Chapter-4 गणितीय आगमन का सिद्धान्त

प्रश्नावली 4.1

सभी n ∈ N के लिए गणितीय आगमन सिद्धांत के प्रयोग द्वारा सिद्ध कीजिए कि:

प्रश्न 1. $1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$.

हल : माना दिया हुआ कथन $P(n)$ है।

$\therefore \quad P(n) : 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{n-1} = \frac{3^n - 1}{2}$

$n = 1$ रखने पर, $\therefore$ बायाँ पक्ष $P(n) = 1$

$$\text{दायाँ पक्ष} = \frac{3^1 - 1}{2}$$

$$= \frac{2}{2} = 1$$

$\therefore n = 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

मान लीजिए $n = k$ के लिए कथन सत्य है।

$$\therefore \quad P(k) = 1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{k-1} = \frac{3^k - 1}{2}$$

3^k को दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$$1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{k-1} + 3^k = \frac{3^k - 1}{2} + 3^k$$

$$\text{दायाँ पक्ष} = \frac{3^k - 1 + 2.3^k}{2}$$

$$= \frac{3.3^k - 1}{2}$$

$$= \frac{3^{k+1} - 1}{2}$$

$$\therefore 1 + 3 + 3^2 + \ldots\ldots + 3^k = \frac{3^{k+1} - 1}{2}$$

यह कथन $n = k + 1$ के लिए सत्य है।

$\Rightarrow$ जब भी $P(k)$ सत्य होगा $P(k+1)$ भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धातं के अनुसार $P(n)$ उन सभी n के मान के लिए सत्य है जो $n \in N$ है।

प्रश्न 2. $1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3 = \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

हल : माना

$$P(n) : 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

यदि $n = 1$, बायाँ पक्ष $= 1^3 = 1$

$$\text{दायाँ पक्ष} = \frac{1^2(1+1)^2}{4}$$

$$= \frac{4}{4} = 1$$

$\therefore n = 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

मान लीजिए कथन $n = k$ के लिए सत्य है।

$$\therefore 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4}$$

दोनों और $(k+1)^3$ जोड़ने पर,

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + k^3 + (k+1)^3 = \frac{k^2(k+1)^2}{4} + (k+1)^3$$

$$= (k+1)^2\left[\frac{k^2}{4} + (k+1)\right]$$

$$= (k+1)^2\left[\frac{k^2+4k+4}{4}\right]$$

$$= \frac{(k+1)^2(k+2)^2}{4}$$

$$\therefore\ 1^2 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + (k+1)^3 = \frac{(k+1)^2 (k+2)^2}{4}$$

$$= \frac{(k+1)^2 (\overline{k+1}+1)^2}{4}$$

इससे सिद्ध हुआ कि यदि $P(n)$ मान $n = k$ के लिए सत्य है तो $P(n)$, $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n)$, n के सभी मान के लिए सत्य होगा यदि $n \in N$.

प्रश्न 3. $1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+.......+\frac{1}{1+2+3+.....+n}=\frac{2n}{n+1}$.

हल : माना

$$P(n)=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+.....+\frac{1}{1+2+3+.....+n}=\frac{2n}{n+1}.$$

$n=1$ के लिए बायाँ पक्ष $=1$

दायाँ पक्ष $=\frac{2\times1}{1+1}=\frac{2}{2}=1=$ बायाँ पक्ष

$\therefore P(n)$, $n=1$ के लिए सत्य है

मान लिया $n=k$ के लिए कथन सत्य है।

$$\therefore P(k)=1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+....+\frac{1}{1+2+3+....+k}=\frac{2k}{k+1}$$

दोनों पक्षों में $\frac{1}{1+2+3+....+k+(k+1)}$ जोड़ने पर,

$$1+\frac{1}{1+2}+\frac{1}{1+2+3}+.....+\frac{1}{1+2+3+...+k}+\frac{1}{1+2+3+...+k+(k+1)}$$

$$=\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{1+2+3+...+k+(k+1)}$$

दायाँ पक्ष $=\frac{2k}{k+1}+\frac{1}{\frac{(k+1)(k+2)}{2}}$ $\left[\because 1+2+....+n=\frac{n(n+1)}{2}\right]$

$$=\frac{2k}{k+1}+\frac{2}{(k+1)(k+2)}$$

$$=\frac{2k(k+2)+2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{2[k^2 + 2k + 1]}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{2(k+1)^2}{(k+1)(k+2)}$$

$$= \frac{2(k+1)}{(k+2)}$$

$$= \frac{2(k+1)}{k+1+1}$$

इससे सिद्ध हुआ कि $P(n)$, $n = k + 1$ के लिए सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n)$, $n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 4. $\mathbf{1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + n(n+1)(n+2) = \dfrac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}}$.

