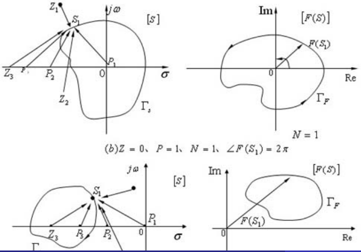
- 自动控制理论
  - 传递函数：Laplace 变换
    常微分方程：

$$\ddot{x} + 3\dot{x} + 2x = H(t), \quad x(0) = \dot{x}(0) = 0. \tag{1}$$

    其传递函数的 Laplace 变换：

$$\frac{X(s)}{U(s)} = \frac{1}{s}\left(\frac{1}{(s+2)(s+1)}\right)$$

  - 稳定性判据：幅角定理



第一章　复数与复变函数

本章主要引入复数的概念及其运算，平面点集的概念，复变函数的极限与连续性等概念.

课程目录

1. 第一章　复数与复变函数
   - 复数运算及几何表示
     - 复数的概念
     - 复数的表示方法
     - 复数的代数运算
     - 复球面与无穷远点
   - 复平面上的曲线和区域
     - 曲线的复数方程
     - 复平面上的点集
     - 区域和曲线
   - 复变函数
     - 定义与几何意义
     - 极限与连续性

课程目录

1. 第一章 复数与复变函数
   - 复数运算及几何表示
     - 复数的概念
     - 复数的表示方法
     - 复数的代数运算
     - 复球面与无穷远点
   - 复平面上的曲线和区域
     - 曲线的复数方程
     - 复平面上的点集
     - 区域和曲线
   - 复变函数
     - 定义与几何意义
     - 极限与连续性

课程目录

为了解方程的需要，例如：方程 $x^2+1=0$ 在实数范围内无解，人们引入了一个新数 i，称为虚数单位
对虚数单位 i, 作如下规定:

1. $$i^2=-1$$
2. i 可与实数一起按同样的法则进行四则运算

虚数单位 i 的性质：幂次

$$\begin{aligned} i^1 &= i & i^{4n} &= 1 \\ i^2 &= -1 & i^{4n+1} &= i \\ i^3 &= i\cdot i^2 = -i & i^{4n+2} &= -1 \\ i^4 &= i^2\cdot i^2 = 1 & i^{4n+3} &= -i \end{aligned}$$

...

复数的概念

定义：复数

$\forall x, y \in \mathbb{R}$, 称 $z = x + iy$ 为复数

$$x \text{ 称为 } z \text{ 的实部，记为 } x = \mathrm{Re}[z]$$
$$y \text{ 称为 } z \text{ 的虚部，记为 } y = \mathrm{Im}[z]$$

当 $x = 0$，$y \neq 0$ 时，$z = iy$ 称为纯虚数；当 $y = 0$ 时，$z = x + 0i$
实数是复数的一部分，复数是实数的扩展。

注意：x，y 选取有顺序要求。

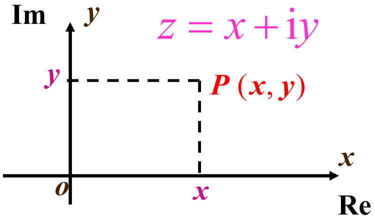
定义：共轭复数

实部相同而虚部绝对值相等、符号相反的两个复数称为共轭复数。z 的共轭复数记为 $\bar{z}$。若 $z = x + iy$, 则 $\bar{z} = x - iy$。

课程目录

1. 第一章　复数与复变函数
   - 复数运算及几何表示
     - 复数的概念
     - 复数的表示方法
     - 复数的代数运算
     - 复球面与无穷远点
   - 复平面上的曲线和区域
     - 曲线的复数方程
     - 复平面上的点集
     - 区域和曲线
   - 复变函数
     - 定义与几何意义
     - 极限与连续性

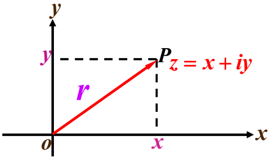
1. 定义表示形式
   用 $x+iy$ 表示复数 z, 即 $z=x+iy$ 给定复数 $z=x+iy$，则确定了实部 x 和虚部 y；反之，给定实部 x 和虚部 y，则完全确定了复数 z-复数 z 与一对有序实数 (x,y) 构成了一一对应关系。
   $x+iy$ 与 (x,y) 不加区别。
2. 平面表示法（直角坐标表示法）
   复数 $z=x+iy$ 与平面上的点 (x,y) 一一对应。



用于表示复数的平面称为复平面。其横轴称为实轴，纵轴称为虚轴。复数 z 是点 P 的同义词。

3. 复数的向量表示法

平面上的点 P 与向量 OP 一一对应，因此复数 z 与向量 OP 一一对应。该向量的长度称为 z 的模或绝对值，记为



$$|z| = r = \sqrt{x^2 + y^2}$$

显然成立：

$$|x| \leq |z|, |y| \leq |z|, |z| \leq |x| + |y|, z \cdot \bar{z} = |z|^2 = |z^2|$$

辐角的定义：

当 $z \neq 0$，时，把正实轴与向量 OP 的夹角称为 z 的辐角 (argument)，记为 $Argz = \theta$

注意：任何一个复数 $z \neq 0$ 有无穷多的辐角

如果 θ_1 是其中一个辐角，那么 z 的全部辐角为：

$$Argz = \theta_1 + 2k\pi,\ k \text{ 为任意整数}$$

注意：当 $z = 0$ 时，辐角不确定，没有辐角

3. 复数的向量表示法

辐角主值的定义:

当 z $(z \neq 0)$ 的幅角中，把满足 $-\pi < \theta_0 \leq \pi$ 的 θ_0 称为 $Argz$ 的主值，记作 $\theta_0 = argz$

$$Argz = argz + 2k\pi \quad k = 0, \pm 1, \pm 2 \ldots$$

复数 $z = x + iy(z \neq 0)$ 幅角主值:

$$\begin{cases} \arctan \frac{y}{x}, & x > 0, \\ \pm \frac{\pi}{2}, & x = 0, y \neq 0, \\ \arctan \frac{y}{x} \pm \pi, & x < 0, y \neq 0, \\ \pi, & x < 0, y = 0. \end{cases}$$

其中 $-\frac{\pi}{2} < \arctan \frac{y}{x} < \frac{\pi}{2}$

复数的表示方法

4. 复数的三角表示法
   利用直角坐标系与极坐标系的关系

$$\begin{cases} x & = r\cos\theta \\ y & = r\sin\theta \end{cases}$$

   复数可以表示成:

$$\begin{aligned} z &= x + iy \\ &= r(\cos\theta + i\sin\theta) \end{aligned}$$

5. 复数的指数表示法
   利用 Euler 公式

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

   则复数 $r(\cos\theta + i\sin\theta)$ 可以表示为:

$$z = re^{i\theta}$$

例将下列复数化为三角表达式与指数表达式:
(1) $z = -\sqrt{12} - 2i$; (2) $z = \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5}$

解:
(1)$r = |z| = \sqrt{12+4} = 4$, 因 z 在第三象限
$\theta = \arctan\frac{-2}{-\sqrt{12}} - \pi = \arctan\frac{\sqrt{3}}{3} - \pi = -\frac{5\pi}{6}$. 故:

$$z = 4\left[\cos\left(-\frac{5\pi}{6}\right) + i\sin\left(-\frac{5\pi}{6}\right)\right] = 4e^{-\frac{5\pi}{6}i}$$

(2) 显然 $r = |z| = 1$
$\sin\frac{\pi}{5} = \cos\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \cos\frac{3\pi}{10}$
$\cos\frac{\pi}{5} = \sin\left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{5}\right) = \sin\frac{3\pi}{10}$
故

$$z = \sin\frac{\pi}{5} + i\cos\frac{\pi}{5} = e^{\frac{3\pi}{10}i}$$

课程目录

四则运算

- 两个复数的相等
  复数 z_1, z_2 相等 $\Leftrightarrow$ 实部、虚部分别对应相等，即
  $$z_1 = z_2 \Leftrightarrow \mathrm{Re}[z_1] = \mathrm{Re}[z_2], \mathrm{Im}[z_1] = \mathrm{Im}[z_2]$$
- 复数的大小:
  复数之间不能比较大小。
  复数可以看成 i 的一次多项式。
- 基本原则：复数的四则运算在实数要成立。
- 复数的和与差
  $$z_1 \pm z_2 = (x_1 \pm x_2) + i(y_1 \pm y_2)$$
  两个复数的和与差的运算类似多项式的和差运算，结果仍是复数

复数的代数运算

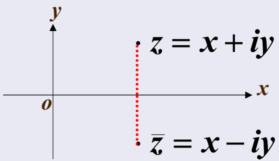
复数的共轭

根据前面的定义，实部相同, 虚部绝对值相等且符号相反的两个复数称为共轭复数.

