

Chapter-2 संबंध एवं फलन

प्रश्नावली 2.1

प्रश्न 1. यदि $\left(\frac{x}{3} + 1, y - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$ तो x तथा y ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $\left(\frac{x}{3} + 1, y - \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{5}{3}, \frac{1}{3}\right)$

दोनों पक्षों के क्रमित अवयवों की तुलना से,

अर्थात् $\frac{x}{3} + 1 = \frac{5}{3}$ या $\frac{x}{3} = \frac{5}{3} - 1 = \frac{2}{3}$

$$x = 2$$

और

$$y - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \text{ या } y = \frac{1}{3} + \frac{2}{3} = 1$$

अतः

$$x = 2, y = 1.$$

प्रश्न 2.

यदि समुच्चय A में 3 अवयव हैं तथा समुच्चय B = {3, 4, 5}, तो A x B में अवयवों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल:

समुच्चय A में 3 अवयव हैं और समुच्चय B में भी 3 अवयव हैं।

A x B में अवयवों की संख्या = $3 \times 3 = 9$.

प्रश्न 3.

यदि G = {7, 8} और H = {5, 4, 2}, तो G x H तथा H x G ज्ञात कीजिए।

हल:

$$G = \{7, 8\}, H = \{5, 4, 2\} \quad G \times H = \{7, 8\} \times \{5, 4, 2\} \\ = \{(7, 5), (7, 4), (7, 2), (8, 5), (8, 4), (8, 2)\}$$

तथा

$$H \times G = \{5, 4, 2\} \times \{7, 8\} = \{(5, 7), (5, 8), (4, 7), (4, 8), (2, 7), (2, 8)\}$$

प्रश्न 4.

बताइए कि निम्नलिखित कथनों में से प्रत्येक सत्य है या असत्य है। यदि कथन असत्य है, तो दिए गए कथन को सही बनाकर लिखिए।

(i) यदि $P = \{m, n\}$ और $Q = \{n, m\}$ तो $P \times Q = \{(m, n), (n, m)\}$.

(ii) यदि A और B अरिक्त समुच्चय हैं, तो $A \times B$ क्रमित युग्मों (x, y) का एक अरिक्त समुच्चय है इस प्रकार कि $x \in A$ तथा $y \in B$.

(iii) यदि $A = \{1, 2\}$, $B = \{3, 4\}$, तो $A \times (B \cap \Phi) = \Phi$

हल:

(i) दिया है :

$$P = \{m, n\}$$

$$Q = \{n, m\}$$

$$P \times Q = \{m, n\} \times \{n, m\} = \{(m, n), (m, m), (n, n), (n, m)\}$$

अतः दिया गया $P \times Q = \{(m, n), (n, m)\}$ कथन असत्य है।

(ii) सत्य है क्योंकि $A \times B$ क्रमित युग्म (x, y) का अरिक्त समुच्चय है जिसमें $x \in A$ तथा $y \in B$.

(iii) सत्य है क्योंकि $B \cap \Phi = \Phi$

$$A \times (B \cap \Phi) = A \times \Phi = \Phi.$$

प्रश्न 5.

यदि $A = \{-1, 1\}$, तो $A \times A \times A$ ज्ञात कीजिए।

हल:

$$A = \{-1, 1\}$$

$$A \times A = \{-1, 1\} \times \{-1, 1\} = \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\}$$

$$A \times A \times A = \{-1, 1\} \times \{(-1, -1), (-1, 1), (1, -1), (1, 1)\} = \{(-1, -1, -1), (-1, -1, 1), (-1, 1, -1), (-1, 1, 1), (1, -1, -1), (1, -1, 1), (1, 1, -1), (1, 1, 1)\}.$$

प्रश्न 6.

यदि $A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\}$ तो A तथा B ज्ञात कीजिए।

हल:

$$A \times B = \{(a, x), (a, y), (b, x), (b, y)\} = \{a, b\} \times \{x, y\}$$

$$\text{अतः } A = \{a, b\}, B = \{x, y\}.$$

प्रश्न 7.

