

Chapter-8 द्विपद प्रमेय

प्रश्नावली 8.1

प्रश्न 1 से 5 तक प्रत्येक व्यंजक को प्रसार ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1.

$$(1 - 2x)^5$$

हल :

$$\begin{aligned}(1 - 2x)^5 &= {}^5C_0 \cdot 1^5 + {}^5C_1 \cdot 1^4 \cdot (-2x) + {}^5C_2 \cdot 1^3 \cdot (-2x)^2 + {}^5C_3 \cdot 1^2 \cdot (-2x)^3 \\&\quad + {}^5C_4 \cdot 1^1 \cdot (-2x)^4 + {}^5C_5 \cdot 1^0 \cdot (-2x)^5 \\&= 1 + 5(-2x) + 10 \cdot 4x^2 + 10 \cdot (-8x^3) + 5 \cdot (-2x)^4 + 1 \cdot (-2x)^5 \\&= 1 - 10x + 40x^2 - 80x^3 + 80x^4 - 32x^5.\end{aligned}$$

प्रश्न 2. $\left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5$

$$\begin{aligned}\text{हल : } \left(\frac{2}{x} - \frac{x}{2}\right)^5 &= \left(\frac{2}{x}\right)^5 + {}^5C_1 \left(\frac{2}{x}\right)^4 \left(-\frac{x}{2}\right) + {}^5C_2 \left(\frac{2}{x}\right)^3 \left(-\frac{x}{2}\right)^2 \\&\quad + {}^5C_3 \left(\frac{2}{x}\right)^2 \left(-\frac{x}{2}\right)^3 + {}^5C_4 \left(\frac{2}{x}\right)^1 \left(-\frac{x}{2}\right)^4 + \left(-\frac{x}{2}\right)^5 \\&= \frac{32}{x^5} + 5 \cdot \frac{16}{x^4} \left(-\frac{x}{2}\right) + 10 \cdot \frac{8}{x^3} \cdot \frac{x^2}{4} + 10 \cdot \frac{4}{x^2} \left(-\frac{x^3}{8}\right) + 5 \cdot \frac{2}{x} \left(\frac{x^4}{16}\right) + \left(-\frac{x^5}{32}\right) \\&= \frac{32}{x^5} - \frac{40}{x^3} + \frac{20}{x} - 5x + \frac{5}{8} \cdot x^3 - \frac{x^5}{32}.\end{aligned}$$

प्रश्न 3.

$$(2x - 3)^6$$

हल :

$$\begin{aligned}(2x - 3)^6 &= (2x)^6 + {}^6C_1 (2x)^5 (-3) + {}^6C_2 (2x)^4 (-3)^2 + {}^6C_3 (2x)^3 (-3)^3 + {}^6C_4 (2x)^2 (-3)^4 \\&\quad + {}^6C_5 (2x)^1 (-3)^5 + (-3)^6 \\&= 64x^6 + 6.32x^5 (-3) + 15.16x^4.9 + 20.8x^3 (-27) \\&\quad + 15.4x^2.81 + 6.2x (-243) + 729 \\&= 64x^6 - 576x^5 + 2160x^4 - 4320x^3 + 4860x^2 - 2916x + 729.\end{aligned}$$

प्रश्न 4. $\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5$

हल :

$$\begin{aligned}\left(\frac{x}{3} + \frac{1}{x}\right)^5 &= \left(\frac{x}{3}\right)^5 + {}^5C_1 \left(\frac{x}{3}\right)^4 \left(\frac{1}{x}\right) + {}^5C_2 \left(\frac{x}{3}\right)^3 \left(\frac{1}{x}\right)^2 \\&\quad + {}^5C_3 \left(\frac{x}{3}\right)^2 \left(\frac{1}{x}\right)^3 + {}^5C_4 \left(\frac{x}{3}\right) \left(\frac{1}{x}\right)^4 + {}^5C_5 \left(\frac{1}{x}\right)^5 \\&= \frac{x^5}{243} + 5 \cdot \frac{x^4}{81} \cdot \frac{1}{x} + 10 \cdot \frac{x^3}{27} \cdot \frac{1}{x^2} + 10 \cdot \frac{x^2}{9} \cdot \frac{1}{x^3} + 5 \cdot \frac{x}{3} \cdot \frac{1}{x^4} + \frac{1}{x^5} \\&= \frac{x^5}{243} + \frac{5x^3}{81} + \frac{10}{27}x + \frac{10}{9} \cdot \frac{1}{x} + \frac{5}{3} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5}.\end{aligned}$$

प्रश्न 5. $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6$.