复数 $z = x + iy$ 的共轭复数为 $\bar{z} = x - iy$

共轭复数的几何性质

一对共轭复数 z 和 $\bar{z}$ 在复平面的位置关于实轴对称



例：计算共轭复数 $x + iy$ 与 $x - iy$ 的积.

解:

$$(x + iy)(x - iy) = x^2 - (iy)^2 = x^2 + y^2$$

因此: 两个共轭复数 z, $\bar{z}$ 的积是一个实数.

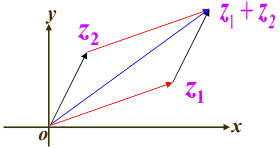
取共轭运算性质

1. 共轭运算与加减乘除运算

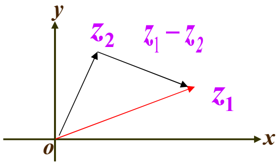
$$\begin{aligned} \overline{z_1 \pm z_2} &= \bar{z}_1 \pm \bar{z}_2 \\ \overline{z_1 \cdot z_2} &= \bar{z}_1 \cdot \bar{z}_2 \\ \overline{\left(\frac{z_1}{z_2}\right)} &= \frac{\bar{z}_1}{\bar{z}_2} \end{aligned}$$

   即：取共轭运算与加减乘除运算可交换
2. $\bar{\bar{z}} = z$; 二次自反性. 即, z 与 $\bar{z}$ 互为共轭
3. $z \cdot \bar{z} = [\mathbf{Re}(z)]^2 + [\mathbf{Im}(z)]^2$;
4. $z + \bar{z} = 2\mathbf{Re}(z), \quad z - \bar{z} = 2\mathbf{i}\mathbf{Im}(z)$
   即利用取共轭运算可以由 z 计算其实部和虚部

复数和的几何意义



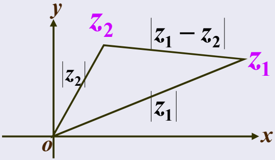
复数差的几何意义



复数和与差的模的性质

因为 $|z_1 - z_2|$ 表示点 z_1 和 z_2 之间的距离, 故

$$|z_1 - z_2| \geq \big||z_1| - |z_2|\big|.$$
$$|z_1 + z_2| \leq |z_1| + |z_2|.$$



四则运算

- 复数的积

$$z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_2y_1 + x_1y_2)$$

两个复数的积按多项式乘积运算，结果仍是复数。

- 两个复数的商 $z_2 \neq 0$

$$\begin{aligned} \frac{z_1}{z_2} &= \frac{x_1x_2 + y_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} + i\frac{x_2y_1 - x_1y_2}{x_2^2 + y_2^2} \\ &= \frac{z_1 \cdot \bar{z}_2}{z_2 \cdot \bar{z}_2} \end{aligned}$$

例: 设 $z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i}$, 求 $\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)$ 与 $z \cdot \bar{z}$.

解:

$$z = -\frac{1}{i} - \frac{3i}{1-i} = -\frac{i}{i \cdot i} - \frac{3i(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}i$$

所以:

$$\mathrm{Re}(z) = \frac{3}{2}, \mathrm{Im}(z) = -\frac{1}{2}$$

$$z \cdot \bar{z} = \mathrm{Re}(z)^2 + \mathrm{Im}(z)^2 = \left(\frac{3}{2}\right)^2 + \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{2}$$

复数的代数运算

例：设复数 $z_1 = x_1 + iy_1, z_2 = x_2 + iy_2,$
证明： $z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)$

证：

$$
\begin{aligned}
& z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 \\
&\qquad = (x_1 + iy_1)(x_2 - iy_2) + (x_1 - iy_1)(x_2 + iy_2) \\
&\qquad = (x_1x_2 + y_1y_2) + i(x_2y1 - x_1y_2) \\
&\qquad\quad +(x_1x_2 + y_1y_2) + i(-x_2y_1 + x_1y_2) \\
&\qquad = 2(x_1x_2 + y_1y_2) = 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)
\end{aligned}
$$

或：

$$z_1 \cdot \bar{z}_2 + \bar{z}_1 \cdot z_2 = z_1 \cdot \bar{z}_2 + \overline{z_1 \cdot \bar{z}_2} = 2\mathrm{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2)$$

乘幂与方根

设复数 z_1 和 z_2 的三角形式分别为

$$z_1 = r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1), z_2 = r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2),$$

则

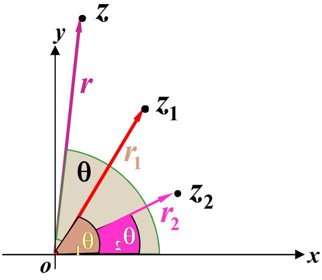
$$\begin{aligned} z_1 \cdot z_2 &= r_1(\cos\theta_1 + i\sin\theta_1) \cdot r_2(\cos\theta_2 + i\sin\theta_2) \\ &= r_1 \cdot r_2[(\cos\theta_1\cos\theta_2 - \sin\theta_1\sin\theta_2) + \\ & i(\sin\theta_1\cos\theta_2 + \cos\theta_1\sin\theta_2)] \\ &= r_1 \cdot r_2[\cos(\theta_1 + \theta_2) + i\sin(\theta_1 + \theta_2)] \end{aligned}$$

$$|z_1 z_2| = r_1 \cdot r_2 = |z_1| \cdot |z_2|$$

$$\arg(z_1 z_2) = \arg z_1 + \arg z_2.$$

乘幂与方根

两个复数乘积的模等于它们的模的乘积; 两个复数乘积的辐角等于它们的辐角的和.



从几何上看, 两复数对应的向量分别为 $\vec{z}_1, \vec{z}_2$, 先把 $\vec{z}_1$ 按逆时针方向旋转一个角 θ_2, 再把它的模扩大到 r_2 倍, 所得向量 $\vec{z}$ 就表示积 $z_1 \cdot z_2$.

乘幂与方根

注意: $\mathrm{Arg}(z_1z_2) = \mathrm{Arg}z_1 + \mathrm{Arg}z_2$ 不是通常的等式,
而是两个数集相等. 即左端任给一值, 右端必有值与它相对应; 反过来是如此.

例如: 设 $z_1 = -1, z_2 = i$, 则 $z_1 \cdot z_2 = -i$,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Arg}z_1 &= \pi + 2n\pi, \quad (n = 0,\ \pm1,\ \pm2, \cdots),\\
\mathrm{Arg}z_2 &= \frac{\pi}{2} + 2m\pi, \quad (m = 0,\ \pm1,\ \pm2, \cdots),\\
\mathrm{Arg}(z_1z_2) &= -\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \quad (k = 0,\ \pm1,\ \pm2, \cdots),
\end{aligned}$$

故 $\frac{3\pi}{2} + 2(m+n)\pi = -\frac{\pi}{2} + 2k\pi$, 只须 $k = m + n + 1$. 若
$k = -1$, 则 $m = 0, n = -2$ 或 $m = -2, n = 0$.