मान लीजिए कि $A = \{1, 2\}$, $B = \{1, 2, 3, 4\}$, $C = \{5, 6\}$ तथा $D = \{5, 6, 7, 8\}$ सत्यापित कीजिए कि

- (i) $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$
(ii) $A \times C, B \times D$ का एक उपसमुच्चय है।

हल:

दिया है। $A = \{1, 2\}, B = \{1, 2, 3, 4\}, C = \{5, 6\}, D = \{5, 6, 7, 8\}$

बायाँ पक्ष = $A \times (B \cap C) = \{1, 2\} \times \{\{1, 2, 3, 4\} \cap \{5, 6\}\} = \{1, 2\} \times \Phi = \Phi$

दायाँ पक्ष = $(A \times B) \cap (A \times C)$

= $[\{1, 2\} \times \{1, 2, 3, 4\}] \cap [\{1, 2\} \times \{5, 6\}]$

= $\{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (2, 4)\} \cap \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$

= Φ

अतः बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष

$A \times C = \{1, 2\} \times \{5, 6\} = \{(1, 5), (1, 6), (2, 5), (2, 6)\}$

$B \times D = \{1, 2, 3, 4\} \times \{5, 6, 7, 8\}$

= $\{(1, 5), (1, 6), (1, 7), (1, 8), (2, 5), (2, 6), (2, 7), (2, 8), (3, 5), (3, 6), (3, 7), (3, 8), (4, 5), (4, 6), (4, 7), (4, 8)\}$

हम पाते हैं कि $A \times C$ के सभी अवयव समुच्चय $B \times D$ में स्थित हैं।

अतः $A \times C \subset B \times D$.

प्रश्न 8.

मान लीजिए कि $A = \{1, 2\}$ और $B = \{3, 4\}$. $A \times B$ लिखिए। $A \times B$ के कितने उपसमुच्चय होंगे ? उनकी सूची बनाइए।

हल:

$A \times B = \{1, 2\} \times \{3, 4\} = \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$

$A \times B$ के उपसमुच्चयों की संख्या = $2^4 = 16$

$A \times B$ के उपसमुच्चयों के अवयव = $6, \{(1, 3)\}, \{(1, 4)\}, \{(2, 3)\}, \{(2, 4)\}, \{(1, 3), (1, 4)\},$

$\{(1, 3), (2, 3)\}, \{(1, 3), (2, 4)\}, \{(1, 4), (2, 3)\}, \{(1, 4), (2, 4)\}, \{(2, 3), (2, 4)\}, \{(1, 3), (1, 4), (2, 3)\},$

$\{(1, 3), (1, 4), (2, 4)\}, \{(1, 3), (2, 3), (2, 4)\}, \{(1, 4), (2, 3), (2, 4)\}, \{(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)\}$.

प्रश्न 9.

मान लीजिए कि A और B दो समुच्चय हैं, जहाँ $n(A) = 3$ और $n(B) = 2$. यदि $(x, 1), (y, 2), (z, 1)$, $A \times B$ में हैं, तो A और B को ज्ञात कीजिए, जहाँ x, y और z भिन्न-भिन्न अवयव हैं।

हल:

अवयव $x, y, z \in A$ अर्थात् $A = \{x, y, z\}$

$1, 2 \in B$ अर्थात् $B = \{1, 2\}$.

प्रश्न 10.

