

Chapter-11 शंकु परिच्छेद

प्रश्नावली 11.1

निम्नलिखित प्रश्न 1 से 5 तक प्रत्येक में वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1.

केंद्र $(0, 2)$ और त्रिज्या 2 इकाई।

हल:

यहाँ $h = 0$, $k = 2$ तथा $r = 2$ रखने पर,

वृत्त का समीकरण, $(x - 0)^2 + (y - 2)^2 = 2^2$

$$x^2 + y^2 - 4y + 4 = 4$$

अतः वृत्त का अभीष्ट समीकरण, $x^2 + y^2 - 4y = 0$.

प्रश्न 2.

केंद्र $(-2, 3)$ और त्रिज्या 4 इकाई।

हल:

वृत्त का समीकरण $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 4^2$

$$\text{या } (x^2 + 4x + 4) + (y^2 - 6y + 9) = 16$$

$$\text{या } x^2 + y^2 + 4x - 6y - 3 = 0.$$

प्रश्न 3.

केंद्र $(\frac{1}{2}, \frac{1}{4})$ और त्रिज्या $\frac{1}{4}$

1 }{ 12 }[/latex] इकाई।

हल : यहाँ $h = \frac{1}{2}$, $k = \frac{1}{4}$ तथा $r = \frac{1}{12}$ हो, तब

वृत्त का समीकरण,

$$\left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{4}\right)^2 = \left(\frac{1}{12}\right)^2$$

$$\left(x^2 - x + \frac{1}{4}\right) + \left(y^2 - \frac{1}{2}y + \frac{1}{16}\right) = \frac{1}{144}$$

$$x^2 + y^2 - x - \frac{1}{2}y + \frac{5}{16} - \frac{1}{144} = 0$$

या $144x^2 + 144y^2 - 144x - 72y - 44 = 0$

या $36x^2 + 36y^2 - 36x - 18y + 11 = 0.$

प्रश्न 4.

केंद्र $(1, 1)$ और त्रिज्या $\sqrt{2}$ इकाई।

हल:

यहाँ $h = 1$, $k = 1$ तथा $r = \sqrt{2}$ हों, तब

वृत्त का समीकरण,

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 = (\sqrt{2})^2$$

$$(x^2 - 2x + 1) + (y^2 - 2y + 1) = 2$$

$$x^2 + y^2 - 2x - 2y = 0.$$

प्रश्न 5.

केंद्र $(-a, -b)$ और त्रिज्या $\sqrt{(a^2 - b^2)}$ इकाई।

हल:

वृत्त का समीकरण,

$$(x + a)^2 + (y + b)^2 = \{(a^2 - b^2)\}^2$$

$$x^2 + 2ax + a^2 + y^2 + 2by + b^2 = a^2 - b^2$$

$$x^2 + y^2 + 2ax + 2by + 2b^2 = 0.$$

निम्नलिखित प्रश्न 6 से 9 तक में प्रत्येक वृत्त का केन्द्र और त्रिज्या ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 6.

$$(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 36.$$

हल:

वृत्त $(x + 5)^2 + (y - 3)^2 = 36$ की $(x - h)^2 + (y - k)^2 = r^2$ से तुलना करने पर,

$$-h = 5, -k = -3, r^2 = 36$$

$$h = -5, k = 3, r = 6$$

केन्द्र $(-5, 3)$, त्रिज्या = 6.

प्रश्न 7.

$$x^2 + y^2 - 4x - 8y - 45 = 0$$

हल : $(x^2 - 4x) + (y^2 - 8y) = 45$

या $(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 8y + 16) = 45 + 4 + 16 = 65$

$$(x - 2)^2 + (y - 4)^2 = 65$$

$$\therefore h = 2, k = 4, r = \sqrt{65}$$

$$\Rightarrow \text{केन्द्र } (2, 4) \text{ और त्रिज्या } = \sqrt{65}.$$

दूसरी विधि : $2g = -4, 2f = -8, c = -45$

$$g = -2, f = -4, r = \sqrt{g^2 + f^2 - c}$$

$$r = \sqrt{4 + 16 + 45}$$

$$= \sqrt{65}$$

केन्द्र $(-g, -f)$ अर्थात् $(2, 4)$

$$\text{त्रिज्या } = r = \sqrt{65}.$$

प्रश्न 8.

$$x^2 + y^2 - 8x + 10y - 12 = 0.$$

हल:

$$(x^2 - 8x) + (y^2 + 10y) = 12$$

$$\text{या } (x^2 - 8x + 16) + (y^2 + 10y + 25) = 12 + 16 + 25$$

$$(x - 4)^2 + (y + 5)^2 = 53$$

केन्द्र (4, -5), त्रिज्या = $\sqrt{53}$.

प्रश्न 9.

$$2x^2 + 2y^2 - x = 0.$$

हल :

$$2x^2 + 2y^2 - x = 0$$

या

$$x^2 + y^2 - \frac{x}{2} = 0$$

या

$$\left(x^2 - \frac{x}{2}\right) + y^2 = 0$$

$$\left(x^2 - \frac{x}{2} + \frac{1}{16}\right) + y^2 = \frac{1}{16}$$

या

$$\left(x - \frac{1}{4}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2$$

$$\text{केन्द्र } \left(\frac{1}{4}, 0\right) \text{ तथा त्रिज्या} = \frac{1}{4}$$

प्रश्न 10.

बिन्दुओं (4, 1) और (6, 5) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र रेखा $4x + y = 16$ पर स्थित है।

हल:

वृत्त का व्यापक समीकरण

$$x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$$

बिन्दु (4, 1) इस पर स्थित है।

$$16 + 1 + 8g + 2f + c = 0$$

$$8g + 2f + c = -17 \dots\dots(1)$$

बिन्दु (6, 5) वृत्त पर स्थित है।

$$36 + 25 + 12g + 10f + c = 0$$

$$12g + 10f + c = -61 \dots\dots(2)$$

केंद्र $(-g, -f)$ रेखा $4x + y = 16$ पर स्थित है।

$$-4g - f = 16.$$

$$4g + f = -16 \dots\dots(3)$$

समीकरण (1) को (2) में से घटाने पर

$$4g + 8f = -44$$

समीकरण (3) को (4) में से घटाने पर

$$7f = -44 + 16 = -28$$

$$f = -4$$

समीकरण (3) में का मान रखने पर

$$4g - 4 = -16 \text{ या } 4g = -12$$

$$g = -3$$

f और g का मान समी (1) में रखने पर

$$-24 - 8 + c = -17$$

$$c = 32 - 17 = 15$$

अतः वृत्त का समीकरण

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 15 = 0.$$

प्रश्न 11.

बिन्दुओं (2, 3) और (-1, 1) से जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र रेखा $x - 3y - 11 = 0$ पर स्थित है।

हल:

मान लीजिए वृत्त का समीकरण $x^2 + y^2 + 2gx + 2fy + c = 0$ (1)

इस पर बिन्दु (2, 3) स्थित है।

$$4 + 9 + 4g + 6f + c = 0$$

$$4g + 6f + c = -13 \text{(2)}$$

इसी प्रकार (-1, 1) भी वृत्त (1) पर स्थित है।

$$1 + 1 - 2g + 2 + c = 0$$

$$-2g + 2f + c = -2 \text{(3)}$$

केंद्र (-g, -f) रेखा $x - 3y - 11 = 0$ पर स्थित है।

$$-g + 3f - 11 = 0$$

$$\text{या } -g + 3f = 11 \text{(4)}$$

समीकरण (2) में से (3) को घटाने पर

$$6g + 4f = -11 \text{(5)}$$

समी. (4) को 6 से गुणा करने पर,

$$-6g + 18f = 66 \text{(6)}$$

समी. (5) और समी (6) को जोड़ने पर,

$$22f = 55$$

$$\Rightarrow f = \frac{5}{2}$$

f का मान समी (5) में रखने पर,

$$6g + 10 = -11$$

$$6g = -21$$

$$g = \frac{-7}{2}$$

g और f का मान समी (3) में रखने पर,

$$7 + 5 + c = -2 \text{ या } c = -14$$

g, और c के मान समीकरण (1) में रखने पर,

$$x^2 + y^2 - 7x + 5y - 14 = 0$$

यह वृत्त का वांछित समीकरण है।

प्रश्न 12.

