

Chapter-12 त्रिविमीय ज्यामिति का परिचय

प्रश्नावली 12.1

प्रश्न 1.

एक बिन्दु x -अक्ष पर स्थित है। इस के y -निर्देशांक तथा z -निर्देशांक क्या हैं ?

हल:

x -अक्ष पर किसी बिन्दु के निर्देशांक $(x, 0, 0)$ होते हैं जिसमें $y = 0, z = 0$.

प्रश्न 2.

एक बिन्दु XZ तल में है। इसके y – निर्देशांक के बारे में आप क्या कह सकते हैं?

हल:

XZ तल में y - निर्देशांक 0 होता है। इस तल का बिन्दु $(x, 0, z)$ के रूप में होता है।

प्रश्न 3.

अष्टाशों के नाम बताइए, जिनमें निम्नलिखित बिन्दु स्थित हैं:

$(1, 2, 3), (4, -2, 3), (4, -2, -5), (4, 2, -5), (-4, 2, -5), (-4, 2, 5), (-3, -1, 6), (2, -4, -7)$

हल:

दिए हुए बिन्दुओं के अष्टांश हैं:

- (i) $(1, 2, 3)$ – $XOYZ$ – पहला
- (ii) $(4, -2, 3)$ – $XOYZ$ – चौथा
- (iii) $(4, 2, -5)$ – $XOY'Z'$ – आठवाँ
- (iv) $(4, 2, -5)$ – $XOYZ'$ – पाँचवाँ
- (v) $(-4, 2, -5)$ – $XOYZ'$ – छटा
- (vi) $(-4, 2, 5)$ – $(XOYZ)$ – दूसरी
- (vii) $(-3, -1, 6)$ – $(XOY'Z)$ – तीसरा
- (viii) $(2, -4, -7)$ – $(XOY'Z')$ – आठवाँ

प्रश्न 4.

रिक्त स्थानों की पूर्ति कीजिए:

- (i) x -अक्ष और y -अक्ष दोनों एक साथ मिल कर एक तल बनाते हैं, उस तल को कहते हैं।

- (ii) XY- तल में एक बिन्दु के निर्देशांक रूप के होते हैं।
(iii) निर्देशांक तल अंतरिक्ष को अष्टांश में विभाजित करते हैं।

हल:

- (i) x-अक्ष और y-अक्ष दोनों एक साथ मिलकर एक तल बनाते हैं उस तल को **XY-तल** कहते हैं।
(ii) XY- तल में एक बिन्दु के निर्देशांक **(x, y, 0)** रूप के होते हैं।
(iii) निर्देशांक तल अंतरिक्ष को **8** क्षेत्र में विभाजित करते हैं।

प्रश्नावली 12.2

प्रश्न 1.

निम्नलिखित बिन्दु-युग्मों के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए:

- (i) (2, 3, 5) और (4, 3, 1)

हल : दो बिन्दु (x_1, y_1, z_1) और (x_2, y_2, z_2) के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$$

बिन्दु (2, 3, 5) और (4, 3, 1) के बीच की दूरी

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(4-2)^2 + (3-3)^2 + (1-5)^2} \\ &= \sqrt{2^2 + 0^2 + (4)^2} \\ &= \sqrt{4+16} \\ &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} \end{aligned}$$

(ii) (-3, 7, 2) और (2, 4, -1)

हल : बिन्दु (-3, 7, 2) और (2, 4, -1) के बीच की दूरी

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(2+3)^2 + (4-7)^2 + (-1-2)^2} \\ &= \sqrt{25+9+9} \\ &= \sqrt{43} . \end{aligned}$$

(iii) (-1, 3, -4) और (1, -3, 4)

हल : बिन्दु (-1, 3, -4) और (1, -3, 4) के बीच की दूरी

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(1+1)^2 + (-3-3)^2 + (4+4)^2} \\ &= \sqrt{4+36+64} \\ &= \sqrt{104} \\ &= 2\sqrt{26} . \end{aligned}$$

(iv) (2, -1, 3) और (-2, 1, 3).

