

Chapter-10 सरल रेखाएँ

प्रश्नावली 10.1

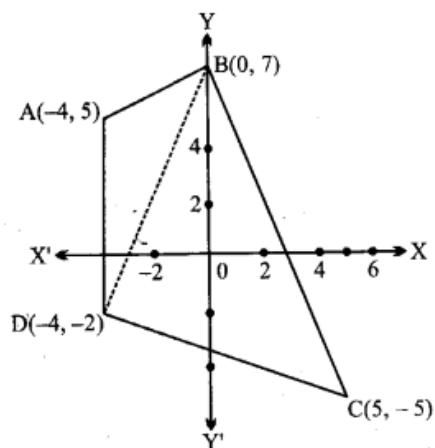
प्रश्न 1.

कार्तीय तल में एक चतुर्भुज खींचिए जिसके शीर्ष $(-4, 5)$, $(0, 7)$, $(5, -5)$ और $(-4, -2)$ हैं। इसका क्षेत्रफल भी ज्ञात कीजिए।

हल:

दिए गए बिन्दुओं $(-4, 5)$, $(0, 7)$, $(5, -5)$ और $(-4, -2)$ क्रमशः A, B, C, D द्वारा दर्शाया गया है। चतुर्भुज ABCD को दो भागों में बाँटा गया है।

जो $\triangle ABD$ तथा $\triangle BDC$ के रूप में हैं।



$\triangle ABD$ के शीर्ष $A(-4, 5)$, $B(0, 7)$, $D(-4, -2)$ हैं।

$$\therefore \triangle ABD \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} |[-4(7+2) + 0(-2-5) + (-4)(5-7)]|$$

$$= \frac{1}{2} |[-36 + 8]| = \frac{1}{2} \times 28$$

$$= 14 \text{ वर्ग इकाई}$$

$\triangle BDC$ के शीर्ष $B(0, 7)$, $D(-4, -2)$, $C(5, -5)$ हैं।

$$\therefore \triangle BDC \text{ का क्षेत्रफल} = \frac{1}{2} [0(-2+5) - 4(-5-7) + 5(7+2)]$$

$$= \frac{1}{2} [48 + 45] = \frac{1}{2} \times 93$$

$$= 46.5 \text{ वर्ग इकाई}$$

\therefore चतुर्भुज $ABCD$ का क्षेत्रफल = $\triangle ABD$ का क्षेत्रफल + $\triangle BDC$ का क्षेत्रफल

$$= 14 + 46.5$$

$$= 60.5 \text{ वर्ग इकाई।}$$

प्रश्न 2.

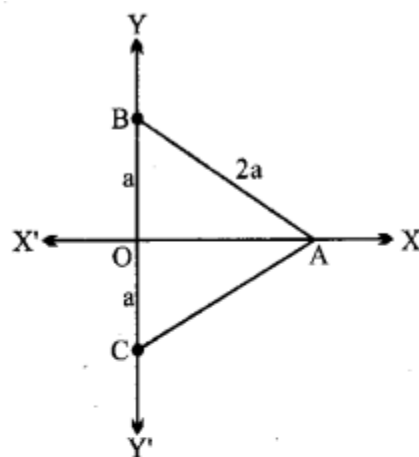
2 भुजा के समबाहु त्रिभुज का आधार y-अक्ष के अनुदिश इस प्रकार है कि आधार का मध्य बिन्दु मूल बिन्दु पर है। त्रिभुज के शीर्ष ज्ञात कीजिए।

हल:

माना $\triangle ABC$ की भुजा BC, y-अक्ष के अनुदिश है जिसका मध्य बिन्दु मूल बिन्दु O है।

\Rightarrow B और C के शीर्ष बिन्दु $(0, a)$ और $(0, -a)$ हैं।

बिन्दु A, x-अक्ष पर है, $AB = 2a$, $OB = a$



समकोण त्रिभुज OAB में,

$$\begin{aligned} OA^2 &= AB^2 - OB^2 = (2a)^2 - a^2 \\ &= 4a^2 - a^2 = 3a^2 \end{aligned}$$

$$\therefore OA = \sqrt{3}a$$

\therefore A के निर्देशांक $(\sqrt{3}a, 0)$ हैं।

अतः $\triangle ABC$ के निर्देशांक $(\sqrt{3}a, 0)$, $(0, a)$, $(0, -a)$ हैं।

प्रश्न 3.

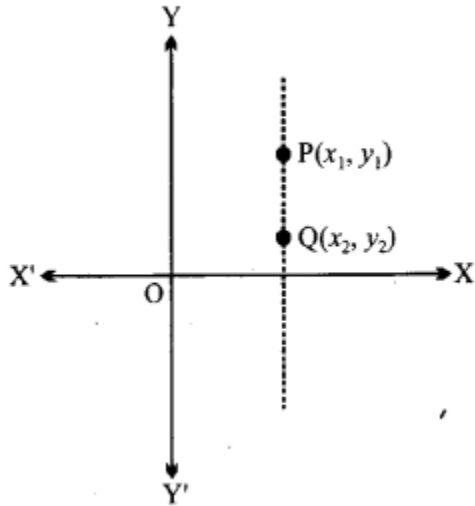
$P(x_1, y_1)$ और $Q(x_2, y_2)$ के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए जब :

- (i) PQ, y-अक्ष के समांतर है,
- (ii) PQ, x-अक्ष के समांतर है।

हल:

(i) जब कोई रेखा y -अक्ष के समांतर होती है तो उसे पर जितने भी बिन्दु होंगे उनके x -निर्देशांक बराबर होते हैं अर्थात् $x_1 = x_2$.

$$PQ = |y_2 - y_1|$$

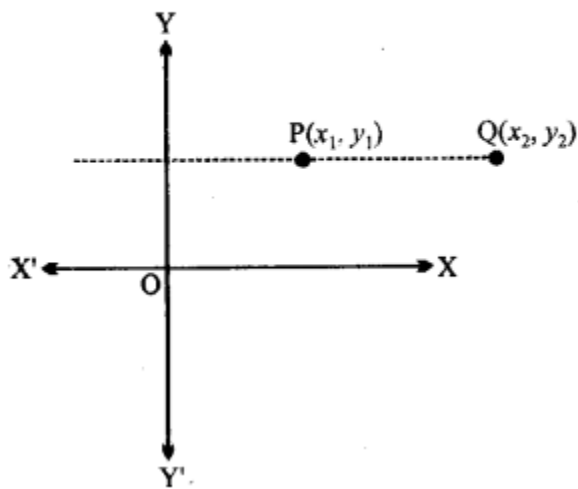


(ii) जब कोई रेखा x -अक्ष के समांतर लेती है तो उसके प्रत्येक बिन्दु का y -निर्देशांक बराबर होता है।

अर्थात्

$$y_1 = y_2$$

$$PQ = |x_2 - x_1|$$

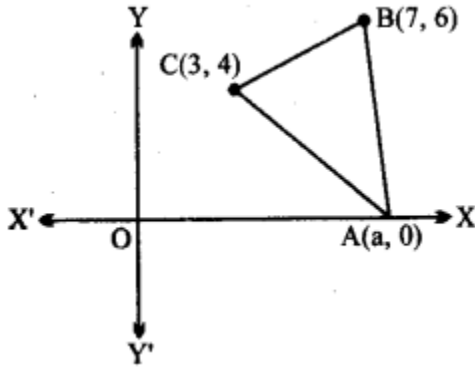


प्रश्न 4.

x-अक्ष पर एक बिन्दु ज्ञात कीजिए जो (7, 6) और (3, 4) बिन्दुओं से समान दूरी पर है।

हल:

मान लीजिए x-अक्ष पर बिन्दु A(a, 0), बिन्दु B(7, 6) और C(3, 4) से समान दूरी पर है।



अर्थात्

$$AB = AC$$

या

$$AB^2 = AC^2$$

या

$$(a - 7)^2 + (0 - 6)^2 = (a - 3)^2 + (0 - 4)^2$$

∴

$$a^2 - 14a + 49 + 36 = a^2 - 6a + 9 + 16$$

•

$$-14a + 6a = 25 - 85$$

$$= -60$$

या

$$-8a = -60$$

या

$$a = \frac{60}{8} = \frac{15}{2}$$

अतः बिन्दु A के निर्देशांक $\left(\frac{15}{2}, 0\right)$ हैं।

प्रश्न 5.