त्रिज्या 5 के उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र x-अक्ष पर हो और जो बिन्दु (2, 3) से जाता है।

हल:

केंद्र x-अक्ष पर है। मान लीजिए ऐसा बिन्दु (p, 0) है। त्रिज्या 5 वाले वृत्त का समीकरण

$$(x - p)^2 + (y - 0)^2 = 25$$

बिन्दु (2, 3) इस वृत्त से होकर जाता है।

$$(2 - p)^2 + 9 = 25$$

$$(2 - p)^2 = 25 - 9 = 16$$

$$2 - p = \pm 4$$

+ve चिन्ह लेने पर, $2 - p = 4$ या $p = 2 - 4 = -2$

-ve चिन्ह लेने पर, $2 - p = -4$ या $2 = -4 + p$ या $p = 2 + 4 = 6$

जब $p = -2$, वृत्त का समीकरण

$$(x + 2)^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0$$

जब $p = 6$, वृत्त का समीकरण

$$(x - 6)^2 + y^2 = 25$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 36 - 25 = 0$$

$$x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

वृत्त के अभीष्ट समीकरण

$$x^2 + y^2 + 4x - 21 = 0 \text{ और } x^2 + y^2 - 12x + 11 = 0$$

प्रश्न 13.

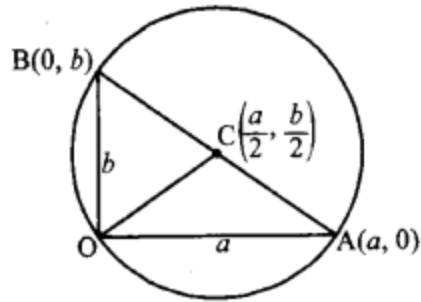
$(0, 0)$ से होकर जाने वाले वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशाक्षों पर a और B अंतःखण्ड बनाता है।

हल:

वृत्त मूल बिन्दु से होकर जाता है और अक्षों पर अंतःखण्ड a, b बनाता है।

$OA = a$, A के निर्देशांक $(a, 0)$

$OB = b$, B के निर्देशांक $(0, b)$



\Rightarrow केंद्र के निर्देशांक $\left(\frac{a+0}{2}, \frac{0+b}{2}\right)$ या $\left(\frac{a}{2}, \frac{b}{2}\right)$

$$\begin{aligned}\text{त्रिज्या } OC &= \sqrt{\left(\frac{a}{2} - 0\right)^2 + \left(\frac{b}{2} - 0\right)^2} \\ &= \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{4}} = \frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\end{aligned}$$

\therefore वृत्त का समीकरण

$$\left(x - \frac{a}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{b}{2}\right)^2 = \left(\frac{\sqrt{a^2 + b^2}}{2}\right)^2$$

$$\text{या } x^2 - ax + \frac{a^2}{4} + y^2 - by + \frac{b^2}{4} = \frac{a^2 + b^2}{4}$$

$$\text{या } x^2 + y^2 - ax - by = \frac{a^2 + b^2}{4} - \frac{a^2 + b^2}{4}$$

\therefore वृत्त का अभीष्ट समीकरण

$$x^2 + y^2 - ax - by = 0.$$

प्रश्न 14.

उस वृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसका केंद्र (2, 2) हो तथा (4, 5) से जाता है।

हल : वृत्त की त्रिज्या = केंद्र (2, 2) और बिन्दु (4, 5) के बीच की दूरी

$$= \sqrt{(2-4)^2 + (2-5)^2}$$

$$= \sqrt{4+9} = \sqrt{13}$$

केंद्र (2, 2) और त्रिज्या $= \sqrt{13}$

∴ वृत्त का समीकरण,

$$(x-2)^2 + (y-2)^2 = 13$$

$$(x^2 - 4x + 4) + (y^2 - 4y + 4) = 13$$

या

$$x^2 + y^2 - 4x - 4y - 5 = 0.$$

प्रश्न 15.

क्या बिन्दु (-2.5, 3.5) वृत्त $x^2 + y^2 = 25$ के अंदर, बाहर या वृत्त पर स्थित है।

हल : वृत्त का केंद्र O(0, 0) है।

दिया हुआ बिन्दु P(-2.5, 3.5) है।

∴

$$OP = \sqrt{(-2.5)^2 + (3.5)^2}$$

$$= \sqrt{6.25 + 12.25}$$

$$= \sqrt{18.50}$$

$$= 4.25 \text{ (लगभग)}$$

यह त्रिज्या जो 5 इकाई से कम है

अतः बिन्दु (-2.5, 3.5) वृत्त के अंदर स्थित होगा।

प्रश्नावली 11.2

निम्नलिखित प्रश्न 1 से 6 तक प्रत्येक में नाभि के निर्देशांक, परवलय का अक्ष, नियता का समीकरण और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1.

$$y^2 = 12x$$

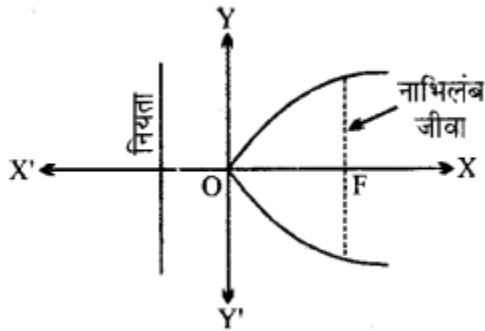
हल:

परवलय का समीकरण, $y^2 = 12x$

$y^2 = 4ax$ से तुलना करने पर।

$$4a = 12 \text{ या } a = 3$$

(i) नाभि के निर्देशांक $(a, 0)$ या $(3, 0)$



(ii) परवलय का अक्ष OX

इसका समीकरण $y = 0$

(iii) नियता का समीकरण : $x = -a$ अर्थात् $x = -3$

(iv) नाभिलंब जीवा की लंबाई $= 4a = 12$.

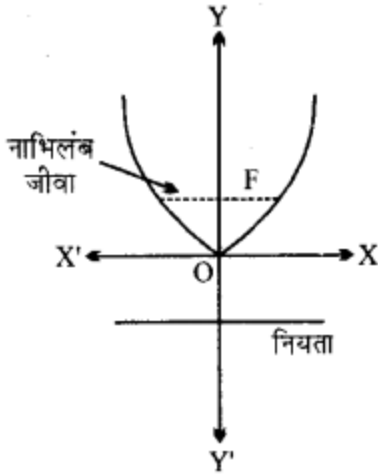
प्रश्न 2.

$$x^2 = 6y$$

हल:

परवलय का समीकरण $x^2 = 6y$

$$4a = 6 \text{ या } a = \frac{3}{2}$$



इसका अक्ष y-अक्ष है जिसका

- (i) समीकरण $x = 0$ है।
- (ii) नाभि F (0, a) के निर्देशांक $(0, \frac{3}{2})$ है।
- (iii) नियता $y = -a$ का समीकरण $y = \frac{-3}{2}$
- (iv) नाभिलंब जीवा की लम्बाई $4a = 6$.

प्रश्न 3.

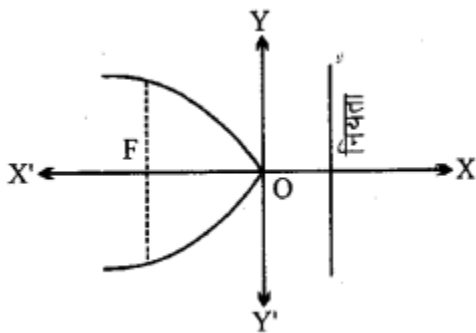
$$y^2 = -8x$$

हल:

परवलय का समीकरण $y^2 = -8x$

$$4a = 8 \Rightarrow a = 2$$

- (i) नाभि F(-a, 0) के निर्देशांक (-2, 0)



- (ii) परवलय का अक्ष x-अक्ष

इसका समीकरण $y = 0$

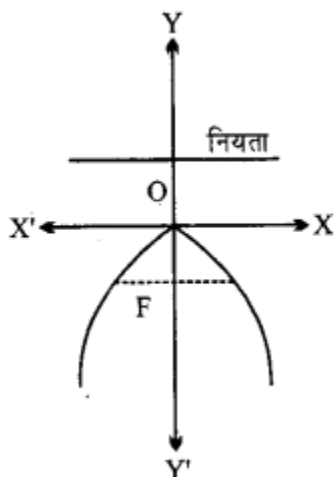
- (iii) नियता $x = a$ का समीकरण $x = 2$.
- (iv) नाभिलंब जीवा की लम्बाई $= 4a = 8$.