हल : बिन्दु (2, -1, 3) और (-2, 1, 3) के बीच की दूरी

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(-2-2)^2 + (1+1)^2 + (3-3)^2} \\ &= \sqrt{16+4+0} \\ &= \sqrt{20} = 2\sqrt{5} . \end{aligned}$$

प्रश्न 2.

दर्शाइए कि बिन्दु $(-2, 3, 5)$, $(1, 2, 3)$ और $(7, 0, -1)$ संरेख हैं।

हल : मान लीजिए बिन्दु $A(-2, 3, 5)$, और $B(1, 2, 3)$ के बीच की दूरी

$$\begin{aligned} AB &= \sqrt{(1+2)^2 + (2-3)^2 + (3-5)^2} \\ &= \sqrt{9+1+4} \\ &= \sqrt{14} \end{aligned}$$

बिन्दु $B(1, 2, 3)$ और $C(7, 0, -1)$ के बीच की दूरी

$$\begin{aligned} BC &= \sqrt{(7-1)^2 + (0-2)^2 + (-1-3)^2} \\ &= \sqrt{36+4+16} \\ &= \sqrt{56} = 2\sqrt{14} \end{aligned}$$

बिन्दु $A(-2, 3, 5)$ और $C(7, 0, -1)$ के बीच की दूरी

$$\begin{aligned} AC &= \sqrt{(7+2)^2 + (0-3)^2 + (-1-5)^2} \\ &= \sqrt{81+9+36} \\ &= \sqrt{126} = 3\sqrt{14} \end{aligned}$$

अब

$$\begin{aligned} AB + BC &= \sqrt{14} + 2\sqrt{14} \\ &= 3\sqrt{14} \end{aligned}$$

$$AC = 3\sqrt{14}$$

$$\text{यहाँ } AB + BC = AC$$

अतः बिन्दु A, B, C संरेख हैं।

प्रश्न 3.

निम्नलिखित को सत्यापित कीजिए:

(i) $(0, 7, -10)$, $(1, 6, -6)$, और $(4, 9, -6)$ एक समद्विबाहु त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल : माना त्रिभुज ABC के शीर्ष $A(0, 7, -10)$, $B(1, 6, -6)$ और $C(4, 9, -6)$ हैं।

$$\begin{aligned}\text{अब } AB &= \sqrt{(1-0)^2 + (6-7)^2 + (-6+10)^2} \\ &= \sqrt{1+1+16} \\ &= \sqrt{18} = 3\sqrt{2} \\ BC &= \sqrt{(4-1)^2 + (9-6)^2 + (-6+6)^2} \\ &= \sqrt{9+9} \\ &= \sqrt{18} = 3\sqrt{2}\end{aligned}$$

$$\text{यहाँ } AB = BC$$

अतः दिए गए शीर्ष समद्विबाहु त्रिभुज के हैं।

(ii) $(0, 7, 10)$, $(-1, 6, 6)$ और $(-4, 9, 6)$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल : माना त्रिभुज PQR के शीर्ष $P(0, 7, 10)$, $Q(-1, 6, 6)$ और $R(-4, 9, 6)$ हों, तब

$$\begin{aligned}PQ^2 &= (-1-0)^2 + (6-7)^2 + (6-10)^2 \\ &= 1+1+16 = 18 \\ QR^2 &= (-4+1)^2 + (9-6)^2 + (6-6)^2 \\ &= 9+9+0 = 18\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 PR^2 &= (-4 - 0)^2 + (9 - 7)^2 + (6 - 10)^2 \\
 &= 16 + 4 + 16 \\
 &= 36
 \end{aligned}$$

$$PQ^2 + QR^2 = 18 + 18 = 36$$

अब $PR^2 = 36$

$$\therefore PQ^2 + QR^2 = PR^2$$

अतः दिए गए शीर्ष समकोण त्रिभुज के हैं।

इति सिद्धम्।

(iii) $(-1, 2, 1)$, $(1, -2, 5)$, $(4, -7, 8)$ और $(2, -3, 4)$ एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