乘幂与方根

设复数 z_1 和 z_2 的指数形式分别为

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2},$$

则

$$z_1 \cdot z_2 = r_1 \cdot r_2 e^{i(\theta_1+\theta_2)}.$$

n 个复数相乘的情况:

设 $z_k = r_k(\cos\theta_k + i\sin\theta_k) = r_k e^{i\theta_k}, \quad (k = 1, 2, \cdots, n)$

$$z_1 \cdot z_2 \cdot \cdots \cdot z_n = \prod_{k=1}^{n} z_k = (\prod_{k=1}^{n} r_k)[\cos\sum_{k=1}^{n}\theta_k + i\sin\sum_{k=1}^{n}\theta_k]$$

$$= \prod_{k=1}^{n} r_k e^{i\sum_{k=1}^{n}\theta_k}$$

乘幂与方根

同样，当 $z_2 \neq 0$ 时，

$$\begin{aligned}\frac{z_1}{z_2} = \frac{z_1 \bar{z}_2}{z_2 \bar{z}_2} &= \frac{1}{|z_2|^2} |z_1| \cdot |z_2| \left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i} \sin(\theta_1 - \theta_2)\right] \\ &= \frac{|z_1|}{|z_2|}\left[\cos(\theta_1 - \theta_2) + \mathrm{i} \sin(\theta_1 - \theta_2)\right]\end{aligned}$$

于是

$$\left|\frac{z_1}{z_2}\right| = \frac{|z_1|}{|z_2|}, \mathrm{Arg}\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \mathrm{Arg} z_1 - \mathrm{Arg} z_2.$$

乘幂与方根

两个复数商的模等于它们模的商; 两个复数商的辐角等于被除数与除数的辐角之差. 设复数 z_1 和 z_2 的指数形式分别为

$$z_1 = r_1 e^{i\theta_1}, z_2 = r_2 e^{i\theta_2},$$

则

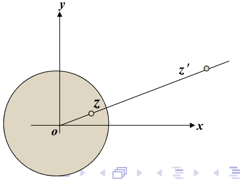
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{r_1}{r_2} e^{i(\theta_1 - \theta_2)}.$$

除法的几何意义

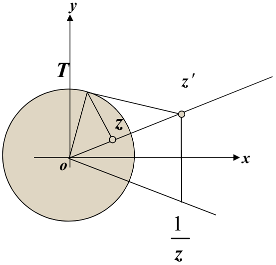
先讨论 $1/z$ 的几何意义. 将 $1/z$ 分解为如下两个运算

$$z' = 1/\bar{z} \qquad w = \bar{z}'$$

如果 $z = re^{i\theta}$ 则 $z' = \frac{1}{r}e^{i\theta}$ 即 $\arg z' = \arg z, |zz'| = 1$ 如果 $|z| < 1$, z 在单位圆内, z' 在单位圆外, 且与 z 位于同一条由原点发出的射线上



z' 的求法
过 z 点做 oz 的垂线, 与单位圆相交于 T.
过 T 做单位圆周的切线, 与射线 oz 相交点即为 z'.



$1/z$ 的求法做 z' 的共轭复数即可得到 $1/z$.
$|z| > 1$ 的做法自己完成.
$|z| = 1$ 时, $z = z'$, 两点重合.
由 z 点得到 z' 点, 称为关于单位圆的对称映射, 或对称变换.
z' 的共轭复数是 z' 关于实轴的对称映射.
因此, 从映射角度讲, $w = 1/z$ 是关于单位圆周的对称映射和关于实轴的对称映射的复合映射.
得到 $w = 1/z$ 的几何意义后, 很容易给出除法的几何意义.

乘幂与方根

n 次幂

n 个相同复数 z 的乘积称为 z 的 n 次幂, 记作 z^n.

$$z^n = \underbrace{z \cdot z \cdot \cdots \cdot z}_{n\text{ 个}}.$$

对任一正整数 n, 有: $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$.
若定义 $z^{-n} = \frac{1}{z^n}$, 则当 n 为负整数时, 上式仍成立.
特别, 当 $|z| = 1$ 时, 即 $z = \cos\theta + i\sin\theta$,
$(\cos\theta + \mathrm{i}\sin\theta)^n = \cos n\theta + \mathrm{i}\sin n\theta$ de Moivr 公式

例 5: 化简 $(1+i)^n+(1-i)^n$.

解:

$$(1+i)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right]$$

$$(1-i)=\sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)=\sqrt{2}\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]$$

$$\begin{aligned}
& (1+i)^n+(1-i)^n \\
= \ & (\sqrt{2})^n\left[\cos\frac{\pi}{4}+\sin\frac{\pi}{4}\right]^n+(\sqrt{2})^n\left[\cos\left(-\frac{\pi}{4}\right)+\sin\left(-\frac{\pi}{4}\right)\right]^n \\
= \ & (\sqrt{2})^n\left[\cos\frac{n\pi}{4}+i\sin\frac{n\pi}{4}+\cos\frac{n\pi}{4}-i\sin\frac{n\pi}{4}\right] \\
= \ & 2^{\frac{n+2}{2}}\cos\frac{n\pi}{4}
\end{aligned}$$

乘幂与方根

n 次方根

给定复数 z, 方程 $w^n = z$ 的根称为 z 的 n 次方根,
记为 $\sqrt[n]{z}$. 可以推得:

$$w_k = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \quad (\,k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,$$

从几何上看, $\sqrt[n]{z}$ 的 n 个值就是以原点为中心, $r^{\frac{1}{n}}$ 为半径的圆的内接正 n 边形的 n 个顶点. 其中一个顶点的幅角为 θ/n

乘幂与方根

推导过程如下:

设

$$
\begin{aligned}
z &= r(\cos\theta + i\sin\theta), \\
w &= \rho(\cos\phi + i\sin\phi), \\
\rho^n(\cos n\phi + i\sin n\phi) &= r(\cos\theta + i\sin\theta)
\end{aligned}
$$

于是 $\rho^n = r, \cos n\phi = \cos\theta, \sin n\phi = \sin\theta$, 显然 $n\phi = \theta + 2k\pi$, $(k = 0,\ \pm1,\ \pm2, \cdots)$

故 $\rho = r^{\frac{1}{n}}, \quad \phi = \frac{\theta+2k\pi}{n}$,

$$
w = \sqrt[n]{z} = r^{\frac{1}{n}}\left(\cos\frac{\theta+2k\pi}{n} + i\sin\frac{\theta+2k\pi}{n}\right) \quad (k = 0,\ \pm1,\ \pm2, \cdots
$$

乘幂与方根

当 $k = 0, 1, 2, \cdots, n-1$ 时, 得到 n 个相异的根:

$$w_0 = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right),$$

$$w_1 = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2\pi}{n} \right),$$

$$w_{n-1} = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2(n-1)\pi}{n} \right).$$

当 k 以其他整数值代入时, 这些根又重复出现.

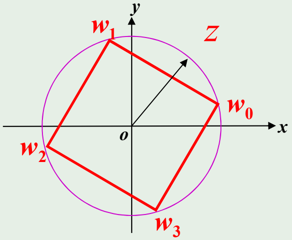
$$w_n = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta + 2n\pi}{n} + i \sin \frac{\theta + 2n\pi}{n} \right) = r^{\frac{1}{n}} \left(\cos \frac{\theta}{n} + i \sin \frac{\theta}{n} \right)$$

例：计算 $\sqrt[4]{1+i}$ 的值.

解：$1+i=\sqrt{2}\left[\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right]$.

$$\sqrt[4]{1+i}=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}+i\sin\frac{\frac{\pi}{4}+2k\pi}{4}\right]\qquad(k=0,\ 1,\ 2,\ 3)$$

即
$$w_0=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{\pi}{16}+i\sin\frac{\pi}{16}\right],$$
$$w_1=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{9\pi}{16}+i\sin\frac{9\pi}{16}\right],$$
$$w_2=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{17\pi}{16}+i\sin\frac{17\pi}{16}\right],$$
$$w_3=\sqrt[8]{2}\left[\cos\frac{25\pi}{16}+i\sin\frac{25\pi}{16}\right].$$



这四个根是内接于中心在原点半径为 $\sqrt[8]{2}$ 的圆的正方形的四个顶点.