हल : मान लीजिए $P(n) = 1.2.3 + 2.3.4 + \ldots + n(n+1)(n+2)$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}$$

यदि $n = 1$, बायाँ पक्ष $= 1.2.3 = 6$

$$\text{दायाँ पक्ष} = \frac{1.2.3.4}{4} = 6$$

$\therefore$ $n = 1$ के लिए $P(n)$ सत्य है।

मान लीजिए $P(n)$, $n = k$ के लिए सत्य है।

$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + k(k+1)(k+2)$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4}$$

पक्ष का $(k+1)^n$ पद $= (k+1)(k+2)(k+3)$

दोनों पक्षों में $(k+1)(k+2)(k+3)$ जोड़ने पर

$1.2.3 + 2.3.4 + 3.4.5 + \ldots + k(k+1)(k+2) + (k+1)(k+2)(k+3)$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)(k+3)}{4} + (k+1)(k+2)(k+3)$$

$$= (k+1)(k+2)(k+3)\left[\frac{k}{4} + 1\right]$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)(k+4)}{4}$$

$$= \frac{(k+1)(\overline{k+1}+1)(\overline{k+1}+2)(\overline{k+1}+3)}{4}$$

इससे सिद्ध हुआ कि $P(n)$, $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n)$, $n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 5. $\mathbf{1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + ... + n.\ 3^n = \dfrac{(2n-1).3^{n+1}+3}{4}}$.

हल : माना

$$P(n) : 1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + ... + n.3^n = \frac{(2n-1).3^{n+1}+3}{4}$$

यदि $n = 1$, $P(n)$ का बायाँ पक्ष $= 1.3 = 3$

$$\text{दायाँ पक्ष} = \frac{(2n-1).3^{n+1}+3}{4}$$

$$= \frac{1.9+3}{4} = \frac{12}{4} = 3$$

$\therefore$ $P(n)$, $n = 1$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए $P(n)$, $n = k$ के लिए सत्य है।

$$\therefore \quad 1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + ... + k.3^k = \frac{(2k-1).3^{k+1}+3}{4}$$

$(k+1)$ वाँ पद $= (k+1).3^{k+1}$

$(k+1).3^{k+1}$ को दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$1.3 + 2.3^2 + 3.3^3 + ... + k.3^k + (k+1).3^{k+1}$

$$= \frac{(2k-1).3^{k+1}+3}{4} + (k+1).3^{k+1}$$

$$\text{दायाँ पक्ष} = \frac{(2k-1).3^{k+1}+3}{4} + (k+1).3^{k+1}$$

$$= \frac{(2k-1).3^{k+1}+3+4(k+1).3^{k+1}}{4}$$

$$= \frac{(2k-1+4k+4).3^{k+1}+3}{4}$$

$$= \frac{(6k+3).3^{k+1}+3}{4} = \frac{3(2k+1).3^{k+1}+3}{4}$$

$$= \frac{[2(k+1)-1].3^{\overline{k+1}+1}+3}{4}$$

इससे सिद्ध हुआ कि $P(n)$, $n = k + 1$ के लिए सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार, $P(n)$, $n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 6. $1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1) = \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)$...