हल : माना चतुर्भुज $ABCD$ के शीर्ष $A(-1, 2, 1)$, $B(1, -2, 5)$, $C(4, -7, 8)$ और $D(2, -3, 4)$ हों, तब

$$\begin{aligned}
 AB^2 &= (1 + 1)^2 + (-2 - 2)^2 + (5 - 1)^2 \\
 &= 4 + 16 + 16 = 36
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 BC^2 &= (4 - 1)^2 + (-7 + 2)^2 + (8 - 5)^2 \\
 &= 9 + 25 + 9 = 43
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 CD^2 &= (2 - 4)^2 + (-3 + 7)^2 + (4 - 8)^2 \\
 &= 4 + 16 + 16 = 36
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 AD^2 &= (2 + 1)^2 + (-3 - 2)^2 + (4 - 1)^2 \\
 &= 9 + 25 + 9 = 43
 \end{aligned}$$

$$\therefore AB^2 = CD^2 \text{ और } BC^2 = AD^2$$

या $AB = CD$ और $BC = AD$

अतः दिए गए बिन्दु एक समांतर चतुर्भुज के हैं।

इति सिद्धम्।

प्रश्न 4.

ऐसे बिन्दुओं के समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दु $(1, 2, 3)$ और $(3, 2, -1)$ से

समदूरस्थ हैं।

हल : माना कोई बिन्दु $P(x, y, z)$ बिन्दु $A(1, 2, 3)$ और बिन्दु $B(3, 2, -1)$ से समान दूरी पर है।

अर्थात् $PA = PB$

*या $PA^2 = PB^2$

$$(x - 1)^2 + (y - 2)^2 + (z - 3)^2 = (x - 3)^2 + (y - 2)^2 + (z + 1)^2$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (z^2 - 6z + 9) = (x^2 - 6x + 9) + (z^2 + 2z + 1)$$

$$-2x + 6x - 6z - 2z + 10 - 10 = 0$$

या $4x - 8z = 0$

अतः अभीष्ट समीकरण $x - 2z = 0$.

प्रश्न 5.

बिन्दुओं P से बने समुच्चय का समीकरण ज्ञात कीजिए जिनकी बिन्दुओं $A(4, 0, 0)$ और $B(-4, 0, 0)$ से दूरियों का योगफल 10 है।

हल:

माना बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

दिए गए बिन्दु A(4, 0, 0) और B(-4, 0, 0) इस प्रकार हैं कि $PA + PB = 10$

$$\sqrt{(x-4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} + \sqrt{(x+4)^2 + (y-0)^2 + (z-0)^2} = 10$$

या $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 16} = 10 - \sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 16}$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$x^2 + y^2 + z^2 - 8x + 16 = 100 + (x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 16) - 20\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 16}$$

$$-16x - 100 = -20\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 16}$$

$$4x + 25 = 5\sqrt{x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 16}$$

पुनः दोनों पक्षों का वर्ग करने पर

$$(4x + 25)^2 = 25(x^2 + y^2 + z^2 + 8x + 16)$$

$$16x^2 + 200x + 625 = 25x^2 + 25y^2 + 25z^2 + 200x + 400$$

या $9x^2 + 25y^2 + 25z^2 = 625 - 400 = 225$

अतः अभीष्ट समीकरण $9x^2 + 25y^2 + 25z^2 = 225$.

प्रश्नावली 12.3

प्रश्न 1.

