

Chapter-3 त्रिकोणमितीय फलन

प्रश्नावली 3.1

प्रश्न 1.

निम्नलिखित डिग्री माप के संगत रेडियन माप ज्ञात कीजिए।

- (i) 25°
- (ii) $-47^\circ 30'$
- (iii) 240°
- (iv) 520°

$$(ii) \quad 60' = 1^\circ \text{ तब } 30' = \left(\frac{30}{60}\right)^\circ = \left(\frac{1}{2}\right)^\circ$$

$$\therefore -47^\circ 30' = \left(-47\frac{1}{2}\right)^\circ = \left(-\frac{95}{2}\right)^\circ$$

$$\text{अब} \quad 180^\circ = \pi \text{ रेडियन}$$

$$\therefore \left(-\frac{95}{2}\right)^\circ = \frac{-\pi}{180} \times \frac{95}{2} \text{ रेडियन}$$

$$= -\frac{19\pi}{72} \text{ रेडियन।}$$

$$\therefore -47^\circ 30' = -\frac{19\pi}{72} \text{ रेडियन}$$

$$(iii) \therefore 180^\circ = \pi \text{ रेडियन}$$

$$240^\circ = \frac{\pi}{180} \times 240 \text{ रेडियन} = \frac{4\pi}{3} \text{ रेडियन।}$$

$$(iv) \therefore 180^\circ = \pi \text{ रेडियन}$$

$$520^\circ = \frac{\pi}{180} \times 520 \text{ रेडियन} = \frac{26\pi}{9} \text{ रेडियन।}$$

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए : $2 \cos \frac{\pi}{13} \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} = 0$.

हल : बायाँ पक्ष = $2 \cos \frac{\pi}{13} \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13}$

$$= \cos \frac{10\pi}{13} + \cos \frac{8\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13}$$
$$[\because 2 \cos A \cos B = \cos (A + B) + \cos (A - B)]$$
$$= \left(\cos \frac{10\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} \right) + \left(\cos \frac{8\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} \right)$$
$$= \left[\cos \left(\pi - \frac{3\pi}{13} \right) + \left(\cos \frac{3\pi}{13} \right) \right] + \left[\cos \left(\pi - \frac{5\pi}{13} \right) + \cos \frac{5\pi}{13} \right]$$
$$= \left(-\cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} \right) + \left(-\cos \frac{5\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} \right)$$
$$= 0 = \text{दायाँ पक्ष।}$$

प्रश्न 2.

निम्नलिखित रेडियन माप के संगत डिग्री माप ज्ञात कीजिए ($\pi = \frac{22}{7}$) का प्रयोग करें:

- (i) $\frac{11}{16}$
- (ii) -4
- (iii) $\frac{5\pi}{3}$
- (iv) $\frac{7\pi}{6}$

$$(i) \pi \text{ रेडियन} = \frac{22}{7} \text{ रेडियन} = 180^\circ$$

$$\frac{11}{16} \text{ रेडियन} = \frac{180}{22} \times 7 \times \frac{11}{16} \text{ डिग्री}$$

$$= \frac{315}{8} \text{ डिग्री} = 39\frac{3}{8} \text{ डिग्री}$$

$$= 39^\circ \left(\frac{3}{8} \times 60 \right)'$$

$$= 39^\circ 22' \left(\frac{1}{2} \times 60 \right)''$$

$$= 39^\circ 22' 30''.$$

$$(ii) -4 \frac{22}{7} \text{ रेडियन} = 180^\circ$$

$$\text{हल : } 4 \text{ रेडियन} = \frac{180}{22} \times 7 \times (-4) \text{ डिग्री}$$

$$= -\frac{2520}{11} \text{ डिग्री}$$

$$= -229\frac{1}{11} \text{ डिग्री}$$

$$= -229^\circ \left(\frac{1}{11} \times 60 \right)$$

$$= -229^\circ 5' \left(\frac{5}{11} \times 60 \right)''$$

$$= -229^\circ 5' 27'' \text{ (निकटतम)।}$$

(iii) $\frac{5\pi}{3}$

हल : π रेडियन = 180°

$\therefore \frac{5\pi}{3}$ रेडियन = $\frac{180}{\pi} \times \frac{5\pi}{3} = 300^\circ$.

(iv) π रेडियन = 180°

$\therefore \frac{7\pi}{6}$ रेडियन = $\frac{180}{\pi} \times \frac{7\pi}{6} = 210^\circ$.

प्रश्न 3.

एक-पहिया एक मिनट में 360° परिक्रमण करता है तो एक सेकंड में कितने रेडियन माप का कोण बनाएगा?

हल:

परिक्रमण में पहिया द्वारा बना कोण = 2π रेडियन

360 परिक्रमण में पहिया द्वारा बना कोण = $360 \times 2\pi$ रेडियन

1 मिनट अर्थात् 60 सेकण्ड में $360 \times 2\pi$ रेडियन का कोण बनता है।

1 सेकण्ट में पहिया द्वारा बना कोण = $\frac{360 \times 2\pi}{60} = 12\pi$ रेडियन।

प्रश्न 4.

एक वृत्त जिसकी त्रिज्या 100 सेमी है, 22 सेमी लंबाई की चाप वृत्त के केन्द्र पर कितने डिग्री

माप का कोण बनाएगी ? ($\pi = \frac{22}{7}$ का प्रयोग कीजिए)

हल : ∵

$$\text{चाप} = \text{त्रिज्या} \times \text{कोण}$$

जहाँ चाप,

$$l = 22 \text{ सेमी}$$

त्रिज्या,

$$r = 100 \text{ सेमी}$$

$$22 = 100 \times \theta$$

$$\theta = \frac{22}{100} \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{22}{100} \times \frac{180}{\pi} \text{ डिग्री}$$

$$= \frac{22}{100} \times \frac{180}{22} \times 7 \text{ डिग्री}$$

$$= \frac{63}{5} \text{ डिग्री}$$

$$= 12.6 \text{ डिग्री}$$

$$= 12^\circ 36'.$$

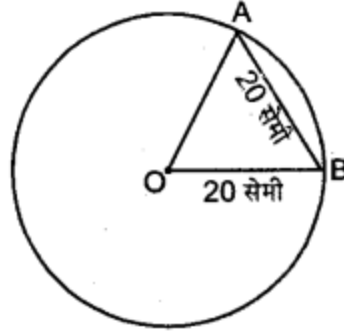
प्रश्न 5.

एक वृत्त जिसका व्यास 40 सेमी. है, की एक जीवा 20 सेमी. लंबाई की है तो इसके संगत छोटे चाप की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\text{व्यास} = 40 \text{ सेमी}$$

$$\text{त्रिज्या} = 20 \text{ सेमी}$$



त्रिभुज OAB एक समबाहु त्रिभुज है

$$\angle AOB = 60^\circ$$

$$= \frac{60 \times \pi}{180} \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{\pi}{3} \text{ रेडियन}$$

मान लीजिए चाप $AB = l$

केन्द्र O पर चाप द्वारा बना कोण, $\theta = \frac{\pi}{3}$ रेडियन

चाप AB की लम्बाई,

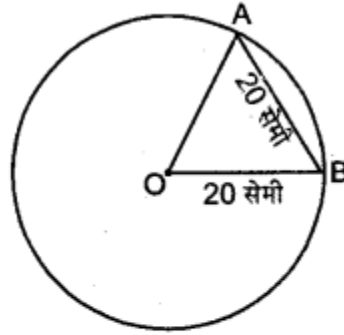
$$l = r\theta = 20 \times \frac{\pi}{3} \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{20\pi}{3} \text{ रेडियन।}$$

प्रश्न 6.