प्रश्न 4.

$$x^2 = -16y.$$

हल:परवलय का समीकरण $x^2 = -16y$

$$4a = 16 \text{ या } a = 4$$

(i) नाभि F $(0, -a)$ के निर्देशांक $(0, -4)$ (ii) परवलय अक्ष का समीकरण $x = 0$.(iii) नियता $y = 0$ का समीकरण $y = 4$.(iv) नाभिलंब जीवा की लंबाई $4a = 16$.**प्रश्न 5.**

$$y^2 = 10x.$$

हल:परवलय का समीकरण $y^2 = 10x$ (आकृति प्रश्न 1 में देखें)

$$4a = 10 \text{ या } a = \frac{5}{2}$$

(i) नाभि F $(a, 0)$ के निर्देशांक $(\frac{5}{2}, 0)$ (ii) परवलय को अक्ष : x-अक्ष, समीकरण $y = 0$ (iii) नियता $x = -a$ का समीकरण $x = -\frac{5}{2}$ (iv) नाभिलंब जीवा की लंबाई $4a = 10$.**प्रश्न 6.**

$$x^2 = -9y.$$

हल:परवलय का समीकरण $x^2 = -9y$ (आकृति प्रश्न 4 में देखें)।

$$4a = 9 \text{ या } a = \frac{9}{4}$$

(i) नाभि $(0, -a)$ के निर्देशांक $(0, \frac{-9}{4})$

(ii) परवलय का अक्ष : y -अक्ष, समीकरण $x = 0$

(ii) नियता $y = a$ का समीकरण $y = \frac{9}{4}$

(iv) नाभिलंब जीवा की लंबाई $4a = 9$.

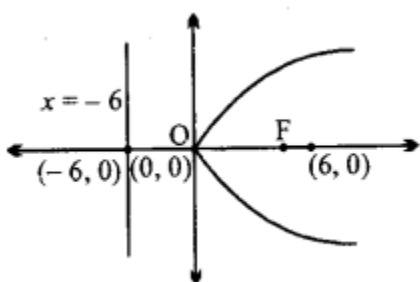
निम्नलिखित प्रश्न 7 से 12 तक प्रत्येक में परवलय का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए प्रतिबंध को संतुष्ट करता है।

प्रश्न 7.

नाभि $(6, 0)$, नियता $x = -6$.

हल:

परवलय का अक्ष : x -अक्ष, $y = 0$



शीर्ष $(0, 0)$ है, नाभि के निर्देशांक $(6, 0)$

परवलय का अक्ष, धन x -अक्ष के अनुदिश है।

परवलय का समीकरण $y^2 = 24x$.

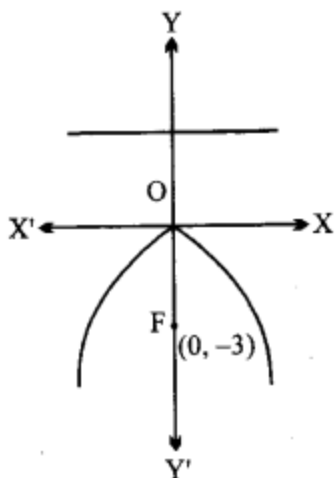
प्रश्न 8.

नाभि $(0, -3)$, नियता $y = 3$.

हल:

परवलय का अक्ष y -अक्ष है।

शीर्ष $(0, -3)$, $(0, 3)$ का मध्य बिन्दु $(0, 0)$ है। नाभि $(0, -3)$ से स्पष्ट होता है कि परवलय की अक्ष OY के अनुदिश है।



परवलय के समीकरण का रूप $x^2 = -4ay$

यहाँ पर $a = 3$, $4a = 12$

परवलय का समीकरण $x^2 = -12y$.

प्रश्न 9.

शीर्ष $(0, 0)$, नाभि $(3, 0)$ (आकृति प्रश्न 7 की देखिए)

हल:

परवलय का अक्ष OX के अनुदिश है।

परवलय के समीकरण का रूप $y = 4ax$

नाभि $(3, 0)$ है।

$$a = 3$$

$$4a = 4 \times 3 = 12$$

परवलय का समीकरण $y^2 = 12x$.

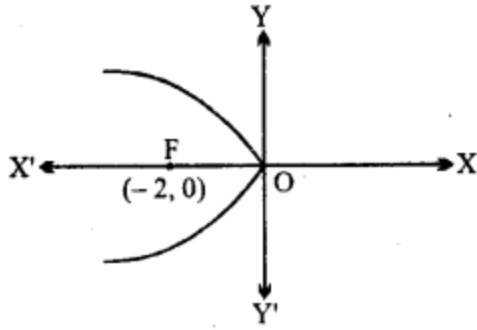
प्रश्न 10.

शीर्ष $(0, 0)$, नाभि $(-2, 0)$.

हल:

परवलय का अक्ष OX' के अनुदिश

नाभि $(-2, 0)$ है तो $a = 2$



$$4a = 8$$

परवलय का रूप $y^2 = -4ax$

परवलय का समीकरण $y^2 = -8x$.

प्रश्न 11.

शीर्ष $(0, 0)$, $(2, 3)$ से जाता है और अक्ष, x-अक्ष के अनुदिश है।

हल:

परवलय का शीर्ष $(0, 0)$ है और अक्ष : x-अक्ष है।

परवलय के समीकरण का रूप $y^2 = 4ax$

यह बिन्दु $(2, 3)$ से होकर जाता है।

$$9 = 4a \times 2$$

$$\text{या } 4a = \frac{9}{2}$$

अतः परवलय का समीकरण $y^2 = \frac{9}{2}x$ या $2y^2 = 9x$.

प्रश्न 12.

शीर्ष $(0, 0)$, $(5, 2)$ से जाता है और y-अक्ष के सापेक्ष सममित है।

हल:

शीर्ष $(0, 0)$, परवलय y-अक्ष के सापेक्ष सममित है।

समीकरण का रूप $x^2 = 4ay$ है।

यह बिन्दु $(5, 2)$ से गुजरता है।

$$25 = 4a \times 2$$

$$4a = \frac{25}{2}$$

परवलय का समीकरण, $x^2 = \frac{25}{2}y$ या $2x^2 = 25y$.

प्रश्नावली 11.3

निम्नलिखित प्रश्नों 1 से 9 तक प्रत्येक दीर्घवृत्त में नाभियों और शीर्षों के निर्देशांक, दीर्घ और लघु अक्ष की लंबाईयाँ, उत्कर्षदता तथा नाभिलंबे जीवा की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$.

हल : दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{16} = 1$

समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ से तुलना करने पर,

$$a^2 = 36, b^2 = 16$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 16 = 20$$

$$\therefore c = 2\sqrt{5}, e = \frac{c}{a}$$

$$= \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

नाभियों के निर्देशांक $(\pm c, 0)$, अर्थात् $(\pm 2\sqrt{5}, 0)$

शीर्ष $(\pm a, 0)$ यो $(\pm 6, 0)$,

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 6 = 12$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 4 = 8$$

$$\text{उत्कर्षता} = e = \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{5}}{6} = \frac{\sqrt{5}}{3}$$

$$\text{नाभिलंब जीवा} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 16}{6} = \frac{16}{3}.$$

प्रश्न 2. $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$.

हल : दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{25} = 1$

$\therefore a^2 = 25, b^2 = 4$ या $a = 5, b = 2$

$c^2 = a^2 - b^2 = 25 - 4 = 21$

$\therefore c = \sqrt{21}$

नाभि के निर्देशांक $(0, \pm c)$ या $(0, \pm \sqrt{21})$

शीर्ष निर्देशांक $(0, \pm a)$ या $(0, \pm 5)$

दीर्घ अक्ष की लंबाई $= 2a = 2 \times 5 = 10$

लघु अक्ष की लंबाई $= 2b = 2 \times 2 = 4$

उत्केंद्रता $= e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{21}}{5}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{5} = \frac{8}{5}$

प्रश्न 3. $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$.