बिन्दुओं (-2, 3, 5) और (1, -4, 6) को मिलाने से बने रेखाखण्ड को अनुपात (i) 2 : 3 में अंतः (ii) 2 : 3 में बाह्यतः विभाजित करने वाले बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : (i) माना बिन्दु $A(-2, 3, 5)$ और $B(1, -4, 6)$ को मिलाने से बने रेखाखण्ड AB को $P(x, y, z)$, अनुपात $2 : 3$ में अंतः विभाजित करता हो, तब बिन्दु P के निर्देशांक इस प्रकार

$$x = \frac{2 \times 1 + 3 \times (-2)}{2 + 3} = \frac{2 - 6}{5} = \frac{-4}{5}$$

$$y = \frac{2 \times (-4) + 3 \times 3}{2 + 3} = \frac{-8 + 9}{5} = \frac{1}{5}$$

$$z = \frac{2 \times 6 + 3 \times 5}{2 + 3} = \frac{12 + 15}{5} = \frac{27}{5}$$

अतः बिन्दु P के निर्देशांक $\left(-\frac{4}{5}, \frac{1}{5}, \frac{27}{5}\right)$.

(ii) जब बिन्दु $P(x, y, z)$ रेखाखण्ड AB के बाह्यतः विभाजित करता हो, तो निर्देशांक इस प्रकार होंगे

$$x = \frac{2 \times 1 - 3 \times (-2)}{2 - 3} = \frac{2 + 6}{-1} = -8$$

$$y = \frac{2 \times (-4) - 3 \times 3}{2 - 3} = \frac{-8 - 9}{-1} = 17$$

$$z = \frac{2 \times 6 - 3 \times 5}{2 - 3} = \frac{12 - 15}{-1} = 3$$

अतः बिन्दु P के निर्देशांक $(-8, 17, 3)$ होंगे।

प्रश्न 2.

दिया गया है कि बिन्दु $P(3, 2, -4)$, $Q(5, 4, -6)$ और $R(9, 8, -10)$ संरेख हैं। वह अनुपात ज्ञात

कीजिए जिसमें Q, PR को विभाजित करता है।

हल : माना $\frac{PQ}{QR} = \frac{1}{2}$ के अनुपात में विभाजित करता है।

$$\therefore x\text{-निर्देशांक, } 5 = \frac{k \times 9 + 1 \times 3}{k + 1}$$

$$\text{या } 5(k + 1) = 9k + 3$$

$$\text{या } 4k = 5 - 3 = 2$$

$$\text{या } k = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{इसी प्रकार } y\text{-निर्देशांक, } 4 = \frac{8k + 2}{k + 1} \text{ या } 4k + 4 = 8k + 2$$

$$\text{या } 8k - 4k = 4 - 2 \text{ या } 4k = 2$$

$$\text{या } k = \frac{1}{2}$$

$$\text{अब } z\text{-निर्देशांक, } -6 = \frac{-10k - 4}{k + 1}$$

$$\text{या } 6k + 6 = 10k + 4$$

$$\text{या } 10k - 6k = 6 - 4 \text{ या } 4k = 2$$

$$\Rightarrow k = \frac{1}{2}$$

अतः बिन्दु P, Q, R, संरेख हैं और Q, PR को 1 : 2 के अनुपात में विभाजित करता है।

प्रश्न 3.

बिन्दुओं (-2, 4, 7) और (3, -5, 8) को मिलाने वाली रेखाखण्ड, YZ- तले द्वारा जिस अनुपात में विभक्त होता है, उसे ज्ञात कीजिए।

हल:

मान लीजिए बिन्दु P पर तल YZ रेखाखण्ड AB क $k : 1$ के अनुपात में प्रतिच्छेद करता है, तब YZ - तल पर प्रत्येक बिन्दु $(0, y, z)$ के रूप में होगा।

A, B के निर्देशांक क्रमशः $(-2, 4, 7)$ और $(3, -5, 8)$ हैं।

$$\therefore 0 = \frac{k \times 3 + 1 \times (-2)}{k + 1} = \frac{3k - 2}{k + 1}$$

$$\therefore 3k - 2 = 0 \text{ या } k = \frac{2}{3}$$

अतः AB को YZ - तल $2 : 3$ के अनुपात में विभक्त करता है।

प्रश्न 4.