यदि दो वृत्तों के समान लंबाई वाले चाप अपने केन्द्रों पर क्रमशः 60° तथा 75° के कोण बनाते

हों, तो उन्क लिन्याओं को अनुपात ज्ञात कीजिए।



त्रिभुज OAB एक समबाहु त्रिभुज है

$$\angle AOB = 60^\circ$$

$$= \frac{60 \times \pi}{180} \text{ रेडियन}$$

चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण, $\theta_2 = 75^\circ$

$$= 75 \times \frac{\pi}{180} \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{5\pi}{12} \text{ रेडियन}$$

$$r_2 = \frac{12l}{5\pi}$$

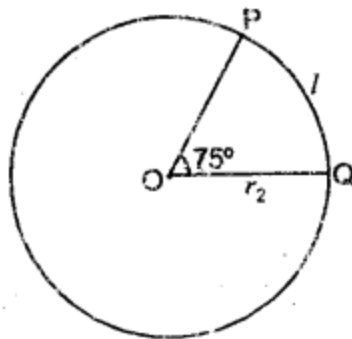
समीकरण (i) को समीकरण (ii) से विभाजित करने पर

$$\frac{r_1}{r_2} = \frac{3l}{\pi} \div \frac{12l}{5\pi}$$

$$= \frac{3l}{\pi} \times \frac{5\pi}{12l} = \frac{5}{4} = 5 : 4.$$

दूसरे वृत्त के लिए,

माना त्रिज्या = r_2
चाप की लंबाई = l



प्रश्न 7.

75 सेमी लम्बाई वाले एक दोलायमान दोलक का एक सिरे से दूसरे सिरे तक दोन करने से जो कोण बनता है, उसका माप रेडियन में ज्ञात कीजिए, जबकि उसके नोक द्वारा बनाए गए चाप की लम्बाई निम्नलिखित हैं:

- (i) 10 सेमी
- (ii) 15 सेमी

(iii) 21 सेमी

हल : त्रिज्या = 75 सेमी

(i) चाप की लम्बाई $l_1 = 10$ सेमी

यदि चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण θ रेडियन हो, तो

$$l_1 = r\theta_1$$

$$10 = 75\theta_2$$

$$\theta_1 = \frac{10}{75} = \frac{2}{15} \text{ रेडियन।}$$

(ii) $r = 75$ सेमी तथा $l_2 = 15$ सेमी

$$l_2 = r\theta_2$$

$$\theta_2 = \frac{l_2}{r} = \frac{15}{75} = \frac{1}{5} \text{ रेडियन।}$$

(iii) $l_3 = 21$ सेमी, $r = 75$ सेमी

$$\therefore \theta_3 = \frac{l_3}{r} = \frac{21}{75} \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{7}{25} \text{ रेडियन।}$$

प्रश्नावली 3.2

निम्नलिखित प्रश्नों में से पाँच अन्य त्रिकोणमितीय फलनों का मान ज्ञात कीजिए।

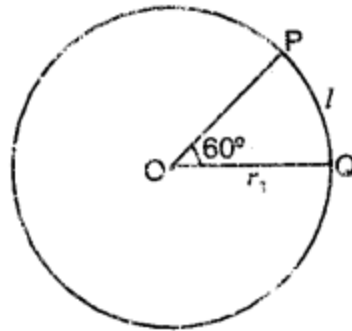
प्रश्न 1.

$\cos x = \left[\frac{-1}{2} \right]$, x तीसरे चतुर्थांश में स्थित है।

हल :

माना चाप की लंबाई $= l$
चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण $\theta_1 = 60^\circ$

$$= \frac{\pi}{3} \text{ रेडियन}$$



मान लीजिए इसकी त्रिज्या $= r_1$

$$l = r_1 \theta_1$$

$$= r_1 \frac{\pi}{3}$$

$$r_1 = \frac{3l}{\pi}$$

हल : त्रिज्या = 75 सेमी

(i) चाप की लम्बाई $l_1 = 10$ सेमी

यदि चाप द्वारा केन्द्र पर बना कोण θ रेडियन हो, तो

$$l_1 = r\theta_1$$

$$10 = 75\theta_2$$

$$\theta_1 = \frac{10}{75} = \frac{2}{15} \text{ रेडियन।}$$

(ii) $r = 75$ सेमी तथा $l_2 = 15$ सेमी

$$l_2 = r\theta_2$$

$$\theta_2 = \frac{l_2}{r} = \frac{15}{75} = \frac{1}{5} \text{ रेडियन।}$$

(iii) $l_3 = 21$ सेमी, $r = 75$ सेमी

$$\therefore \theta_3 = \frac{l_3}{r} = \frac{21}{75} \text{ रेडियन}$$

$$= \frac{7}{25} \text{ रेडियन।}$$

प्रश्न 2.

$\sin x = \frac{3}{5}$, x दूसरे चतुर्थांश में स्थित है।

AB अक्ष OY' की दिशा में है।

$$\therefore AB = -\sqrt{3}$$

$$\Rightarrow OA = -1, AB = -\sqrt{3}, OB = 2$$

$$\sin x = \frac{AB}{OB} = \frac{-\sqrt{3}}{2},$$

$$\tan x = \frac{AB}{OA} = \frac{-\sqrt{3}}{-1} = \sqrt{3}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{OB}{AB} = \frac{-2}{\sqrt{3}},$$

$$\sec x = \frac{OB}{OA} = \frac{2}{-1} = -2$$

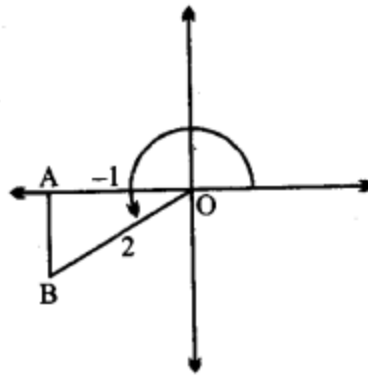
और

$$\cot x = \frac{OA}{AB} = \frac{-1}{-\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}.$$

हल : ΔOAB में,

$$\cos x = -\frac{1}{2} = \frac{OA}{OB}$$

$$\begin{aligned} \therefore AB &= \sqrt{OB^2 - OA^2} \\ &= \sqrt{4 - 1} = \pm \sqrt{3} \end{aligned}$$



प्रश्न 3.

$\cot x = \frac{3}{4}$, x तृतीय चतुर्थांश में स्थित है।

हल:

$$\cot x = \frac{3}{4}$$

$OA = 3$ इकाई

अब $OA = -4$ (क्योंकि यह OX' दिशा में है।)

$$AB = 3$$

$$OB = 5$$

$$\cos x = \frac{OA}{OB} = \frac{-4}{5},$$

$$\tan x = \frac{AB}{OA} = \frac{3}{-4} = -\frac{3}{4}$$

$$\operatorname{cosec} x = \frac{OB}{AB} = \frac{5}{3}, \sec x = \frac{OB}{OA} = -\frac{5}{4}$$

$$\cot x = \frac{OA}{AB} = \frac{-4}{3}.$$

प्रश्न 4.