例：解方程 $(1+z)^5=(1-z)^5$

解：直接可验证方程的根 $z\neq 1$，故原方程可转换为：$\left(\frac{1+z}{1-z}\right)^5=1$

另 $w=\frac{1+z}{1-z}$，

则 $w^5=1, w=e^{\frac{2k\pi}{5}}, k=0,1,2,3,4.$

$w_0=1, w_1=e^{\frac{2\pi}{5}}, w_2=e^{\frac{4\pi}{5}}, w_1=e^{\frac{6\pi}{5}}, w_1=e^{\frac{8\pi}{5}}$

因为

$$
\begin{aligned}
z=\frac{w-1}{w+1} &= \frac{e^{i\alpha}-1}{e^{i\alpha}+1}=\frac{\cos\alpha+i\sin\alpha-1}{cos\alpha+i\sin\alpha+1}\\
&= \frac{\sin\frac{\alpha}{2}(-\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2})}{\cos\frac{\alpha}{2}(\sin\frac{\alpha}{2}+i\cos\frac{\alpha}{2})}
\end{aligned}
$$

故原方程的根为：

$z_0=0, z_1=i\tan\frac{\pi}{5}, z_2=i\tan\frac{2\pi}{5}, z_3=i\tan\frac{3\pi}{5}, z_4=i\tan\frac{4\pi}{5}$

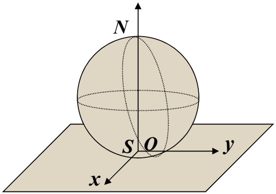
复数的代数运算

复数域

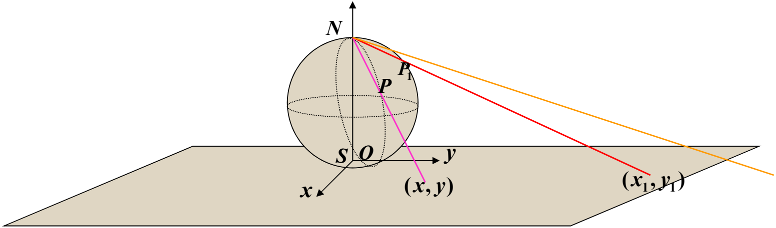
全体复数并引进了上述加减乘除和取共轭运算后称为复数域, 记为 $\mathbb{C}$.
实数域是复数域的一部分 (子域).
在复数域, 方程 $x^2 = -1$ 有解, 而在实数域无解.
在复数域, 两个复数不能比较大小. 即: 有得、有失.
域: 对加法和乘法封闭.

课程目录

取一个与复平面切于原点 $z=0$ 的球面球面上一点 S 与原点重合 (如图), 通过 S 作垂直于复平面的直线与球面相交于另一点 N, 称 N 为北极, S 为南极.



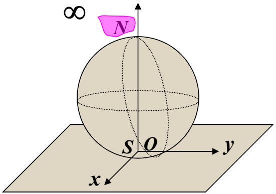
复球面与无穷远点



球面上的点，除去北极 N 外，与复平面内的点之间存在着一一对应的关系．我们用球面上的点来表示复数．

球面上的北极 N 不能对应复平面上的定点，但球面上的点离北极 N 越近，它所表示的复数的模越大．

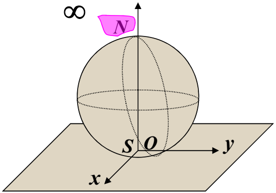
复球面与无穷远点



我们规定: 复数中有一个唯一的 "无穷大" 与复平面上的无穷远点相对应, 记作 ∞.

因而, 球面上的北极 N 就是复数无穷大的几何表示.

复球面与无穷远点



复平面：不包括无穷远点的复平面称为有限复平面，或简称复平面.

扩充复平面：包括无穷远点的复平面称为扩充复平面.

球面上的每一个点与扩充复平面的每一个点构成了一一对应，这样的球面称为复球面.

引入复球面后，能将扩充复平面的无穷远点明显地表示出来.

对于复数的无穷远点而言, 它的实部, 虚部, 辐角等概念均无意义, 规定它的模为正无穷大.
关于 ∞ 的四则运算规定如下:

1. 加法: $\alpha+\infty=\infty+\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq\infty)$
2. 减法: $\alpha-\infty=\infty-\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq\infty)$
3. 乘法: $\alpha\cdot\infty=\infty\cdot\alpha=\infty, \quad (\alpha\neq 0)$
4. 除法: $\frac{\alpha}{\infty}=0, \quad \frac{\infty}{\alpha}=\infty, (\alpha\neq\infty), \quad \frac{\alpha}{0}=\infty, (\alpha\neq 0)$

引入无穷远点 ∞ 后, 许多我们习以为常的概念需要修订.
如: 所有直线在 ∞ 相交.
如: 一动点沿直线运动后会回到出发点.

课程目录

课程目录

曲线的复数方程

复平面上曲线方程有两种表示方式

- 直角坐标方程
- 参数方程

曲线的复数方程

复平面上曲线 C 直角坐标方程的复数形式

设平面上曲线 C 的方程为 $F(x, y) = 0$

由

$$x = \frac{z+\bar{z}}{2}, y = \frac{z-\bar{z}}{2}$$

得

$$F\left(\frac{z+\bar{z}}{2}, \frac{z-\bar{z}}{2}\right) = 0$$

或

$$F\left(\mathrm{Re}(z), \mathrm{Im}(z)\right) = 0$$

例：试用复数表示圆的方程
$A(x^2+y^2)+Bx+Cy+D=0$，其中 A,B,C,D 是常数.

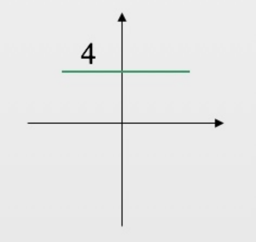
解：由 $x=\frac{z+\bar{z}}{2}, y=\frac{z-\bar{z}}{2i}, x^2+y^2=|z|^2=z\bar{z}$
得 $Az\bar{z}+B\frac{z+\bar{z}}{2}+C\frac{z-\bar{z}}{2i}+D=0$
令 $\beta=\frac{B+Ci}{2}$，上式可化简为 $Az\bar{z}+\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+D=0$
其中 A,D 为实常数，β 为复常数且 $|\beta|^2>AD$，A 不为零.
如果 $A=0$,B,C 不全为零，上述方程变为直线方程：

$$\bar{\beta}z+\beta\bar{z}+D=0$$

即为复平面上直线方程的一般形式。

曲线的复数方程

1. 用复数的实部或虚部的等式表示曲线
   $\mathrm{Re}(z-z_0)=a$ 是 XOY 平面上的直线: $x=a+\mathrm{Re}(z_0)$
   $\mathrm{Im}(z-z0)=b$ 是 XOY 平面上的直线: $y=b+\mathrm{Im}(z_0)$
   如: $Im(z-i2)=2$



曲线的复数方程

2. 用复数模的等式表示曲线

例

过两点 z_1 和 z_2 的线段的垂直平分线方程

$$|z - z_1| = |z - z_2|$$

例

以原点为圆心, R 为半径的圆周的方程

$$|z| = R$$

例

以 $z_0 \neq 0$ 为圆心, R 为半径的圆周的方程

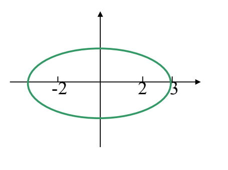
$$|z - z0| = R$$

例

焦点是 z_1 和 z_2 的椭圆

$$|z - z_1| + |z - z_2| = 2R$$

R 为椭圆的半长轴.