विभाजन सूत्र का प्रयोग करके दिखाइए $A(2, -3, 4)$, $B(-1, 2, 1)$ तथा $C(0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

3 }[/latex], 2) संरेख हैं।

हल : माना A, B, C , संरेख हैं B , रेखाखण्ड AC को $k : 1$ में विभाजित करता है।

$$\therefore -1 = \frac{k \times 0 + 1 \times 2}{k + 1}$$

$$\text{या} \quad -k - 1 = 2 \text{ या } k = -3$$

$$\therefore 2 = \frac{k \times \frac{1}{3} + 1 \times (-3)}{k + 1}$$

$$\text{या} \quad 2k + 2 = \frac{k}{3} - 3$$

$$\text{या} \quad 2k - \frac{k}{3} = -3 - 2$$

$$\text{या} \quad \frac{5}{3}k = -5 \text{ या } k = -3$$

$$\text{और} \quad 1 = \frac{k \times 2 + 1 \times 4}{k + 1}$$

$$\text{या} \quad k + 1 = 2k + 4$$

$$\therefore k = -3$$

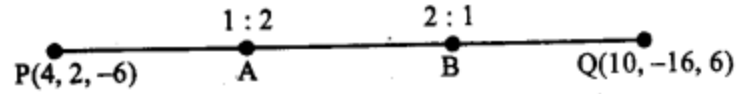
अतः बिन्दु A, B, C संरेख हैं।

प्रश्न 5.

$P(4, 2, -6)$ और $Q(10, -16, 6)$ के मिलाने वाली रेखाखण्ड PQ को सम-त्रिभाजित करने वाले बिन्दुओं के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल:

माना बिन्दु A, B रेखाखण्ड PQ को 3 समान भागों में विभाजित करती है।



बिन्दु A , रेखाखण्ड PQ को $1 : 2$ के अनुपात में विभाजित करता है।

$$A = \left(\frac{1 \times 10 + 2 \times 4}{1 + 2}, \frac{1 \times (-16) + 2 \times 2}{1 + 2}, \frac{1 \times 6 + 2 \times (-6)}{1 + 2} \right)$$

या $A = \left(\frac{18}{3}, \frac{-12}{3}, \frac{-6}{3} \right)$ अर्थात् $A(6, -4, -2)$

बिन्दु B , रेखा खण्ड PQ को $2 : 1$ अनुपात में विभाजित करता है।

$$\therefore B \text{ के निर्देशांक} = B \left(\frac{2 \times 10 + 1 \times 4}{2 + 1}, \frac{2 \times (-16) + 1 \times 2}{2 + 1}, \frac{2 \times 6 + 1 \times (-6)}{2 + 1} \right)$$

$$= B \left(\frac{20 + 4}{3}, \frac{-32 + 2}{3}, \frac{12 - 6}{3} \right)$$

$$= B(8, -10, 2)$$

अतः A तथा B के निर्देशांक क्रमशः $(6, -4, -2)$ और $(8, -10, 2)$ हैं।

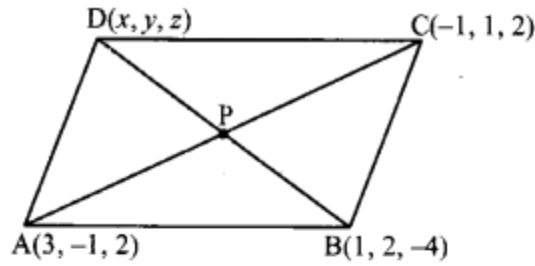
अध्याय 12 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1.

समातेर चतुर्भुज के तीन शीर्ष $A(3, -1, 2)$, $B(1, 2, -4)$ व $C(-1, 1, 2)$ हैं। चौथे शीर्ष D के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल:

शीर्ष A और C क्रमशः $(3, -1, 2)$, $(-1, 1, 2)$ हैं।



A और C के मध्य बिन्दु P के निर्देशांक $\left(\frac{3-1}{2}, \frac{-1+1}{2}, \frac{2+2}{2}\right)$ या $(1, 0, 2)$

मान लीजिए बिन्दु D के निर्देशांक (x, y, z) हैं और बिन्दु B के निर्देशांक $(1, 2, -4)$ हैं।

\therefore DB का मध्य बिन्दु $\left(\frac{x+1}{2}, \frac{y+2}{2}, \frac{z-4}{2}\right)$

समांतर चतुर्भुज के विकर्ण एक दूसरे को 2 समान भागों में बाँटते हैं।

$$\text{इसलिए } \frac{x+1}{2} = 1, \frac{y+2}{2} = 0, \frac{z-4}{2} = 2$$

$$\therefore x = 1, y = -2, z = 8$$

अतः बिन्दु D के निर्देशांक $(1, -2, 8)$ हैं।

प्रश्न 2.