हल : दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{9} = 1$

$$a^2 = 16, b^2 = 9 \text{ अर्थात् } a = 4, b = 3$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 9 = 7$$

$$\therefore c = \sqrt{7}$$

नाभि के निर्देशांक $(\pm c, 0)$ या $(\pm \sqrt{7}, 0)$

शीर्ष के निर्देशांक $(\pm a, 0)$ या $(\pm 4, 0)$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 4 = 8$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{उत्केंद्रता} = e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{7}}{4}$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{2} = \frac{2 \times 9}{4} = \frac{9}{2}$$

प्रश्न 4. $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$.

हल : दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{100} = 1$

$\therefore a^2 = 100, b^2 = 25$

$\therefore a = 10, b = 5$

$\therefore c^2 = a^2 - b^2 = 100 - 25 = 75$

$\therefore c = 5\sqrt{3}$

नाभि के निर्देशांक $(0, \pm c)$ या $(0, \pm 5\sqrt{3})$

शीर्षों के निर्देशांक $(0, \pm a)$ या $(0, \pm 10)$

दीर्घ अक्ष की लंबाई $= 2a = 2 \times 10 = 20$

लघु अक्ष की लंबाई $= 2b = 2 \times 5 = 10$

उत्केंद्रता $= e = \frac{c}{a} = \frac{5\sqrt{3}}{10} = \frac{\sqrt{3}}{2}$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 25}{10} = 5$.

प्रश्न 5. $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$.

हल : दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{36} = 1$

$\therefore a^2 = 49, b^2 = 36$

$\therefore a = 7, b = 6$

दीर्घ अक्ष, x -अक्ष के अनुदिश है

$$c^2 = a^2 - b^2 = 49 - 36 = 13$$

$\therefore c = \sqrt{13}$

नाभियों के निर्देशांक $(\pm c, 0)$ या $(\pm \sqrt{13}, 0)$

शीर्षों के निर्देशांक $(\pm a, 0)$ या $(\pm 7, 0)$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 7 = 14$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 6 = 12$$

$$\text{उत्केंद्रता} = e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{7}$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 36}{7} = \frac{72}{7}.$$

प्रश्न 6. $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{400} = 1$.

हल : दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{100} + \frac{y^2}{400} = 1$

$\therefore a^2 = 400, b^2 = 100$

$\therefore a = 20, b = 10$

$c^2 = a^2 - b^2 = 400 - 100 = 300$

$\therefore c = 10\sqrt{3}$

दीर्घ अक्ष, y - अक्ष के अनुदिश है

नाभियों के निर्देशांक $(0, \pm c)$ या $(0, \pm 10\sqrt{3})$

शीर्षों के निर्देशांक $(0, \pm a)$ या $(0, \pm 20)$

दीर्घ अक्ष की लंबाई $= 2a = 2 \times 20 = 40$

लघु अक्ष की लंबाई $= 2b = 2 \times 10 = 20$

नाभिलंब जीवा की लंबाई $= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 100}{20} = 10$

उत्केंद्रता $= e = \frac{c}{a} = \frac{10\sqrt{3}}{20} = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

प्रश्न 7.

$$36x^2 + 4y^2 = 144.$$

हल : दीर्घवृत्त का समीकरण $36x^2 + 4y^2 = 144$

या
$$\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{36} = 1$$

$$\therefore a^2 = 36, b^2 = 4$$

$$\therefore a = 6, b = 2$$

$$\therefore c^2 = a^2 - b^2 = 36 - 4 = 32$$

$$\therefore c = 4\sqrt{2}$$

दीर्घवृत्त का अक्ष, y -अक्ष के अनुदिश है

नाभियों के निर्देशांक $(0, \pm c)$ या $(0, \pm 4\sqrt{2})$

शीर्षों के निर्देशांक $(0, \pm a)$ या $(0, \pm 6)$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 6 = 12$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 2 = 4$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{6} = \frac{4}{3}$$

$$\text{उत्केंद्रता} = e = \frac{c}{a} = \frac{4\sqrt{2}}{6} = \frac{2\sqrt{2}}{3}.$$

प्रश्न 8.

$$16x^2 + y^2 = 16.$$

हल : दीर्घवृत्त का समीकरण $16x^2 + y^2 = 16$

या
$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{16} = 1$$

∴ दीर्घवृत्त का अक्ष, y -अक्ष के अनुदिश है।

$$a^2 = 16, b^2 = 1$$

$$\therefore a = 4, b = 1$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 16 - 1 = 15$$

$$\therefore c = \sqrt{15}$$

नाभियों के निर्देशांक $(0, \pm c)$ या $(0, \pm \sqrt{15})$

शीर्षों के निर्देशांक $(0, \pm a)$ या $(0, \pm 4)$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 4 = 8$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 1 = 2$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a}$$

$$= \frac{2 \times 1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$\text{उत्केंद्रता} = e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{15}}{4}$$

प्रश्न 9.

$$4x^2 + 9y^2 = 36.$$

हल : दीर्घवृत्त का समीकरण $4x^2 + 9y^2 = 36$

या
$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$$

दीर्घ अक्ष, x -अक्ष के अनुदिश है।

$$\therefore a^2 = 9, b^2 = 4$$

$$\therefore a = 3, b = 2$$

$$c^2 = a^2 - b^2 = 9 - 4 = 5$$

$$\therefore c = \sqrt{5}$$

नाभियों के निर्देशांक $(\pm c, 0)$ या $(\pm \sqrt{5}, 0)$

शीर्षों के निर्देशांक $(\pm a, 0)$ या $(\pm 3, 0)$

$$\text{दीर्घ अक्ष की लंबाई} = 2a = 2 \times 3 = 6$$

$$\text{लघु अक्ष की लंबाई} = 2b = 2 \times 2 = 4$$

*

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{3} = \frac{8}{3}$$

$$\text{उत्केंद्रता} = e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3}.$$

निम्नलिखित प्रश्नों 10 से 20 तक प्रत्येक में, दिए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए दीर्घवृत्त का समीकरण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 10.

शीर्षों $(\pm 5, 0)$, नाभियाँ $(\pm 4, 0)$.

हल:

$$a = 5, c = 4, c^2 = a^2 - b^2.$$

$$\text{या} \quad 16 = 25 - b^2$$

$$\therefore b^2 = 25 - 16 = 9$$

$$\text{और} \quad a^2 = 25$$

दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

प्रश्न 11.

शीर्षों $(0, \pm 13)$, नाभियाँ $(0, \pm 5)$.

हल : दीर्घ अक्ष, y -अक्ष के अनुदिश है।

$$\therefore c = 5, a = 13, c^2 = a^2 - b^2$$

$$\therefore 25 = 169 - b^2$$

$$\therefore b^2 = 169 - 25 = 144,$$

$$\text{और} \quad a^2 = 13^2 = 169$$

\therefore दीर्घवृत्त का समीकरण

$$\frac{x^2}{144} + \frac{y^2}{169} = 1.$$

प्रश्न 12.

शीर्ष $(\pm 6, 0)$, नाभियाँ $(\pm 4, 0)$

हल : दीर्घ अक्ष x -अक्ष के अनुदिश है।

$$a = 6, \therefore a^2 = 36, c = 4$$

$$c^2 = a^2 - b^2 \text{ या } 16 = 36 - b^2$$

$$\therefore b^2 = 36 - 16 = 20$$

\therefore दीर्घवृत्त का समीकरण

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20} = 1.$$

प्रश्न 13.

दीर्घ अक्ष के अंत्य बिन्दु $(\pm 3, 0)$, लघु अक्ष के अंत्य बिन्दु $(0, \pm 2)$.

हल : दीर्घ अक्ष x -अक्ष के अनुदिश है।

$$a = 3, b = 2, \therefore a^2 = 9, b^2 = 4$$

दीर्घवृत्त का समीकरण

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1.$$

प्रश्न 14.

दीर्घ अक्ष के अंत्य बिन्दु $(0, \pm\sqrt{5})$, लघु अक्ष के अंत्य बिन्दु $(\pm 1, 0)$.

हल:

दीर्घ अक्ष, y -अक्ष के अनुदिश है।

$$a = \sqrt{5}, b = 1,$$

$$a^2 = 5, b^2 = 1.$$

दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{1} + \frac{y^2}{5} = 1.$$

प्रश्न 15.

दीर्घ अक्ष की लंबाई = 26, नाभियाँ $(\pm 5, 0)$.