$\sec x = \frac{13}{5}$, x चतुर्थ चतुर्थांश में स्थित है।

हल :

$$\sin x = \frac{3}{5} = \frac{AB}{OB}$$

यहाँ

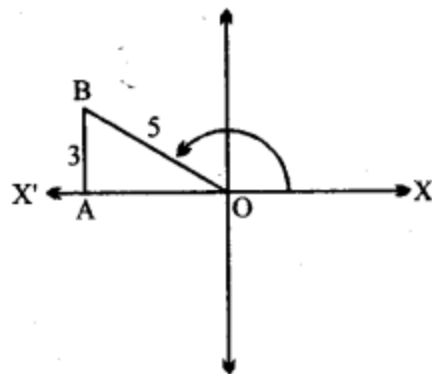
$$AB = 3 \text{ इकाई}$$

\therefore

$$OB = 5 \text{ इकाई}$$

$$OA = \sqrt{OB^2 - AB^2}$$

$$= \sqrt{25 - 9} = \pm 4$$



यहाँ

$$OB = 13 \text{ इकाई}$$

\therefore

$$OA = 5 \text{ इकाई}$$

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{OB^2 - OA^2} \\ &= \sqrt{169 - 25} \\ &= \pm 12 \end{aligned}$$

अब

$$OA = 5 \text{ (OX दिशा में है)}$$

$$AB = -12 \text{ (OY' दिशा में है)}$$

$$OB = 13$$

$$\sin x = \frac{AB}{OB} = \frac{-12}{13} = -\frac{12}{13}, \cos x = \frac{OA}{OB} = \frac{5}{13}$$

$$\tan x = \frac{AB}{OA} = \frac{-12}{5} = -\frac{12}{5}, \sec x = \frac{OB}{OA} = \frac{13}{5}$$

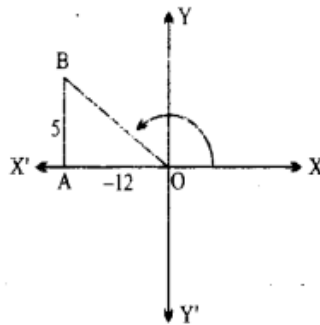
$$\operatorname{cosec} x = \frac{OB}{AB} = \frac{13}{-12} = -\frac{13}{12}$$

प्रश्न 5.

$\tan x = \frac{-5}{12}$, x दूसरे चतुर्थांश में स्थित है।

हल : $\tan x = \frac{-5}{12}$

ΔOAB में, $\tan x = \frac{AB}{OA}$



यहाँ $AB = 5$ इकाई

$\therefore OA = 12$ इकाई

$\therefore OB = \sqrt{25 + 144} = 13$

अब $OA = -12$

$AB = 5$

($\because OX'$ दिशा में है)

($\because OY'$ दिशा में है)

$OB = 13$

$\sin x = \frac{AB}{OB} = \frac{5}{13}$

$\cos x = \frac{OA}{OB} = \frac{-12}{13} = -\frac{12}{13}$

$\operatorname{cosec} x = \frac{OB}{AB} = \frac{13}{5}, \sec x = \frac{OB}{OA} = -\frac{13}{12}$

$\cot x = \frac{OA}{AB} = \frac{-12}{5} = -\frac{12}{5}$

प्रश्न संख्या 6 से 10 तक के मान ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 6.

$$\sin 765^\circ$$

हल :

$$\sin 765^\circ = \sin (2 \times 360 + 45^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$[\because \sin (360 + \theta) = \sin \theta]$$

प्रश्न 7.

$$\operatorname{cosec} (-1410)^\circ$$

हल :

$$\operatorname{cosec} (-1410) = -\operatorname{cosec} 1410$$

$$= -\operatorname{cosec} (4 \times 360 - 30)^\circ$$

$$= -\operatorname{cosec} (-30)^\circ$$

$$= \operatorname{cosec} 30^\circ$$

$$= 2.$$

$$[\because \operatorname{cosec} (-\theta) = -\operatorname{cosec} \theta]$$

$$[\because \operatorname{cosec} (360 + \theta) = \operatorname{cosec} \theta]$$

$$[\because \operatorname{cosec} (-\theta) = -\operatorname{cosec} \theta]$$

$$[\because \sin 30^\circ = \frac{1}{2}]$$

प्रश्न 8.

$$\tan \left[\frac{19\pi}{3} \right]$$

हल :

$$\tan \frac{19\pi}{3} = \tan \left(6\pi + \frac{\pi}{3} \right)$$

$$= \tan \frac{\pi}{3}$$

$$= \tan 60 = \sqrt{3}.$$

$$[\because \tan (6\pi + \theta) = \tan \theta]$$

$$[\because \tan (\pi - \theta) = -\tan \theta]$$

प्रश्न 9.

$$\sin \left[\frac{-11\pi}{3} \right]$$

हल :

$$\sin \left(\frac{-11\pi}{3} \right) = -\sin \frac{11\pi}{3}$$

$$[\because \sin (-\theta) = -\sin \theta]$$

$$= -\sin \left(4\pi - \frac{\pi}{3} \right) \quad \because [\because \sin (n\pi \pm \theta) = \sin (\pm \theta)]$$

$$= -\sin \left(\frac{-\pi}{3} \right)$$

$$= \sin \frac{\pi}{3} \quad [\because \sin (-\theta) = -\sin \theta]$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2}$$

प्रश्न 10.

$\cot \left(\frac{-15\pi}{4} \right)$.

$$\text{हल :} \quad \cot \left(\frac{-15\pi}{4} \right) = -\cot \left(\frac{15\pi}{4} \right) \quad [\because \cot (-\theta) = -\cot \theta]$$

$$= -\cot \left(4\pi - \frac{\pi}{4} \right)$$

$$= -\cot \left(\frac{-\pi}{4} \right) \quad [\because \cot (2n\pi \pm \theta) = \cot (\pm \theta)]$$

$$= \cot \frac{\pi}{4} \quad [\because \cot (-\theta) = -\cot \theta]$$

$$= 1.$$

प्रश्नावली 3.3

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए : $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} - \tan^2 \frac{\pi}{4} = -\frac{1}{2}$.

हल : बायाँ पक्ष = $\sin^2 \frac{\pi}{6} + \cos^2 \frac{\pi}{3} - \tan^2 \frac{\pi}{4}$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 - 1^2 \quad \left(\because \sin \frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}, \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}, \tan \frac{\pi}{4} = 1\right)$$
$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} - 1 = -\frac{1}{2} = \text{दायाँ पक्ष।}$$

प्रश्न 2. सिद्ध कीजिए : $2 \sin^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2 \frac{7\pi}{6} \cos^2 \frac{\pi}{3} = \frac{3}{2}$.

हल : बायाँ पक्ष = $2 \sin^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec}^2 \frac{7\pi}{6} \cos^2 \frac{\pi}{3}$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \operatorname{cosec}^2 \left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) \times \left(\frac{1}{2}\right)^2$$
$$\left(\because \sin 30^\circ = \frac{1}{2}, \cos 60^\circ = \frac{1}{2}\right)$$
$$= \frac{2}{4} + \operatorname{cosec}^2 \frac{\pi}{6} \times \frac{1}{4} \quad [\because \operatorname{cosec}(\pi + \theta) = -\operatorname{cosec} \theta]$$
$$= \frac{1}{2} + 2^2 \times \frac{1}{2^2} \quad [\because \operatorname{cosec} 30^\circ = 2]$$
$$= \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} = \text{दायाँ पक्ष।}$$

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए : $\cot^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6} + 3 \tan^2 \frac{\pi}{6} = 6$.

हल : बायाँ पक्ष = $\cot^2 \frac{\pi}{6} + \operatorname{cosec} \frac{5\pi}{6} + 3 \tan^2 \frac{\pi}{6}$

$$= (\sqrt{3})^2 + \operatorname{cosec} \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) + 3 \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \right)^2$$

$$\left[\because \cot \frac{\pi}{6} = \sqrt{3}, \tan \frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} \right]$$

$$= 3 + \operatorname{cosec} \frac{\pi}{6} + 3 \times \frac{1}{3} \quad [\because \operatorname{cosec} (\pi - \theta) = \operatorname{cosec} \theta]$$

$$= 3 + 2 + 1 = 6 = \text{दायाँ पक्ष।}$$

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए : $2 \sin^2 \frac{3\pi}{4} + 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} + 2 \sec^2 \frac{\pi}{3} = 10$.

हल : बायाँ पक्ष = $2 \sin^2 \frac{3\pi}{4} + 2 \cos^2 \frac{\pi}{4} + 2 \sec^2 \frac{\pi}{3}$

$$= 2 \sin^2 \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) + 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + 2 \times (2)^2$$

$$\left(\because \cos \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}}, \sec \frac{\pi}{3} = 2 \right)$$

$$= 2 \sin^2 \frac{\pi}{4} + \frac{2}{2} + 2 \times 4 \quad [\because \sin (\pi - \theta) = \sin \theta]$$

$$= 2 \times \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^2 + \frac{2}{2} + 8$$

$$(\because \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}})$$

$$= \frac{2}{2} + 1 + 8$$

$$= 10 = \text{दायाँ पक्ष।}$$

प्रश्न 5.