कार्तीय गुणन $A \times A$ में 9 अवयव हैं जिनमें $(-1, 0)$ तथा $(0, 1)$ भी हैं। समुच्चय A ज्ञात कीजिए तथा $A \times A$ के शेष अवयव भी ज्ञात कीजिए।

हल:

$(-1, 0) \in A \times A \Rightarrow -1 \in A$ और $0 \in A \Rightarrow -1, 0 \in A$ और

$(0, 1) \in A \Rightarrow 0 \in A$ तथा $1 \in A$

$\Rightarrow 0, 1 \in A$

$-1, 0, 1 \in A$

$A = \{-1, 0, 1\}$

$A \times A = \{-1, 0, 1\} \times \{-1, 0, 1\}$

$= \{(-1, -1), (-1, 0), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (0, 1), (1, -1), (1, 0), (1, 1)\}$

जिसमें $(-1, 0), (0, 1)$ सम्मिलित है।

अतः $A \times A$ के शेष अवयव $= (-1, -1), (-1, 1), (0, -1), (0, 0), (1, -1), (1, 0), (1, 1)$.

प्रश्नावली 2.2

प्रश्न 1.

मान लीजिए $A = \{1, 2, 3, \dots, 14\}$, $R = \{x, y\} : 3x - y = 0$, जहाँ $x, y \in A$ द्वारा A से A का एक संबंध R लिखिए। इसके प्रांत, सहप्रांत और परिसर लिखिए।

हल:

$A = \{1, 2, 3, \dots, 14\}$, $R : A$ जबकि

$R = \{(x, y) : 3x - y = 0 \text{ या } y = 3x\} = \{(1, 3), (2, 6), (3, 9), (4, 12), \dots\}$

(i) प्रांत : संबंध R के समुच्चयों में x के अवयव $= \{1, 2, 3, 4\}$.

सहप्रांत : $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14\}$.

परिसर : संबंध R के समुच्चयों में y के अवयव $= \{3, 6, 9, 12\}$.

प्रश्न 2.

प्राकृत संख्याओं के समुच्चय पर $R = \{x, y\} : y = x + 5$, x संख्या 4 से कम, एक प्राकृत संख्या है, $x, y \in \mathbb{N}$ द्वारा एक संबंध R परिभाषित कीजिए। इस संबंध को

(i) रोस्टर रूप में इसके प्रांत और परिसर लिखिए।

हल:

संबंध R , दिया गया है।

$$R = \{(x, y) : y = x + 5, x, y \in \mathbb{N} \text{ तदा } x < 4\}$$

$$= \{(1, 6), (2, 7), (3, 8)\}$$

(i) प्रान्त = $\{1, 2, 3\}$.

परिसर = $\{6, 7, 8\}$.

प्रश्न 3.

$A = \{1, 2, 3, 5\}$ और $B = \{4, 6, 9\}$, A से B में एक सम्बन्ध

$R = \{(x, y) : x \text{ और } y \text{ का अंतर विषम है, } x \in A, y \in B\}$ द्वारा परिभाषित कीजिए। R को रोस्टर रूप में लिखिए।

हल:

दिया है:

$A = \{1, 2, 3, 5\}$ और $B = \{4, 6, 9\}$. A से B में संबंध,

$$R = \{(x, y) : x, y \text{ में अंतर विषम है, } x \in A, y \in B\}$$

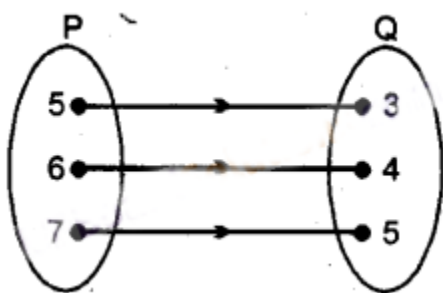
$$= \{(1, 4), (1, 6), (2, 9), (3, 4), (3, 6), (5, 4), (5, 6)\}.$$

प्रश्न 4.

दी हुई आकृति समुच्चय P से Q का एक संबन्ध दर्शाती है। इस संबंध को

(i) समुच्चय निर्माण रूप में

(ii) रोस्टर रूप में लिखिए। इसके प्रांत व परिसर क्या हैं ?