हल : दीर्घ अक्ष, x -अक्ष के अनुदिश है।

और

$$2b = 26, \therefore b = 13 \text{ या } a^2 = 169,$$

$$c = 5, c^2 = 25 = a^2 - b^2 = 169 - b^2$$

\therefore

$$b^2 = 169 - 25 = 144$$

अतः

$$a^2 = 169, b^2 = 144$$

\therefore दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{169} + \frac{y^2}{144} = 1.$$

प्रश्न 16.

दीर्घ अक्ष की लंबाई = 16, नाभियाँ $(0, \pm 6)$.

हल : दीर्घ अक्ष, y -अक्ष के अनुदिश है।

और

$$2b = 16, \therefore b = 8 \text{ या } b^2 = 64,$$

$$c = 6, c^2 = 36,$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

या

$$36 = a^2 - 64$$

\therefore

$$a^2 = 64 + 36 = 100$$

\therefore दीर्घवृत्त का समीकरण

$$\frac{x^2}{64} + \frac{y^2}{100} = 1.$$

प्रश्न 17.

नाभियाँ $(\pm 3, 0)$, $a = 4$.

हल : दीर्घ अक्ष, x -अक्ष के अनुदिश है।

\therefore

$$c = 3, a = 4$$

अब

$$c^2 = a^2 - b^2$$

या

$$9 = 16 - b^2$$

\therefore

$$b^2 = 16 - 9 = 7$$

\therefore दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{7} = 1.$$

प्रश्न 18.

$b = 3$, $c = 4$, केन्द्र मूल बिन्दु पर, नाभियाँ x -अक्ष पर हैं।

हल : दीर्घ अक्ष, x -अक्ष के अनुदिश है

$$c^2 = a^2 - b^2$$

या $16 = a^2 - 9$

$\therefore a^2 = 16 + 9 = 25$

\therefore दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

प्रश्न 19.

केंद्र (0, 0) पर, दीर्घ अक्ष y-अक्ष पर और बिन्दुओं (3, 2) और (1, 6) से जाता है।

हल : मान लीजिए दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

बिन्दु (3, 2) पर, $\frac{9}{b^2} + \frac{4}{a^2} = 1$

और बिन्दु (1, 6) पर, $\frac{1}{b^2} + \frac{36}{a^2} = 1$

समी (1) को 9 से गुणा करने पर, $\frac{81}{b^2} + \frac{36}{a^2} = 9$

इसमें से समी (2) को घटाने पर,

$$\frac{80}{b^2} = 8 \text{ या } b^2 = \frac{80}{8} = 10$$

b^2 का मान समी (1) में रखने पर,

$$\frac{9}{10} + \frac{4}{a^2} = 1$$

या $\frac{4}{a^2} = 1 - \frac{9}{10} = \frac{1}{10}$

$\therefore a^2 = 40$

दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{10} + \frac{y^2}{40} = 1.$$

प्रश्न 20.

दीर्घ अक्ष, x-अक्ष पर और बिन्दुओं (4, 3), (6, 2) से जाता है।

हल : मान लीजिए दीर्घवृत्त का समीकरण $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$

यह बिन्दु (4, 3) और (6, 2) से जात है

$$\therefore \frac{16}{a^2} + \frac{9}{b^2} = 1 \quad \dots(1)$$

$$\frac{36}{a^2} + \frac{4}{b^2} = 1 \quad \dots(2)$$

समी (1) को 4 से और समी (2) को 9 से गुणा करने पर

$$\frac{64}{a^2} + \frac{36}{b^2} = 4 \quad \dots(3)$$

$$\frac{324}{a^2} + \frac{36}{b^2} = 9 \quad \dots(4)$$

समी (4) में से समी (3) घटाने पर,

$$\frac{260}{a^2} = 5$$

या $a^2 = \frac{260}{5} = 52$

a^2 का मान समी (1) में रखने पर,

$$\frac{16}{52} + \frac{9}{b^2} = 1$$

या $\frac{9}{b^2} = 1 - \frac{16}{52} = \frac{36}{52}$

$$\frac{9}{b^2} = \frac{36}{52}$$

या $b^2 = \frac{9 \times 52}{36} = 13$

\therefore दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{52} + \frac{y^2}{13} = 1.$$

प्रश्नावली 11.4

निम्नलिखित प्रश्न 1 से 6 तक प्रत्येक में, अतिपरवलयों के शीर्षों, नाभियों के निर्देशांक, उत्कर्षता और नाभिलंब जीवा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1. $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$.

हल : अतिपरवलय का समीकरण $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$

अनुप्रस्थ अक्ष, x -अक्ष के अनुदिश है।

$$a^2 = 16, b^2 = 9$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 9 = 25$$

$$\therefore a = 4, b = 3, c = 5$$

शीर्षों के निर्देशांक $(\pm a, 0)$ या $(\pm 4, 0)$

नाभियों के निर्देशांक $(\pm c, 0)$ या $(\pm 5, 0)$

$$\text{उत्कर्षता} = e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4}$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{4} = \frac{9}{2}$$

प्रश्न 2. $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1.$

हल : अतिपरवलय का समीकरण : $\frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{27} = 1$

अनुप्रस्थ अक्ष, y -अक्ष के अनुदिश है

$$a^2 = 9, b^2 = 27$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 9 + 27 = 36$$

$$\therefore a = 3, b = 3\sqrt{3}, c = 6$$

शीर्षों के निर्देशांक $(0, \pm a)$ या $(0, \pm 3)$

नाभियों के निर्देशांक $(0, \pm c)$ या $(0, \pm 6)$

$$\text{उत्केंद्रता } e = \frac{c}{a} = \frac{6}{3} = 2$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 27}{3} = 18.$$

प्रश्न 3.

$$9y^2 - 4x^2 = 36.$$

हल : अतिपरवलय का समीकरण $9y^2 - 4x^2 = 36$

36 से भाग देने पर, $\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} = 1$

\Rightarrow अनुप्रस्थ अक्ष, x -अक्ष के अनुदिश है।

$$a^2 = 4, b^2 = 9$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 4 + 9 = 13$$

$$\therefore a = 2, b = 3, c = \sqrt{13}$$

शीर्षों के निर्देशांक $(0, \pm a)$ या $(0, \pm 2)$

नाभियों के निर्देशांक $(0, \pm c)$ या $(0, \pm \sqrt{13})$

$$\text{उत्केंद्रता } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{13}}{2}$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 9}{2} = 9.$$

प्रश्न 4.

$$16x^2 - 9y^2 = 576.$$

हल : अतिपरवलय का समीकरण : $16x^2 - 9y^2 = 576$

576 से भाग देने पर,

$$\frac{x^2}{36} - \frac{y^2}{64} = 1$$

अनुप्रस्थ अक्ष, x -अक्ष के अनुदिश है।

$$a^2 = 36, b^2 = 64$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 36 + 64 = 100$$

$$\therefore a = 6, b = 8, c = 10$$

शीर्षों के निर्देशांक $(\pm a, 0)$ या $(\pm 6, 0)$.

नाभियों के निर्देशांक $(\pm c, 0)$ या $(\pm 10, 0)$.

$$\text{उत्कर्षता } e = \frac{c}{a} = \frac{10}{6} = \frac{5}{3}.$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 64}{6} = \frac{64}{3}.$$

प्रश्न 5.

$$5y^2 - 9x^2 = 36.$$

हल : अतिपरवलय का समीकरण : $5y^2 - 9x^2 = 36$

36 से भाग देने पर,

$$\frac{y^2}{\frac{36}{5}} - \frac{x^2}{4} = 1$$

$$a^2 = \frac{36}{5}, b^2 = 4$$

$$\begin{aligned}\therefore c^2 &= a^2 + b^2 = \frac{36}{5} + 4 \\ &= \frac{36 + 20}{5} = \frac{56}{5}\end{aligned}$$

$$\therefore a = \frac{6}{\sqrt{5}}, b = 2, c = \frac{\sqrt{56}}{\sqrt{5}} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}}$$

शीर्षों के निर्देशांक $(0, \pm a)$ या $\left(0, \pm \frac{6}{\sqrt{5}}\right)$.