例

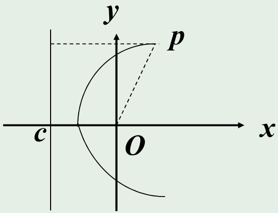
焦点是 z_1 和 z_2 的双曲线:

$$|z-z_1|-|z-z_2|=2R$$

R 为双曲线的实半轴.

例

准线为 $x=c$, 对称轴为实轴的抛物线方程为



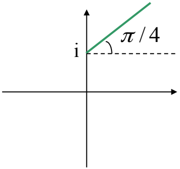
3. 用复数辐角的等式表示曲线

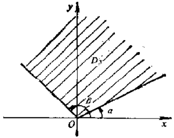
从点 z_0 出发，与实轴夹角 θ_0 的射线为：

$$arg(z - z_0) = \theta_0, \quad (-\pi < \theta_0 \leq \pi)$$

看两个例子：

$$arg(z - i) = \frac{\pi}{4} \qquad \frac{\pi}{4} < arg(z) < \frac{3\pi}{4}$$





复平面上曲线 C 的参数方程为

$$C: x = x(t), y = y(t)(\alpha \leq t \leq \beta)$$

那么，复平面上曲线 C 的动点 $z(t)$ 可表示为:

$$C: z = x(t) + iy(t)$$

或

$$z = z(t)(\alpha \leq t \leq \beta)$$

依赖于参数 t.

例

通过复平面上两 z_1, z_2 点的直线方程

$$z = z_1 + t(z_2 - z_1) \qquad -\infty < t < \infty$$

课程目录

设有复平面上一些点的集合, 称为复数集或点集 $\boldsymbol{E}$. 如果 $\boldsymbol{z}$ 是点集 $\boldsymbol{E}$ 中的一个点, 记为 $\boldsymbol{z} \in \boldsymbol{E}$.

如果点集 $\boldsymbol{F}$ 中的每一个点都是点集 $\boldsymbol{E}$ 中的点, 则称 $\boldsymbol{E}$ 包含 $\boldsymbol{F}$, 记为 $\boldsymbol{E} \supset \boldsymbol{F}$. 或称 $\boldsymbol{F}$ 包含于 $\boldsymbol{E}$, 记为 $\boldsymbol{F} \subset \boldsymbol{E}$

$\boldsymbol{E}$ 包含 $\boldsymbol{F}$ 的数学描述为

$$\boldsymbol{E} \supset \boldsymbol{F} \Leftrightarrow \forall\, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{F} \Rightarrow \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{E}$$

(1) 邻域

复平面上以 z_0 为中心, $\delta > 0$ 为半径的圆的内部 $|z - z_0| < \delta$ 的点的集合称为 z_0 的邻域, 记作 $N(z_0, \delta)$.
称 $0 < |z - z_0| < \delta$ 的点的集合称为 z_0 的去心邻域, 记作 $N_0(z_0, \delta)$.

注意

设 $R > 0$, 满足 $|z| > R$ 的所有点的集合 (包括无穷远点本身) 称为无穷远点的邻域.
设 $R > 0$, 满足 $|z| > R$ 的点的集合 (不包括无穷远点) 称为无穷远点的去心邻域. 可以表示为

$$R < |z| < +\infty.$$

(2) 聚点

如果 z 的任意小的邻域中, 恒有 E 中无穷多的点, 称 z 是 E 的聚点.
或: 在 z 的任意小的邻域中, 恒有一个不等于 z 的、属于 E 的点, 称 z 是 E 的聚点. $\Leftrightarrow$ 一个点 x 的任意邻域内都有集合 $A \setminus \{x\}$ 中的点.
任意邻域内都有，那也也意味着必然有无限个
例: $E = \{1/n\}, n = 1, 2, \ldots, z = 0$ 是 E 的聚点, 但 $z \notin E$

(3) 孤立点

如果 $z \in E$, 而 z 不是 E 的聚点, 称 z 是 E 的孤立点.

(4) 内点

如果 z 有某邻域 F, 使得 $F \in E$, 称 z 是 E 的内点.

(5) 边界点

如果在 z 的任意小的邻域中, 既有 E 中的点, 又有非 E 中的点, 称 z 是 E 的边界点.
例: $E=\{1/n|n=1,2,\ldots\}$, E 中所有的点都是 E 的边界点, 另外 $z=0$ 也是 E 的边界点.
孤立点是边界点.
不属于 E 的聚点也是边界点.

(6) 开集

全由内点组成的点集称为开集.

复平面上的点集

(7) 闭集

如果 $\boldsymbol{E}$ 的所有聚点都属于 $\boldsymbol{E}$, 称 $\boldsymbol{s}$ 为闭集.
例: 邻域是开集.
例: $\boldsymbol{E} = \{0, 1/n\}, n = 1, 2, \ldots,$ 是闭集
例: $\boldsymbol{E} = \{1/n\}, n = 1, 2, \ldots.$ 既不是开集, 也不是闭集.

(8) 有界集

对 $\boldsymbol{E}$ 中所有的点 $\boldsymbol{z}$, 如果存在 $\boldsymbol{M} > 0$, 使得 $|z| < \boldsymbol{M}$, 称 $\boldsymbol{E}$ 为有界集.
两种不同的数学描述
$\exists\, \boldsymbol{M} > 0$, 对 $\forall\, \boldsymbol{z} \in \boldsymbol{E}$, 有 $|z| < \boldsymbol{M}$, 称 $\boldsymbol{E}$ 为有界集.
对 $\forall\, \boldsymbol{z} \in 0$, $\exists\, \boldsymbol{M} > 0$, 有 $|z| < \boldsymbol{M}$, 称 $\boldsymbol{E}$ 为有界集.

(9) 连通集

如果 $\boldsymbol{E}$ 中任意两点之间可用一条完全包含在 E 中的连续线相连, 称 $\boldsymbol{E}$ 为连通集.

区域和曲线

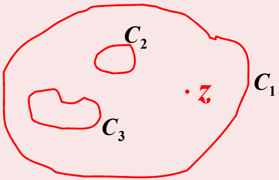
(1) 区域

连通的开集称为区域.

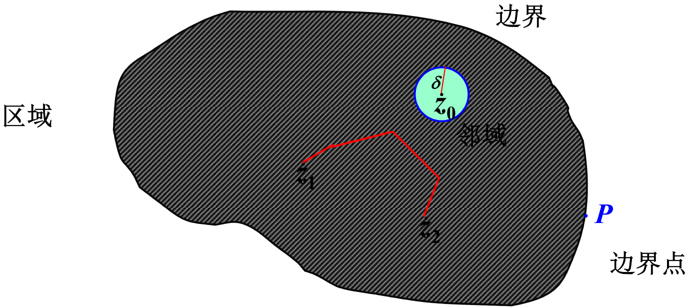
(2) 区域的边界, 闭区域

区域 D 的全体边界点的集合 C 组成 D 的边界.
区域 D 与它的边界 C 一起构成闭区域 $\bar{D}$.

$$\bar{D} = D + C$$



以上基本概念的图示



(3) 区域边界的正向

如果沿区域 D 的边界 C 行进, 区域 D 一直在左方, 则此行进方向称为边界 C 的正向

例: 圆内域的边界正向是逆时针方向.

例: 圆外域的边界正向是顺时针方向.

(4) 平面曲线

如果 $x(t)$ 和 $y(t)$ 是两个连续的实函数, 那末方程组 $x = x(t)$, $y = y(t)$, $(a \leq t \leq b)$ 代表一条平面曲线, 称为连续曲线.

平面曲线的复数表示:

$$z = z(t) = x(t) + iy(t). \quad (a \leq t \leq b)$$

(5) 可求长曲线

设曲线 $z=z(t)(a<t<b)$ 在 $[a,b]$ 上连续, 如果任取实数序列 $\{t_n\}$

$$a=t_0<t_1<\cdots<t_n=b$$

其在曲线上对应的点列为 $z_k=z\left(t_k\right) \quad k=0,1,\cdots,\mathbf{n}$
将这些点用折线 Q 依次连接起来, Q 的长度

$$L=\sum_{k=1}^{n}\left|z\left(t_k\right)-z\left(t_{k-1}\right)\right|$$

如果对任意长度的 n 的实序列 $\{t_n\}$, L 有上界, 称曲线 $z=z(t)$ 为可求长曲线.
L 的上确界即为 $z(t)$ 的长度.