रेखा की ढाल ज्ञात कीजिए जो मूल बिन्दु और P(0, -4) तथा B(8, 0) बिन्दुओं को मिलाने वाले

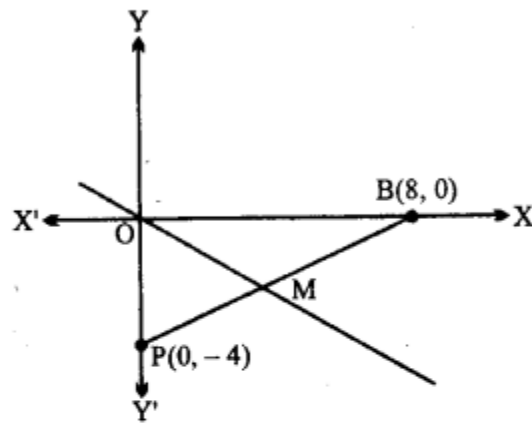
रेखाखंड के मध्य बिन्दु से जाती है।

हल:

बिन्दु $P(0, -4)$ और $B(8, 0)$ को मिलाने वाले रेखाखंड का मध्य बिन्दु

$$x = \frac{x_1 + x_2}{2}$$

$$= \frac{0 + 8}{2} = 4$$



$$y = \frac{y_1 + y_2}{2} = \frac{-4 + 0}{2}$$

$$= \frac{-4}{2} = -2$$

\Rightarrow PB का मध्य बिन्दु M के निर्देशांक $(4, -2)$ है।

मूल बिन्दु O के निर्देशांक $(0, 0)$ हैं।

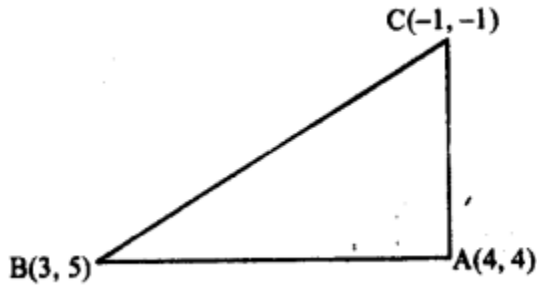
$$\therefore OM \text{ की ढाल} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{-2 - 0}{4 - 0} = \frac{-2}{4} = -\frac{1}{2}$$

प्रश्न 6.

पाइथागोरस प्रमेय के प्रयोग बिना दिखलाइए कि बिन्दु $(4, 4)$, $(3, 5)$ और $(-1, -1)$ एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

हल:

माना दिए गए बिन्दु A(4, 4), B(3, 5) और C(-1, -1) हैं, तब



$$AB \text{ की ढाल} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{5 - 4}{3 - 4} = \frac{1}{-1} = -1 = m_1$$

$$BC \text{ की ढाल} = \frac{-1 - 5}{-1 - 3} = \frac{-6}{-4} = \frac{3}{2}$$

$$CA \text{ की ढाल} = \frac{4 + 1}{4 + 1} = \frac{5}{5} = 1 = m_2$$

$$AB \text{ की ढाल} \times CA \text{ की ढाल} = m_1 \times m_2 = -1 \times 1 = -1$$

$$\text{अतः} \quad AB \perp CA$$

\Rightarrow A, B, C एक समकोण त्रिभुज के शीर्ष हैं।

प्रश्न 7.

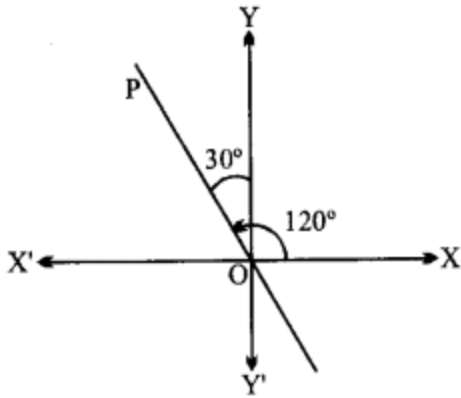
उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो y-अक्ष की धन दिशा से वामावर्त मापा गया 30° का कोण बनाती है।

हल:

माना रेखों OP, y-अक्ष से वामावर्त 30° का कोण बनाती है।

x- अक्ष, की धन दिशा से $90^\circ + 30^\circ = 120^\circ$ को कोण बनाती है।

रेखा OP की ढाल = $\tan 120 = -\sqrt{3}$



यह रेखा मूलबिन्दु (0, 0) से होकर जाती है। रेखा का बिन्दु ढाल रूप है।

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$OP \text{ का समीकरण } y - 0 = -\sqrt{3} (x - 0)$$

$$y = -\sqrt{3} x.$$

प्रश्न 8.

x का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए बिन्दु (x, -1), (2, 1) और (4, 5) संरेख हैं।

हल:

मान लीजिए बिन्दु A (x, -1), B (2, 1), C (4, 5) संरेख हैं यदि,

AB की ढाल = BC की ढाल

$$AB \text{ की ढाल} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{1 - (-1)}{2 - x} = \frac{2}{2 - x} \quad \dots(1)$$

$$BC \text{ की ढाल} = \frac{5 - 1}{4 - 2} = \frac{4}{2} = 2 \quad \dots(2)$$

∴ समीकरण (1) और (2) से,

$$\frac{2}{2 - x} = 2$$

या

$$1 = 2 - x$$

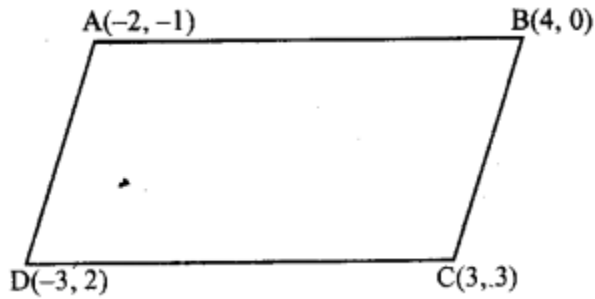
$$x = 1.$$

प्रश्न 9.

दूरी सूत्र का प्रयोग किए बिना दिखलाइए कि बिन्दु (-2, -1), (4, 0), (3, 3) और (-3, 2) एक समांतर चतुर्भुज के शीर्ष हैं।

हल:

मान लीजिए एक चतुर्भुज के शीर्ष $A(-2, -1)$, $B(4, 0)$, $C(3, 3)$, तथा $D(-3, 2)$ हैं।



$$AB \text{ की ढाल} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{0 - (-1)}{4 - (-2)} = \frac{1}{6}$$

$$DC \text{ की ढाल} = \frac{3 - 2}{3 - (-3)} = \frac{1}{6}$$

$$AB \text{ की ढाल} = DC \text{ की ढाल}$$

अर्थात्

$$AB \parallel DC$$

$$BC \text{ की ढाल} = \frac{3 - 0}{3 - 4} = \frac{3}{-1} = -3$$

$$AD \text{ की ढाल} = \frac{2 - (-1)}{-3 - (-2)} = \frac{3}{-1} = -3$$

∴

$$BC \text{ की ढाल} = AD \text{ की ढाल}$$

अर्थात्

$$BC \parallel AD$$

अतः $AB \parallel DC$, $BC \parallel AD$

अतः ABCD एक समांतर चतुर्भुज है।

प्रश्न 10.

x-अक्ष और $(3, -1)$ और $(4, -2)$ बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखा के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल:

माना $A(3, -1)$, $B(4, -2)$ को मिलाने वाली रेखा AB की ढाल = $\frac{-2+1}{4-3}$

$$= \frac{-1}{1} = -1$$

यदि x-अक्ष और AB के बीच से कोण हो, तो

$$\tan \theta = -1 = \tan 135^\circ$$

$$\theta = 135^\circ.$$

प्रश्न 11.

एक रेखा की ढाल दूसरी रेखा की ढाल का दुगुना है। यदि दोनों के बीच के कोण की स्पर्शज्या (tangent) $\frac{1}{3}$ है तो रेखाओं की ढाल ज्ञात कीजिए।

हल : माना रेखाओं की ढाल m_1, m_2 हों, तब

$$\therefore m_1 = 2m_2$$

यदि दोनों रेखाओं के बीच θ कोण हो, तो

$$\tan \theta = \frac{1}{3}$$

हम जानते हैं कि

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} = \frac{1}{3} \text{ जहाँ } m_1 = 2m_2$$

$$\therefore \pm \frac{2m_2 - m_2}{1 + 2m_2^2} = \frac{1}{3} \text{ या } \pm \frac{m_2}{1 + 2m_2^2} = \frac{1}{3}$$

धनात्मक चिन्ह लेने पर,

$$\therefore 1 + 2m_2^2 = 3m_2$$

$$\text{या } 2m_2^2 - 3m_2 + 1 = 0$$

$$\Rightarrow (m_2 - 1)(2m_2 - 1) = 0$$

$$\therefore m_2 = 1, \frac{1}{2}$$

$m_1 = 2m_2$ में $m_2 = 1$ रखने पर,

$$m_1 = 1 \times 2 = 2$$

रेखाओं की ढाल 2 और 1 है तथा $1, \frac{1}{2}$ है।

-ve चिन्ह लेने पर, $1 + 2m_2^2 = -3m_2$ या $2m_2^2 + 3m_2 + 1 = 0$

$$\text{या } (m_2 + 1)(2m_2 + 1) = 0 \text{ अर्थात् } m_2 = -1, -\frac{1}{2}$$

\therefore रेखा की ढाल -2, -1, तथा $-1, -\frac{1}{2}$ है।

प्रश्न 12.

एक रेखा (x_1, y_1) और (h, k) से जाती है। यदि रेखा की ढाल m है तो दिखाइए $k - y_1 = m(h - x_1)$.

हल:

माना रेखा AB बिन्दु $A(x_1, y_1)$ और $B(h, k)$ से गुजरती हो, तब

$$\therefore AB \text{ की ढाल} = \frac{k - y_1}{h - x_1} = m$$

$$\text{अर्थात् } k - y_1 = m(h - x_1).$$

प्रश्न 13.