मान ज्ञात कीजिए:

(i) $\sin (75^\circ)$

हल :

$$\sin (75^\circ) = \sin (45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \sin 45^\circ \cos 30^\circ + \cos 45^\circ \sin 30^\circ$$

$$[\because \sin (A + B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B]$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \frac{1}{2}$$

$$[\because \sin 45^\circ = \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}, \cos 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}, \sin 30^\circ = \frac{1}{2}]$$

$$= \frac{\sqrt{3} + 1}{2\sqrt{2}}$$

(ii) $\tan 15^\circ$

हल :

$$\tan 15^\circ = \tan (45^\circ - 30^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ - \tan 30^\circ}{1 + \tan 45^\circ \tan 30^\circ} \quad \left(\tan (A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B} \right)$$

$$= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 + 1 \times \frac{1}{\sqrt{3}}} \quad \left(\tan 45^\circ = 1, \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}} \right)$$

$$= \frac{\frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3}}}{\frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} + 1} \times \frac{\sqrt{3} - 1}{\sqrt{3} - 1}$$

$$= \frac{(\sqrt{3} - 1)^2}{3 - 1} = \frac{3 + 1 - 2\sqrt{3}}{2} = \frac{4 - 2\sqrt{3}}{2}$$

$$= 2 - \sqrt{3}$$

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए $\cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)=\sin(x+y)$.

हल : बायाँ पक्ष $= \cos\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\cos\left(\frac{\pi}{4}-y\right)-\sin\left(\frac{\pi}{4}-x\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-y\right)$

$$= \cos\left[\left(\frac{\pi}{4}-x\right)+\left(\frac{\pi}{4}-y\right)\right]$$

$$[\because \cos A \cos B - \sin A \sin B = \cos (A + B)]$$

$$= \cos\left(\frac{\pi}{2}-(x+y)\right)$$

$$= \sin(x+y) = \text{दायाँ पक्ष।}$$

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए : $\frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)} = \frac{(1 + \tan x)^2}{(1 - \tan x)^2}$.

हल : बायाँ पक्ष $\Rightarrow \frac{\tan\left(\frac{\pi}{4} + x\right)}{\tan\left(\frac{\pi}{4} - x\right)}$ अब $\tan(A + B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$

और $\tan(A - B) = \frac{\tan A - \tan B}{1 + \tan A \tan B}$ के प्रयोग से,

$$\begin{aligned} & \frac{\tan \frac{\pi}{4} + \tan x}{1 - \tan \frac{\pi}{4} \tan x} \\ &= \frac{\tan \frac{\pi}{4} - \tan x}{1 + \tan \frac{\pi}{4} \tan x} \\ &= \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \end{aligned}$$

$$\left(\because \tan \frac{\pi}{4} = 1 \right)$$

$$= \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} \times \frac{1 + \tan x}{1 - \tan x} = \frac{(1 + \tan x)^2}{(1 - \tan x)^2}$$

= दायाँ पक्ष।

प्रश्न 8. सिद्ध कीजिए : $\frac{\cos(\pi + x)\cos(-x)}{\sin(\pi - x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)} = \cot^2 x.$

हल : बायाँ पक्ष = $\frac{\cos(\pi + x)\cos(-x)}{\sin(\pi - x)\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right)}$

अब $\cos(\pi + x) = -\cos x$, $\cos(-x) = \cos x$

और $\sin(\pi - x) = \sin x$, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + x\right) = -\sin x$ के प्रयोग से,

$$\begin{aligned}\therefore \text{बायाँ पक्ष} &= \frac{-\cos x \times \cos x}{\sin x (-\sin x)} \\ &= \frac{\cos^2 x}{\sin^2 x} = \left(\frac{\cos x}{\sin x}\right)^2 \\ &= \cot^2 x = \text{दायाँ पक्ष।}\end{aligned}$$

प्रश्न 9. सिद्ध कीजिए : $\cos \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) \cos (2\pi + x) \left[\cot \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) + \cot (2\pi + x) \right] = 1.$

हल : बायाँ पक्ष = $\cos \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) \cos (2\pi + x) \left[\cot \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) + \cot (2\pi + x) \right]$

अब $\cos \left(\frac{3\pi}{2} + x \right) = \sin x$, $\cos (2\pi + x) = \cos x$,

$\cot \left(\frac{3\pi}{2} - x \right) = \tan x$ और $\cot (2\pi + x) = \cot x$

इन सबका मान रखने पर,

बायाँ पक्ष = $\sin x \cos x [\tan x + \cot x]$

= $\sin x \cos x \left[\frac{\sin x}{\cos x} + \frac{\cos x}{\sin x} \right]$

= $\sin x \cos x \left[\frac{\sin^2 x + \cos^2 x}{\sin x \cos x} \right]$

= 1 = दायाँ पक्ष

[$\because \sin^2 x + \cos^2 x = 1$]

प्रश्न 10.

सिद्ध कीजिए : $\sin (n + 1)x \sin (n + 2)x + \cos (n + 1)x \cos (n + 2)x = \cos x.$

हल :

बायाँ पक्ष = $\sin (n + 1)x \sin (n + 2)x + \cos (n + 1)x \cos (n + 2)x$

मान लीजिए $(n + 2)x = A$, $(n + 1)x = B$

= $\sin B \sin A + \cos B \cos A$

= $\cos A \cos B + \sin A \sin B$

= $\cos (A - B)$

= $\cos ((n + 2)x - (n + 1)x)$ [A और B के मान रख कर]

= $\cos (nx + 2x - nx - x)$

= $\cos x$ = दायाँ पक्ष

प्रश्न 11. सिद्ध कीजिए : $\cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right) = -\sqrt{2} \sin x$.

हल : बायाँ पक्ष = $\cos\left(\frac{3\pi}{4} + x\right) - \cos\left(\frac{3\pi}{4} - x\right)$

मान लो $\frac{3\pi}{4} + x = A, \frac{3\pi}{4} - x = B$

$$= \cos A - \cos B$$

$$= -2 \sin \frac{A+B}{2} \sin \frac{A-B}{2}$$

$$[\because \cos x - \cos y = -2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}]$$

A और B के मान रखने पर,

$$\begin{aligned} \text{बायाँ पक्ष} &= -2 \sin \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{4} + x + \frac{3\pi}{4} - x \right) \sin \frac{1}{2} \left(\frac{3\pi}{4} + x - \frac{3\pi}{4} - x \right) \\ &= -2 \sin \frac{3\pi}{4} \sin x \\ &= -2 \frac{1}{\sqrt{2}} \sin x \quad \left[\because \sin \frac{3\pi}{4} = \sin \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \right] \\ &= -\sqrt{2} \sin x \\ &= \text{दायाँ पक्ष।} \end{aligned}$$

प्रश्न 12.

सिद्ध कीजिए : $\sin^2 6x - \sin^2 4x = \sin 2x \sin 10x$

हल :

$$\text{बायाँ पक्ष} = \sin^2 6x - \sin^2 4x$$

$$= \sin(6x + 4x) \sin(6x - 4x)$$

(सूत्र $\sin^2 A - \sin^2 B = \sin(A + B) \sin(A - B)$ का प्रयोग करे]

$$\sin 10x \sin 2x$$

$$\sin 2x \sin 10x = \text{दाया पक्ष}$$

प्रश्न 13.