नाभियों के निर्देशांक $(0, \pm c)$ या $\left(0, \pm \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}}\right)$.

$$\begin{aligned}\text{उत्केंद्रता } e &= \frac{c}{a} = \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}} \div \frac{6}{\sqrt{5}} \\ &= \frac{2\sqrt{14}}{\sqrt{5}} \times \frac{\sqrt{5}}{6} \\ &= \frac{\sqrt{14}}{3}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} &= \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 4}{\frac{\sqrt{36}}{\sqrt{5}}} \\ &= 8 \times \frac{\sqrt{5}}{6} = \frac{4\sqrt{5}}{3}.\end{aligned}$$

प्रश्न 6.

$$49y^2 - 16x^2 = 784.$$

हल : अतिपरवलय का समीकरण : $49y^2 - 16x^2 = 784$

784 से भाग देने पर,

$$\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{49} = 1$$

अनुप्रस्थ अक्ष, y -अक्ष के अनुदिश है।

$$a^2 = 16, b^2 = 49$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2 = 16 + 49 = 65$$

$$\therefore a = 4, b = 7, c = \sqrt{65}$$

शीर्षों के निर्देशांक $(0, \pm a)$ या $(0, \pm 4)$.

नाभियों के निर्देशांक $(0, \pm c)$ या $(0, \pm \sqrt{65})$.

$$\text{उत्केंद्रता } e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{65}}{4}.$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लंबाई} = \frac{2b^2}{a} = \frac{2 \times 49}{4} = \frac{49}{2}.$$

निम्नलिखित प्रश्न 7 से 15 तक प्रत्येक में, दिए गए प्रतिबंधों को संतुष्ट करते हुए अतिपरवलयका समीकरण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 7.

शीर्ष $(\pm 2, 0)$, नाभियाँ $(\pm 3, 0)$.

हल : अनुप्रस्थ अक्ष, x -अक्ष के अनुदिश है।

$$a = 2, c = 3, c^2 = a^2 + b^2$$

या $9 = 4 + b^2$

$\therefore b^2 = 5$

अतिपरवलय का समीकरण : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$

या $\frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{5} = 1.$

प्रश्न 8.

शीर्ष $(0, \pm 5)$, नाभियाँ $(0, \pm 8)$.

हल : अनुप्रस्थ अक्ष, y -अक्ष के अनुदिश है।

$$a = 5, c = 8, c^2 = a^2 + b^2$$

या $64 = 25 + b^2$

$\therefore b^2 = 64 - 25 = 39, a^2 = 25$

अतिपरवलय का समीकरण : $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{39} = 1.$

प्रश्न 9.

शीर्ष $(0, \pm 3)$, नाभियाँ $(0, \pm 5)$.

हल : अनुप्रस्थ अक्ष, y -अक्ष के अनुदिश है।

$$\text{शीर्ष } (0, \pm 3) \quad \Rightarrow a = 3, a^2 = 9$$

$$\text{नाभियाँ } (0, \pm 5) \quad \Rightarrow c = 5$$

$$\therefore c^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{या } 25 = 9 + b^2$$

$$\therefore b^2 = 16$$

$$\therefore \text{अतिपरवलय का समीकरण : } \frac{y^2}{9} - \frac{x^2}{16} = 1.$$

प्रश्न 10.

नाभियाँ $(\pm 5, 0)$, अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई $= 8$.

हल:

अनुप्रस्थ अक्ष की लम्बाई $= 2a = 8$

$$a = 4$$

$$a^2 = 16$$

$$\text{नाभियाँ } (\pm 5, 0)$$

$$\Rightarrow c = 5, c^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{या } 25 = 16 + b^2$$

$$\therefore b^2 = 9$$

$$\therefore \text{अतिपरवलय का समीकरण : } \frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1.$$

प्रश्न 11.

नाभियाँ $(0, \pm 13)$, संयुग्मी अक्ष की लम्बाई $= 24$.

हल : नाभियाँ $(0, \pm 13)$

\Rightarrow अनुप्रस्थ अक्ष, y -अक्ष के अनुदिश है।

और $c = 13, c^2 = 169$

संयुग्मी अक्ष की लम्बाई, $2b = 24$

$\therefore b = 12, b^2 = 144$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

या $169 = a^2 + 144$

$\therefore a^2 = 169 - 144 = 25$

\therefore अतिपरवलय का समीकरण $\frac{y^2}{25} - \frac{x^2}{144} = 1$.

प्रश्न 12.

नाभियाँ $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$, नाभिलंब जीवा की लम्बाई = 8.

हल : नाभियाँ $(\pm 3\sqrt{5}, 0)$, अनुप्रस्थ अक्ष, x -अक्ष के अनुदिश हैं।

और

$$c = 3\sqrt{5} \text{ या } c^2 = 45$$

या

$$c^2 = a^2 + b^2, \therefore a^2 + b^2 = 45$$

...(1)

$$\text{नाभिलंब जीवा की लम्बाई} = \frac{2b^2}{a} = 8$$

\therefore

$$b^2 = 4a$$

...(2)

समी (1) और (2) से,

$$a^2 + 4a - 45 = 0 \text{ या } (a + 9)(a - 5) = 0$$

$$a = -9 \text{ या } a = 5$$

परन्तु

$$a \neq -9$$

\therefore

$$a = 5, a^2 = 25$$

\therefore

$$b^2 = 4a$$

या

$$b^2 = 4 \times 5 = 20$$

\therefore अतिपरवलय का समीकरण, $\frac{x^2}{25} - \frac{y^2}{20} = 1$.

प्रश्न 13.

नाभियाँ $(\pm 4, 0)$, नाभिलंब जीवा की लम्बाई 12 है।

हल : नाभियाँ $(\pm 4, 0)$

\Rightarrow अनुप्रस्थ अक्ष, x -अक्ष के अनुदिश है।

और

$$c = 4 \text{ या } c^2 = 16$$

या

$$c^2 = a^2 + b^2, \therefore a^2 + b^2 = 16 \quad \dots(1)$$

$$\text{नाभिलंब जीवा की लम्बाई} = \frac{2b^2}{a} = 12$$

$$\therefore b^2 = 6a \quad \dots(2)$$

समी (1) और (2) से,

$$a^2 + 6a - 16 = 0$$

या

$$(a + 8)(a - 2) = 0$$

$$a = -8 \text{ या } a = 2$$

परन्तु

$$a \neq -8, \therefore a = 2, a^2 = 4$$

\therefore

$$b^2 = 6a = 6 \times 2 = 12$$

$$\therefore \text{अतिपरवलय का समीकरण, } \frac{x^2}{4} - \frac{y^2}{12} = 1.$$

प्रश्न 14.

शीर्ष $(\pm 7, 0)$, $e = \frac{4}{3}$

हल : शीर्ष $(\pm 7, 0)$

\Rightarrow अनुप्रस्थ अक्ष, x -अक्ष के अनुदिश है।

और $a = 7, a^2 = 49$

$$e = \frac{c}{a}$$

$$\therefore \frac{4}{3} = \frac{c}{7}$$

$$\therefore c = \frac{28}{3}$$

$$c^2 = a^2 + b^2$$

$$\text{या} \quad \left(\frac{28}{3}\right)^2 = 49 + b^2$$

$$b^2 = \frac{784}{9} - 49$$

$$= \frac{784 - 441}{9} = \frac{343}{9}$$

$$\therefore \text{अतिपरवलय का समीकरण, } \frac{x^2}{49} - \frac{y^2}{\frac{343}{9}} = 1$$

$$\text{या} \quad \frac{x^2}{49} - \frac{9y^2}{343} = 1.$$

प्रश्न 15.

नाभियाँ $(0, \pm\sqrt{10})$ हैं तथा $(2, 3)$ से होकर जाता है।

हल : नाभियाँ $(0, \pm\sqrt{10})$

\Rightarrow अनुप्रस्थ अक्ष, y -अक्ष के अनुदिश है।

और $c = \sqrt{10}$ या $c^2 = 10 = a^2 + b^2$

$$\therefore a^2 + b^2 = 10$$

मान लीजिए अतिपरवलय का समीकरण

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

यह बिन्दु $(2, 3)$ से जाता है

$$\therefore \frac{9}{a^2} - \frac{4}{b^2} = 1 \text{ या } 9b^2 - 4a^2 = a^2b^2$$

समी (1) में से b^2 का मान रखने से

$$9(10 - a^2) - 4a^2 = a^2(10 - a^2)$$

$$\text{या } 90 - 9a^2 - 4a^2 = 10a^2 - a^4$$

$$a^4 - 23a^2 + 90 = 0$$

$$\text{या } (a^2 - 18)(a^2 - 5) = 0$$

$$\begin{aligned} \text{जब } a^2 &= 18, b^2 = 10 - a^2 \\ &= 10 - 18 = -8 \\ &= -ve \end{aligned}$$

$$\text{अतः } a^2 \neq 18$$

$$\text{जब } a^2 = 5, b^2 = 10 - 5 = 5$$

\therefore अतिपरवलय का समीकरण

$$\frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

$$\text{या } \frac{y^2}{5} - \frac{x^2}{5} = 1.$$

अध्याय 11 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1.