यदि तीन बिन्दु $(h, 0)$, (a, b) और $(0, k)$ एक रेखा पर हैं तो दिखाइए कि $\frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1$

हल:

मान लीजिए बिन्दु $A(h, 0)$, $B(a, b)$, तथा $C(0, k)$ एक रेखा पर हों, तब

$$\therefore AB \text{ की ढाल} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{b - 0}{a - h} = \frac{b}{a - h}$$

$$BC \text{ की ढाल} = \frac{k - b}{0 - a} = \frac{k - b}{-a}$$

$$\Rightarrow AB \text{ की ढाल} = BC \text{ की ढाल}$$

$$\therefore \frac{b}{a - h} = \frac{k - b}{-a}$$

$$\text{या} \quad (a - h)(k - b) = -ab$$

$$\text{या} \quad ak - ab - hk + hb = -ab$$

$$\therefore ak + hb = hk$$

$$hk \text{ से भाग देने पर,} \quad \frac{a}{h} + \frac{b}{k} = 1.$$

प्रश्न 14.

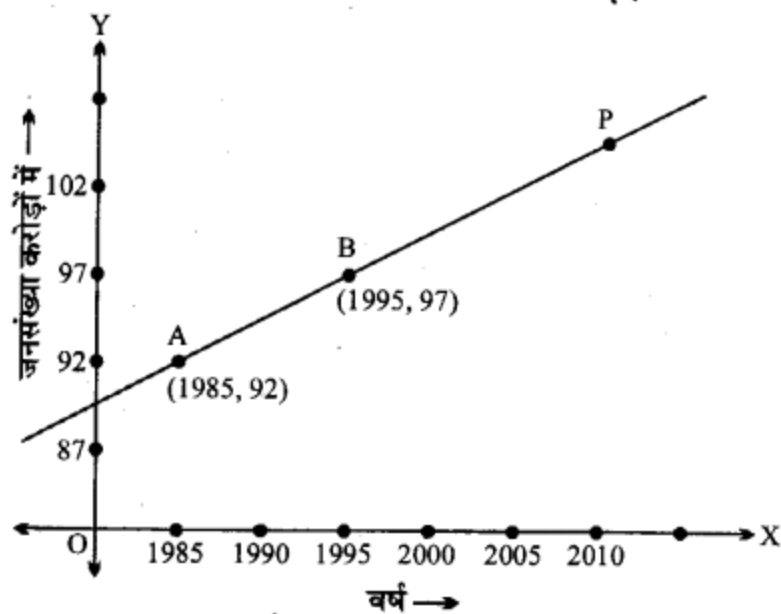
जनसंख्या और वर्ष के निम्नलिखित लेखाचित्र पर विचार कीजिए। (देखिए आकृति में) रेखा AB की ढाल ज्ञात कीजिए और इसके प्रयोग से बताइए कि वर्ष 2010 में जनसंख्या कितनी होगी ?

हल:

दी गयी आकृति में रेखा AB बिन्दु $A(1985, 92)$ और $B(1995, 97)$ से होकर जाती है।

$$AB \text{ की ढाल} = \frac{97 - 92}{1995 - 1985} = \frac{5}{10} = \frac{1}{2}$$

मान लीजिए सन् 2010 में जनसंख्या y_1 करोड़ होगी जो बिन्दु $P(2010, y_1)$, AB पर पड़ता है।



\therefore ABP सरेखीय हैं।

या AB की ढाल = BP की ढाल

$$\frac{1}{2} = \frac{y_1 - 97}{2010 - 1995} = \frac{y_1 - 97}{15}$$

$$\therefore 2(y_1 - 97) = 15$$

$$2y_1 = 15 + 2 \times 97$$

$$= 15 + 194 = 209$$

$$\therefore y_1 = \frac{209}{2} = 104.5$$

सन् 2010 में जनसंख्या 104.5 करोड़ होगी।

प्रश्न 1 से 8 तक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो दिए गए प्रतिबंधों को संतुष्ट करता है।

प्रश्न 1.

x-अक्ष और y-अक्ष के समीकरण लिखिए।

हल:

x-अक्ष का समीकरण $y = 0$.

तथा y-अक्ष का समीकरण $x = 0$.

प्रश्न 2.

ढाल $\frac{1}{2}$ और बिन्दु $(-4, 3)$ से जाने वाली।

हल:

ढाल $m = \frac{1}{2}$, बिन्दु $(-4, 3)$

अभीष्ट रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{1}{2}(x + 4)$$

$$2y - 6 = x + 4$$

$$x - 2y + 10 = 0.$$

प्रश्न 3.

बिन्दु $(0, 0)$ से जाने वाली और ढाल m वाली।

हल:

दिया है : बिन्दु $(0, 0)$, ढाल $= m$

ढाल m , तथा (x_1, y_1) से जाने वाली रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 0 = m(x - 0)$$

अतः अभीष्ट समीकरण $y = mx$.

प्रश्न 4.

बिन्दु $(2, 2\sqrt{3})$ से जाने वाली और x-अक्ष से 75° के कोण पर झुकी हुई।

हल:

चूँकि रेखा x-अक्ष के साथ 75° पर झुकी हुई है, तब रेखा की ढाल

$$m = \tan 75^\circ = \tan (45^\circ + 30^\circ)$$

$$= \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3} + 1}{\sqrt{3} - 1} = \frac{(\sqrt{3} + 1)^2}{3 - 1}$$

$$= \frac{4 + 2\sqrt{3}}{2} = 2 + \sqrt{3}$$

रेखा बिन्दु $(2, 2\sqrt{3})$ से होकर जाती है।

रेखा जो (x_1, y_1) से होकर जाती है तथा ढाल m हो तो उसका समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

यहाँ $x_1 = 2$ तथा $y_1 = 2\sqrt{3}$ रखने पर,

$$\begin{aligned} y - 2\sqrt{3} &= (2 + \sqrt{3})(x - 2) \\ &= (2 + \sqrt{3})x - (4 + 2\sqrt{3}) \end{aligned}$$

$$\text{या } (2 + \sqrt{3})x - y + 2\sqrt{3} - 4 - 2\sqrt{3} = 0$$

$$\text{अतः } (2 + \sqrt{3})x - y - 4 = 0.$$

प्रश्न 5.

मूल बिन्दु के बाईं ओर ४-अक्ष को ३ इकाई की दूरी पर प्रतिच्छेद करने तथा ढाल -2 वाली।

हल:

मूल बिन्दु से बाईं ओर ३ इकाई की दूरी पर स्थित बिन्दु $(-3, 0)$ होगा तथा ढाल $m = -2$ तथा

(x_1, y_1) के द्वारा, रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

यहाँ $x_1 = -3$ तथा $y_1 = 0$ रखने पर,

$$y - 0 = -2(x + 3) \text{ यो}$$

$$y = -2x - 6$$

$$2x + y + 6 = 0.$$

प्रश्न 6.

मूल बिन्दु से ऊपर y -अक्ष को 2 इकाई की दूरी पर प्रतिच्छेद करने वाली और x -अक्ष की धन दिशा के साथ 30° का कोण बनाने वाली।

हल:

मूल बिन्दु से y -अक्ष पर 2 इकाई की दूरी पर स्थित बिन्दु $(0, 2)$ होगा। x -अक्ष की धन दिशा के साथ रेखा 30° का कोण बनाती है।

\therefore  $m = \tan 30^\circ = \frac{1}{\sqrt{3}}$

रेखा का समीकरण, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 2 = \frac{1}{\sqrt{3}}(x - 0)$$

या $\sqrt{3}y - 2\sqrt{3} = x$

या $x - \sqrt{3}y + 2\sqrt{3} = 0.$

प्रश्न 7.

बिन्दुओं $(-1, 1)$ और $(2, -4)$ से जाते हुए।

हल : बिन्दुओं (x_1, y_1) और (x_2, y_2) से जाने वाली रेखा की ढाल = $\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$

$\therefore (x_1, y_1)$ और (x_2, y_2) से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$

दिया है : $x_1 = -1, y_1 = 1, x_2 = 2$ और $y_2 = -4$ रखने पर,

$$y - 1 = \frac{-4 - 1}{2 + 1} (x + 1) = -\frac{5}{3} (x + 1)$$

या $3y - 3 = -5x - 5$

अतः $5x + 3y + 2 = 0.$

प्रश्न 8.

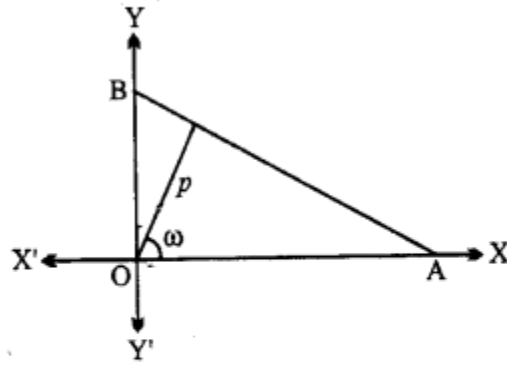
उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसकी मूल बिन्दु से लम्बिक दूरी 5 इकाई और लम्ब धन x-अक्ष से 30° को कोण बनाती है।

हल:

हम जानते हैं कि लंबे रूप में रेखा AB का समीकरण,

$$x \cos \omega + y \sin \omega = p$$

यहाँ पर दिया है: $\omega = 30^\circ$, तथा $p = 5$



\therefore रेखा AB का समीकरण,

$$x \cos 30 + y \sin 30 = 5$$

$$x \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + y \cdot \frac{1}{2} = 5$$

$$\therefore \sqrt{3} x + y = 10.$$

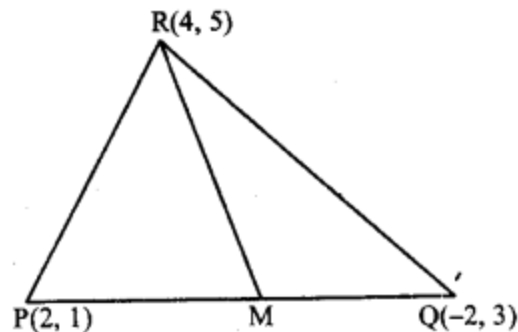
प्रश्न 9.