हल:

(i) समुच्चय निर्माण रूप में, $R = \{(x, y) : y = x - 2, x = 5, 6, 7 \text{ के लिए}\}$

(ii) रोस्टर रूप में, $R = \{(5, 3), (6, 4), (7, 5)\}$

प्रान्त = $\{5, 6, 7\}$

और परिसर = $\{3, 4, 5\}$.

प्रश्न 5.

मान लीजिए कि $A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$ मान लीजिए कि R , A पर $\{(a, b) : a, b \in A, \text{संख्या } a \text{ संख्या } b \text{ को यथावथ विभाजित करती है}\}$ द्वारा परिभाषित एक संबंध है।

- (i) R को रोस्टर रूप में लिखिए।
- (ii) R का प्रांत ज्ञात कीजिए।
- (iii) R का परिसर ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया है :

$$A = \{1, 2, 3, 4, 6\}$$

$R = \{(a, b) : a, b \in A, a \text{ संख्या } b \text{ को विभाजित करती है}\}$

- (i) रोस्टर रूप में, $R = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (1, 6), (2, 2), (2, 4), (2, 6), (3, 3), (3, 6), (4, 4), (6, 6)\}$
- (ii) R का प्रांत $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$
- (iii) R का परिसर $= \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$.

प्रश्न 6.

$R = \{(x, x + 5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\}$ द्वारा परिभाषित संबंध R के प्रांत और परिसर ज्ञात कीजिए।

हल:

$$R = \{(x, x + 5) : x \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}\} = \{(0, 5), (1, 6), (2, 7), (3, 8), (4, 9), (5, 10)\}$$

$$R \text{ का प्रांत} = \{0, 1, 2, 3, 4, 5\}$$

$$R \text{ का परिसर} : \{5, 6; 7, 8, 9, 10\}.$$

प्रश्न 7.

संबंध $R = \{(x, x^3) : x \text{ संख्या } 10 \text{ से कम एक अभाज्य संख्या है}\}$ को रोस्टर रूप में लिखिए।

हल:

10 से कम अभाज्य संख्याएँ 2, 3, 5, 7

रोस्टर रूप में, $R = \{(x, x^3) : x \text{ एक अभाज्य संख्या है जो } 10 \text{ से कम है}\}$

$$= \{(2, 8), (3, 27), (5, 125), (7, 343)\}.$$

प्रश्न 8.

मान लीजिए कि $A = \{x, y, z\}$ और $B = \{1, 2\}$, A से B के संबंधों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल:

दिया है। $A = \{x, y, z\}$, $B = \{1, 2\}$

$A \times B = \{(x, 1), (x, 2), (y, 1), (y, 2), (z, 1), (z, 2)\}$

$n(A \times B) = 6$

संबंधों की कुल संख्या = $A \times B$ के उपसमुच्चयों की संख्या = $2^6 = 64$.

प्रश्न 9.

मान लीजिए कि R, Z पर, $R = \{(a, b) : a, b \in Z, a - b \text{ एक पूर्णांक है}\}$, द्वारा परिभाषित एक संबंध है। R के प्रांत व परिसर ज्ञात कीजिए।

हल:

R समुच्चय Z पर एक संबंध है तथा $R = \{(a, b), a \in Z, b \in Z, a - b \text{ एक पूर्णांक संख्या है}\}$

प्रांत $(R) = Z$

परिसर $(R) = Z$.

प्रश्नावली 2.3

प्रश्न 1.

निम्नलिखित संबंधों में से कौन से फलन हैं ? कारण का उल्लेख कीजिए। यदि संबंध एक फलन है तो उसका परिसर निर्धारित कीजिए।

(i) $\{(2, 1), (5, 1), (8, 1), (11, 1), (14, 1), (17, 1)\}$

(ii) $\{(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5), (12, 6), (14, 7)\}$

(iii) $\{(1, 3), (1, 5), (2, 5)\}$

हल:

(i) माना $R = \{(2, 1), (5, 1), (8, 1), (11, 1), (14, 1), (17, 1)\}$

यह संबंध एक फलन है क्योंकि किसी भी दो क्रमित युग्म का पहला घटक बराबर नहीं है।

प्रांत = $\{2, 5, 8, 11, 14, 17\}$ तथा परिसर = $\{1\}$.