हल : $\left(x + \frac{1}{x}\right)^6 = x^6 + {}^6C_1 x^5 \left(\frac{1}{x}\right) + {}^6C_2 x^4 \left(\frac{1}{x}\right)^2 + {}^6C_3 x^3 \left(\frac{1}{x}\right)^3$
 $+ {}^6C_4 x^2 \left(\frac{1}{x}\right)^4 + {}^6C_5 x \left(\frac{1}{x}\right)^5 + \left(\frac{1}{x}\right)^6$

$$= x^6 + 6 \cdot x^5 \cdot \frac{1}{x} + 15 \cdot x^4 \cdot \frac{1}{x^2} + 20 \cdot x^3 \cdot \frac{1}{x^3} + 15 \cdot x^2 \cdot \frac{1}{x^4} + 6 \cdot x \cdot \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^6}.$$

$$= x^6 + 6x^4 + 15x^2 + 20 + \frac{15}{x^2} + \frac{6}{x^4} + \frac{1}{x^6}.$$

प्रश्न : द्विपद प्रमेय का प्रयोग करके निम्नलिखित का मान ज्ञात कीजिए (प्रश्न 6 से 9 तक)

प्रश्न 6.

$$(96)^3$$

हल : $(96)^3 = (100 - 4)^3 = (100)^3 + {}^3C_1 (100)^2 (-4) + {}^3C_2 (100)^1 (-4)^2 + (-4)^3$
 $= 1000000 + 3 \times 10000 (-4) + 3 \times 100 \times 16 - 64$
 $= 1000000 - 120000 + 4800 - 64 = 884736.$

प्रश्न 7.

$$(102)^5$$

हल : $(102)^5 = (100 + 2)^5$
 $= (100)^5 + {}^5C_1 (100)^4 \times 2 + {}^5C_2 (100)^3 2^2$
 $+ {}^5C_3 (100)^2 \times 2^3 + {}^5C_4 (100) \times 2^4 + 2^5$
 $= 10000000000 + 5 \times 100000000 \times 2$
 $+ 10 \times 1000000 \times 4 + 10 \times 10000 \times 8 + 5 \times 100 \times 16 + 32$
 $= 10000000000 + 1000000000 + 40000000 + 800000 + 8000 + 32$
 $= 11040808032.$

प्रश्न 8.

$$(101)^4$$

हल :

$$\begin{aligned}(101)^4 &= (100 + 1)^4 \\&= (100)^4 + {}^4C_1 \times (100)^3 \times 1 + {}^4C_2 \times (100)^2 \times 1^2 \\&\quad + {}^4C_3 \times (100) \times 1^3 + 1^4 \\&= 100000000 + 4 \times 1000000 + 6 \times 10000 + 400 + 1 \\&= 100000000 + 4000000 + 60000 + 400 + 1 \\&= 104060401.\end{aligned}$$

प्रश्न 9.

$$(99)^5$$

हल :

$$\begin{aligned}(99)^5 &= (100 - 1)^5 \\&= (100)^5 + {}^5C_1 \times (100)^4 \times (-1) \\&\quad + {}^5C_2 \times (100)^3 \times (-1)^2 + {}^5C_3 \times (100)^2 \times (-1)^3 \\&\quad + {}^5C_4 \times (100) \times (-1)^4 + (-1)^5 \\&= 10000000000 - 5 \times 100000000 \\&\quad + 10 \times 1000000 - 10 \times 10000 + 5 \times 100 - 1 \\&= 10000000000 - 500000000 + 10000000 - 100000 + 500 - 1 \\&= 9509900499.\end{aligned}$$

प्रश्न 10.

द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हुए बताइए कौन-सी संख्या बड़ी है-

$$(1.1)^{10000} \text{ या } 1000$$

हल :

$$\begin{aligned}(1.1)^{10000} &= (1 + 0.1)^{10000} \\&= 1^{10000} + {}^{10000}C_1 \times 1^{9999} (0.1)^1 \\&= 1 + 10000 \times (0.1) + \dots = 1001 + \dots\end{aligned}$$

स्पष्ट है कि $(1.1)^{10000}$ संख्या 1000 से बड़ी है।

प्रश्न 11.

$(a + b)^4 - (a - b)^4$ का विस्तार कीजिए। इसका प्रयोग करके $(\sqrt{3} + \sqrt{2})^4 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4$ का मान

ज्ञात कीजिए।

हल :
$$(a + b)^4 = a^4 + {}^4C_1 a^3 b + {}^4C_2 a^2 b^2 + {}^4C_3 ab^3 + b^4$$
$$= a^4 + 4a^3 b + 6a^2 b^2 + 4ab^3 + b^4$$

इसी प्रकार

$$(a - b)^4 = a^4 - 4a^3 b + 6a^2 b^2 - 4ab^3 + b^4$$

घटाने पर

$$(a + b)^4 - (a - b)^4 = 2(4a^3 b + 4ab^3)$$
$$= 8ab(a^2 + b^2)$$

इसमें $a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$ रखने पर

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^4 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^4 = 8\sqrt{3} \cdot \sqrt{2}[(\sqrt{3})^2 + (\sqrt{2})^2] = 8\sqrt{6}(3 + 2) = 40\sqrt{6}.$$

प्रश्न 12.