ΔPQR के शीर्ष $P(2, 1)$, $Q(-2, 3)$ और $R(4, 5)$ हैं। शीर्ष R से जाने वाली माध्यिका का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : PQ का मध्य बिन्दु $M\left(\frac{2-2}{2}, \frac{1+3}{2}\right)$ अर्थात् $m(0, 2)$ है।

\therefore दो बिन्दुओं से जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} (x - x_1)$$



अब बिन्दुओं $R(4, 5)$ तथा $M(0, 2)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y - 5 = \frac{2-5}{0-4} (x - 4)$$

या $4(y - 5) = 3(x - 4)$

या $3x - 4y + 8 = 0$

अतः माध्यिका RM का समीकरण $3x - 4y + 8 = 0$.

प्रश्न 10.

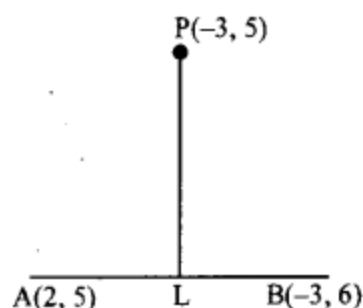
$(-3, 5)$ से होकर जाने वाली और बिन्दु $(2, 5)$ और $(-3, 6)$ से जाने वाली रेखा पर लंब रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल:

बिन्दु $A(2, 5)$ और $B(-3, 6)$ से होकर जाने वाली रेखा का ढाल

हल : बिन्दु $A(2, 5)$ और $B(-3, 6)$ से होकर जाने वाली रेखा का ढाल

$$\begin{aligned} m_1 &= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} \\ &= \frac{6 - 5}{-3 - 2} = \frac{1}{-5} \\ &= -\frac{1}{5} \end{aligned}$$



यदि PL बिन्दु $P(-3, 5)$ से AB पर लम्ब डाला गया हो तो उसकी ढाल m_2 मान लीजिए।

रेखाएँ PL और AB परस्पर लम्ब हैं।

यदि PL की ढाल $\times AB$ की ढाल $= -1$

अर्थात् $m_2 \times \left(-\frac{1}{5}\right) = -1$

$\therefore m_2 = 5$

PL की ढाल 5 है और $P(-3, 5)$ से होकर जाती है तो PL का समीकरण,

$$y - y_1 = m_2(x - x_1)$$

या $y - 5 = 5(x + 3)$

$\therefore 5x - y + 20 = 0.$

प्रश्न 11.

एक रेखा $(1, 0)$ तथा $(2, 3)$ बिन्दुओं को मिलाने वाली रेखाखंड पर लम्ब है तथा उसको $1 : n$ के अनुपात में विभाजित करती है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

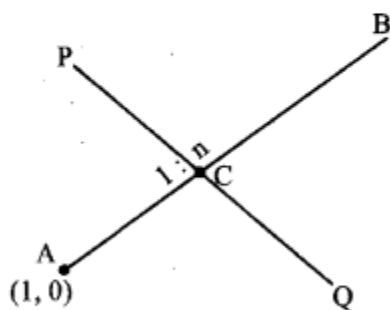
हल:

रेखा AB बिन्दु $A(1, 0)$ तथा $B(2, 3)$ से होकर जाती है।

$$AB \text{ की ढाल} = \frac{3-0}{2-1} = \frac{3}{1}$$

$$PQ \perp AB$$

$$AB \text{ की ढाल} = \frac{3}{1}$$



$$PQ \text{ की ढाल, } m = -\frac{1}{\frac{3}{1}} = -\frac{1}{3}$$

PQ रेखा AB को C पर प्रतिच्छेदन करती है।

साथ ही बिन्दु C रेखाखंड AB को $1 : n$ के अनुपात में बांटता है।

$$\text{अर्थात् } C\left(\frac{1 \times 2 + n \times 1}{n+1}, \frac{1 \times 3 + n \times 0}{n+1}\right)$$

$$\text{या } C\left(\frac{n+2}{n+1}, \frac{3}{n+1}\right)$$

* अब रेखा PQ का समीकरण,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$\text{जहाँ } x_1 = \frac{n+2}{n+1} \text{ और } y_1 = \frac{3}{n+1}$$

$$y - \frac{3}{n+1} = -\frac{1}{3}\left(x - \frac{n+2}{n+1}\right)$$

$$3(n+1)y - 9 = -[(n+1)x - (n+2)]$$

$$\text{या } (n+1)x + 3(n+1)y = n+2 + 9 = n+11$$

$$\text{या } (n+1)x + 3(n+1)y = n+11.$$

प्रश्न 12.

एक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो निर्देशांक अक्षों से समान अंतःखण्ड काटती है और बिन्दु $(2, 3)$ से जाती है।

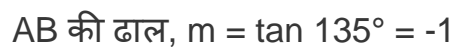
हल:

(i) रेखा AB बिन्दु $P(2, 3)$ से होकर जाती है और निर्देशांक अक्षों पर समान अंतःखंड बनाती है।

$$OA = OB$$

$$\angle BAO = 45^\circ$$

$$\angle BAX = 135^\circ$$



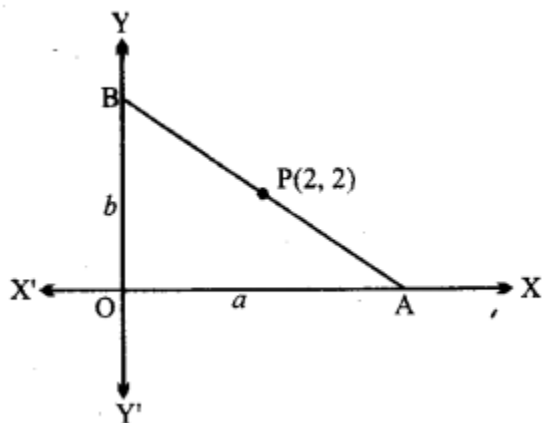
जहाँ $x_1 = 2, y_1 = 3$ तथा $m = -1$

$$x + y - 5 = 0$$

$$x + y = 5.$$

बिन्दु (2, 2) से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जिसके द्वारा अक्षों से कटे अंतःखंडों का योग 9 है।

मान लीजिए $P(2, 2)$ से होकर जाने वाली रेखा से अक्षों पर बने अंतः खंड a तथा b हैं।



अंतः खंड रूप में रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

यह रेखा $P(2, 2)$ से होकर जाती है।

$$\therefore \frac{2}{a} + \frac{2}{b} = 1$$

दिया है कि अंतः खंडों का योग 9 है।

$$\therefore a + b = 9$$

$$\Rightarrow b = 9 - a$$

b का मान (1) में रखने पर,

$$\frac{2}{a} + \frac{2}{9-a} = 1$$

या $2(9-a) + 2a = a(9-a)$

$$18 - 2a + 2a = 9a - a^2$$

या $a^2 - 9a + 18 = 0$

या $(a-6)(a-3) = 0$

$$a = 6, 3$$

$$\therefore b = 3, 6$$

जब $a = 6$ तथा $b = 3$ हो, तो रेखा का अभीष्ट समीकरण

$$\frac{x}{6} + \frac{y}{3} = 1$$

या $3x + 6y = 18$

या $x + 2y = 6.$

जब $a = 3$ तथा $b = 6$ हो, तब रेखा का अभीष्ट समीकरण,

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{6} = 1$$

या $6x + 3y = 18$

या $2x + y = 6$

प्रश्न 14.

बिन्दु $(0, 2)$ से जाने वाली और धन x -अक्ष से $\frac{2\pi}{3}$ के कोण बनाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए। इसके समांतर और y -अक्ष को मूल बिन्दु से 2 इकाई नीचे की दूरी पर प्रतिच्छेद करती हुई रेखा का समीकरण भी ज्ञात करो।

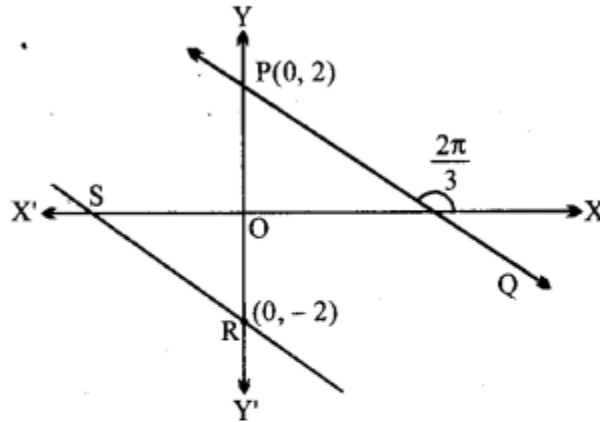
हल:

माना एक रेखा PQ बिन्दु $P(0, 2)$ से होकर जाती है और धन x -अक्ष के साथ $\frac{2\pi}{3}$

$\frac{2\pi}{3}$ का कोण बनाती है।

$$\therefore PQ \text{ की ढाल} = \tan \frac{2\pi}{3}$$

$$= -\sqrt{3}$$



\therefore रेखा PQ का समीकरण, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y - 2 = -\sqrt{3}(x - 0)$$

या $\sqrt{3}x + y - 2 = 0.$

दूसरी रेखा RS रेखा PQ के समांतर है

$$\therefore RS \text{ का ढाल} = -\sqrt{3}$$

यह रेखा $(0, -2)$ से होकर जाती है।

रेखा RS का समीकरण, $y - y_1 = m(x - x_1)$

$$y + 2 = -\sqrt{3}(x - 0)$$

$$\sqrt{3}x + y + 2 = 0.$$

प्रश्न 15.