(ii) माना $R = \{(2, 1), (4, 2), (6, 3), (8, 4), (10, 5), (12, 6), (14, 7)\}$

यह एक फलन है क्योंकि किसी भी दो क्रमित युग्म का पहला घटक बराबर नहीं है।

अतः प्रांत = $\{2, 4, 6, 8, 10, 12, 14\}$, परिसर = $\{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.

(iii) यह एक फलन नहीं है क्योंकि $(1, 3), (1, 5)$ में पहला घटक समान है।

प्रश्न 2.

निम्नलिखित वास्तविक फलनों के प्रांत तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

(i) $f(x) = -[x]$

हल : दिया है :

(ii) $f(x) = \sqrt{9-x^2}$

$f(x) = -|x|, f(x) \leq 0$ सभी $x \in R$ के लिए

f का मान्यन्त $= R$

तथा

f का परिसर $= \{y : y \in R, y \leq 0\} = (-\infty, 0]$

(ii) (a)

$f(x) = \sqrt{9-x^2}$

$f(x)$ परिभाषित नहीं है जब $9-x^2 < 0$ या $x^2 > 9$

$\Rightarrow x > 3$ और $x < -3$

$\therefore f$ परिभाषित है जब $-3 \leq x \leq 3$

f का प्रान्त $= -3 \leq x \leq 3, x \in R$

अब

मान लीजिए $y = \sqrt{9-x^2}$ या $y^2 = 9-x^2$

या

$x^2 = 9-y^2, x = \sqrt{9-y^2}$

f परिभाषित है यदि $9 = y^2 \geq 0$ या $y^2 \leq 9$

\Rightarrow

$y \leq 3, y \neq -ve$

(b)

f का परिसर $= y \leq 3$ और $y \geq 0$

$= \{y : y \leq R \text{ और } 0 \leq y \leq 3\}.$

प्रश्न 3.

एक फलन $f(x) = 2x - 5$ द्वारा परिभाषित है। निम्नलिखित के मान लिखिए:

(i) $f(0)$

(ii) $f(7)$

(iii) $f(-3)$

हल:

$f(x) = 2x - 5$

(i) $f(0) = 2 \times 0 - 5 = -5$

(ii) $f(7) = 14 - 5 = 9$

(iii) $f(-3) = 2 \times (-3) - 5 = -6 - 5 = -11.$

प्रश्न 4.

फलन 't' सेल्सियस तापमान का फारेनहाइट तापमान में प्रतिचित्रण करता है, जो $t(C) = \frac{9C}{5} + 32$ द्वारा परिभाषित है। निम्नलिखित को ज्ञात कीजिए:

(i) $t(0)$

(ii) $t(28)$

(iii) $t(-10)$

(iv) C का मान, जब $t(C) = 212$

हल : दिया है :

$$t(C) = \frac{9C}{5} + 32$$

(i)

$$t(0) = \frac{9}{5} \times 0 + 32 = 0 + 32 = 32$$

(ii)

$$t(28) = \frac{9 \times 28}{5} + 32 = \frac{252}{5} + 32$$

$$= \frac{252 + 160}{5}$$

$$= \frac{412}{5}$$

(iii)

$$t(-10) = \frac{9}{5} \times (-10) + 32$$

$$= -18 + 32 = 14.$$

(iv)

$$t(C) = 212$$

\therefore

$$212 = \frac{9}{5} \times C + 32$$

या

$$\frac{9}{5} \times C = 212 - 32 = 180$$

$$C = \frac{180 \times 5}{9} = 100.$$

प्रश्न 5.