$(x + 1)^6 + (x - 1)^6$ का मान ज्ञात कीजिए। इसका प्रयोग करके या अन्यथा $(\sqrt{2} + 1)^6 + (\sqrt{2} - 1)^6$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :
$$(x + 1)^6 = x^6 + {}^6C_1 x^5 \cdot 1 + {}^6C_2 x^4 \times 1^2 + {}^6C_3 x^3 \times 1^3 + {}^6C_4 x^2 \cdot 1^4 + {}^6C_5 x \cdot 1^5 + 1^6$$
$$= x^6 + 6x^5 + 15x^4 + 20x^3 + 15x^2 + 6x + 1$$

इसी प्रकार
$$(x - 1)^6 = x^6 - 6x^5 + 15x^4 - 20x^3 + 15x^2 - 6x + 1$$

जोड़ने पर
$$(x + 1)^6 + (x - 1)^6 = 2(x^6 + 15x^4 + 15x^2 + 1)$$

इसमें $x = \sqrt{2}$ रखने पर

$$(\sqrt{2} + 1)^6 + (\sqrt{2} - 1)^6 = 2 \left[(\sqrt{2})^6 + 15(\sqrt{2})^4 + 15(\sqrt{2})^2 + 1 \right]$$
$$= 2 [8 + 15 \times 4 + 15 \times 2 + 1]$$
$$= 2 [8 + 60 + 30 + 1]$$
$$= 2 \times 99$$
$$= 198.$$

प्रश्न 13.

दिखाइए कि $9^{n+1} - 8n - 9$, 64 से विभाज्य है जहाँ n एक धन पूर्णांक है।

हल : $(1+x)^{n+1}$ का प्रसार करने पर,

$$(1+x)^{n+1} = 1 + {}^{n+1}C_1 x + {}^{n+1}C_2 x^2 + {}^{n+1}C_3 x^3 + \dots$$

$x = 8$ रखने पर,

$$9^{n+1} = 1 + (n+1) \cdot 8 + {}^{n+1}C_2 \times 64 + {}^{n+1}C_3 8^3 + \dots$$

$$= 8n + 9 + {}^{n+1}C_2 \times 64 + {}^{n+1}C_3 8^3 + \dots$$

$$\therefore 9^{n+1} - 8n - 9 = 64 \times ({}^{n+1}C_2 + {}^{n+1}C_3 \cdot 8 + \dots)$$

अतः $9^{n+1} - 8n - 9$, संख्या 64 से विभाज्य है।

प्रश्न : 14. सिद्ध कीजिए कि $\sum_{r=0}^n 3^r \cdot {}^nC_r = 4^n$.

$$\text{हल : } \sum_{r=0}^n 3^r \cdot {}^nC_r = 3^0 {}^nC_0 + 3^1 {}^nC_1 + 3^2 {}^nC_2 + \dots + 3^n \cdot {}^nC_n$$

$$= 1 + {}^nC_1 \cdot 3 + {}^nC_2 \cdot 3^2 + \dots + {}^nC_n \cdot 3^n$$

$$= (1+3)^n = 4^n.$$

प्रश्नावली 8.2

प्रश्न 1 और 2 में गुणांक ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1.

$(x + 3)^8$ में x^5 का।

हल : $(x + 3)^8$ का व्यापक पद $= {}^8C_r x^{8-r} \cdot 3^r$

$$x^{8-r} = x^5$$

अर्थात् $8 - r = 5$ या $r = 3$

$\therefore x^5$ का गुणांक $= {}^8C_3 (3)^3$

$$= \frac{8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3} \times 27$$

$$= 56 \times 27 = 1512.$$

प्रश्न 2.

$(a - 2b)^{12}$ में $a^5 b^7$ का।

हल : $(a - 2b)^{12}$ का व्यापक पद $= {}^{12}C_r a^{12-r} (-2b)^r$
 $= {}^{12}C_r a^{12-r} (-1)^r \cdot 2^r b^r$

$\therefore b^r = b^7$

$\therefore r = 7$

अब $r = 7$ रखने पर,
 $= {}^{12}C_7 \cdot a^{12-7} \cdot (-1)^7 \cdot 2^7 \cdot b^7$
 $= a^5 b^7 \cdot {}^{12}C_7 (-1) \cdot 2^7$

$\therefore a^5 b^7$ का गुणांक $= - {}^{12}C_7 \cdot 2^7 = - {}^{12}C_5 \cdot 2^7$

$$= - \frac{12 \times 11 \times 10 \times 9 \times 8}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \cdot 128 = - 101376.$$

प्रश्न 3 व 4 के प्रसार में व्यापक पद लिखिए।

प्रश्न 3.

$$(x^2 - y)^6.$$

हल : $(x^2 - y)^6$ का व्यापक पद

$$\begin{aligned} &= {}^6C_r (x^2)^{6-r} (-y)^r \\ &= (-1)^r {}^6C_r x^{12-2r} y^r. \end{aligned}$$

प्रश्न 4.

$$(x^2 + yx)^{12}, x \neq 0.$$

हल : $(x^2 - yx)^{12}$ का व्यापक पद

$$\begin{aligned} &= {}^{12}C_r (x^2)^{12-r} (-yx)^r \\ &= {}^{12}C_r x^{24-2r} (-1)^r y^r x^r \\ &= (-1)^r {}^{12}C_r x^{24-r} y^r. \end{aligned}$$

प्रश्न 5.