मूल बिन्दु से किसी रेखा पर डाला गया लम्ब रेखा से बिन्दु $(-2, 9)$ पर मिलता है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल:

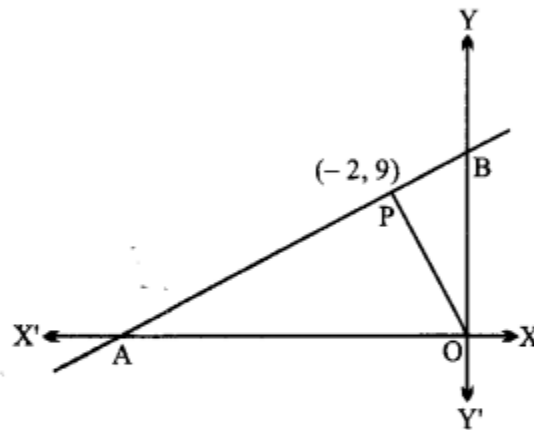
मान लीजिए रेखा AB पर मूल बिन्दु से डाला गया लम्ब AB पर मिलता है।

$$OP \text{ की ढाल} = -\frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{9 - 0}{-2 - 0} = -\frac{9}{2}$$

परन्तु $AB \perp OP$

$$\therefore AB \text{ की ढाल} = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{-\frac{9}{2}} = \frac{2}{9}$$



अब AB की ढाल $\frac{2}{9}$ है और $P(-2, 9)$ से होकर जाती है।

\therefore AB का समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

अर्थात्
$$y - 9 = \frac{2}{9}(x + 2)$$

या
$$9y - 81 = 2x + 4$$

या
$$2x - 9y + 85 = 0.$$

प्रश्न 16.

तांबे की छड़ की लम्बाई L (सेमी में) सेल्सियस ताप C का रैखिक फलन है। एक प्रयोग में यदि $L = 124.942$, जब $C = 20$ और $L = 125.134$ जब $C = 110$ हो, तो L को C के पदों में व्यक्त कीजिए।

हल:

L ताप C का रैखिक फलन है।

$(20, 124.942)$, $(110, 125.134)$ इसका रैखिक फलन है। इन दो बिन्दुओं से संतुष्ट फलन

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$L - 124.942 = \frac{125.134 - 124.942}{110 - 20}(C - 20)$$

$$L - 124.942 = \frac{0.192}{90}(C - 20)$$

$$L = \frac{0.192}{90}(C - 20) + 124.942$$

प्रश्न 17.

किसी दूध भण्डार का स्वामी प्रति सप्ताह 980 लीटर दूध, 14 रु प्रति लीटर के भाव से और 1220 लीटर दूध 16 रु प्रति लीटर के भाव से बेच सकता है। विक्रय मूल्य तथा मांग के मध्य के संबंध को रैखिक मानते हुए ज्ञात कीजिए कि प्रति सप्ताह वह कितना दूध 17 रु प्रति लीटर के भाव से बेच सकता है?

हल:

दूध के भाव और मात्रा में रैखिक सम्बन्ध है। यह रेखा दो बिन्दुओं $(14, 980)$, $(16, 1220)$ से होकर जाती है।

इससे प्राप्त रेखा का समीकरण,

इससे प्राप्त रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 980 = \frac{1220 - 980}{16 - 14}(x - 14)$$

$$= \frac{240}{2}(x - 14)$$

$$= 120(x - 14)$$

$$y = 980 + 120(x - 14)$$

जब x का मान 17 है तो y का मान नीचे दिया गया है।

$$y = 980 + 120(17 - 14)$$

$$= 980 + 120 \times 3$$

$$= 980 + 360$$

$$= 1340$$

अतः 17 रु प्रति लीटर भाव का 1340 लीटर दूध बिकेगा।

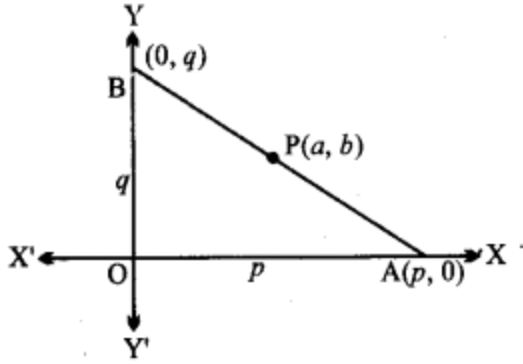
प्रश्न 18.

अक्षों के बीच रेखाखंड का मध्य बिंदु $P(a, b)$ है। दिखाइए कि रेखा का समीकरण $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2$

हल:

माना रेखा AB अक्षों पर p और q अंतःखंड बनते हैं।

बिन्दु A और B के क्रमशः निर्देशांक $(p, 0)$ और $(0, q)$ हैं।



AB के मध्य बिन्दु $P(a, b)$ इस प्रकार ज्ञात करेंगे।

$$\frac{0 + p}{2} = a$$

और

$$\frac{q + 0}{2} = b$$

$$\therefore p = 2a \text{ और } q = 2b$$

अंतःखंड रूप में रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{p} + \frac{y}{q} = 1$$

या

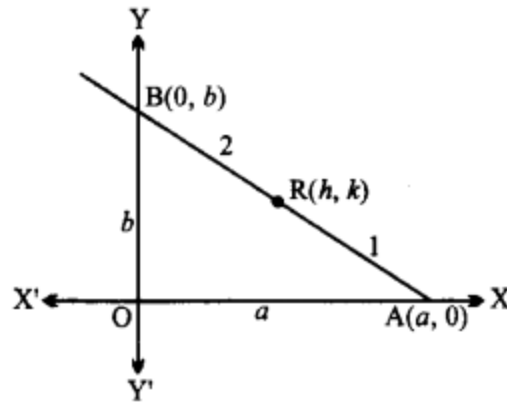
$$\frac{x}{2a} + \frac{y}{2b} = 1 \text{ या } \frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 2.$$

प्रश्न 19.

अक्षों के बीच रेखाखण्ड को बिन्दु $R(h, k)$, $1 : 2$ के अनुपात में विभक्त करता है। रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल:

अक्षों के बीच रेखाखंड AB को $R(h, k)$ $AR : RB = 1 : 2$ के अनुपात में विभक्त करता है। मान लीजिए अक्षों पर अंतःखण्ड $OA = a$ और $OB = b$ है।



∴ A और B के निर्देशांक क्रमशः $(a, 0)$ और $(0, b)$ हैं।

बिन्दु R के निर्देशांक इस प्रकार ज्ञात करेंगे।

$$\frac{1 \times 0 + 2 \times a}{3} = h \text{ अर्थात् } a = \frac{3h}{2}$$

और
$$\frac{1 \times b + 2 \times 0}{3} = k \text{ अर्थात् } b = 3k$$

अंतःखंड रूप में रेखा का समीकरण

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1$$

a और b के मान रखने पर,

$$\frac{x}{\frac{3h}{2}} + \frac{y}{3k} = 1$$

या
$$\frac{2x}{h} + \frac{y}{k} = 3$$

या
$$2kx + hy = 3hk.$$

प्रश्न 20.

रेखा के समीकरण की संकल्पना का प्रयोग करते हुए सिद्ध कीजिए कि तीन बिन्दु $(3, 0)$, $(-2, -2)$ और $(8, 2)$ संरेख हैं।

हल:

बिन्दु $A(3, 0)$, $B(2, -2)$ से होकर जाने वाली रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - 0 = \frac{-2 - 0}{-2 - 3}(x - 3)$$

या $y = \frac{2}{5}(x - 3)$

या $5y = 2x - 6$

$\Rightarrow 2x - 5y - 6 = 0$

बिन्दु $C(8, 2)$ इस रेखा पर पड़ता है तब इसके निर्देशांक इस समीकरण को संतुष्ट करेंगे।

$\therefore 2 \times 8 - 5 \times 2 - 6 = 0$

या $16 - 16 = 0$

अतः दिए हुए बिन्दु A, B, C संरेख हैं।

प्रश्नावली 10.3
प्रश्न 1.

निम्नलिखित समीकरणों को ढाल अंतःखण्ड रूप में रूपान्तरित कीजिए और उनके ढाल तथा y-अंतःखण्ड ज्ञात कीजिए:

(i) $x + 7y = 0$

(ii) $6x + 3y - 5 = 0$

(iii) $y = 0$.

हल:

(i) $x + 7y = 0$

$$y = -\frac{1}{7}x + 0.$$

$$\text{ढाल} = -\frac{1}{7}, y\text{-अंतःखण्ड} = 0.$$

$$(ii) \quad 6x + 3y - 5 = 0,$$

$$3y = -6x + 5$$

$$\therefore y = -2x + \frac{5}{3}$$

$$\text{ढाल} = -2, y\text{-अंतःखण्ड} = \frac{5}{3}.$$

$$(iii) \quad y = 0$$

$$\text{या} \quad y = 0, x + 0.$$

$$\text{ढाल} = 0, y\text{-अंतःखण्ड} = 0$$

प्रश्न 2.