हल : माना

$$P(n) = 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + n(n + 1) = \left(\frac{n(n+1)(n+2)}{3}\right)$$

यदि $n = 1$, बायाँ पक्ष $= 1.2 = 2$

$$\text{दायाँ पक्ष} = \frac{n(n+1)(n+2)}{3} = \frac{1.2.3}{3} = 2$$

$\therefore P(n), n = 1$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए $P(n), n = k$ के लिए सत्य है

$$\therefore \quad 1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + k(k + 1) = \frac{k(k+1)(k+2)}{3}$$

$$(k + 1) \text{ वाँ पद} = (k + 1)(k + 2)$$

दोनों पक्षों में $(k + 1)(k + 2)$ जोड़ने पर,

$1.2 + 2.3 + 3.4 + ... + k(k + 1) + (k + 1)(k + 2)$

$$= \frac{k(k+1)(k+2)}{3} + (k + 1)(k + 2)$$

$$= (k + 1)(k + 2)\left(\frac{k}{3} + 1\right)$$

$$= \frac{(k+1)(k+2)(k+3)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(\overline{k+1}+1)(\overline{k+1}+2)}{3}$$

$\therefore P(n), n = k + 1$ के लिए सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n), n \in N, n$ के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 7. $1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + (2n - 1)(2n + 1) = \frac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}$

हल : मान लीजिए

$$P(n) : 1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + (2n - 1)(2n + 1) = \frac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}$$

यदि $n = 1$, **बायाँ पक्ष** $= 1.3 = 3$

$$\textbf{दायाँ पक्ष} = \frac{n(4n^2 + 6n - 1)}{3}$$

$$= \frac{1.(4.1^2 + 6.1 - 1)}{3}$$

$$= \frac{4+6-1}{3} = \frac{9}{3} = 3$$

$\therefore P(n), n = 1$ के लिए सत्य है।

$$\therefore 1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + (2k-1)(2k+1) = \frac{k(4k^2+6k-1)}{3}$$

$(k+1)$ वाँ पद $= [2(k+1)-1][2(k+1)+1] = (2k+1)(2k+3)$ को दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$1.3 + 3.5 + 5.7 + ... + (2k-1)(2k+1) + (2k+1)(2k+3)$

$$= \frac{k(4k^2+6k-1)}{3} + (2k+1)(2k+3)$$

$$= \frac{4k^3+6k^2-k+3(2k+1)(2k+3)}{3}$$

$$= \frac{4k^3+6k^2-k+3(4k^2+8k+3)}{3}$$

$$= \frac{4k^3+18k^2+23k+9}{3}$$

$$= \frac{(k+1)(4k^2+14k+9)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)\left[4(k+1)^2+6(k+1)-1\right]}{3}$$

$\Rightarrow P(n), n = k+1$ के लिए सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n), n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 8. $1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + n.2^n = (n-1).\ 2^{n+1} + 2.$

हल : माना

$$P(n) : 1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + n.2^n = (n-1).\ 2^{n+1} + 2$$

यदि $n = 1$, बायाँ पक्ष $= 1.2 = 2$

दायाँ पक्ष $= (n-1).\ 2^{n+1} + 2 = 0 + 2 = 2$

$\therefore P(n), n = 1$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए $P(n), n = k$ के लिए सत्य है।

$\therefore 1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + k.2^k = (k-1).2^{k+1} + 2$

$(k+1)$ वाँ पद $= (k+1).2^{k+1}$ को दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$$\begin{aligned} 1.2 + 2.2^2 + 3.2^3 + \ldots + k.2^k + (k+1).2^{k+1} &= (k-1).2^{k+1} + 2 + (k+1).2^{k+1} \\ &= (k-1+k+1).2^{k+1} + 2 \\ &= 2k.2^{k+1} + 2 = k.2^{k+2} + 2 \\ &= (\overline{k+1} - 1).2^{\overline{k+1}+1} + 2 \end{aligned}$$

$\Rightarrow P(n), n = k + 1$ के लिए सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार, $P(n), n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 9. $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.....+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$

हल : माना $P(n): \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.....+\frac{1}{2^n}=1-\frac{1}{2^n}$

यदि $n = 1$, बायाँ पक्ष $= \frac{1}{2}$

दायाँ पक्ष $= 1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$

$\therefore$ $P(n)$, $n = 1$ के लिए सत्य है।
मान लिया $P(n)$, $n = k$ के लिए सत्य है।

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.....+\frac{1}{2^k}=1-\frac{1}{2^k}$$

$(k+1)$ वाँ पद $= \frac{1}{2^{k+1}}$ दोनों पक्षों में जोड़ने पर

$$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+.....+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}=1-\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^{k+1}}$$

$$=1-\frac{1}{2^k}\left(1-\frac{1}{2}\right)$$

$$=1-\frac{1}{2^k}\cdot\frac{1}{2}=1-\frac{1}{2^{k+1}}$$

$\Rightarrow$ $P(n)$, $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है।
अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n)$, $n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 10. $\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+....+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}$.