$(x - 2y)^{12}$ के प्रसार में चौथा पद ज्ञात कीजिए।

हल : $(x - 2y)^{12}$ का चौथा पद

$$\begin{aligned} &= T_{3+1} = {}^{12}C_3 x^{12-3} (-2y)^3 \\ &= \frac{12 \times 11 \times 10}{1 \times 2 \times 3} \times x^9 (-1)^3 \cdot 2^3 y^3 \\ &= -220 \times 8 x^9 y^3 = -1760 x^9 y^3. \end{aligned}$$

प्रश्न 6. $\left(9x - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ के प्रसार में 13वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : $\left(9x - \frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{18}$ के प्रसार में 13वाँ पद

$$T_{12+1} = {}^{18}C_{12} (9x)^{18-12} \left(-\frac{1}{3\sqrt{x}}\right)^{12}$$

$$= {}^{18}C_{12} 9^6 \times x^6 \times \frac{(-1)^{12}}{3^{12} (\sqrt{x})^{12}}$$

$$= \frac{18 \times 17 \times 16 \times 15 \times 14 \times 13}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} \times \frac{3^{12} \times x^6}{3^{12} \times x^6}$$

$$= 18564.$$

प्रश्न 7 व 8 के प्रसारों में मध्य पद ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 7. $\left(3 - \frac{x^3}{6}\right)^7$

हल : $\left(3 - \frac{x^3}{6}\right)^7$ में $7 + 1 = 8$ पद हैं

$$\begin{aligned}\therefore \text{पहला मध्य पद, } T_4 = T_{3+1} &= \frac{8}{2} \text{वाँ पद} = 4\text{वाँ पद} = {}^7C_3 \cdot 3^{7-3} \left(-\frac{x^3}{6}\right)^3 \\ &= \frac{7 \times 6 \times 5}{1 \times 2 \times 3} 3^4 (-1)^3 \cdot \frac{x^9}{6^3} \\ &= -35 \frac{3^4 x^9}{2^3 \cdot 3^3} \\ &= -\frac{35 \times 3 \times x^9}{8} \\ &= -\frac{105x^9}{8}\end{aligned}$$

दूसरा मध्य पद, $T_5 = T_{4+1} = (4 + 1)$ वाँ पद = 5वाँ पद

$$\begin{aligned}&= {}^7C_4 \cdot 3^{7-4} \left(-\frac{x^3}{6}\right)^4 \\ &= {}^7C_4 \cdot 3^3 (-1)^4 \frac{x^{12}}{6^4} \\ &= \frac{7 \times 6 \times 5 \times 4!}{1 \times 2 \times 3 \times 4!} \times \frac{3^3 \times x^{12}}{2^4 \times 3^4} \\ &= \frac{35 \times x^{12}}{16 \times 3} = \frac{35}{48} x^{12}.\end{aligned}$$

प्रश्न 8 $\left(\frac{x}{3} + 9y\right)^{10}$.

हल : इसमें $10 + 1 = 11$ पद हैं जो विषम संख्या है।

$$\text{मध्य पद} = \frac{11+1}{2} = 6 \text{ वाँ पद}$$

$$= {}^{10}C_5 \left(\frac{x}{3}\right)^5 (9y)^5$$

$$= \frac{10 \times 9 \times 8 \times 7 \times 6}{1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5} \cdot \frac{x^5}{3^5} \cdot 9^5 \cdot y^5$$

$$= 252 \cdot \frac{3^{10}}{3^5} \cdot x^5 y^5$$

$$= 252 \times 243 x^5 y^5$$

$$= 61236 x^5 y^5.$$

प्रश्न 9.

$(1 + a)^{m+n}$ के प्रसार में सिद्ध कीजिए कि a^m तथा a^n के गुणांक बराबर हैं।

हल : $(1 + a)^{m+n}$ का व्यापक पद $= {}^{m+n}C_r 1^{m+n-r} \cdot a^r = {}^{m+n}C_r a^r$

दिया है : $a^m = a^r$ अर्थात् $r = m$

$$\therefore a^m \text{ का गुणांक} = {}^{m+n}C_m$$

और $a^n = a^r$ अर्थात् $r = n$

$$\therefore a^n \text{ का गुणांक} = {}^{m+n}C_n = {}^{m+n}C_{m+n-n} = {}^{m+n}C_m$$

अतः a^m और a^n के गुणांक बराबर हैं।

प्रश्न 10.