निम्नलिखित समीकरणों को अंतःखण्ड रूप में रूपान्तरित कीजिए और अक्षों पर इनके द्वारा काटे गए अंतःखण्ड ज्ञात कीजिए:

$$(i) 3x + 2y - 12 = 0$$

$$(ii) 4x - 3y = 6$$

$$(iii) 3y + 2 = 0.$$

हल : (i) $3x + 2y - 12 = 0$

या $3x + 2y = 12$

12 से दोनों पक्षों में भाग देने पर

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$$

अतः अंतःखण्ड 4 तथा 6 हैं।

(ii) $4x - 3y = 6$

6 से दोनों पक्षों में भाग देने पर,

$$\frac{4x}{6} - \frac{3y}{6} = 1$$

$$\frac{x}{\frac{3}{2}} + \frac{y}{-2} = 1.$$

अतः अंतःखण्ड $\frac{3}{2}$ तथा -2 हैं।

(iii) $3y + 2 = 0$

या $3y = -2$

$$y = -\frac{2}{3}.$$

अन्तःखण्ड हेतु समीकरण का रूप :

$$\frac{x}{0} + \frac{y}{-\frac{2}{3}} = 1$$

अंतःखण्ड 0 और $-\frac{2}{3}$ हैं।

प्रश्न 3.

निम्नलिखित समीकरणों को लम्ब रूप में रूपान्तरित कीजिए। उनकी मूल बिन्दु से लॉबिक दूरियाँ और लम्ब तथा धन-अक्ष के बीच का कोण ज्ञात कीजिए

(i) $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$

(ii) $y - 2 = 0$

(iii) $x - y = 4.$

हल : (i) $x - \sqrt{3}y + 8 = 0$

या $-x + \sqrt{3}y = 8$

$\sqrt{3+1} = 2$ से भाग देने पर,

$$-\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y = 4$$

$$\cos 120^\circ = -\frac{1}{2}, \sin 120^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\therefore -\frac{1}{2}$ और $\frac{\sqrt{3}}{2}$ के स्थान पर क्रमशः $\cos 120^\circ$ तथा $\sin 120^\circ$ रखने पर,

$$x \cos 120^\circ + y \sin 120^\circ = 4$$

की तुलना $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ से करने पर,

$$\Rightarrow p = 4, \alpha = 120^\circ = \frac{2\pi}{3} \text{ रेडियन।}$$

$$(ii) \quad y - 2 = 0 \text{ या } y = 2$$

$$0 \cdot x + y \cdot 1 = 2$$

$$x \cos 90^\circ + y \sin 90^\circ = 2$$

$$[\because \cos 90^\circ = 0, \sin 90^\circ = 1]$$

$$\therefore p = 2, \alpha = 90^\circ.$$

$$(iii) \quad x - y = 4$$

$\sqrt{2}$ से भाग देने पर

$$\frac{1}{\sqrt{2}}x + \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)y = 2\sqrt{2}$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}} = \cos (360^\circ - 45^\circ) = \cos 315^\circ$$

$$\text{और} \quad -\frac{1}{\sqrt{2}} = \sin 315^\circ$$

$$\therefore x - y = 4 \text{ का लम्ब रूप}$$

$$x \cos 315^\circ + y \sin 315^\circ = 4$$

की तुलना $x \cos \alpha + y \sin \alpha = p$ से करने पर,

$$p = 2\sqrt{2}, \alpha = 315^\circ.$$

प्रश्न 4.

बिन्दु $(-1, 1)$ की रेखा $12(x + 6) = 5(y - 2)$ से दूरी ज्ञात कीजिए।

हल : $12(x + 6) = 5(y - 2)$

या $12x + 72 = 5y - 10$

$$12x - 5y + 82 = 0$$

बिन्दु (x_1, y_1) की रेखा $ax + by + c = 0$ से दूरी $\frac{(ax_1 + by_1 + c)}{\sqrt{a^2 + b^2}}$

\therefore बिन्दु $(-1, 1)$ से रेखा $12x - 5y + 8 = 0$ की दूरी

$$d = \frac{|12 \times (-1) - 5 \times 1 + 8|}{\sqrt{12^2 + 5^2}}$$

$$= \frac{|12 - 5 + 82|}{\sqrt{144 + 25}}$$

$$= \frac{65}{13} = 5 \text{ इकाई।}$$

प्रश्न 5.

x-अक्ष पर बिन्दुओं को ज्ञात कीजिए जिनकी रेखा $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1$ से दूरियाँ 4 इकाई हैं।

हल : दिया गया समीकरण है: $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = 1,$

12 से गुणा करने पर

$$4x + 3y - 12 = 0$$

...(1)

x-अक्ष पर माना कोई बिन्दु $(a, 0)$ हो, तो बिन्दु $(a, 0)$ से रेखा (1) की दूरी

$$= \frac{4a + 0 - 12}{\sqrt{16 + 9}} = \pm \frac{4a - 12}{5}$$

$$\therefore \pm \frac{4a-12}{5} = 4$$

$$\text{या } \pm (4a-12) = 20$$

$$+ \text{ve चिन्ह लेकर } 4a = 32 \text{ या } a = 8$$

x-अक्ष पर अभीष्ट बिन्दु (8, 0) है।

$$- \text{ve चिन्ह लेकर, } -\frac{4a-12}{5} = 4 \text{ या } -4a + 12 = 20$$

$$4a = -8, a = -2$$

दूसरा अभीष्ट बिन्दु (-2, 0) है।

प्रश्न 6.

समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी ज्ञात कीजिए-

$$(i) 15x + 8y - 34 = 0 \text{ और } 15x + 8y + 31 = 0$$

(ii) $l(x + y) + p = 0$ और $l(x + y) - r = 0$

हल : हम जानते हैं कि दो समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी = $\left| \frac{C_1 - C_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right|$

(i) यहाँ पर $C_1 = -34, C_2 = 31$

$a = 15, b = 8$

$$\therefore \text{दी हुई समान्तर रेखाओं के बीच दूरी} = \left| \frac{-34 - 31}{\sqrt{15^2 + 8^2}} \right| = \frac{65}{\sqrt{225 + 64}}$$

$$= \frac{65}{\sqrt{289}} = \frac{65}{17} \text{ इकाई।}$$

(ii) यहाँ $a = l, b = l, C_1 = p, C_2 = -r$

$$\therefore \text{समान्तर रेखाओं के बीच की दूरी} = \left| \frac{C_1 - C_2}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right| = \left| \frac{p - (-r)}{\sqrt{l^2 + l^2}} \right|$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \left| \frac{p + r}{l} \right| \text{ इकाई।}$$

प्रश्न 7.

रेखा $3x - 4y + 2 = 0$ के समान्तर और बिन्दु $(-2, 3)$ से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : $3x - 4y + 2 = 0$

या $4y = 3x + 2$

$\therefore y = \frac{3}{4}x + \frac{2}{4}$

\therefore रेखा की ढाल $= \frac{3}{4}$

दिया गया बिन्दु $(-2, 3)$ और ढाल $m = \frac{3}{4}$ से जाने वाली रेखा का समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{3}{4}(x + 2)$$

या $4y - 12 = 3x + 6$

या $3x - 4y + 18 = 0$.

दूसरी विधि : कोई भी रेखा $ax + by + c = 0$ के समान्तर $ax + by + k = 0$ के रूप में लिखी जा सकती है

$\therefore 3x - 4y + 2 = 0$ के समान्तर रेखा $3x - 4y + k = 0$ है

यह $(-2, 3)$ से होकर जाती है।

$\therefore 3 \times (-2) - 4 \times 3 + k = 0$ या $k = 18$

अभीष्ट समान्तर रेखा का समीकरण: $3x - 4y + 18 = 0$.

प्रश्न 8.

रेखा $4x - 7y + 5 = 0$ पर लम्ब और x-अन्तःखण्ड 3 वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : \because x-अन्तःखण्ड = 3

\therefore रेखा A(3, 0) से होकर जाती है।

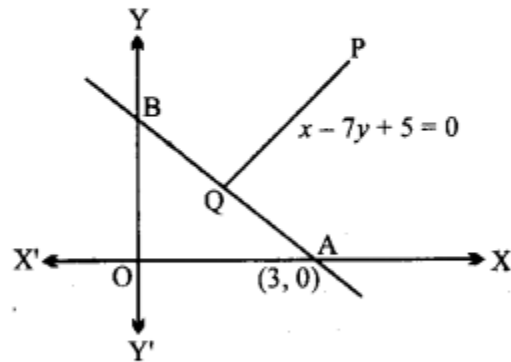
रेखा PQ : $x - 7y + 5 = 0$

या

$$7y = x + 5$$

या

$$y = \frac{1}{7}x + \frac{5}{7}$$



इसलिए PQ की ढाल = $\frac{1}{7}$

$\therefore PQ \perp AB$

\therefore A से होकर जाने वाली रेखा AB की ढाल = -7

∴ बिन्दु (3, 0) से रेखा AB का समीकरण,

$$\begin{aligned}y - 0 &= -7(x - 3) \\&= -7x + 21\end{aligned}$$

या $7x + y - 21 = 0.$

दूसरी विधि : $ax + by + c = 0$ की लम्ब कोई रेखा $bx - ay + k = 0$

∴ $x - 7y + 5 = 0$ की लम्ब रेखा $7x + y + k = 0$

यह रेखा (3, 0) से होकर जाती है।

∴ $7 \times 3 + 0 + k = 0$, अर्थात् $k = -21$

∴ अभीष्ट रेखा का समीकरण $7x + y - 21 = 0.$

प्रश्न 9.