सिद्धि कीजिए : $\cos^2 2x - \cos^2 6x = \sin 4x \sin 8x$

हल :

$$\begin{aligned}\text{बायां पक्ष} &= \cos^2 2x - \cos^2 6x \\&= 1 - \sin^2 2x - (1 - \sin^2 6x) \\&= \sin^2 6x - \sin^2 2x \\&\sin^2 A - \sin^2 B = \sin (A + B) \sin (A - B) \\&= \sin^2 6x - \sin^2 2x \\&= \sin (6x + 2x) \sin (6x - 2x) \\&= \sin 8x \sin 4x \\&= \sin 4x \sin 8x = \text{दाया पक्ष}\end{aligned}$$

प्रश्न 14.

सिद्धि कीजिए : $\sin 2x + 2 \sin 4x + \sin 6x = 4 \cos^2 x \sin 4x$

हल :

$$\begin{aligned}\text{बायां पक्ष} &= \sin 2x + 2 \sin 4x + \sin 6x \\&= (\sin 2x + \sin 6x) + 2 \sin 4x \\&= 2 \sin 4x \cos 2x + 2 \sin 4x \\&= 2 \sin 4x (\cos 2x + 1) \\&= 2 \sin 4x (2 \cos^2 x - 1 + 1) \\&= 4 \sin 4x \cos^2 x \\&= 4 \cos^2 x \sin 4x = \text{दाया पक्ष}\end{aligned}$$

प्रश्न 15.

सिद्ध कीजिए : $\cot 4x (\sin 5x + \sin 3x) = \cot x (\sin 5x - \sin 3x)$

हल :

$$\text{बायाँ पक्ष} = \cot 4x (\sin 5x + \sin 3x)$$

$$= \cot 4x \cdot 2 \sin \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2}$$

$$\left[\because \sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \right]$$

$$= 2 \cdot \frac{\cos 4x}{\sin 4x} \sin 4x \cos x$$

$$= 2 \cos 4x \cos x$$

$$\text{दायाँ पक्ष} = \cot x (\sin 5x - \sin 3x)$$

$$= \frac{\cos x}{\sin x} \times 2 \sin x \cos 4x$$

$$= 2 \cos x \cos 4x$$

अतः

$$\text{बायाँ पक्ष} = \text{दायाँ पक्ष।}$$

प्रश्न 16. सिद्ध कीजिए : $\frac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x} = -\frac{\sin 2x}{\cos 10x}$

हल :

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\cos 9x - \cos 5x}{\sin 17x - \sin 3x}$$

$$= \frac{-2 \sin \frac{9x+5x}{2} \sin \frac{9x-5x}{2}}{2 \cos \frac{17x+3x}{2} \sin \frac{17x-3x}{2}}$$

$$\left[\begin{array}{l} \because \cos C - \cos D = -2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \\ \sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \end{array} \right]$$

$$= \frac{-\sin 7x \sin 2x}{\cos 10x \sin 7x} = -\frac{\sin 2x}{\cos 10x} = \text{दायाँ पक्ष।}$$

प्रश्न 17. सिद्ध कीजिए : $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \tan 4x$.

हल : बायाँ पक्ष = $\frac{\sin 5x + \sin 3x}{\cos 5x + \cos 3x} = \frac{2 \sin \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2}}{2 \cos \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2}}$

$$\left[\because \sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \right]$$

$$\text{और } \cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \left]$$

$$= \frac{\sin 4x \cos x}{\cos 4x \cos x}$$

$$= \tan 4x = \text{दायाँ पक्ष।}$$

प्रश्न 18. सिद्ध कीजिए : $\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \tan \frac{x-y}{2}$.

हल : बायाँ पक्ष = $\frac{\sin x - \sin y}{\cos x + \cos y} = \frac{2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2}}{2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2}}$

$$\left[\because \sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2} \right]$$

$$\left[\cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \right]$$

$$= \frac{\sin \frac{x-y}{2}}{\cos \frac{x-y}{2}}$$

$$= \tan \frac{x-y}{2}$$

$$= \text{दायाँ पक्ष।}$$

प्रश्न 19. सिद्ध कीजिए : $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \tan 2x$.

हल : बायाँ पक्ष = $\frac{\sin x + \sin 3x}{\cos x + \cos 3x} = \frac{2 \sin \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2}}{2 \cos \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2}}$

$$\left[\begin{array}{l} \because \sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \\ \cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \end{array} \right]$$

$$= \frac{\sin 2x \cos x}{\cos 2x \cos x}$$

$$= \tan 2x = \text{दायाँ पक्ष।}$$

प्रश्न 20. सिद्ध कीजिए : $\frac{\sin x - \sin 3x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = 2 \sin x$.

हल : बायाँ पक्ष = $\frac{\sin x - \sin 3x}{\sin^2 x - \cos^2 x} = \frac{-2 \cos \frac{3x+x}{2} \sin \frac{3x-x}{2}}{-(\cos^2 x - \sin^2 x)}$

$$\left[\begin{array}{l} \because \sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}, \\ \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x \end{array} \right]$$

$$= \frac{-2 \cos 2x \sin x}{-\cos 2x} = 2 \sin x = \text{दायाँ पक्ष।}$$

प्रश्न 21. सिद्ध कीजिए : $\frac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x} = \cot 3x$.

हल :

$$\text{बायाँ पक्ष} = \frac{\cos 4x + \cos 3x + \cos 2x}{\sin 4x + \sin 3x + \sin 2x}$$

$$= \frac{(\cos 4x + \cos 2x) + \cos 3x}{(\sin 4x + \sin 2x) + \sin 3x}$$

$$= \frac{2 \cos \frac{4x+2x}{2} \cos \frac{4x-2x}{2} + \cos 3x}{2 \sin \frac{4x+2x}{2} \cos \frac{4x-2x}{2} + \sin 3x}$$

$$\left[\begin{array}{l} \because \cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}, \\ \sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \end{array} \right]$$

$$= \frac{2 \cos 3x \cos x + \cos 3x}{2 \sin 3x \cos x + \sin 3x}$$

$$= \frac{\cos 3x(2 \cos x + 1)}{\sin 3x(2 \cos x + 1)}$$

$$= \frac{\cos 3x}{\sin 3x} = \cot 3x$$

= दायाँ पक्ष।

प्रश्न 22. सिद्ध कीजिए : $\cot x \cot 2x - \cot 2x \cot 3x - \cot 3x \cot x = 1$.

हल :

$$3x = x + 2x$$

$$\therefore \cot 3x = \cot (x + 2x) = \frac{\cot x \cot 2x - 1}{\cot x + \cot 2x}$$

दोनों पक्षों में $\cot x + \cot 2x$ से गुणा करने पर

$$\cot 3x (\cot x + \cot 2x) = \frac{\cot x \cot 2x - 1}{\cot x + \cot 2x} (\cot x + \cot 2x)$$

या $\cot 3x (\cot x + \cot 2x) = \cot x \cot 2x - 1$

या $\cot 3x \cot x + \cot 3x \cot 2x = \cot x \cot 2x - 1$

या $\cot 3x \cot x + \cot 3x \cot 2x - \cot x \cot 2x = -1$

या $\cot 3x \cot x - \cot 3x \cot 2x + \cot x \cot 2x = 1$

या $\cot x \cot 2x - \cot 2x \cot 3x - \cot 3x \cot x = 1$.