$(x + 1)^n$ के प्रसार में $(r - 1)$ वाँ, r वाँ और $(r + 1)$ वें पदों के गुणांक में $1 : 3 : 5$ का अनुपात हो तो n तथा r का मान ज्ञात करो।

हल : $(x + 1)^n$ का व्यापक पद $T_{r+1} = {}^nC_r x^{n-r}$

\therefore $(r + 1)$ वें पद का गुणांक $= {}^nC_r$

\therefore $(r - 1)$ वें पद का गुणांक $= {}^nC_{r-2}$

r वें पद का गुणांक $= {}^nC_{r-1}$

दिया हुआ है कि ${}^nC_{r-2} : {}^nC_{r-1} : {}^nC_r = 1 : 3 : 5$

$$\frac{{}^nC_{r-1}}{{}^nC_r} = \frac{3}{5}$$

या
$$\frac{\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}}{\frac{n!}{r!(n-r)!}} = \frac{3}{5}$$

या
$$\frac{(r)!(n-r)!}{(r-1)!(n-r+1)!} = \frac{3}{5}$$

या
$$\frac{r (r-1)!(n-r)!}{(r-1)!(n-r+1)(n-r)!} = \frac{3}{5}$$

या
$$\frac{r}{n-r+1} = \frac{3}{5}$$

या
$$5r = 3n - 3r + 3$$

$$3n - 8r = -3$$

इसी प्रकार

$${}^nC_{r-2} : {}^nC_{r-1} = 1 : 3$$

$$\frac{{}^nC_{r-2}}{{}^nC_{r-1}} = \frac{1}{3}$$

$$\frac{\frac{n!}{(r-2)!(n-r+2)!}}{\frac{n!}{(r-1)!(n-r+1)!}} = \frac{1}{3}$$

या

$$\frac{(r-1)!(n-r+1)!}{(r-2)!(n-r+2)!} = \frac{1}{3}$$

या

$$\frac{r-1}{n-r+2} = \frac{1}{3}$$

या

$$3r-3 = n-r+2$$

$$n-4r = -5$$

समीकरण (1) तथा (2) को हल करने पर, $n = 7$

और

$$r = 3$$

अतः

$$n = 7, r = 3.$$

प्रश्न 11.

सिद्ध कीजिए कि $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में x^n का गुणांक, $(1+x)^{2n-1}$ के प्रसार में x^n के गुणांक का

दुगुना होता है।

हल : $(1+x)^{2n}$ के प्रसार में व्यापक पद $= {}^{2n}C_r x^r$

यदि $x^n = x^r$ अर्थात् $r = n$

$$x^n \text{ का गुणांक} = {}^{2n}C_n$$

...(i)

$(1+x)^{2n-1}$ के प्रसार में व्यापक पद $= {}^{2n-1}C_r x^r$

यदि $x^n = x^r$ अर्थात् $r = n$

$$\therefore x^n \text{ का गुणांक} = {}^{2n-1}C_n$$

...(ii)

समी. (i) व (ii) के गुणांकों का अनुपात

$$\frac{{}^{2n}C_n}{{}^{2n-1}C_n} = \frac{\frac{(2n)!}{n! n!}}{\frac{(2n-1)!}{n!(n-1)!}}$$

$$= \frac{(2n)!}{n! n!} \times \frac{n!(n-1)!}{(2n-1)!}$$

$$= \frac{(2n)(2n-1)!}{n[(n-1)!]n!} \times \frac{n!(n-1)!}{(2n-1)!} = 2.$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 12.

m का धनात्मक मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए $(1+x)^m$ के प्रसार में x^2 का गुणांक 6 हो।

हल :

$$(1+x)^m = 1 + mx + \frac{m(m-1)}{1 \cdot 2} x^2 + \dots$$

$$x^2 \text{ का गुणांक} = \frac{m(m-1)}{2} = 6 \text{ (दिया है)}$$

अर्थात्

$$m(m-1) = 12$$

$$m^2 - m - 12 = 0 \text{ अर्थात् } (m-4)(m+3) = 0$$

$$m \neq -3 \therefore m = 4.$$

अभ्यास 8 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1.

यदि $(a+b)^n$ के प्रसार में प्रथम तीन पद क्रमशः 729, 7290 तथा 30375 हों तो a, b तथा n

ज्ञात कीजिए।

हल :

$$(a + b)^n = a^n + {}^nC_1 a^{n-1} b + {}^nC_2 a^{n-2} b^2 + \dots$$

हमें दिया है :

$$a^n = 729 \quad \dots(i)$$

$${}^nC_1 a^{n-1} b = na^{n-1} b = 7290 \quad \dots(ii)$$

$${}^nC_2 a^{n-2} b^2 = \frac{n(n-1)}{1 \cdot 2} a^{n-2} b^2 = 30375 \quad \dots(iii)$$