रेखाओं $\sqrt{3}x + y = 1$ और $x + \sqrt{3}y = 1$ के बीच का कोण ज्ञात कीजिए।

हल : पहली रेखा : $\sqrt{3}x + y = 1$ या $y = -\sqrt{3}x + 1$

$$\text{ढाल} = -\sqrt{3} = m_1$$

दूसरी रेखा : $x + \sqrt{3}y = 1$ या $y = -\frac{1}{\sqrt{3}}x + \frac{1}{\sqrt{3}}$

$$\therefore \text{ढाल} = -\frac{1}{\sqrt{3}} = m_2$$

दो रेखाओं के बीच कोण θ हो, तब

$$\tan \theta = \left| \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2} \right| = \left| \frac{(-\sqrt{3}) - \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)}{1 + (-\sqrt{3})\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)} \right|$$

$$= \frac{\left| -\sqrt{3} + \frac{1}{\sqrt{3}} \right|}{1 + 1}$$

$$= \left| \frac{-3 + 1}{2\sqrt{3}} \right|$$

$$= \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$$

$$\theta = 30^\circ = \frac{\pi}{6} \text{ रेडियन।}$$

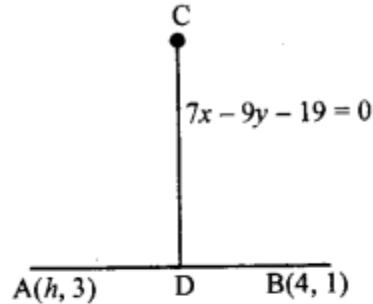
प्रश्न 10.

बिन्दुओं $(h, 3)$ और $(4, f)$ से जाने वाली रेखा, रेखा $7x - 9y - 19 = 0$ को समकोण पर प्रतिच्छेद करती है। h का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

माना रेखा AB बिन्दु A(h, 3), B(4, 1) से जाने वाली रेखा की ढाल,

$$m_1 = \frac{1-3}{4-h} = \frac{2}{h-4}$$



दूसरी रेखा का समीकरण

$$7x - 9y - 19 = 0$$

या $y = \frac{7}{9}x - \frac{19}{9}$

\therefore दूसरी रेखा की ढाल, $m_2 = \frac{7}{9}$

चूँकि दोनों रेखाएँ एक-दूसरे को समकोण पर प्रतिच्छेद करती हैं, $\therefore m_1 m_2 = -1$,

$$\frac{2}{h-4} \times \frac{7}{9} = -1$$

$$14 = -9(h-4) = -9h + 36$$

$\therefore 9h = 36 - 14 = 22$

या $h = \frac{22}{9}$.

प्रश्न 11.

सिद्ध कीजिए कि बिन्दु (x_1, y_1) से जाने वाली और रेखा $Ax + By + C = 0$ के समान्तर रेखा को समीकरण $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0$ है।

हल : रेखा $Ax + By + C = 0$

या
$$y = -\frac{A}{B}x - \frac{C}{B}$$

$$\text{रेखा की ढाल} = -\frac{A}{B}$$

$$\therefore \text{समान्तर रेखा की ढाल} = -\frac{A}{B}$$

\therefore समान्तर रेखा जो (x_1, y_1) से जाती है, उसकी समीकरण

$$y - y_1 = -\frac{A}{B}(x - x_1)$$

$$B(y - y_1) = -A(x - x_1)$$

या $A(x - x_1) + B(y - y_1) = 0.$

प्रश्न 12.

बिन्दु $(2, 3)$ से जाने वाली दो रेखाएँ परस्पर 60° के कोण पर प्रतिच्छेद करती हैं। यदि एक रेखा की ढाल 2 है तो दूसरी रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल:

माना दूसरी रेखा की ढाल m है।

दोनों रेखाओं के बीच कोण

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m_2}{1 + m_1 m_2}$$

जहाँ $\theta = 60^\circ$, $m_1 = m$ और $m_2 = 2$

$$\therefore \tan 60 = \pm \frac{m-2}{1+2m} = \sqrt{3}$$

+ve चिन्ह लेकर : $m-2 = \sqrt{3} + 2\sqrt{3}m$

$$\therefore (2\sqrt{3}-1)m = -2-\sqrt{3}$$

$$\therefore m = -\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}$$

\therefore उस रेखा का समीकरण जो (2, 3) से होकर जाती है जिसकी ढाल $= -\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}$,

$$y-3 = -\frac{2+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}-1}(x-2)$$

या $(2\sqrt{3}-1)y - 6\sqrt{3} + 3 = -(2+\sqrt{3})x + 4 + 2\sqrt{3}$

$$(\sqrt{3}+2)x + (2\sqrt{3}-1)y - 8\sqrt{3} - 1 = 0.$$

-ve चिन्ह लेकर : $-\frac{(m-2)}{1+2m} = \sqrt{3}$

$$\therefore -m+2 = \sqrt{3} + 2\sqrt{3}m$$

$$(2\sqrt{3}+1)m = 2-\sqrt{3} \text{ या } m = \frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}$$

उस रेखा का समीकरण जो (2, 3) से होकर जाती है और ढाल $\frac{2-\sqrt{3}}{2\sqrt{3}+1}$,

$$y - 3 = \frac{2 - \sqrt{3}}{2\sqrt{3} + 1}(x - 2).$$

$$(2\sqrt{3} + 1)y - 6\sqrt{3} - 3 = (2 - \sqrt{3})x - 4 + 2\sqrt{3}$$

या $(2 - \sqrt{3})x - (2\sqrt{3} + 1)y + 8\sqrt{3} - 1 = 0.$

प्रश्न 13.

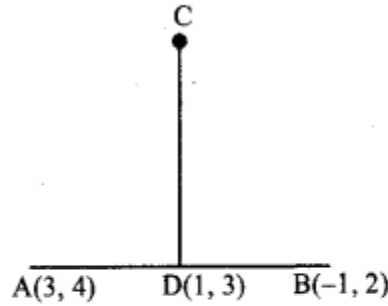
बिन्दुओं (3, 4) और (-1, 2) को मिलाने वाली रेखाखण्ड के लम्बे समद्विभाजक रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल:

माना बिन्दुओं A(3, 4) और B(-1, 2) को मिलाने वाले रेखाखण्ड का मध्य बिन्दु

$$D \left(\frac{3-1}{2}, \frac{4+2}{2} \right) \text{ या } D(1, 3)$$

$$AB \text{ की ढाल, } m_1 = \frac{2-4}{-1-3} = \frac{-2}{-4} = \frac{1}{2}$$



माना दूसरी रेखा CD रेखा AB पर लम्ब है

$$\therefore CD \text{ की ढाल} = -\frac{1}{m_1} = -\frac{1}{\frac{1}{2}} = -2$$

रेखा CD बिन्दु D से होकर जाती है

\therefore रेखा CD का समीकरण

$$\begin{aligned} y - 3 &= -2(x - 1) \\ &= -2x + 2 \end{aligned}$$

$$\therefore 2x + y - 5 = 0.$$

प्रश्न 14.

बिन्दु (-1, 3) से रेखा $3x - 4y - 16 = 0$ पर डाले गए लम्बपाद के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल:

मान लीजिए रेखा AB को समीकरण, $3x - 4y - 16 = 0$ (i)

या

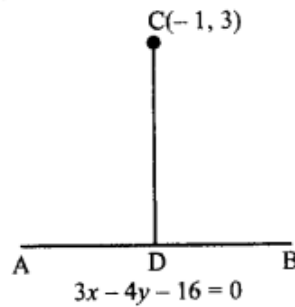
$$y = \frac{3}{4}x - 4$$

$$\text{रेखा } AB \text{ की ढाल} = \frac{3}{4}$$

बिन्दु $C(-1, 3)$ से AB पर डाला गया लम्ब CD है,

$$\therefore AB \perp CD.$$

$$\therefore CD \text{ की ढाल} = \frac{-1}{\text{रेखा } AB \text{ की ढाल}} = \frac{-1}{\frac{3}{4}} = \frac{-4}{3}$$



अतः रेखा CD का समीकरण,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = \frac{-4}{3}(x + 1)$$

या $3y - 9 = -4x - 4$

या $4x + 3y - 5 = 0$... (ii)

समी (i) को 3 से और (ii) को 4 से गुणा करने पर,

$$9x - 12y = 48$$

$$16x + 12y = 20$$

इनको जोड़ने पर

$$25x = 68 \text{ या } x = \frac{68}{25}$$

x का मान (i) में रखने पर,

$$3 \times \frac{68}{25} - 4y = 16$$

*

∴

$$4y = \frac{204}{25} - 16$$

$$= \frac{204 - 400}{25}$$

∴

$$y = -\frac{196}{25} \times \frac{1}{4} = -\frac{49}{25}$$

अतः लम्ब पाद D के निर्देशांक $\left(\frac{68}{25}, -\frac{49}{25}\right)$ हैं।

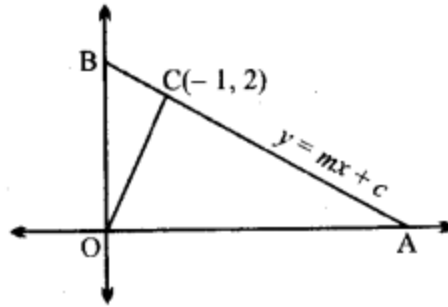
प्रश्न 15.