यदि एक परवल्याकार परावर्तक का व्यास 20 सेमी और गहराई 5 सेमी है, तो नाभि ज्ञात कीजिए।

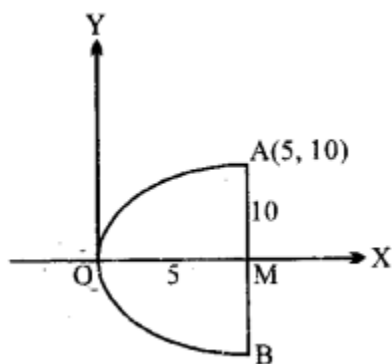
हल:

परवल्याकार परावर्तक AOB का व्यास,

$$AB = 20 \text{ सेमी}$$

$$AM = 10 \text{ सेमी}$$

परावर्तक की गहराई, $OM = 5 \text{ सेमी}$



यदि OX, OY निर्देशांक अक्ष हो तो बिन्दु परवलय पर स्थित है।

माना परवलय का समीकरण, $y^2 = 4ax$

$$10^2 = 4a \times 5 \text{ या } 100 = 20a \text{ या } a = 5$$

परवलय की नाभि (a, 0) या (5, 0) है।

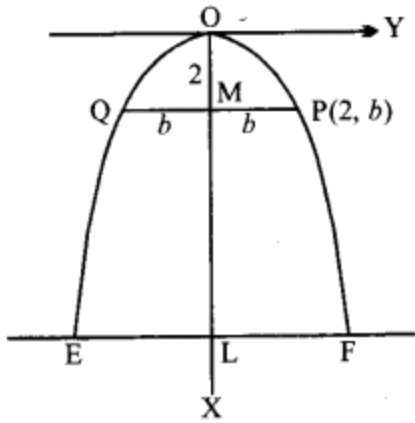
प्रश्न 2.

एक मेहराब परवलय के आकार का है और इसका अक्ष ऊर्ध्वाधर है। मेहराब 10 मीटर ऊँचा है और आधार में 5 मीटर चौड़ा है। यह परवलय के दो मीटर की दूरी पर शीर्ष से कितना चौड़ा होगा?

हल:

इसका आकार परवलय की आकृति का है।

माना OX, OY इसके निर्देशांक अक्ष हैं, और समीकरण $y^2 = 4ax$ है।



मेहराब की ऊँचाई, $OL = 10$ मीटर

चौड़ाई $EF = 5$ मीटर

$$LF = \frac{1}{2}$$

$$EF = \frac{1}{2} \times 5 = \frac{5}{2}$$

बिन्दु F के निर्देशांक $\left(10, \frac{5}{2}\right)$

चूँकि बिन्दु $\left(10, \frac{5}{2}\right)$ परवलय $y^2 = 4ax$ पर स्थित है

$$\therefore \left(\frac{5}{2}\right)^2 = 4a \times 10 \text{ या } 40a = \frac{25}{4}$$

$$\therefore 4a = \frac{25}{4} \times \frac{1}{10} = \frac{5}{8}$$

$$\therefore \text{परवलय का समीकरण, } y^2 = \frac{5}{8}x$$

शीर्ष O से 2 मीटर नीचे, मान लिया कि मेहराब की चौड़ाई $2b$ है।

$$\therefore PM = \frac{1}{2} PQ = \frac{1}{2} \times 2b = b$$

$\therefore P$ बिन्दु के निर्देशांक $(2, b)$ है जो परवलय $y^2 = \frac{5}{8}x$ पर स्थित है।

$$\therefore b^2 = \frac{5}{8} \times 2 = \frac{5}{4}$$

$$\therefore b = \frac{\sqrt{5}}{2}$$

इस स्थान पर मेहराब की चौड़ाई,

$$= 2b = 2 \times \frac{\sqrt{5}}{2} = \sqrt{5} \text{ मीटर}$$

$$= 2.24 \text{ मीटर (लगभग)।}$$

प्रश्न 3.

एक सर्वसम भारी झूलते पुल की केबिल (cable) परवलय के रूप में लटकी हुई है। सड़क पथ जो क्षैतिज है 100 मीटर लम्बा है तथा केबिल से जुड़े अर्ध्वाधर तारों पर टिका हुआ है, जिसमें सबसे लम्बा तार 30 मीटर और सबसे छोटा तार 6 मीटर है। मध्य से 18 मीटर दूर सड़क पथ से जुड़े समर्थक (supporting) तार की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल:

माना OX, OY निर्देशांक अक्ष हैं। AOB परवलय के रूप में केबिल है। इसका समीकरण $x^2 = 4ay$ के रूप में होगा।

सबसे छोटे तार की लम्बाई OL = 6 मीटर

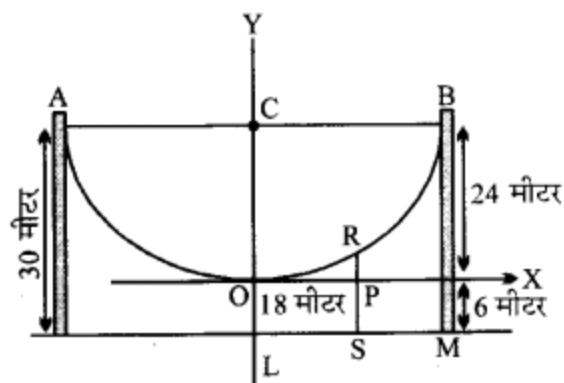
सबसे बड़े तार की लम्बाई BM = 30 मीटर

शीर्ष O से रेखा LM की दूरी OL = 6 मीटर है।

सड़क की लंबाई AB = 100 मीटर, यदि C मध्य बिन्दु हो तो

$$CB = \frac{1}{2} AB = \frac{1}{2} \times 100 = 50 \text{ मीटर}$$

$$OC = CL - OL = 30 - 6 = 24 \text{ मीटर}$$



इस प्रकार B के निर्देशांक $(50, 24)$ हैं

यह परवलय $x^2 = 4ay$ पर स्थित है

$$\therefore (50)^2 = 4a \times 24$$

$$\Rightarrow 4a = \frac{50 \times 50}{24} = \frac{625}{6}$$

$$\therefore \text{परवलय का समीकरण } x^2 = \frac{625}{6}y$$

OY से 18 मीटर दूरी पर एक बिन्दु R लिया गया है। OX से R की दूरी b हो, तब

R के निर्देशांक $(18, b)$

यह परवलय $x^2 = \frac{625}{6}y$ पर स्थित है

$$\therefore 18 \times 18 = \frac{625}{6}b$$

$$\therefore RP = b = \frac{18 \times 18 \times 6}{625}$$

$$= \frac{1944}{625}$$

$$= 3.11 \text{ मीटर}$$

$$\text{आधार } LM \text{ से } R \text{ की दूरी} = RS = RP + PS$$

$$= 3.11 + 6$$

$$= 9.11 \text{ मीटर}$$

$$\therefore \text{तार की लंबाई} = 9.11 \text{ मीटर।}$$

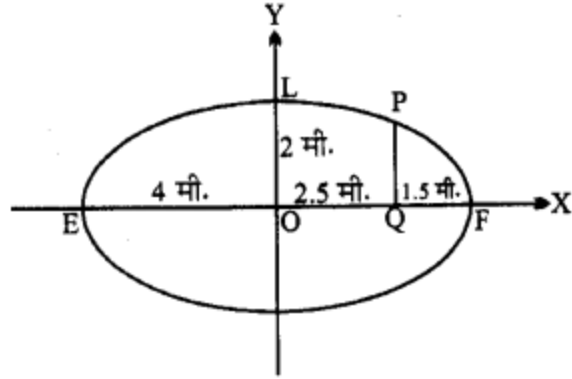
प्रश्न 4.