समी. (ii) को (i) से भाग देने पर,

$$\frac{na^{n-1}b}{a^n} = \frac{7290}{729} = 10$$

या

$$n \frac{b}{a} = 10 \quad \dots(iv)$$

समी (iii) को (ii) से भाग देने पर,

$$\frac{\frac{n(n-1)}{2} a^{n-2} b^2}{na^{n-1}b} = \frac{30375}{7290}$$

या

$$\frac{n-1}{2} \frac{b}{a} = \frac{6075}{1458}$$

$$= \frac{675}{162} = \frac{75}{18} = \frac{25}{6} \quad \dots(v)$$

समी. (iv) को (v) से भाग देने पर,

$$n \times \frac{2}{n-1} = \frac{10 \times 6}{25}$$

$$= \frac{60}{25} = \frac{12}{5}$$

या

$$\frac{n}{n-1} = \frac{6}{5}$$

$$6n - 6 = 5n$$

या

$$6n - 5n = 6 \text{ या } n = 6$$

n का मान समी (iv) में रखने पर,

$$6 \frac{b}{a} = 10$$

या

$$\frac{b}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}$$

$$b = \frac{5}{3}a$$

समी. (i) से,

$$a^n = 729$$

या

$$a^6 = 729 \text{ अर्थात् } a^6 = 3^6$$

\therefore

$$a = 3$$

अब

$$b = \frac{5}{3} \times 3 = 5$$

अतः $a = 3$, $b = 5$, तथा $n = 6$.

प्रश्न 2.

यदि $(3 + ax)^9$ के प्रसार में x^2 और x^3 के गुणांक समान हों, तो a का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$(3 + ax)^9 \text{ के प्रसार में व्यापक पद} = {}^9C_r \cdot 3^{9-r} (ax)^r$$

$r = 2$ रखने से,

$$x^2 \text{ का गुणांक} = {}^9C_2 \cdot 3^{9-2} a^2.$$

$$= 36 \cdot 3^7 \cdot a^2 \quad \dots(i)$$

$r = 3$ रखने से,

$$x^3 \text{ का गुणांक} = {}^9C_3 \cdot 3^{9-3} a^3.$$

$$= \frac{9 \times 8 \times 7}{6} \times 3^6 \cdot a^3$$

$$= 84 \cdot 3^6 a^3 \quad \dots(ii)$$

दोनों गुणांक समान हैं।

\therefore (i) और (ii) से,

$$36 \cdot 3^7 \cdot a^2 = 84 \cdot 3^6 \cdot a^3$$

$$a = \frac{36 \cdot 3^7}{84 \cdot 3^6}$$

$$= \frac{36 \times 3}{84} = \frac{9}{7}.$$

प्रश्न 3.

द्विपद प्रमेय का प्रयोग करते हुए गुणनफल $(1 + 2x)^6 (1 - x)^7$ में x^5 का गुणांक ज्ञात कीजिए।

हल :

$$(1 + 2x)^6 = 1 + {}^6C_1 (2x) + {}^6C_2 (2x)^2 + {}^6C_3 (2x)^3 + {}^6C_4 (2x)^4 + {}^6C_5 (2x)^5 + \dots$$

$$= 1 + 12x + 60x^2 + 160x^3 + 240x^4 + 192x^5 + \dots$$

और

$$(1 - x)^7 = 1 - {}^7C_1 x + {}^7C_2 x^2 - {}^7C_3 x^3 + {}^7C_4 x^4 - {}^7C_5 x^5 + \dots$$

$$= 1 - 7x + 21x^2 - 35x^3 + 35x^4 - 21x^5 + \dots$$

इन दोनों के गुणनफल में से x^5 के गुणांक का चयन करते हुए

$$x^5 \text{ का गुणांक} = 192 - 7 \times 240 + 21 \times 160 - 35 \times 60 + 35 \times 12 - 21 \times 1$$

$$= 192 - 1680 + 3360 - 2100 + 420 - 21$$

$$= 171.$$

प्रश्न 4.

यदि a और b भिन्न-भिन्न पूर्णांक हों, तो सिद्ध कीजिए कि $a^n - b^n$ का एक गुणनखंड $(a - b)$ है, जबकि n एक धन पूर्णांक है।

हल :

$$a = b + (a - b)$$

$$a^n = [b + (a - b)]^n$$

$$= b^n + {}^nC_1 a^{n-1} (a - b) + {}^nC_2 b^{n-2} (a - b)^2 + \dots + {}^nC_n (a - b)^n$$

\therefore

$$a^n - b^n = {}^nC_1 b^{n-1} (a - b) + {}^nC_2 b^{n-2} (a - b)^2 + \dots + {}^nC_n (a - b)^n$$

$$= (a - b) [{}^nC_1 b^{n-1} + {}^nC_2 b^{n-2} (a - b) + \dots + {}^nC_n (a - b)^{n-1}]$$

अतः स्पष्ट है कि $a^n - b^n$ का $a - b$ एक गुणनखण्ड है।

प्रश्न 5.