हल : माना

$$P(n): \frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+....+\frac{1}{(3n-1)(3n+2)}=\frac{n}{6n+4}$$

यदि $n=1$, बायाँ पक्ष $=\frac{1}{2.5}=\frac{1}{10}$

दायाँ पक्ष $=\frac{n}{6n+4}=\frac{1}{6+4}=\frac{1}{10}$

$\Rightarrow P(n)$, $n=1$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए $P(n)$, $n=k$ के लिए सत्य है।

$$\therefore \frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+....+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}=\frac{k}{6k+4}$$

$(k+1)$ वाँ पद $=\dfrac{k}{[3(k+1)-1][3(k+1)+2]}=\dfrac{k}{(3k+2)(3k+5)}$ दोनों पक्षों में जोड़ने पर

$$\frac{1}{2.5}+\frac{1}{5.8}+\frac{1}{8.11}+....+\frac{1}{(3k-1)(3k+2)}+\frac{1}{(3k+2)(3k+5)}$$

$$=\frac{k}{6k+4}+\frac{1}{(3k+2)(3k+5)}$$

$$=\frac{k(3k+5)+2}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$=\frac{3k^2+5k+2}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$=\frac{(3k+2)(k+1)}{2(3k+2)(3k+5)}$$

$$=\frac{k+1}{6k+10}$$

$$=\frac{k+1}{6(k+1)+4}$$

$\Rightarrow P(n)$, $n=k+1$ के लिए सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n)$, $n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 11. $\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$.

हल : माना

$$P(n):\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+\ldots\ldots+\frac{1}{n(n+1)(n+2)}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

$n=1$ के लिए बायाँ पक्ष $=\frac{1}{1.2.3}=\frac{1}{6}$

$$\text{दायाँ पक्ष}=\frac{n(n+3)}{4(n+1)(n+2)}$$

$$=\frac{1.4}{4.2.3}=\frac{1}{6}$$

$\Rightarrow P(n)$, $n=1$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए $P(n)$, $n=k$ के लिए सत्य है।

$$\therefore \frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+....+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}$$

$(k+1)$वाँ पद $= \dfrac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$ दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$$\frac{1}{1.2.3}+\frac{1}{2.3.4}+\frac{1}{3.4.5}+....+\frac{1}{k(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{k(k+3)}{4(k+1)(k+2)}+\frac{1}{(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{1}{(k+1)(k+2)}\left[\frac{k(k+3)}{4}+\frac{1}{k+3}\right]$$

$$=\frac{k(k+3)^2+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{k\left(k^2+6k+9\right)+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{k^3+6k^2+9k+4}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)\left(k^2+5k+4\right)}{4(k+1)(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{(k+4)(k+1)}{4(k+2)(k+3)}$$

$$=\frac{(k+1)(\overline{k+1}+3)}{4(\overline{k+1}+1)(\overline{k+1}+2)}$$

$\Rightarrow P(n)$, $n=k+1$ के लिए सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n)$, $n\in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 12. $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$.

हल : मान लीजिए $P(n) = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}$,

$n = 1$ के लिए बायाँ पक्ष $= a$

$$\text{दायाँ पक्ष} = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1} = a$$

$\Rightarrow P(n)$, $n = 1$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए $P(n)$, $n = k$ के लिए सत्य है।

$$\therefore \quad a + ar + ar^2 + ... + ar^{k-1} = \frac{a(1 - r^k)}{1 - r}$$

$(k + 1)$ वाँ पद $= ar^k$ को दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$$a + ar + ar^2 + ... + ar^{k-1} = \frac{a(1 - r^k)}{1 - r} + ar^k$$

$$= a\left[\frac{1 - r^k}{1 - r} + r^k\right]$$

$$= a\left[\frac{1 - r^k + r^k - r^{k+1}}{1 - r}\right]$$

$$= \frac{a(1 - r^{k+1})}{1 - r}$$

$\Rightarrow P(n)$, $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n)$, $n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 13. $\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)....\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right)=(n+1)^2.$