(6) 实变量复值函数的导数

如果实变量复值函数 $z(t) = x(t) + iy(t)$ 的实部 $x(t)$ 和虚部 $y(t)$ 均可导，称

$$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$$

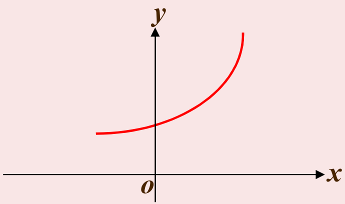
为实变量复值函数 $z(t)$ 的导数.

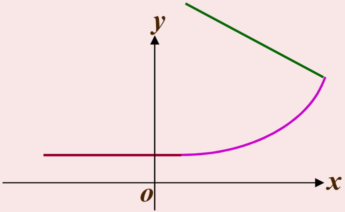
实变量复值函数求导为分别对实部和虚部求导.

(7) 按段光滑曲线

如果在 $[a, b]$ 上, $x'(t)$ 和 $y'(t)$ 都是 t 的连续函数, 即,
$z'(t) = x'(t) + iy'(t)$ 是 t 的连续函数, 且对每一个 t 值, 有
$[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$, 即 $|z'(t)| \neq 0$, 称此曲线为光滑曲线.

由几段依次相接的光滑曲线所组成的曲线称为按 (分) 段光滑曲线.



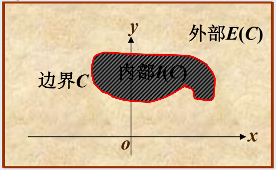


(8) 简单曲线

对连续曲线 $C: z = z(t)\ \ t \in [a, b], z(a), z(b)$ 分别称为 C 的起点和终点.
当 $t1 \neq t2$ 而有 $z(t_1) = z(t_2)$ 时, 点 $z(t_1)$ 称为曲线 C 的重点.
没有重点的连续曲线 C 称为简单曲线.
除 $z(a) = z(b)$ 外别无重点的连续曲线称为简单闭曲线.
简单闭曲线也称为 Jordan (若当) 曲线.

定理

(9) Jordan 定理 任意一条简单闭曲线 C 将复平面唯一地分成 C, $I(C)$, $E(C)$ 三个互不相交的点集.

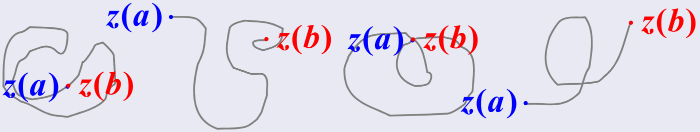


区域和曲线

它们有如下性质:

1. 彼此不交.
2. $I(C)$ 是一个有界区域, 称为 C 的内部.
3. $E(C)$ 是一个无界区域, 称为 C 的外部.
4. C 是 $I(C)$ 的边界, 也是 $E(C)$ 的边界.
5. 如果简单折线 p 的一个端点属于 $I(C)$, 另一个端点属于 $E(C)$, 则 p 与 C 必有交点.

课堂练习：判断下列曲线是否为简单曲线?

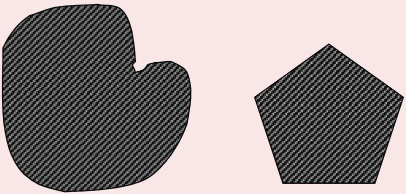


答案

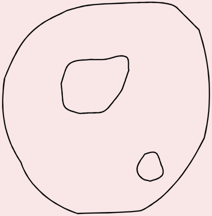
简单 闭	简单 不闭	非简单 闭	非简单 不闭

(10) 单连通域与多连通域的定义

复平面上的一个区域 D, 如果在其中任作一条简单闭曲线, 而曲线的内部总属于 D, 就称为单连通区域. 一个区域如果不是单连通域, 就称为多连通区域.



单连通域



多连通域

$n(n > 2)$ 维空间中的单连域

如果区域 D 任一条简单闭曲线都可以在 D 的内部连续收缩成 D 的一个点, 称 D 为单连通区域.

例

复平面上的圆外域.

例

三维空间的球外域.

例

三维空间的车胎域.

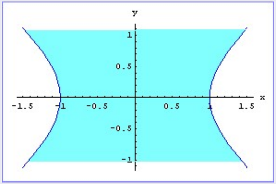
例 1

指出下列不等式所确定的点集, 是有界的还是无界的, 单连通的还是多连通的.

$$(1)\ \mathrm{Re}(z^2) < 1; \quad (2)\ |\arg z| < \frac{\pi}{3}; \quad (3)\ \left|\frac{1}{z}\right| < 3;$$

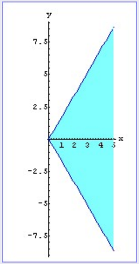
$$(4)\ |z-1| + |z+1| < 4; \quad (5)\ |z-1| \cdot |z+1| < 1.$$

解 (1) 当 $z = x + iy$ 时, $\mathrm{Re}(z^2) = x^2 - y^2$, $\mathrm{Re}(z^2) < 1 \Leftrightarrow x^2 - y^2 < 1$, 无界的单连通域 (如图).

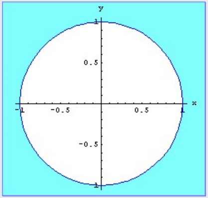


(2) $|\arg z| < \frac{\pi}{3}$

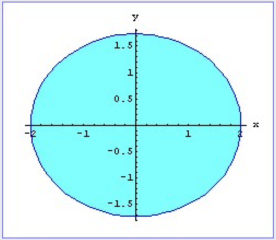
$|\arg z| < \frac{\pi}{3} \Leftrightarrow -\frac{\pi}{3} < \arg z < \frac{\pi}{3}$, 是角形域, 无界的单连通域 (如图).



(3) $\left|\frac{1}{z}\right| < 3$ $\left|\frac{1}{z}\right| < 3 \Leftrightarrow |z| > \frac{1}{3}$, 是以原点为中心, 半径为 $\frac{1}{3}$ 的圆的外部, 是无界的多连通域.



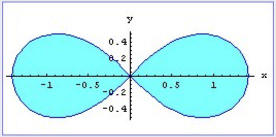
(4) $|z-1|+|z+1|<4$
因 $|z-1|+|z+1|=4$
表示到 1, -1 的距离之和为定值 4 的点的轨迹, 是椭圆,
$|z-1|+|z+1|<4$ 表示该椭圆内部, 有界的单连通域.



(5) $|z-1|\cdot|z+1|<1$
令 $z=r\cos\theta+ir\sin\theta$,

$$
\begin{aligned}
&|z-1|\cdot|z+1|<1 \Leftrightarrow\\
&[(r\cos\theta-1)^2+r^2\sin^2\theta]\cdot[(r\cos\theta+1)^2+r^2\sin^2\theta]<1\\
&(r^2+2r\cos\theta+1)(r^2-2r\cos\theta+1)<1\\
&(r^2+1)^2-4(r\cos\theta)^2<1\Rightarrow r^2<2\cos 2\theta,
\end{aligned}
$$

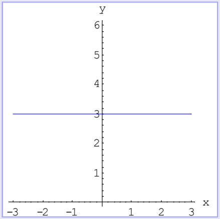
$r^2=2\cos 2\theta$ 是双叶玫瑰线 (也称双纽线), $|z-1|\cdot|z+1|<1$ 是其内部, 有界集. 但不是区域.