$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^6 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^6$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $(a + b)^6$ और $(a - b)^6$ का प्रसार करने पर,

$$(a + b)^6 = a^6 + {}^6C_1 a^5 b + {}^6C_2 a^4 b^2 + {}^6C_3 a^3 b^3 + {}^6C_4 a^2 b^4 + {}^6C_5 ab^5 + {}^6C_6 b^6$$

$$= a^6 + 6a^5 b + 15a^4 b^2 + 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 + 6ab^5 + b^6 \quad \dots(i)$$

$$\text{इसी प्रकार } (a - b)^6 = a^6 - 6a^5 b + 15a^4 b^2 - 20a^3 b^3 + 15a^2 b^4 - 6ab^5 + b^6 \quad \dots(ii)$$

समी. (i) में से (ii) घटाने पर

$$(a + b)^6 - (a - b)^6 = 2 (6a^5 b + 20a^3 b^3 + 6ab^5)$$

$$= 4ab (3a^4 + 10a^2 b^2 + 3b^4)$$

$a = \sqrt{3}$, $b = \sqrt{2}$ रखने पर

$$(\sqrt{3} + \sqrt{2})^6 - (\sqrt{3} - \sqrt{2})^6 = 4 \sqrt{3} \sqrt{2} [3(\sqrt{3})^4 + 10(\sqrt{3})^2 (\sqrt{2})^2 + 3(\sqrt{2})^4]$$

$$= 4 \sqrt{6} (27 + 60 + 12)$$

$$= 4 \sqrt{6} \times 99 = 396 \sqrt{6}.$$

प्रश्न 6. $(a^2 + \sqrt{a^2 - 1})^4 + (a^2 - \sqrt{a^2 - 1})^4$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $a^2 = x$, $\sqrt{a^2 - 1} = y$ रखने पर

$$\begin{aligned}(x + y)^4 &= x^4 + {}^4C_1 x^3 y + {}^4C_2 x^2 y^2 + {}^4C_3 x y^3 + {}^4C_4 y^4 \\ &= x^4 + 4x^3 y + 6x^2 y^2 + 4x y^3 + y^4\end{aligned}$$

इसी प्रकार

$$(x - y)^4 = x^4 - 4x^3 y + 6x^2 y^2 - 4x y^3 + y^4$$

दोनों को जोड़ने पर

$$(x + y)^4 + (x - y)^4 = 2(x^4 + 6x^2 y^2 + y^4)$$

x और y का मान रखने पर

$$\begin{aligned}(a^2 + \sqrt{a^2 - 1})^4 + (a^2 - \sqrt{a^2 - 1})^4 &= 2[(a^2)^4 + 6(a^2)^2 (\sqrt{a^2 - 1})^2 + (\sqrt{a^2 - 1})^4] \\ &= 2[a^8 + 6a^4(a^2 - 1) + (a^2 - 1)^2] \\ &= 2[a^8 + 6a^6 - 6a^4 + a^4 - 2a^2 + 1] \\ &= 2[a^8 + 6a^6 - 5a^4 - 2a^2 + 1] \\ &= 2a^8 + 12a^6 - 10a^4 - 4a^2 + 2.\end{aligned}$$

प्रश्न 7.

$(0.99)^5$ प्रसार के पहले 3 पदों का प्रयोग करते हुए इसका निकटतम मान ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\begin{aligned}(0.99)^5 &= (1 - 0.01)^5 = 1 - {}^5C_1 (0.01) + {}^5C_2 \times (0.01)^2 + \dots \\ &= 1 - 5 \times 0.01 + 10 \times 0.0001 \\ &= 1 - 0.05 + 0.001 = 1.001 - 0.05 \\ &= 0.951.\end{aligned}$$

प्रश्न 8. यदि $\left(\sqrt[4]{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$ के प्रसार में आरम्भ से 5वें और अंत से 5वें पद का अनुपात $\sqrt{6} : 1$ हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हल : $\left(\sqrt[4]{2} + \frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^n$ के प्रसार में आरंभ से 5वां पद

$$\begin{aligned}
 &= {}^nC_4 \left(\sqrt[4]{2}\right)^{n-4} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^4 \\
 &= {}^nC_4 2^{\frac{n-4}{4}} 3^{-1} = {}^nC_4 2^{\frac{n-4}{4}} \frac{1}{3} \quad \dots(i)
 \end{aligned}$$

दिए गए व्यंजक के प्रसार में $n + 1$ पद हैं।

अंत से 5 वाँ पद = $[(n + 1) - 5 + 1]$ वाँ पद प्रारंभ से $(n - 3)$ वाँ पद

$$= {}^nC_{n-4} \left(\sqrt[4]{2}\right)^{n-(n-4)} \left(\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right)^{n-4}$$

$$= {}^nC_4 \cdot 2^{\frac{n-4}{4}} \left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n-4}{4}}$$

$$[\because {}^nC_2 = {}^nC_{n-2}]$$

$$= {}^nC_4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3^{\frac{n-4}{4}}} \quad \dots(ii)$$

समी. (i) को (ii) से भाग देने पर

$$\frac{\text{प्रारंभ से 5वाँ पद}}{\text{अंत से 5वाँ पद}} = \frac{{}^nC_4 \cdot 2^{\frac{n-4}{4}} \cdot \frac{1}{3}}{{}^nC_4 \cdot 2 \cdot \frac{1}{3^{\frac{n-4}{4}}}} = \frac{\sqrt{6}}{1}$$