एक मेहराब अर्ध-दीर्घवृत्ताकार रूप का है। यह 8 मीटर चौड़ा है और केंद्र से 2 मीटर ऊँचा है। एक सिरे से 1.5 मीटर दूर बिन्दु पर मेहराब की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

हल:

आकृति में ELF एक मेहराब है जिसकी चौड़ाई $EF = 8$ मीटर और ऊँचाई $= 2$ मीटर है।

माना OX, OY निर्देशांक अक्ष है। ELF एक दीर्घवृत्त है जिसमें $a = 4, b = 2$



∴ दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{4^2} + \frac{y^2}{2^2} = 1$$

या
$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{4} = 1$$

एक बिन्दु Q सिरे F से 1.5 मीटर की दूरी पर है।

∴ Q की O से दूरी $= 4 - 1.5 = 2.5$ मीटर

मान लीजिए बिन्दु Q पर मेहराब की ऊंचाई p है।

∴ $P(2.5, p)$ दीर्घवृत्त पर स्थित है।

$$\therefore \frac{(2.5)^2}{16} + \frac{p^2}{4} = 1$$

$$\text{या } \frac{p^2}{4} = 1 - \frac{6.25}{16} = \frac{9.75}{16}$$

$$p^2 = \frac{9.75}{16} \times 4 = \frac{9.75}{4}$$

$$p = \frac{\sqrt{9.75}}{2}$$

$$= \frac{3.122}{2}$$

$$= 1.56 \text{ मीटर (लगभग)}$$

अतः Q बिन्दु पर मेहराब की ऊंचाई = 1.56 मीटर (लगभग) है।

प्रश्न 5.

एक 12 सेमी छड़ इस प्रकार चलती है कि इसके सिरे निर्देशाक्षों को स्पर्श करते हैं। छड़ के बिन्दु P का बिन्दुपथ ज्ञात कीजिए जो x -अक्ष के संपर्क वाले सिरे से 3 सेमी दूर है।

हल : माना OX, OY निर्देशाक्ष हैं। इन अक्षों पर रेखा $PQ = 12$ सेमी चलती है।

ΔPOQ में,

$$PQ^2 = OP^2 + OQ^2$$

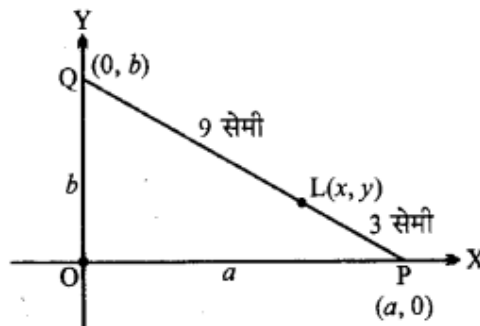
$$12^2 = a^2 + b^2$$

या

$$a^2 + b^2 = 144$$

...(1)

जहाँ $OA = a, OB = b$ अक्षों पर अंतःखण्ड हैं।



बिन्दु $L(x, y)$, PQ को $3 : 9 = 1 : 3$ के अनुपात में विभाजित करता है। जब कि P और Q के निर्देशांक क्रमशः $(a, 0)$ और $(0, b)$ हैं।

∴ L के निर्देशांक इस प्रकार होंगे

$$x = \frac{3a + 1 \times 0}{3 + 1} = \frac{3a}{4}$$

$$\therefore a = \frac{4x}{3}$$

$$y = \frac{3 \times 0 + 1 \times b}{3 + 1} = \frac{b}{4}$$

$$\therefore b = 4y$$

इनका मान समी (1) में रखने पर,

$$\left(\frac{4}{3}x\right)^2 + (4y)^2 = 144$$

$$\text{या } \frac{16x^2}{9} + \frac{16y^2}{1} = 144$$

$$\text{या } \frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 9$$

अतः L का बिन्दुपथ एक दीर्घवृत्त है। जिसका समीकरण $\frac{x^2}{81} + \frac{y^2}{9} = 1$ है।

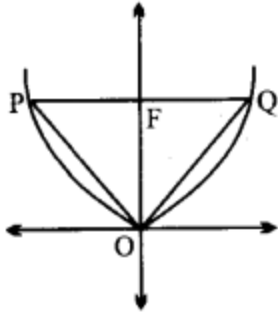
प्रश्न 6.

त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो परवलय $x^2 = 12y$ के शीर्ष को इसकी नाभिलंब जीवा के सिरों को मिलाने वाली रेखाओं से बना है।

हल:

परवलय का समीकरण, $x^2 = 12y$

नाभि के निर्देशांक $(a, 0)$ या $(3, 0)$ हैं।



OF = 3 इकाई

नाभिलंब जीवा की लंबाई = $4a = 12$

ΔPOQ का क्षेत्रफल = $\frac{1}{2} \times OF \times PQ$

= $\frac{1}{2} \times 3 \times 12$

= 18 वर्ग इकाई।

प्रश्न 7.

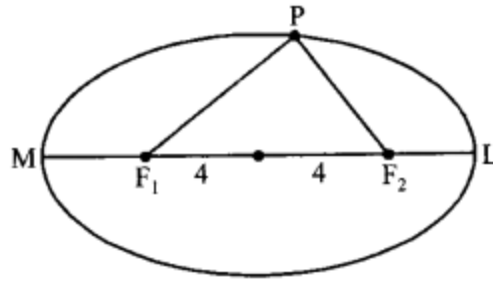
एक व्यक्ति दौड़पथ पर दौड़ते हुए अंकित करता है कि उससे दो झंडा चौकियों की दूरियों का योग सदैव 10 मीटर रहता है। और झंडा चौकियों के बीच की दूरी 8 मीटर है। व्यक्ति द्वारा बनाए पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : F_1, F_2 दो झंडा चौकियाँ हैं। वह व्यक्ति पथ LPM पर दौड़ रहा है। दिया है कि

$$PF_1 + PF_2 = 10$$

और

$$F_1F_2 = 8$$



स्पष्ट है कि P का बिन्दुपथ एक दीर्घवृत्त है।

$$PF_1 + PF_2 = 10 = 2a$$

\therefore

$$a = 5$$

$$F_1F_2 = 8 = 2c$$

\therefore

$$c = 4$$

$$c^2 = a^2 - b^2$$

या

$$16 = 25 - b^2$$

\therefore

$$b^2 = 9$$

दीर्घवृत्त का समीकरण,

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

अर्थात्

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1.$$

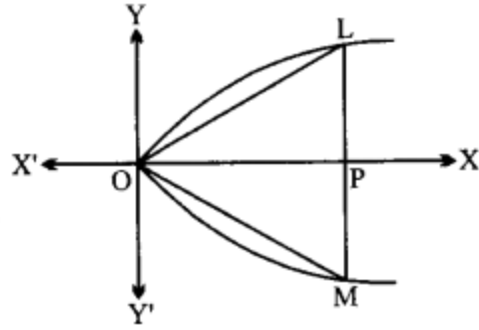
प्रश्न 8.

परवलय $y^2 = 4ax$ के अंतर्गत एक समबाहु त्रिभुज है जिसका एक शीर्ष परवलय का शीर्ष है। त्रिभुज की भुजा की लंबाई ज्ञात कीजिए।

हल:

परवलय $y^2 = 4ax$, एक समबाहु त्रिभुज बनाई गई है।

मान लीजिए इसकी भुजा की लंबाई p है।



ΔOLP में,

$$OL^2 = OP^2 + LP^2$$

$$p^2 = OP^2 + \left(\frac{p}{2}\right)^2$$

\therefore

$$OP^2 = p^2 - \frac{p^2}{4} = \frac{3}{4}p$$

$\therefore L$ के निर्देशांक $\left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{p}{2}\right)$ हैं।

यह परवलय $y^2 = 4ax$ पर स्थित है।

\therefore

$$\left(\frac{p}{2}\right)^2 = 4a \cdot \left(\frac{\sqrt{3}}{2}p\right)$$

या

$$\frac{p^2}{4} = 4a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}p$$

$$p = 8\sqrt{3}a$$

अतः समबाहु त्रिभुज की भुजा की लंबाई $8\sqrt{3}a$ है।