हल : माना

$$P(n):\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)....\left(1+\frac{2n+1}{n^2}\right)=(n+1)^2$$

$n=1$ के लिए बायाँ पक्ष $=1+\frac{3}{1}=1+3=4$

दायाँ पक्ष $=(n+1)^2$

$=(1+1)^2=2^2=4$

$\Rightarrow P(n)$, $n=1$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए $P(n)$, $n=k$ के लिए सत्य है।

$$\therefore \quad \left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)...\left(1+\frac{2k+1}{k^2}\right)=(k+1)^2$$

$(k+1)$वाँ पद $=\left[1+\frac{2k+3}{(k+1)^2}\right]$ से दोनों पक्षों में गुणा करने पर,

$$\left(1+\frac{3}{1}\right)\left(1+\frac{5}{4}\right)\left(1+\frac{7}{9}\right)...\left(1+\frac{2k+1}{k^2}\right)\left[1+\frac{2k+3}{(k+1)^2}\right]$$

$$=(k+1)^2\left[1+\frac{2k+3}{(k+1)^2}\right]$$

$$=(k+1)^2\left[\frac{(k+1)^2+2k+3}{(k+1)^2}\right]$$

$$=(k^2+2k+1+2k+3)$$

$$=k^2+4k+4=(k+2)^2=(\overline{k+1}+1)^2$$

$\Rightarrow P(n)$, $n=k+1$ के लिए सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n)$, $n\in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 14. $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)....\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1.$

हल : माना $P(n)$: $\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)...\left(1+\frac{1}{n}\right)=n+1$

$n=1$ के लिए बायाँ पक्ष $=1+\frac{1}{1}=2$

दायाँ पक्ष $=n+1=1+1=2$

$\Rightarrow P(n)$, $n=1$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए $P(n)$, $n=k$ के लिए सत्य है।

$$\therefore \quad \left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)...\left(1+\frac{1}{k}\right)=k+1$$

$(k+1)$ वाँ गुणनखंड $=1+\frac{1}{k+1}$ से दोनों पक्षों में गुणा करने पर,

$$\left(1+\frac{1}{1}\right)\left(1+\frac{1}{2}\right)\left(1+\frac{1}{3}\right)...\left(1+\frac{1}{k}\right)\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=(k+1).\left(1+\frac{1}{k+1}\right)$$

$$=(k+1)\left(\frac{k+1+1}{k+1}\right)$$

$$=k+2=\overline{k+1}+1$$

इससे सिद्ध होता है कि $P(n)$, $n=k+1$ के लिए सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n)$, $n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 15. $1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots + (2n-1)^2 = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$.

हल : माना

$$P(n) : 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots\ldots + (2n-1)^2 = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$$

$n = 1$ के लिए बायाँ पक्ष $= 1^2 = 1$

$$\text{दायाँ पक्ष} = \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} = \frac{1.1.3}{3} = 1$$

$\Rightarrow P(n), n = 1$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए $P(n), n = k$ के लिए सत्य है।

$$\therefore \quad 1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3}$$

$(k + 1)$ वाँ पद $= (2k + 1)^2$ को दोनों पक्षों में जोड़ने पर

$$1^2 + 3^2 + 5^2 + \ldots + (2k-1)^2 + (2k+1)^2 = \frac{k(2k-1)(2k+1)}{3} + (2k+1)^2$$

$$= (2k+1)\left[\frac{k(2k-1)}{3} + (2k+1)\right]$$

$$= (2k+1)\left[\frac{k(2k-1) + 3(2k+1)}{3}\right]$$

$$= \frac{(2k+1)(2k^2+5k+3)}{3}$$

$$= \frac{(2k+1)(k+1)(2k+3)}{3}$$

$$= \frac{(k+1)\left[2(\overline{k+1})-1\right]\left[2(\overline{k+1})+1\right]}{3}$$

$\Rightarrow P(n), n = k + 1$ के लिए सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n), n \in N, n$ के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 16. $\frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+.....+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$.