प्रश्न 23. सिद्ध कीजिए : $\tan 4x = \frac{4 \tan x (1 - \tan^2 x)}{1 - 6 \tan^2 x + \tan^4 x}$

हल : बायाँ पक्ष = $\tan 4x = \tan 2 (2x)$

$$= \frac{2 \tan 2x}{1 - \tan^2 2x}$$

$$\left[\because \tan 2A = \frac{2 \tan A}{1 - \tan^2 A} \right]$$

$\tan 2x$ का मान रखने पर

$$\tan 4x = \frac{2 \left(\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \right)}{1 - \left(\frac{2 \tan x}{1 - \tan^2 x} \right)^2} = \frac{\frac{4 \tan x}{1 - \tan^2 x}}{1 - \frac{4 \tan^2 x}{(1 - \tan^2 x)^2}}$$

$$= \frac{\frac{4 \tan x}{1 - \tan^2 x}}{\frac{(1 - \tan^2 x)^2 - 4 \tan^2 x}{(1 - \tan^2 x)^2}}$$

$$= \frac{4 \tan x (1 - \tan^2 x)}{(1 - \tan^2 x)^2 - 4 \tan^2 x}$$

$$= \frac{4 \tan x (1 - \tan^2 x)}{1 - 6 \tan^2 x + \tan^4 x}$$

$$= \text{दायाँ पक्ष।}$$

प्रश्न 24. सिद्ध कीजिए : $\cos 4x = 1 - 8 \sin^2 x \cos^2 x$

हल : बायाँ पक्ष = $\cos 4x = \cos 2(2x)$

$$(\because \cos 2A = 2 \cos^2 A - 1)$$

$$= 2 \cos^2 2x - 1$$

$$= 2 [2 \cos^2 x - 1]^2 - 1$$

$$= 2 [4 \cos^4 x - 4 \cos^2 x + 1] - 1$$

$$= 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x + 1$$

$$= 1 + 8 \cos^4 x - 8 \cos^2 x$$

$$= 1 + 8 \cos^2 x (\cos^2 x - 1)$$

$$= 1 - 8 \cos^2 x \sin^2 x$$

$$[\because 1 - \cos^2 x = \sin^2 x]$$

$$= \text{दायाँ पक्ष।}$$

प्रश्न 25. सिद्ध कीजिए : $\cos 6x = 32 \cos^6 x - 48 \cos^4 x + 18 \cos^2 x - 1$.

हल : बायाँ पक्ष = $\cos 6x = \cos 3(2x)$ $2x = A$ मान लिया

$$= \cos 3A = \cos (2A + A)$$

$$= \cos 2A \cos A - \sin 2A \sin A$$

$$= (2 \cos^2 A - 1) \cos A - 2 \sin A \cos A \sin A$$

$$\begin{aligned} & [\because \cos 2A = 2 \cos^2 A - 1, \\ & \sin 2A = 2 \sin A \cos A] \\ &= 2 \cos^3 A - \cos A - 2 \cos A (1 - \cos^2 A) \\ & [\because \sin^2 A = 1 - \cos^2 A] \\ &= 2 \cos^3 A - \cos A - 2 \cos A + 2 \cos^3 A \\ &= 4 \cos^3 A - 3 \cos A \\ &= 4 \cos^3 2x - 3 \cos 2x \quad [A \text{ का मान रखने पर}] \\ &= 4 (2 \cos^2 x - 1)^3 - 3 (2 \cos^2 x - 1) \quad (\because \cos 2x = 2 \cos^2 x - 1) \\ &= 4 [8 \cos^6 x - 12 \cos^4 x + 6 \cos^2 x - 1] - (6 \cos^2 x - 3) \\ &= 32 \cos^6 x - 48 \cos^4 x + 18 \cos^2 x - 1 \\ &= \text{दायाँ पक्ष।} \end{aligned}$$

प्रश्नावली 3.4

निम्नलिखित समीकरणों का मुख्य तथा व्यापक हल ज्ञात कीजिए (प्रश्न 1 से 4 तक):

प्रश्न 1.

$\tan x = \sqrt{3}$.

हल : $\tan x = \sqrt{3} = \tan \frac{\pi}{3} = \tan \left(\pi + \frac{\pi}{3} \right) = \tan \frac{4\pi}{3}$

$\therefore x$ के मुख्य मान = $\frac{\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}$

x का व्यापक हल = $n\pi + \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

प्रश्न 2.

$$\sec x = 2.$$

हल :

$$\sec x = 2 \text{ या } \cos x = \frac{1}{2} = \cos \frac{\pi}{3}$$

$$= \cos \left(2\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{5\pi}{3}$$

$$\therefore x \text{ के मुख्य मान} = \frac{\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

$$x \text{ का व्यापक हल} = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}.$$

प्रश्न 3.

$$\cot x = -\sqrt{3}.$$

हल :

$$\cot x = -\sqrt{3} \Rightarrow \tan x = -\frac{1}{\sqrt{3}} = -\tan \frac{\pi}{6}$$

$$= \tan \left(\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \tan \frac{5\pi}{6}$$

$$= \tan \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \tan \frac{11\pi}{6}$$

$$x \text{ के मुख्य मान} = \frac{5\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$x \text{ का व्यापक मान} = n\pi \pm \frac{5\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}.$$

प्रश्न 4.

$$\operatorname{cosec} x = -2.$$

हल :

$$\operatorname{cosec} x = -2 \text{ या } \sin x = -\frac{1}{2} = -\sin \frac{\pi}{6}$$

$$= \sin \left(\pi + \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{7\pi}{6}$$

$$= \sin \left(2\pi - \frac{\pi}{6} \right) = \sin \frac{11\pi}{6}$$

$$x \text{ के मुख्य मान} = \frac{7\pi}{6}, \frac{11\pi}{6}$$

$$x \text{ का व्यापक मान} = n\pi + (-1)^n \left(\frac{7\pi}{6} \right), n \in \mathbb{Z}.$$

निम्नलिखित में से प्रत्येक समीकरण का व्यापक हल ज्ञात कीजिए (प्रश्न 5 से 9 तक) :

प्रश्न 5.

$$\cos 4x = \cos 2x.$$

हल:

$$\cos 4x = \cos 2x$$

$$\cos 4x - \cos 2x = 0$$

$$- 2 \sin \frac{4x+2x}{2} \sin \frac{4x-2x}{2} = 0$$

$$\text{या} \quad \sin 3x \sin x = 0$$

(i) जब $\sin 3x = 0$, $3x$ का मुख्य मान $= 0$

$$\therefore 3x \text{ का व्यापक मान} = n\pi$$

$$\Rightarrow x = \frac{n\pi}{3}$$

(ii) जब $\sin x = 0$, x का मुख्य मान $= 0$

$$\therefore x \text{ का व्यापक मान} = n\pi$$

दिए हुए समीकरण का व्यापक हल $x = n\pi, \frac{n\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}$.

प्रश्न 6.

$$\cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0.$$

हल : $\cos 3x + \cos x - \cos 2x = 0$

या $2 \cos \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} - \cos 2x = 0$

या $2 \cos 2x \cos x - \cos 2x = 0$

$\Rightarrow \cos 2x (2 \cos x - 1) = 0$

(i) जब $\cos 2x = 0$, $2x = \frac{\pi}{2}$

$\therefore 2x$ का व्यापक मान $= (2\pi + 1) \frac{\pi}{2}$

$\therefore x = (2\pi + 1) \frac{\pi}{4}$

(ii) जब $2 \cos x - 1 = 0 \therefore \cos x = \frac{1}{2} = \cos 60^\circ = \cos \frac{\pi}{3}$

$$x = 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

\therefore दिए गए समीकरण का हल $= (2n + 1) \frac{\pi}{4}, 2n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in \mathbb{Z}.$

प्रश्न 7.

$$\sin 2x + \cos x = 0.$$

(ii) और जब $2 \sin x + 1 = 0$,

$$\begin{aligned}\sin x &= -\frac{1}{2} = \sin(-30) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{7\pi}{6}\end{aligned}$$

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$$

दिए गए समीकरण का व्यापक हल $= (2n+1)\frac{\pi}{2}, n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$.

(ii) और जब $2 \sin x + 1 = 0$,

$$\begin{aligned}\sin x &= -\frac{1}{2} = \sin(-30) = \sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) \\ &= -\sin\frac{\pi}{6} = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{6}\right) = \sin\frac{7\pi}{6}\end{aligned}$$

$$x = n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}$$

दिए गए समीकरण का व्यापक हल $= (2n+1)\frac{\pi}{2}, n\pi + (-1)^n \frac{7\pi}{6}, n \in \mathbb{Z}$.