एक त्रिभुज ABC के शीर्षों के निर्देशांक क्रमशः $A(0, 0, 6)$, $B(0, 4, 0)$ तथा $C(6, 0, 0)$ हैं।

त्रिभुज की माध्यिकाओं की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल : बिन्दु $B(0, 4, 0)$ और $C(6, 0, 0)$ को मिलाने वाला रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु $D\left(\frac{0+6}{2}, \frac{4+0}{2}, \frac{0+0}{2}\right)$ या $(3, 2, 0)$ हैं।

\therefore बिन्दु A के निर्देशांक $(0, 0, 6)$ हैं।

त्रिभुज ABC की माध्यिका AD की लंबाई

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(3-0)^2 + (2-0)^2 + (0-6)^2} \\ &= \sqrt{9+4+36} \\ &= \sqrt{49} = 7 \end{aligned}$$

C और A के निर्देशांक $(6, 0, 0)$ और $(0, 0, 6)$

AC का मध्य बिन्दु $E\left(\frac{0+6}{2}, \frac{0+0}{2}, \frac{0+6}{2}\right)$ या $E(3, 0, 3)$

और B के निर्देशांक $(0, 4, 0)$ हैं।

त्रिभुज ABC की माध्यिका BE की लंबाई

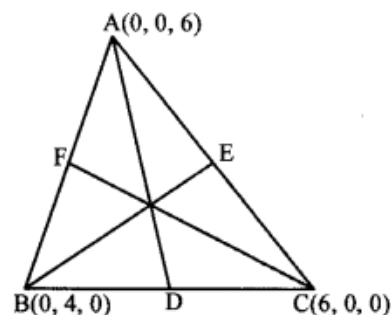
$$\begin{aligned} &= \sqrt{(3-0)^2 + (0-4)^2 + (3-0)^2} \\ &= \sqrt{9+16+9} \\ &= \sqrt{34} \end{aligned}$$

बिन्दु A और B के निर्देशांक क्रमशः $(0, 0, 6)$, $(0, 4, 0)$ है।

$\therefore AB$ का मध्य बिन्दु $F\left(\frac{0+0}{2}, \frac{0+4}{2}, \frac{6+0}{2}\right)$ या $F(0, 2, 3)$ है।

त्रिभुज ABC की माध्यिका CF की लम्बाई

$$\begin{aligned} &= \sqrt{(6-0)^2 + (0-2)^2 + (0-3)^2} \\ &= \sqrt{36+4+9} \\ &= \sqrt{49} = 7. \end{aligned}$$



प्रश्न 3.

यदि त्रिभुज PQR का केन्द्रक मूल बिन्दु है और शीर्ष $P(2a, 2, 6)$, $Q(-4, 3b, -10)$ और $R(8,$

14, 2c) हैं तो a, b और c का मान ज्ञात कीजिए:

हल : दिया है: त्रिभुज PQR के शीर्ष $P(2a, 2, 6)$, $Q(-4, 3b, -10)$, $R(8, 14, 2c)$

$$\therefore \Delta PQR \text{ का केंद्रक } \left(\frac{x_1 + x_2 + x_3}{3}, \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}, \frac{z_1 + z_2 + z_3}{3} \right),$$

प्रश्न 4.

y-अक्ष पर उस बिन्दु के निर्देशांक ज्ञात कीजिए जिसकी बिन्दु $P(3, -2, 5)$ से दूरी $5\sqrt{2}$ है।