या
$$\frac{2^{\frac{n}{4}-2}}{\left(\frac{1}{3}\right)^{\frac{n}{4}-2}} = \frac{\sqrt{6}}{1}$$

या
$$(2.3)^{\frac{n}{4}-2} = \frac{\sqrt{6}}{1}$$

या
$$6^{\frac{n}{4}-2} = 6^{\frac{1}{2}}$$

अर्थात्
$$\frac{n}{4} - 2 = \frac{1}{2}$$

या
$$\frac{n}{4} = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

या
$$n = 10.$$

प्रश्न 9. $\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^4$, $x \neq 0$ का द्विपद प्रमेय द्वारा प्रसार ज्ञात कीजिए।

हल : $\left(1 + \frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^4 = \left[\left(1 + \frac{x}{2}\right) - \frac{2}{x}\right]^4$

$$= \left(1 + \frac{x}{2}\right)^4 + {}^4C_1 \left(1 + \frac{x}{2}\right)^3 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right) + {}^4C_2 \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2}{x}\right)^2 + {}^4C_3 \left(1 + \frac{x}{2}\right) \left(-\frac{2}{x}\right)^3 + {}^4C_4 \left(-\frac{2}{x}\right)^4$$

$$= \left(1 + \frac{x}{2}\right)^4 + 4 \left(1 + \frac{x}{2}\right)^3 \left(-\frac{2}{x}\right) + 6 \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 \left(\frac{4}{x^2}\right) + 4 \left(1 + \frac{x}{2}\right) \left(-\frac{8}{x^3}\right) + \left(\frac{16}{x^4}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{x}{2}\right)^4, \left(1 + \frac{x}{2}\right)^3, \left(1 + \frac{x}{2}\right)^2 \text{ का प्रसार करने पर}$$

$$= \left(1 + \frac{x}{2} - \frac{2}{x}\right)^4 = \left(1 + 4 \cdot \frac{x}{2} + 6 \cdot \frac{x^2}{4} + 4 \cdot \frac{x^3}{8} + \frac{x^4}{16}\right) - \frac{8}{x} \left(1 + 3 \cdot \frac{x}{2} + 3 \cdot \frac{x^2}{4} + \frac{x^3}{8}\right) + \frac{24}{x^2} \left(1 + x + \frac{x^2}{4}\right) - \frac{32}{x^3} \left(1 + \frac{x}{2}\right) + \frac{16}{x^4}$$

$$= \left(1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{x^4}{16}\right) - \frac{8}{x} \left(1 + \frac{3}{2}x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{x^3}{8}\right) + \frac{24}{x^2} \left(1 + x + \frac{x^2}{4}\right) - \frac{32}{x^3} \left(1 + \frac{x}{2}\right) + \frac{16}{x^4}$$

$$= \left(1 + 2x + \frac{3}{2}x^2 + \frac{1}{2}x^3 + \frac{x^4}{16}\right) - \left(\frac{8}{x} + 12 + 6x + x^2\right) + \left(\frac{24}{x^2} + \frac{24}{x} + 6\right) - \left(\frac{32}{x^3} + \frac{16}{x^2}\right) + \frac{16}{x^4}$$

$$= \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{2} + \left(\frac{3}{2} - 1\right)x^2 + (2 - 6)x + (1 - 12 + 6) + (-8 + 24) \frac{1}{x} + (24 - 16) \frac{1}{x^2} - \frac{32}{x^3} + \frac{16}{x^4}$$

$$= \frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{2} + \frac{x^2}{2} - 4x - 5 + \frac{16}{x} + \frac{8}{x^2} - \frac{32}{x^3} + \frac{16}{x^4}$$

प्रश्न 10.

$(3x^2 - 2ax + 3a^2)^3$ का द्विपद प्रमेय से प्रसार ज्ञात कीजिए।

$$\text{हल : } [3x^2 - a(2x - 3a)]^3$$

$$= (3x^2)^3 - {}^3C_1 (3x^2)^2 \cdot a (2x - 3a) + {}^3C_2 (3x^2) a^2 (2x - 3a)^2 - a^3 (2x - 3a)^3$$

$$= 27x^6 - 3 \times 9x^4 a (2x - 3a) + 3 \times 3x^2 a^2 (4x^2 - 12ax + 9a^2) - a^3 (8x^3 - 3 \times 4x^2 \times 3a + 3 \times 2x \times 9a^2 - 27a^3)$$

$$= 27x^6 - 54ax^5 + 81a^2x^4 + 36a^2x^4 - 108a^3x^3 + 81a^4x^2 - 8a^3x^3 + 36a^4x^2 - 54a^5x + 27a^6$$

$$= 27x^6 - 54ax^5 + 117a^2x^4 - 116a^3x^3 + 117a^4x^2 - 54a^5x + 27a^6.$$