प्रश्न 8.

$$\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$$

हल : $\sec^2 2x = 1 - \tan 2x$

या $1 + \tan^2 2x = 1 - \tan 2x$

$$[\because \sec^2 A = 1 + \tan^2 A]$$

या $\tan^2 2x + \tan 2x = 0$

या $\tan 2x (\tan 2x + 1) = 0$

$\therefore \tan 2x = 0$ या $\tan 2x + 1 = 0$

(i) जब $\tan 2x = 0$, $2x = n\pi$ या $x = \frac{n\pi}{2}$

(ii) जब $\tan 2x + 1 = 0$

$$\tan 2x = -1 = \tan \left(\pi - \frac{\pi}{4} \right) = \tan \frac{3\pi}{4}$$

$\therefore 2x = n\pi + \frac{3\pi}{4}$

या $x = \frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}$

दिए हुए समीकरण का व्यापक हल = $\frac{n\pi}{2}, \frac{n\pi}{2} + \frac{3\pi}{8}, n \in \mathbb{Z}$.

प्रश्न 9.

$$\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$$

हल : $\sin x + \sin 3x + \sin 5x = 0$

या $(\sin 5x + \sin x) + \sin 3x = 0$

या $2 \sin \frac{5x+x}{2} \cos \frac{5x-x}{2} + \sin 3x = 0$ $[\because \sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2}]$

या $2 \sin 3x \cos 2x + \sin 3x = 0$

या $\sin 3x (2 \cos 2x + 1) = 0$

$\Rightarrow \sin 3x = 0$

या $2 \cos 2x + 1 = 0$

जब $\sin 3x = 0 = \sin 0^\circ, 3x = n\pi$ या $x = \frac{n\pi}{3}$.

और जब $2 \cos 2x + 1 = 0, \cos 2x = -\frac{1}{2} = \cos \left(\pi - \frac{\pi}{3} \right) = \cos \frac{2\pi}{3}$

$$2x = 2n\pi \pm \frac{2\pi}{3}$$

या $x = n\pi \pm \frac{\pi}{3}$.

अतः हल होगा : $x = n\pi/3$ या $n\pi \pm \frac{\pi}{3}, n \in Z$.

अध्याय 3 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. सिद्ध कीजिए : $2 \cos \frac{\pi}{13} \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} = 0$.

हल : बायाँ पक्ष = $2 \cos \frac{\pi}{13} \cos \frac{9\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13}$

$$= \cos \frac{10\pi}{13} + \cos \frac{8\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13}$$

$$[\because 2 \cos A \cos B = \cos (A+B) + \cos (A-B)]$$

$$= \left(\cos \frac{10\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} \right) + \left(\cos \frac{8\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} \right)$$

$$= \left[\cos \left(\pi - \frac{3\pi}{13} \right) + \left(\cos \frac{3\pi}{13} \right) \right] + \left[\cos \left(\pi - \frac{5\pi}{13} \right) + \cos \frac{5\pi}{13} \right]$$

$$= \left(-\cos \frac{3\pi}{13} + \cos \frac{3\pi}{13} \right) + \left(-\cos \frac{5\pi}{13} + \cos \frac{5\pi}{13} \right)$$

$$= 0 = \text{दायाँ पक्ष।}$$

प्रश्न 2.

सिद्ध कीजिए : $(\sin 3x + \sin x) \sin x + (\cos 3x - \cos x) \cos x = 0$.

हल :

$$\begin{aligned}\text{बायाँ पक्ष} &= (\sin 3x + \sin x) \sin x + (\cos 3x - \cos x) \cos x \\&= \sin 3x \sin x + \sin^2 x + \cos 3x \cos x - \cos^2 x \\&= (\cos 3x \cos x + \sin 3x \sin x) - (\cos^2 x - \sin^2 x) \\&= \cos 2x - \cos 2x \quad [\cos (A - B) = \cos A \cos B + \sin A \sin B] \\&= 0 \\&= \text{दायाँ पक्ष।}\end{aligned}$$

प्रश्न 3. सिद्ध कीजिए : $(\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4 \cos^2 \frac{x+y}{2}$.

हल :

$$\text{बायाँ पक्ष} = (\cos x + \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2$$

$$= \left(2 \cos \frac{x+y}{2} \cos \frac{x-y}{2} \right)^2 + \left(2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right)^2$$

$$[\because \cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \text{ और}$$

$$\sin C - \sin D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \sin \frac{C-D}{2}]$$

$$= 4 \cos^2 \frac{x+y}{2} \left[\cos^2 \frac{x-y}{2} + \sin^2 \frac{x-y}{2} \right]$$

$$= 4 \cos^2 \frac{x+y}{2} \quad [\because \cos^2 \frac{x-y}{2} + \sin^2 \frac{x-y}{2} = 1]$$

$$= \text{दायाँ पक्ष।}$$

प्रश्न 4. सिद्ध कीजिए : $(\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2 = 4 \sin^2 \frac{x-y}{2}$.

हल :

$$\text{बायाँ पक्ष} = (\cos x - \cos y)^2 + (\sin x - \sin y)^2$$

$$= \left(-2 \sin \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right)^2 + \left(2 \cos \frac{x+y}{2} \sin \frac{x-y}{2} \right)^2$$

$$= 4 \sin^2 \frac{x+y}{2} \sin^2 \frac{x-y}{2} + 4 \cos^2 \frac{x+y}{2} \sin^2 \frac{x-y}{2}$$

$$= 4 \sin^2 \frac{x-y}{2} \left[\sin^2 \frac{x+y}{2} + \cos^2 \frac{x+y}{2} \right]$$

$$= 4 \sin^2 \frac{x-y}{2} \quad [\because \sin^2 \frac{x+y}{2} + \cos^2 \frac{x+y}{2} = 1]$$

$$= \text{दायाँ पक्ष।}$$

$$= 2 \sin 4x \left(2 \cos \frac{3x+x}{2} \cos \frac{3x-x}{2} \right)$$

$$\left[\because \cos C + \cos D = 2 \cos \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \right]$$

$$= 4 \sin 4x \cos 2x \cos x$$

$$= 4 \cos x \cos 2x \sin 4x$$

$$= \text{दायाँ पक्ष।}$$

प्रश्न 5. सिद्ध कीजिए : $\sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x = 4 \cos x \cos 2x \sin 4x$.

हल :

$$\text{बायाँ पक्ष} = \sin x + \sin 3x + \sin 5x + \sin 7x$$

$$= (\sin 7x + \sin x) + (\sin 5x + \sin 3x)$$

$$= 2 \sin \frac{7x+x}{2} \cos \frac{7x-x}{2} + 2 \sin \frac{5x+3x}{2} \cos \frac{5x-3x}{2}$$

$$\left[\because \sin C + \sin D = 2 \sin \frac{C+D}{2} \cos \frac{C-D}{2} \right]$$

$$= 2 \sin 4x \cos 3x + 2 \sin 4x \cos x$$

$$= 2 \sin 4x (\cos 3x + \cos x)$$

प्रश्न 6. सिद्ध कीजिए : $\frac{(\sin 7x + \sin 5x) + (\sin 9x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 9x + \cos 3x)} = \tan 6x$.

हल : बायाँ पक्ष = $\frac{(\sin 7x + \sin 5x) + (\sin 9x + \sin 3x)}{(\cos 7x + \cos 5x) + (\cos 9x + \cos 3x)}$

$$\begin{aligned} &= \frac{2 \sin \frac{7x+5x}{2} \cos \frac{7x-5x}{2} + 2 \sin \frac{9x+3x}{2} \cos \frac{9x-3x}{2}}{2 \cos \frac{7x+5x}{2} \cos \frac{7x-5x}{2} + 2 \cos \frac{9x+3x}{2} \cos \frac{9x-3x}{2}} \\ &= \frac{2[\sin 6x \cos x + \sin 6x \cos 3x]}{2[\cos 6x \cos x + \cos 6x \cos 3x]} \\ &= \frac{\sin 6x[\cos x + \cos 3x]}{\cos 6x[\cos x + \cos 3x]} = \tan 6x = \text{दायाँ पक्ष।} \end{aligned}$$

प्रश्न 7. सिद्ध कीजिए : $\sin 3x + \sin 2x - \sin x = 4 \sin x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2}$.