निम्नलिखित में से प्रत्येक फलन का परिसर ज्ञात कीजिए:

(i) $f(x) = 2 - 3x, x \in R, x > 0$.

(ii) $f(x) = x^2 + 2, x$ एक वास्तविक संख्या है।

(iii) $f(x) = x, x$ एक वास्तविक संख्या है।

हल : (i) दिया है :

$$f(x) = 2 - 3x, x \in R, x > 0 \\ = y \text{ (माना)}$$

\therefore

$$2 - 3x = y \text{ या } 2 - y = 3x \text{ या } x = \frac{2 - y}{3}$$

दिया है:

$$x > 0 \text{ अर्थात् } \frac{2 - y}{3} > 0 \text{ या } 2 - y > 0 \text{ या } y < 2$$

अतः

$$f \text{ का परिसर } = y < 2 \text{ या } (-\infty, 2)$$

(ii)

$$f(x) = y = x^2 + 2, x \in R$$

या

$$x^2 = y - 2$$

या

$$x = \sqrt{y - 2}$$

अर्थात्

$$y - 2 \leq 0 \text{ या } y \geq 2$$

अतः

$$f \text{ का परिसर } y = \{y : y \in R \text{ और } y \geq 2\} \\ = [2, \infty]$$

(iii)

$$f(x) = y = x \text{ या } x = y$$

\therefore

$$x \in R \text{ और } x = y \text{ तब } y \in R$$

अतः

$$f \text{ का परिसर } = \{y : y \in R\} = R$$

अध्याय 2 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. संबंध $f, f(x) = \begin{cases} x^2, 0 \leq x \leq 3 \\ 3x, 3 \leq x \leq 10 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है।

संबंध $g, g(x) = \begin{cases} x^2, 0 \leq x \leq 2 \\ 3x, 2 \leq x \leq 10 \end{cases}$ द्वारा परिभाषित है।

दर्शाइए कि क्यों f एक फलन है और g फलन नहीं है।

हल : (i) दिए गए अंतराल $0 \leq x \leq 3$ में, $f(x) = x^2$ जो कि पूर्णतया परिभाषित है। इस प्रकार अन्तराल $3 \leq x \leq 10$ में $f(x) = 3x$ भी पूर्णतया परिभाषित है। $x = 3$, हो, तब $x^2 = 9$, और $3x = 9$ ।

अतः $f(3) = 9$

इस प्रकार f एक फलन है।

(ii) अंतराल $0 \leq x \leq 2$ में $g(x) = x^2$ जो कि पूर्णतया परिभाषित है।

अंतराल $2 \leq x \leq 10$ में $g(x) = 3x$ पूर्णतया परिभाषित है।

परन्तु

$$x = 2 \text{ पर } x^2 = 4 \text{ और } 3x = 6$$

$$x = 2 \text{ पर } g(x) \text{ के दो मान हैं।}$$

अतः संबंध g एक फलन नहीं है।

इति सिद्धम्

प्रश्न 2. यदि $f(x) = x^2$ तो $\frac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1}$ ज्ञात कीजिए।

हल :

$$f(x) = x^2$$

\therefore

$$f(1.1) = (1.1)^2 = 1.21, \text{ और } f(1) = 1^2 = 1$$

\therefore

$$\frac{f(1.1) - f(1)}{1.1 - 1} = \frac{1.21 - 1}{1.1 - 1}$$

$$= \frac{0.21}{0.1} = 2.1.$$

प्रश्न 3. फलन $f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 8x + 12}$ का प्रान्त ज्ञात कीजिए।

हल :

$$f(x) = \frac{x^2 + 2x + 1}{x^2 - 8x + 12}$$

$$= \frac{(x+1)^2}{(x-2)(x-6)}$$

$x = 2$ और $x = 6$ पर परिभाषित नहीं है।

अतः फलन का प्रान्त संख्याओं 6 और 2 को छोड़कर शेष वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