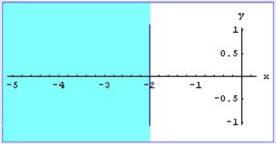
例 2

满足下列条件的点集是什么，如果是区域，指出是单连通域还是多连通域？

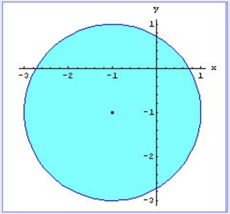
解 (1) $\mathbf{Im}z = \mathbf{3}$，是一条平行于实轴的直线，不是区域.



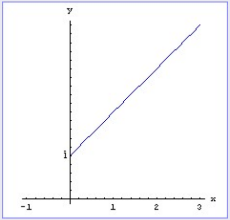
(2) $\mathbf{Re}z < -\mathbf{2}$，以 $\mathbf{Re}z = -\mathbf{2}$ 为左界的半平面 (不包括直线 $\mathbf{Re}z = -\mathbf{2}$)，单连通域.



(3) $0 < |z+1+i| < 2$, 以 $-(1+i)$ 为圆心, 为半径的去心圆盘, 是多连通域.



(4) $\arg(z-i) = \frac{\pi}{4}$, 以 i 为端点, 斜率为 1 的半射线 (不包括端点 i), 不是区域.



课程目录

1. 第一章　复数与复变函数
   - 复数运算及几何表示
     - 复数的概念
     - 复数的表示方法
     - 复数的代数运算
     - 复球面与无穷远点
   - 复平面上的曲线和区域
     - 曲线的复数方程
     - 复平面上的点集
     - 区域和曲线
   - 复变函数
     - 定义与几何意义
     - 极限与连续性

课程目录

定义 1

设 E 是一平面点集, 如果存在一个法则, 对任何 $z = x + iy \in E$, 使得有一个或几个复数 $w = u + iv$ 与之对应, 那末称复变数 w 是复变数 z 的函数 (简称复变函数), 记作 $w = f(z)$.

如果 z 的一个值对应着一个 w 的值, 那末我们称函数 $f(z)$ 是单值函数.

如果 z 的一个值对应着两个或两个以上 w 的值, 那末我们称函数 $f(z)$ 是多值函数.

如: $w = |z|$ 是复平面上的单值函数, 而函数 $w = \arg z$ 是定义在 $z \neq 0$ 上的多值函数.

复变数 w 是由两个实变数 u, v 组成, 同时, 自变量 z 也是由两个实变数 x, y 组成, 因此复变函数 w 与自变量 z 之间的关系 $w = f(z)$ 相当于两个关系式:

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y),$$

它们确定了自变量为 x 和 y 的两个二元实变函数.

例

例: $w=z^2$ 是一复变函数令
$z=x+iy, w=u+iv, (x+iy)^2=x^2-y^2+2xyi$
于是函数 $w=z^2$ 对应于两个二元实变函数:

$$u=x^2-y^2, v=2xy.$$

反过来, 如果 $w=u(x,y)+iv(x,y)=x^2+y^2+4xyi$
令 $x=\frac{z+\bar{z}}{2}, y=\frac{z-\bar{z}}{2i}$

$$\begin{aligned}x^2+y^2+4xyi&=\left(\frac{z+\bar{z}}{2}\right)^2+\left(\frac{z-\bar{z}}{2i}\right)^2+4\frac{z+\bar{z}}{2}\cdot\frac{z-\bar{z}}{2i}i\\&=z^2+z\cdot\bar{z}-\bar{z}^2\end{aligned}$$

反函数的定义

设 $w=f(z)$ 的定义域为复平面上的集合 D, 函数的值域为复平面上的集合 G, 那末, 对于 G 中任一 w, 必有 D 中的一个 (或几个) 复数与之对应; 这样, 就确定了集合 G 上的一个单值函数 (或多值函数) $z=\phi(w)$, 称它为函数 $w=f(z)$ 的反函数.

课程目录

设复变函数 $f(z)$ 在集合 E 上定义, z_0 是 E 的聚点, 当 $|z - z_0| \to 0$ 时, 称 $z \to z_0$.

定义 2

设复变函数 $w = f(z)$ 在 z_0 的某个去心邻域 $0 < |z - z_0| < \rho$ 内定义, A 是一个复常数. 若对任意给定的 $\varepsilon > 0$, 总存在 $\delta(\varepsilon) > 0$ $(0 < \delta \le \rho)$, 使得当 $0 < |z - z_0| < \delta$ 时, 有 $|f(z) - A| < \varepsilon$, 那末则称当 z 趋向于 z_0 时, $f(z)$ 以 A 为极限. 记作 $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = A$ 或 $f(z) \to A$ $(z \to z_0)$

注意: 定义中 $z \to z_0$ 的方式是任意的.

例

证明: 当 $z \to 0$ 时, 函数 $f(z) = \frac{z}{\bar{z}} (z \neq 0)$ 的极限不存在.

证明:
当 z 沿直线 $y = kx$ 趋于零时,

$$\lim_{z \to 0} f(z) = \lim_{\substack{x \to 0 \\ y = kx}} \frac{x + ikx}{x - ikx} = \frac{1 + ik}{1 - ik}$$

该极限值随 k 值的变化而变化, 所以 $\lim\limits_{z \to 0} f(z)$ 不存在.

(1) 连续

定理

定理 *1.3.1:*
设

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y),$$
$$A = u_0 + iv_0,$$
$$z_0 = x_0 + iy_0,$$

则

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = A \Leftrightarrow$$
$$\lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} u(x, y) = u_0, \lim_{\substack{x \to x_0 \\ y \to y_0}} v(x, y) = v_0$$

定理

定理 *1.3.2:*
如果

$$\lim_{z\to z_0} f(z) = A,\ \lim_{z\to z_0} g(z) = B$$

则

1. $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z) \pm g(z)] = A \pm B$
2. $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z)g(z)] = AB$
3. $\lim\limits_{z\to z_0} [f(z)/g(z)] = A/B \quad (B \neq 0)$

两个常用符号:

“O”: 如果 $\lim\limits_{z\to z_0}|f(z)/g(z)|<c(c>0)$
记 $f(z)=O[g(z)]$

“o”: 如果 $\lim\limits_{z\to z_0}[f(z)/g(z)]=0$
记 $f(z)=o[g(z)]$

定义 1.3.3

$f(z)$ 在 E 上有定义, z_0 是 E 的聚点, $z \in E$. 如果

$$\lim_{z \to z_0} f(z) = f(z_0)$$

称 $f(z)$ 在 z_0 连续.

即, $\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon, z_0) > 0$, 只要 $|z - z_0| < \delta$, 就有 $|f(z) - f(z_0)| < \delta$.

如果 E 内每一点都是聚点, $f(z)$ 在 E 上每一点都连续, 称 $f(z)$ 在 E 上连续.

定理

定理 *1.3.3:*

1. 在 z_0 连续的两个函数 $f(z)$ 和 $g(z)$ 的和、差、积、商 *(*分母在 z_0 不为零*)* 在 z_0 处仍连续.
2. 设函数 $h = g(z)$ 在 z_0 连续, 函数 $w = f(h)$ 在 $h_0 = g(z_0)$ 连续, 那么复合函数 $w = f[g(z)]$ 在 z_0 处连续.

定理

定理 *1.3.4:* 设 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$, 则函数 $f(z)$ 在 $z_0=x_0+iy_0$ 连续的充分必要条件是 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处连续

举例说明如下:

$$f(z)=\ln(x^2+y^2)+i(x^2-y^2)$$

$u(x,y)=\ln(x^2+y^2)$ 在复平面内除原点外处处连续,
$v(x,y)=i(x^2-y^2)$ 在复平面内处处连续, 因此, $f(z)$ 在复平面内除原点外处处连续 $f(z)$ 表示的函数是什么?

该定理将复变函数 $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ 的连续性问题与两个二元实函数 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 的连续性问题密切联系在一起.

例

证明: 如果 $f(z)$ 在 z_0 连续, 那末 $\overline{f(z)}$ 在点 z_0 处也连续.

证明.