हल : बायाँ पक्ष = $\sin 3x + (\sin 2x - \sin x)$

$$\begin{aligned} &= 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \cos \frac{2x+x}{2} \sin \frac{2x-x}{2} \\ &\quad \left[\because \sin A = 2 \sin \frac{A}{2} \cos \frac{A}{2} \right] \\ &= 2 \sin \frac{3x}{2} \cos \frac{3x}{2} + 2 \cos \frac{3x}{2} \sin \frac{x}{2} \\ &= 2 \cos \frac{3x}{2} \left[\sin \frac{3x}{2} + \sin \frac{x}{2} \right] \\ &= 2 \cos \frac{3x}{2} \left[2 \sin \frac{\frac{3x}{2} + \frac{x}{2}}{2} \cos \frac{\frac{3x}{2} - \frac{x}{2}}{2} \right] \\ &= 2 \cos \frac{3x}{2} \left[2 \sin x \cos \frac{x}{2} \right] = 4 \sin x \cos \frac{x}{2} \cos \frac{3x}{2} \\ &= \text{दायाँ पक्ष।} \end{aligned}$$

निम्नलिखित प्रत्येक प्रश्न में $\sin \frac{x}{2}$, $\cos \frac{x}{2}$ और $\tan \frac{x}{2}$ ज्ञात कीजिए।

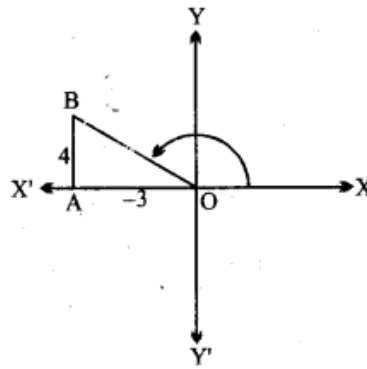
प्रश्न 8.

$\tan x = \frac{-4}{3}$, x द्वितीय चतुर्थांश में हैं।

हल : $\because x$ दूसरे चतुर्थांश में है, $\therefore \frac{x}{2}$ पहले चतुर्थांश में है इसलिए $\sin \frac{x}{2}$, $\cos \frac{x}{2}$ और $\tan \frac{x}{2}$ धनात्मक होंगे।

$$\therefore 0 < \frac{x}{2} < 90^\circ$$

$$\tan x = -\frac{4}{3}$$



यहाँ $AB = 4$ इकाई $\therefore OA = -3$ इकाई

और

$$OB^2 = \sqrt{AB^2 + OA^2} = \sqrt{16 + 9} = 5$$

$$OA = -3 \text{ (OX' की दिशा में है।)}$$

$$AB = 4 \text{ (OY' की दिशा में है।)}$$

अतः

$$OA = -3, AB = 4, OB = 5$$

$$\cos x = -\frac{3}{5}$$

$$\sin \frac{x}{2} = + \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{2}} = \sqrt{\frac{8}{10}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{5}} = \frac{2}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{5}}{5}$$

$$\cos \frac{x}{2} = + \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 - \frac{3}{5}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{2}{10}} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5}$$

$$\tan \frac{x}{2} = + \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{3}{5}}{1 - \frac{3}{5}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{8}{5}}{\frac{2}{5}}} = \sqrt{\frac{8}{2}} = \sqrt{4} = 2$$

$$\text{अतः } \sin \frac{x}{2} = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{5}}{5} \text{ और } \tan \frac{x}{2} = 2.$$

प्रश्न 9.

$\cos x = \frac{-1}{2}$, x तृतीय चतुर्थांश में है।

हल : x , तीसरे चतुर्थांश में है।

अर्थात्

$$180^\circ < x < 270^\circ$$

$$90^\circ < \frac{x}{2} < 135^\circ$$

$\Rightarrow \frac{x}{2}$ दूसरे चतुर्थांश में है।

$\therefore \sin \frac{x}{2} =$ धनात्मक है, $\cos \frac{x}{2} =$ ऋणात्मक है, $\tan \frac{x}{2} =$ ऋणात्मक है।

जब $\cos x = -\frac{1}{3}$

$$\sin \frac{x}{2} = + \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{1}{3}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{4}{6}} = \sqrt{\frac{2}{3}} = \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{3}}{3} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

$$\cos \frac{x}{2} = - \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = - \sqrt{\frac{1 - \frac{1}{3}}{2}}$$

$$= - \sqrt{\frac{2}{3}} = - \sqrt{\frac{1}{3}} = - \frac{1}{\sqrt{3}} = - \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$\tan \frac{x}{2} = -\sqrt{\frac{1-\cos x}{1+\cos x}} = -\sqrt{\frac{1+\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}}} \\ = -\sqrt{\frac{\frac{4}{3}}{\frac{2}{3}}} = -\sqrt{\frac{4}{2}} = -\sqrt{2}$$

अतः $\sin \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{6}}{3}$, $\cos \frac{x}{2} = \frac{-\sqrt{3}}{3}$ और $\tan \frac{x}{2} = -\sqrt{2}$.

प्रश्न 10.

$\sin x = \frac{1}{4}$, x द्वितीय चतुर्थांश में है।

हल : x , दूसरे चतुर्थांश में है

$$\Rightarrow 90^\circ < x < 180^\circ$$

2 से भाग देने पर $45^\circ < \frac{x}{2} < 90^\circ$

$$\Rightarrow \frac{x}{2} \text{ पहले चतुर्थांश में है}$$

$\therefore \sin \frac{x}{2}, \cos \frac{x}{2}, \tan \frac{x}{2}$ तीनों ही धनात्मक हैं।

$$\sin x = \frac{1}{4}, \cos x = -\sqrt{1-\sin^2 x} = -\sqrt{1-\frac{1}{16}} = -\frac{\sqrt{15}}{4}$$

[x दूसरे चतुर्थांश में है]

$$\sin \frac{x}{2} = + \sqrt{\frac{1 - \cos x}{2}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{15}}{4}}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{\sqrt{15} + 4}{8}} = \sqrt{\frac{(\sqrt{15} + 4)2}{16}}$$

$$= \sqrt{\frac{2\sqrt{15} + 8}{4}}$$

$$\cos \frac{x}{2} = + \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}}$$

$$= \sqrt{\frac{1 - \frac{\sqrt{15}}{4}}{2}} = \sqrt{\frac{4 - \sqrt{15}}{8}}$$

$$= \sqrt{\frac{(4 - \sqrt{15})^2}{16}} = \sqrt{\frac{8 - 2\sqrt{15}}{4}}.$$

$$\tan \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x}} = \sqrt{\frac{1 + \frac{\sqrt{15}}{4}}{1 - \frac{\sqrt{15}}{4}}}$$

$$= \sqrt{\frac{\frac{4 + \sqrt{15}}{4}}{\frac{4 - \sqrt{15}}{4}}} = \sqrt{\frac{4 + \sqrt{15}}{4 - \sqrt{15}}}$$

$$= \sqrt{\frac{4 + \sqrt{15}}{4 - \sqrt{15}}} \times \sqrt{\frac{4 + \sqrt{15}}{4 + \sqrt{15}}}$$

$$= \sqrt{\frac{(4 + \sqrt{15})^2}{16 - 15}}$$

$$= 4 + \sqrt{15}.$$

अतः

$$\sin \frac{x}{2} = \sqrt{\frac{2\sqrt{15} + 8}{4}}, \cos \frac{x}{2} = \frac{\sqrt{8 - 2\sqrt{15}}}{4} \text{ और } \tan \frac{x}{2} = 4 + \sqrt{15}.$$