प्रश्न 4. $f(x) = \sqrt{x-1}$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f का प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

हल :

$$f(x) = \sqrt{x-1}$$

यदि $x - 1 < 0$ या $x < 1$, फलन परिभाषित नहीं है।

$$\text{फलन का प्रान्त} = \{x : x \in R, x \geq 1\} = [1, \infty).$$

(ii) मान लीजिए $y = \sqrt{x-1}$ या $x-1 = y^2$, या $x = 1 + y^2$

अतः फलन का परिसर $= \{y : y \in R, y \geq 0\} = [0, \infty).$

प्रश्न 5. $f(x) = |x-1|$ द्वारा परिभाषित वास्तविक फलन f का प्रान्त तथा परिसर ज्ञात कीजिए।

हल :

$$f(x) = |x-1|$$

x के सभी वास्तविक मूल्यों के लिए फलन परिभाषित है

$$f \text{ का प्रान्त} = R$$

$$f(x) = |x-1|, f \text{ का मान जब } x \in R, \text{ एक धनात्मक संख्या है।}$$

अतः f का परिसर = ऋणेतर वास्तविक संख्याएँ।

प्रश्न 6. मान लीजिए कि $f = \left\{ \left(x, \frac{x^2}{1+x^2} \right) : x \in R \right\}$ R से R में एक फलन है। f का परिसर निर्धारित कीजिए।

हल : माना $f(x) = y = \frac{x^2}{1+x^2}$ या $y + yx^2 = x^2$ या $x^2 - x^2y = y$ या $x^2(1-y) = y$ तब $x^2 = \frac{y}{1-y}$

$\Rightarrow y \neq 1$

x की सभी वास्तविक मूल्यों के लिए $y \geq 0$

f का अंश हर से सदैव कम है, $y \leq 1$

$\therefore f$ का परिसर = कोई भी धन वास्तविक संख्या इस प्रकार कि $0 \leq x < 1$.

प्रश्न 7. मान लीजिए कि $f, g : R \rightarrow R$ क्रमशः $f(x) = x + 1, g(x) = 2x - 3$ द्वारा परिभाषित है। $f + g, f - g$ और $\frac{f}{g}$ ज्ञात कीजिए।

हल : $f(x) = x + 1, g(x) = 2x - 3$

$(f + g) = f(x) + g(x) = x + 1 + 2x - 3 = 3x - 2.$

$(f - g)(x) = f(x) - g(x) = (x + 1) - (2x - 3) = x + 1 - 2x + 3 = -x + 4.$

और $\frac{f}{g}(x) = \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x+1}{2x-3},$ जबकि $x \neq \frac{3}{2}.$

प्रश्न 8.

मान लीजिए कि $f = \{(1, 1), (2, 3), (0, -1), (-1, -3)\}$ Z से Z में, $f(x) = ax + b$, द्वारा परिभाषित एक फलन है, जहाँ a, b कोई पूर्णांक हैं। a, b को निर्धारित कीजिए।

हल:

दिया है :

$f = \{(1, 1), (2, 3), (0, -1), (-1, -3)\}$

और $f(x) = ax + b \dots (A)$

जब $x = 1; y = 1$, हो तब $a + b = 1 \dots (i)$

और जब $x = 2, y = 3, 2a + b = 3 \dots (ii)$

समीकरण (i) और (ii) से,

$a = 2, b = -1$

a तथा b के इन मानों को समीकरण (A) में रखने पर,

$f(x) = 2x - 1$

जब $x = 0$, $f(x) = -1$

और जब $x = -1$, $f(x) = -3$

अतः $f(x) = 2x - 1$ तथा $a = 2$, $b = -1$.

प्रश्न 9.