हल : माना

$$P(n):\ \frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+.....+\frac{1}{(3n-2)(3n+1)}=\frac{n}{3n+1}$$

$n=1$ के लिए बायाँ पक्ष $=\frac{1}{1.4}=\frac{1}{4}$

$$\text{दायाँ पक्ष}=\frac{n}{3n+1}=\frac{1}{3+1}=\frac{1}{4}$$

$\Rightarrow P(n)$, $n=1$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए $P(n)$, $n=k$ के लिए सत्य है।

$$\therefore \quad \frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+....+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}=\frac{k}{3k+1}$$

$(k+1)$ वाँ पद $= \frac{1}{[3(k+1)-2][3(k+1)+1]} = \frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$ को दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$$\therefore \frac{1}{1.4}+\frac{1}{4.7}+\frac{1}{7.10}+\ldots+\frac{1}{(3k-2)(3k+1)}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{k}{3k+1}+\frac{1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{1}{3k+1}\left[k+\frac{1}{3k+4}\right]$$

$$= \frac{k(3k+4)+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{3k^2+4k+1}{(3k+1)(3k+4)}$$

$$= \frac{(3k+1)(k+1)}{(3k+1)(3k+4)} = \frac{k+1}{3k+4}$$

$$= \frac{\overline{k+1}}{3(k+1)+1}$$

$\Rightarrow P(n), n = k+1$ के लिए सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n), n \in N, n$ के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 17. $\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+....+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{3(2n+3)}$.

हल : माना

$$P(n):\ \frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+....+\frac{1}{(2n+1)(2n+3)}=\frac{n}{3(2n+3)}$$

$n=1$ के लिए बायाँ पक्ष $=\frac{1}{3.5}=\frac{1}{15}$

दायाँ पक्ष $=\frac{n}{3(2n+3)}=\frac{1}{3.5}=\frac{1}{15}$

$\therefore P(n), n=1$ के लिए सत्य है।

मान लिया $P(n), n=k$ के लिए सत्य है।

$$\therefore \quad \frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+....+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}=\frac{k}{3(2k+3)}$$

$(k+1)$ वाँ पद $=\frac{1}{[2(k+1)+1][2(k+1)+3]}=\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$ को दोनों पक्षों में जोड़ने पर,

$$\frac{1}{3.5}+\frac{1}{5.7}+\frac{1}{7.9}+......+\frac{1}{(2k+1)(2k+3)}+\frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{k}{3(2k+3)} + \frac{1}{(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{1}{(2k+3)}\left[\frac{k(2k+5)+3}{3(2k+5)}\right]$$

$$= \frac{2k^2+5k+3}{3(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{(k+1)(2k+3)}{3(2k+3)(2k+5)}$$

$$= \frac{k+1}{3(2k+5)}$$

$$= \frac{k+1}{3[2(k+1)+3]}$$

$\Rightarrow P(n)$, $n = k + 1$ के लिए सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n)$, $n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 18. $1 + 2 + 3 + ... + n < \frac{1}{8}(2n + 1)^2$

हल : माना $P(n) : 1 + 2 + 3 + ... + n < \frac{1}{8}(2n + 1)^2$

$n = 1$ के लिए बायाँ पक्ष $= 1$

$$\text{दायाँ पक्ष} = \frac{1}{8}(2n + 1)^2$$

$$= \frac{1}{8} \times 3^2 = \frac{9}{8}$$

$$1 < \frac{9}{8}$$

$\Rightarrow P(n)$, $n = 1$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए $P(n)$, $n = k$ के लिए सत्य है।

$$\therefore \quad 1 + 2 + 3 + ... + k < \frac{1}{8}(2k + 1)^2$$

$(k + 1)$वाँ पद $= k + 1$ दोनों पक्षों में जोड़ने पर

$$\text{बायाँ पक्ष} = 1 + 2 + 3 + ... + k + (k + 1)$$

$$\frac{1}{8}(2k + 1)^2 + (k + 1) = \frac{1}{8}[(2k + 1)^2 + 8(k + 1)]$$

$$= \frac{1}{8}[4k^2 + 4k + 1 + 8k + 8]$$

$$= \frac{1}{8}[4k^2 + 12k + 9]$$

$$= \frac{1}{8}[2k + 3]^2 = \frac{1}{8}[2(k + 1) + 1]^2$$

$\therefore \quad 1 + 2 + 3 + ... + (k + 1) < \frac{1}{8}[2(k + 1) + 1]^2$

$\Rightarrow P(n)$, $n = k + 1$ के लिए सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n), n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 19. $n(n + 1)(n + 5)$, संख्या 3 का एक गुणज है।