हल : y-अक्ष पर किसी बिन्दु के निर्देशांक $A(0, y_1, 0)$ है। A से $P(3, -2, 5)$ के बीच की दूरी $= 5\sqrt{2}$

$$\begin{aligned} \therefore AP^2 &= (3-0)^2 + (-2-y_1)^2 + (5-0)^2 \\ \therefore &= 9 + (-2-y_1)^2 + 25 \\ &= (y_1+2)^2 + 34 \end{aligned}$$

$$AP = \sqrt{(y_1+2)^2 + 34} = 5\sqrt{2} \quad (\text{दिया है})$$

$$\therefore (y_1+2)^2 + 34 = 50$$

$$\therefore (y_1+2)^2 = 50 - 34 = 16$$

$$y_1 + 2 = \pm 4$$

$$+ve \text{ चिह्न लेने पर, } y_1 = 4 - 2 = 2$$

$$-ve \text{ चिह्न लेने पर, } y_1 = -4 - 2 = -6$$

\therefore y-अक्ष पर अभीष्ट बिन्दु $(0, 2, 0)$ और $(0, -6, 0)$ है।

प्रश्न 5.

$P(2, -3, 4)$ और $(8, 0, 10)$ को मिलाने वाली रेखाखण्ड पर स्थित एक बिन्दु R का x- निर्देशांक 4 है। बिन्दु R के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना बिन्दु R , PQ को $k : 1$ में विभाजित करता है जबकि P और Q के निर्देशांक $P(2, -3, 4)$ और $Q(8, 0, 10)$ हैं।

$$\therefore \text{ बिन्दु } R \text{ के निर्देशांक } \left(\frac{8k+2}{k+1}, \frac{-3}{k+1}, \frac{10k+4}{k+1} \right)$$

परन्तु x- निर्देशांक 4 के समान है।

$$\therefore \frac{8k+2}{k+1} = 4 \text{ या } 8k+2 = 4k+4$$

$$\therefore 4k = 2 \text{ या } k = \frac{1}{2} = 1:2$$

$$y - \text{निर्देशांक} = \frac{-3}{k+1} = \frac{-3}{\frac{1}{2}+1} = \frac{-3 \times 2}{3} = -2$$

$$z - \text{निर्देशांक} = \frac{10k+4}{k+1}$$

$$= \frac{10 \times \frac{1}{2} + 4}{\frac{1}{2} + 1} = \frac{5+4}{\frac{3}{2}}$$

$$= \frac{9 \times 2}{3} = 6$$

अतः R के निर्देशांक $(4, -2, 6)$ हैं।

प्रश्न 6.

यदि बिन्दु A और B क्रमशः $(3, 4, 5)$ तथा $(-1, 3, -7)$ हैं। चर बिन्दु P द्वारा निर्मित समुच्चय

से संबंधित समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ $PA^2 + PB^2 = k^2$ जब कि k अचर है।

हल : माना बिन्दु P के निर्देशांक (x, y, z) हैं।

बिन्दु $A(3, 4, 5)$ है।

$$PA^2 = (x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2$$

बिन्दु $B(-1, 3, 7)$ है।

$$\therefore PB^2 = (x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 7)^2$$

दिया है, $PA^2 + PB^2 = k^2$

$$\therefore [(x - 3)^2 + (y - 4)^2 + (z - 5)^2] + [(x + 1)^2 + (y - 3)^2 + (z + 7)^2] = k^2$$

$$\text{या } (x^2 + y^2 + z^2 - 6x - 8y - 10z + 9 + 16 + 25) + (x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 6y + 14z + 1 + 9 + 49) = k^2$$

$$\therefore 2(x^2 + y^2 + z^2) - 4x - 14y + 4z + 50 + 59 - k^2 = 0$$

$$\text{या } 2(x^2 + y^2 + z^2) - 4x - 14y + 4z + 109 - k^2 = 0$$

$$\text{या } x^2 + y^2 + z^2 - 2x - 7y + 2z = \frac{k^2 - 109}{2}.$$