设 $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$,
则 $\overline{f(z)} = u(x,y) - iv(x,y)$,
由 $f(z)$ 在 z_0 连续,
知 $u(x,y)$ 和 $v(x,y)$ 在 (x_0,y_0) 处都连续,
于是 $u(x,y)$ 和 $-v(x,y)$ 也在 (x_0,y_0) 处连续,
故 $\overline{f(z)}$ 在 z_0 连续. □

(2) 一致连续

定义

$\forall\, \varepsilon > 0, \exists\, \delta(\varepsilon) > 0$, 只要 $z_1, z_2 \in E$, 且 $|z_1 - z_2| < \delta$, 就有 $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$

(3) 有界闭域 $\bar{D}$ 上连续函数 $f(z)$ 的性质
a. $|f(z)|$ 在 $\bar{D}$ 上有界, 并达到其最小上界和最大下界.

证明.

1) 如果 $|f(z)|$ 无界, 则有 $\{z_n\} \in \bar{D}$, 满足:

$$|f(z_n)| > n, n = 1, 2, \ldots \tag{2}$$

但 $\{z_n\}$ 有界, 设 z_0 是 $\{z_n\}$ 的一个聚点, 则 $z_0 \in \bar{D}$, 有 $\{z_{nk}\} \subset \{z_n\}, k \to \infty, z_{nk} \to z_0$. 由 $f(z)$ 在 z_0 连续, 得

$$\lim_{\mathrm{k}\to\infty} |f(z_{\mathrm{nk}})| = |f(z_0)|$$

即 $f(z_{nk})$ 有界, 这与 (I) 矛盾. □

2) 设 m 和 M 分别是 $|f(z)|$ 在 $\bar{D}$ 上的最大下界和最小上界, 则对于 $1/n > 0$, 有 $\{z_n\} \in \bar{D}$, $\{z'_n\} \in \bar{D}$, 满足:

$$M \geq |f(z_n)| > M - 1/n \qquad m \leq |f(z'_n)| < m + 1/n$$

设 z_0 是 $\{z_n\}$ 的聚点, z'_0 是 $\{z'_n\}$ 的聚点, 则 $z_0, z'_0 \in \bar{D}$, 有 $\{z_{nk}\} \subset \{z_n\}, \{z'_{nk}\} \subset \{z'_n\}, k \to \infty, z_{nk} \to z_0, z'_{nk} \to z'_0$, 由于 $f(z)$ 的连续性, 使得

$$|f(z_0)| = \lim_{k\to\infty} |f(z_{nk})| = M$$
$$|f(z'_0)| = \lim_{k\to\infty} |f(z'_{nk})| = m$$

$\square$

b. 闭域 $\bar{D}$ 上的连续函数 $f(z)$ 必一致连续.

证明.

反证法. 设 $f(z)$ 在 $\bar{D}$ 上不一致连续, 即 $\exists\, \varepsilon > 0$, 对于 $\delta_n = 1/n$, $\exists\, z_n, z_n' \in \bar{D}$, 使得 $|z_n - z_n'| < 1/n$, 而 $|f(z_n) - f(z_n')| > \varepsilon$, 对所有的 n 成立.

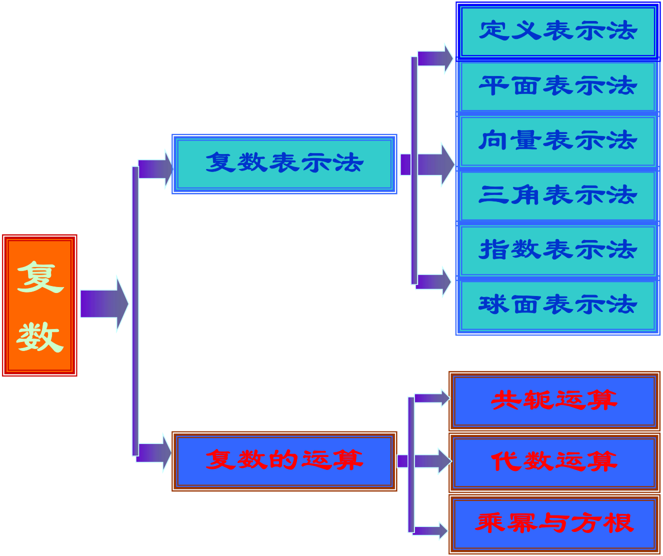
设 z_0 是$\{z_n\}$ 的聚点, 则$z_0 \in \bar{D}$, 有 $\{z_{nk}\} \subset \{z_n\}$, 使得 $\lim\limits_{k\to\infty} z_{nk} = z_0$, 而

$$\begin{aligned} |z_{nk}' - z_0| &\leq |z_{nk}' - z_{nk}| + |z_{nk} - z_0| \\ &< 1/n + |z_{nk} - z_0| \to 0(k \to \infty) \end{aligned}$$

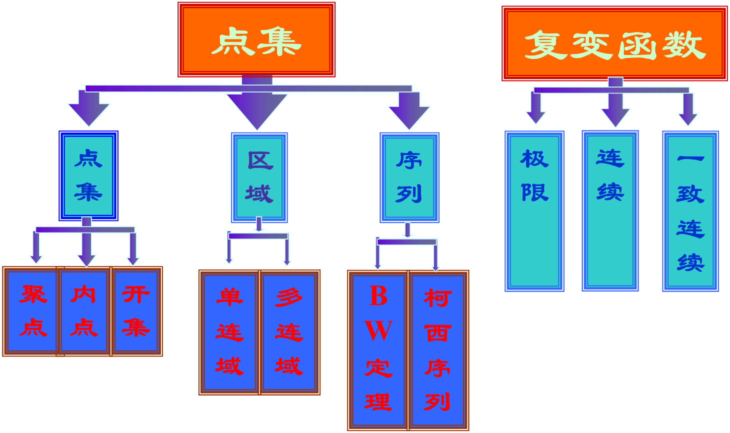
即 $\lim\limits_{k\to\infty} z_{nk}' = z_0$ 这表明, z_0 是 $\{z_{nk}\}, \{z_{nk}'\}$ 的公共聚点.

由 $|f(z_n) - f(z_n')| > \varepsilon$, 两边取极限, 根据 $f(z)$ 的连续性 $\varepsilon \leq |f(z_0) - f(z_0)| = 0$, 与 $\varepsilon > 0$ 矛盾. $\square$

本章主要内容 (一)


复数
复数表示法
定义表示法
平面表示法
向量表示法
三角表示法
指数表示法
球面表示法
复数的运算
共轭运算
代数运算
乘幂与方根

本章主要内容 (二)



本章要注意的几点

- 复数运算和各种表示法
- 复数方程表示曲线以及不等式表示区域
- 聚点、内点、开集、区域
- 可求长曲线、简单曲线
- 连续、一致连续

作业

书 P25 – 27

3、5(4)、9、10、14(4)、16(8)、17、20、25、27.

第一章　　完

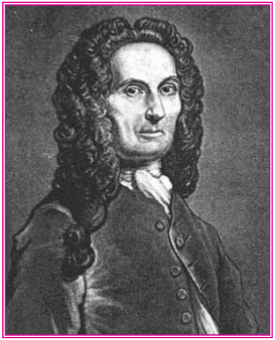
L. Euler(欧拉) 简介

1707.4.15 生于瑞士，巴塞尔
1783.9.18 卒于俄罗斯，彼得堡

Euler 是 18 世纪的数学巨星；是那个时代的巨人，科学界的代表人物. 历史上几乎可与 Archimedes、Newton、Gauss 齐名.

他在微积分、几何、数论、变分学等领域有巨大贡献. 可以说 Newton、Leibniz 发明了微积分，而 Euler 则是数学大厦的主要建筑师.

A. de Moivre 棣莫佛简介



1667.5.26 生于法国
1754.11.27 卒于英国

在概率论、复数理论等领域做了一些出色的工作.

解决斐波那契数列的通项问题. L.Fibonacci (1170–1250)