हल : मान लीजिए $P(n) : n(n + 1)(n + 5)$, संख्या 3 का गुणज है

$n = 1$ के लिए $n(n + 1)(n + 5) = 1.2.6 = 12$ जो 3 का गुणज है

$P(n), n = 1$ के लिए सत्य है

मान लीजिए $P(n), n = k$ के लिए सत्य है

$$k(k + 1)(k + 5) = 3m$$

या $\quad k^3 + 6k^2 + 5k = 3m$

k के स्थान पर $k + 1$ रखने पर

$$\begin{aligned}(k + 1)^3 + 6(k + 1)^2 + 5(k + 1) &= (k^3 + 3k^2 + 3k + 1) + 6(k^2 + 2k + 1) + 5k + 5 \\ &= k^3 + 9k^2 + 20k + 12 \\ &= (k^3 + 6k^2 + 5k) + (3k^2 + 15k + 12) \\ &= \mathbf{3m + 3(k^2 + 5k + 4)}\end{aligned}$$

यह 3 का एक गुणज है।

$\Rightarrow P(n), n = k + 1$ के लिए **भी सत्य है।**

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n), n \in N$, n **के सभी मानों** के लिए सत्य है।

प्रश्न 20. $10^{2n-1}+1$, संख्या 11 से भाज्य है।

हल : माना $P(n)$: $10^{2n-1}+1$ संख्या 11 से विभाजित होती है।

$n=1$, के लिए $10^{2n-1}+1=10^{2-1}+1=11$

$P(n)$, $n=1$ के लिए सत्य है

मान लीजिए $P(n)$, $n=k$ के लिए सत्य है।

$\therefore$ $10^{2k-1}+1$, संख्या 11 से विभाजित होती है।

या $$10^{2k-1}+1=11m \text{ (माना)}$$

k को $k+1$ से बदलने पर

$$\begin{aligned} 10^{2(k+1)-1}+1 &= 10^{2k+1}+1 \\ &= 10^2.10^{2k-1}+1 \\ &= 10^2(10^{2k-1}+1)-100+1 \\ &= 100.11m-99 \\ &= 11(100m-9) \end{aligned}$$

इससे सिद्ध हुआ कि $10^{2k+1}+1$ भी 11 से विभाजित होता है।

$\Rightarrow P(n)$, $n=k+1$ के लिए भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n)$, $n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 21. $x^{2n} - y^{2n}$, $(x + y)$ से भाज्य है।

हल : मान लीजिए $P(n) : x^{2n} - y^{2n}$, $x + y$ से विभाजित होता है।

$n = 1$ के लिए $x^2 - y^2 = (x - y)(x + y)$ जो $x + y$ से विभक्त होता है।

$\Rightarrow P(n)$, $n = 1$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए $P(n)$, $n = k$ के लिए सत्य है।

$\therefore x^{2k} - y^{2k}$, $x + y$ से विभक्त होता है।

या $$x^{2k} - y^{2k} = m(x + y)$$

या $$x^{2k} = m(x + y) + y^{2k} \qquad \ldots(1)$$

k के स्थान पर $k + 1$ रखने पर, सिद्ध करना है कि $x^{2(k+1)} - y^{2(k+1)}$, $x + y$ से विभक्त होता है।

$$x^{2(k+1)} - y^{2(k+1)} = x^2 \,.\, x^{2k} - y^{2k+2}$$

$$= x^2 [m(x + y) + y^{2k}] - y^{2k+2}$$

(1) से x^{2k} का मान रखने पर,

$$= m(x + y)x^2 + x^2y^{2k} - y^{2k+2}$$

$$= m(x + y)x^2 + y^{2k}(x^2 - y^2)$$

$$= (x + y)[mx^2 + y^{2k}(x - y)]$$

इससे सिद्ध होता है कि $x^{2(k+1)} - y^{2(k+1)}$, $x + y$ से विभाजित होता है।

$\Rightarrow P(n)$, $n = k + 1$ के लिए भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n)$, $n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 22. $3^{2n+2} - 8n - 9$, संख्या 8 से भाज्य है।