$R = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{N} \text{ तथा } a = b^2\}$ द्वारा परिभाषित \mathbb{N} से \mathbb{N} में, एक संबंध R है। क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं।

(i) $\{a, a\} \in R$ सभी $a \in \mathbb{N}$

(ii) $(a, b) \in R$ का तात्पर्य है कि $(b, a) \in R$

(iii) $(a, b) \in R$, $(b, c) \in R$ का तात्पर्य है कि $(a, c) \in R$? प्रत्येक दशा में अपने उत्तर का औचित्य भी बताइए।

हल:

(i) $a = a$ यह सत्य है जब $a = 0$, $0 \notin \mathbb{N}$,

अतः यह एक संबंध नहीं है।

(ii) $a = b^2$, और $b = a^2$, यह $a, b \in \mathbb{N}$, a, b के सभी मूल्यों के लिए सत्य नहीं है। अतः यह एक संबंध नहीं है।

(iii) जब $a = b^2$, $b = c^2$ तब $a \neq c^2$

यह संबंध नहीं है।

प्रश्न 10.

मान लीजिए $A = \{1, 2, 3, 4\}$, $B = \{1, 5, 9, 11, 15, 16\}$ और $f = \{(1, 5), (2, 9), (3, 1), (4, 5), (2, 11)\}$, क्या निम्नलिखित कथन सत्य हैं ?

(i) f , A से B में एक संबंध है।

(ii) f , A से B में एक फलन है। प्रत्येक दशा में अपने उत्तर का औचित्य बताइए।

हल:

(i) दिया है: $A = \{1, 2, 3, 4\}$ तथा $B = \{1, 5, 9, 11, 15, 16\}$

$A \times B = \{(1, 1), (1, 5), (1, 9), (1, 11), (1, 15), (1, 16), (2, 1), (2, 5), (2, 9), (2, 11), (2, 15), (2, 16), (3, 1), (3, 5), (3, 9), (3, 11), (3, 15), (3, 16), (4, 1), (4, 5), (4, 9), (4, 11), (4, 15), (4, 16)\}$

अवयव, $A \times B$ का उपसमुच्चय है।

अतः यह एक संबंध है।

(ii) f में $(2, 9)$ और $(2, 11)$ अवयव प्रथम घटक दोनों युग्मों में 2 है।

यह फलन नहीं है।

प्रश्न 11.

मान लीजिए कि $f, f = \{(ab, a + b); a, b \in \mathbb{Z}\}$ द्वारा परिभाषित $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ का एक उपसमुच्चय है। क्या f, \mathbb{Z} से \mathbb{Z} में एक फलन है ? अपने उत्तर का औचित्य भी स्पष्ट कीजिए।

हल:

मान लीजिए $a = 0, b = 1$ हो, तब

$ab = 0$ और $a + b = 0 + 1 = 1$

पुनः माना $a = 0, b = 2$ हो, तब

$ab = 0, a + b = 2$.

अवयव 0 के दो प्रतिबिंब 1 और 2 हैं।

अतः f एक फलन नहीं है।

प्रश्न 12.

मान लीजिए कि $A = \{9, 10, 11, 12, 13\}$ तथा $f : A \rightarrow \mathbb{N}, f(n) = n$ का महत्तम अभाज्य गुणक द्वारा परिभाषित है।/का परिसर ज्ञात करो।

हल:

यदि $n = 9 = 3 \times 3$ तो 3 इन गुणनखंडों में सबसे बड़ी अभाज्य संख्या है।

$n = 10 = 2 \times 5$ तो 5 इन गुणनखंडों में सबसे बड़ी अभाज्य संख्या है।

$n = 11 = 1 \times 11$ तो 11 इन गुणनखंडों में सबसे बड़ी अभाज्य संख्या है।

$n = 12 = 2 \times 2 \times 3$ तो 3 इन गुणनखंडों में सबसे बड़ी अभाज्य संख्या है।

$n = 13 = 1 \times 13$ तो 13 इन गुणनखंडों में सबसे बड़ी अभाज्य संख्या है।

अतः f का परिसर $= \{3, 5, 11, 13\}$.