हल : मान लीजिए $P(n) : 3^{2n+2} - 8n - 9$ संख्या 8 से विभक्त होती है।

$n = 1$ के लिए,

$$\begin{aligned} 3^{n+2} - 8n - 9 &= 3^{2+2} - 8.1 - 9 \\ &= 3^4 - 8 - 9 \\ &= 81 - 17 = 64 \end{aligned}$$

जो 8 से विभाजित है।

$\Rightarrow P(n), n = 1$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए $P(n), n = k$ के लिए सत्य है अर्थात

$3^{2k+2} - 8k - 9$, संख्या 8 से विभक्त होती है।

या $$3^{2k+2} - 8k - 9 = 8m$$

$\therefore$ $$3^{2k+2} = 8m + 8k + 9$$

k को $k + 1$ से बदलने पर

$$\begin{aligned} 3^{2(k+1)+2} - 8(k+1) - 9 &= 3^2.3^{2k+2} - 8(k+1) - 9 \\ &= 9(8m + 8k + 9) - 8k - 17 \\ &= 9(8m + 8k) + 81 - 8k - 17 \\ &= 72m + 64k + 64 \\ &= 8(9m + 8k + 8) \end{aligned}$$

यह भी 8 से विभक्त होता है।

$\Rightarrow P(n), n = k + 1$ के लिए भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n), n \in N$, n के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 23. $41^n - 14^n$, संख्या 27 का एक गुणज है।

हल : मान लीजिए $P(n) : 41^n - 14^n$, संख्या 27 का गुणज है।

$n = 1$ के लिए, $41^n - 14^n = 41 - 14 = 27$

$\Rightarrow P(n), n = 1$ के लिए सत्य है।

माना, $P(n), n = k$ के लिए सत्य है।

$$\Rightarrow \quad 41^k - 14^k = 27m$$

या $$41^k = 27m + 14^k$$

k के स्थान पर $k + 1$ रखने पर

$$41^{k+1} - 14^{k+1} = 41.41^k - 14^{k+1}$$

[$41^k = 27m + 14^k$ रखने से]

$$= 41[27m + 14^k] - 14^{k+1}$$
$$= 27.41m + 41.14^k - 14^{k+1}$$
$$= 27.41m + 14^k.27$$
$$= 27[41m + 14^k]$$

जो कि 27 से विभक्त होता है।

$\Rightarrow P(n), n = k + 1$ के लिए भी सत्य है।

अतः गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n), n \in N, n$ के सभी मानों के लिए सत्य है।

प्रश्न 24. $(2n + 7) < (n + 3)^2$.

हल : मान लीजिए $P(n) = (2n + 7) < (n + 3)^2$

$n = 1$ के लिए **बायाँ पक्ष** $= 2 \times 1 + 7 = 9$

$$\text{दायाँ पक्ष} = (n + 3)^2$$
$$= (1 + 3)^2 = 4^2 = 16$$
$$9 < 16$$

$\Rightarrow P(n), n = 1$ के लिए सत्य है।

मान लीजिए $P(n), n = k$ के लिए सत्य है।

$\therefore \quad 2k + 7 < (k + 3)^2$

या $\quad 2(k + 1) + 7 < (k + 3)^2 + 2$ [दोनों पक्षों में 2 जोड़ने से]

$\Rightarrow \quad 2(k + 1) + 7 < k^2 + 6k + 11$ ....(1)

k को $k + 1$ रखने पर सिद्ध करना है।

$$2(k + 1) + 7 < (k + 1 + 3)^2$$

या $\quad 2k + 9 < (k + 4)^2$

समी. (1) में दाएँ पक्ष में $2k + 5$ जोड़ने पर

$$2(k + 1) + 7 < k^2 + 6k + 11 + 2k + 5$$
$$< k^2 + 8k + 16$$
$$< (k + 4)^2$$

या $\quad 2k + 9 < (k + 4)^2$

$\Rightarrow P(n), n = k + 1$ के लिए भी सत्य है।

अत: गणितीय आगमन सिद्धांत के अनुसार $P(n), n \in N, n$ के सभी मानों के लिए सत्य है।