मूल बिन्दु से रेखा $y = mx + c$ पर डाला गया लम्ब रेखा से बिन्दु $(-1, 2)$ पर मिलता है। m और c के मान ज्ञात कीजिए।

हल:

माना रेखा AB का समीकरण, $y = mx + c$

रेखा AB की ढाल $= m$



O से रेखा AB पर लम्ब OC डाला गया है जो बिन्दु $C(-1, 2)$ पर मिलता है।

\therefore लम्ब रेखा OC की ढाल $= -\frac{1}{m}$

अब रेखा OC का समीकरण,

$$y - 0 = -\frac{1}{m}(x - 0)$$

या $x + my = 0$

$$OC \text{ की प्रवणता} = \frac{2-0}{-1-0} = -2$$

$$\therefore \text{ लम्ब रेखा } OC \text{ की ढाल} = -\frac{1}{m}$$

$$= \frac{1}{2}$$

बिन्दु $C(-1, 2)$ निम्न रेखा पर स्थित है :

$$y = mx + c$$

\Rightarrow

$$2 = -m + c$$

$$m = \frac{1}{2} \text{ रखने पर,}$$

$$2 = -\frac{1}{2} + c$$

\therefore

$$c = 2 + \frac{1}{2} = \frac{5}{2}$$

अतः

$$m = \frac{1}{2}, c = \frac{5}{2}$$

प्रश्न 16.

यदि p और q क्रमशः मूल बिन्दु से रेखाओं $x \cos \theta - y \sin \theta = k \cos 2\theta$ और $x \sec \theta + y \operatorname{cosec} \theta = k$ पर लम्ब की लंबाइयाँ हैं तो सिद्ध कीजिए कि $p^2 + 4q^2 = k^2$.

हल:

मूल बिन्दु $(0, 0)$ से $x \cos \theta - y \sin \theta = k \cos 2\theta$ की दूरी,

$$p = \frac{k \cos 2\theta}{\sqrt{\cos^2 \theta + \sin^2 \theta}}$$

$$= k \cos 2\theta$$

$$\left[\because d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right]$$

...(1)

मूल बिन्दु (0, 0) से $x \sec \theta + y \operatorname{cosec} \theta = k$ की दूरी,

$$q = \frac{k}{\sqrt{\sec^2 \theta + \operatorname{cosec}^2 \theta}}$$

$$= \frac{k}{\sqrt{\frac{1}{\cos^2 \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta}}}$$

$$= \frac{k \sin \theta \cos \theta}{\sqrt{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}}$$

$$= k \sin \theta \cos \theta$$

$$[\because \sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1]$$

$$= \frac{k}{2} \cdot 2 \sin \theta \cos \theta$$

$$2q = k \sin 2\theta$$

...(2)

समीकरण (1) और (2) को वर्ग करके जोड़ने पर,

$$k^2 = p^2 + 4q^2$$

अतः

$$p^2 + 4q^2 = k^2.$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 17.

शीर्षों A (2, 3), B (4, -1) और C (1, 2) वाले त्रिभुज ABC के शीर्ष A से उसकी सम्मुख भुजा पर लम्बे डाला गया है। लम्बे की लम्बाई तथा समीकरण ज्ञात कीजिए।

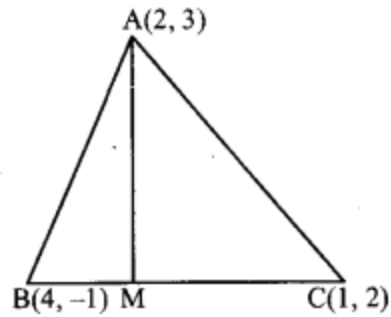
हल:

मान लीजिए AM रेखा BC पर लंब डाला गया है।

(i) रेखा BC की ढाल

$$= \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

$$= \frac{2+1}{1-4} = \frac{3}{-3} = -1$$



$AM \perp BC$,

$$\therefore \text{लम्ब } AM \text{ की ढाल} = \frac{-1}{m} = \frac{-1}{-1} = 1$$

रेखा AM बिन्दु A से जाती है और ढाल $= 1$ है।

\therefore AM का समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 3 = 1 \cdot (x - 2)$$

या

$$x - y + 1 = 0$$

(ii) बिन्दु $B(4, -1)$ और $C(1, 2)$ से होकर जाने वाली रेखा BC का समीकरण

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y + 1 = \frac{2 + 1}{1 - 4}(x - 4) = \frac{3}{-3}(x - 4)$$

$$= -x + 4$$

$$x + y - 3 = 0$$

∴ बिन्दु A से BC पर डाले गए लम्ब AM की लम्बाई

$$= \frac{2 + 3 - 3}{\sqrt{1^2 + 1^2}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}$$

$$\left[\because d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right]$$

प्रश्न 18. यदि p मूल बिन्दु से उस रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई हो जिस पर अक्षों पर कटे अंतः खण्ड a और b हों, तो दिखाइए कि $\frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$.

हल : उस रेखा का समीकरण, जिसकी अक्षों पर कटे अंतःखण्ड a और b हों,

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1 \text{ (अंतःखण्ड समीकरण)}$$

मूल बिन्दु $(0, 0)$ बसे इस रेखा पर डाले गए लम्ब की लम्बाई

$$= \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}$$

$$\left[\because d = \frac{ax_1 + by_1 + c}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right]$$

$$= p \text{ (दिया गया है)}$$

$$p = \frac{1}{\sqrt{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}}, p^2 = \frac{1}{\frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{p^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}.$$

इति सिद्धम्।

अध्याय 10 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1.

k के मान ज्ञात कीजिए जब कि रेखा $(k - 3)x - (4 - k^2)y + k^2 - 7k + 6 = 0$

- (a) x -अक्ष के समान्तर है।
- (b) y -अक्ष के समान्तर है।
- (c) मूल बिन्दु से जाती है।

हल:

(i) x -अक्ष के समान्तर $y = a$

प्रश्न में दिए गए समीकरण में x का गुणांक $= 0$ या $k - 3 = 0$ अर्थात् $k = 3$.

(ii) y -अक्ष के समान्तर रेखा $x = q$

दिए गए समीकरण में y का गुणांक $= 0$ या $4 - k^2 = 0$ अर्थात् $k = \pm 2$.

(iii) यदि रेखा मूल बिन्दु से जाती है तो $(0, 0)$ इसके समीकरण को संतुष्ट करेगा।

$$0 - 0 + k^2 - 7k + 6 = 0 \text{ या } (k - 6)(k - 1) = 0 \text{ या } k = 1, 6.$$

प्रश्न 2.

θ और p के मान ज्ञात कीजिए यदि समीकरण $x \cos \theta + y \sin \theta = p$ रेखा $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$ को लम्ब रूप है।

हल : दी गयी रेखा का समीकरण $\sqrt{3}x + y + 2 = 0$

$$\sqrt{3}x + y = -2 \text{ या } -\sqrt{3}x - y = 2$$

$\sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1} = 2$ से भाग देने पर,

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}x - \frac{1}{2}y = 1$$

इसकी तुलना $x \cos \theta + y \sin \theta = p$ से करने पर,

$$\therefore p = 1$$

और $\cos \theta = -\frac{\sqrt{3}}{2}, \sin \theta = -\frac{1}{2}$

$$\Rightarrow \theta = 180^\circ + 30^\circ = 210^\circ$$

$$\therefore \theta = 210^\circ = \pi + \frac{\pi}{6} = \frac{7\pi}{6} \text{ रेडियन।}$$

प्रश्न 3.

उन रेखाओं के समीकरण ज्ञात कीजिए जिनके अक्षों से कटे अंतःखण्डों का योग और गुणनफल

क्रमशः 1 और -6 हैं।

हल : मान लीजिए अक्षों पर कटे अतः खण्ड a और b हैं।

दिया है : $a + b = 1$, $ab = -6$

$$b = 1 - a$$

$$\therefore a(1 - a) = -6$$

$$\text{या } a - a^2 = -6$$

$$a^2 - a - 6 = 0$$

$$\text{या } (a - 3)(a + 2) = 0$$

$$\therefore a = 3, -2$$

$$\therefore b = -2, 3$$

3, -2 अंतःखण्ड वाली रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{3} + \frac{y}{-2} = 1$$

$$\text{या } 2x - 3y = 6.$$

और -2, 3 अंतःखण्ड वाली रेखा का समीकरण,

$$\frac{x}{-2} + \frac{y}{3} = 1$$

$$\text{या } -3x + 2y = 6.$$

प्रश्न 4.

y -अक्ष पर कौन से बिन्दु ऐसे हैं, जिनकी $\frac{x}{3} + \frac{y}{4} = \text{quad}$

1[/latex] से, दूरी 4 इकाई है।

हल : मान लीजिए y -अक्ष पर बिन्दु $(0, y_1)$ है।

$(0, y_1)$ की रेखा $4x + 3y = 12$ से दूरी

$$\frac{4 \times 0 + 3y_1 - 12}{\sqrt{4^2 + 3^2}} = +4 \text{ या } \frac{3y_1 - 12}{5} = \pm 4$$

या $3y_1 = 12 \pm 20 = 32, -8$

$\therefore y_1 = \frac{32}{3}, \frac{-8}{3}$

अतः y -अक्ष पर बिन्दु $\left(0, \frac{32}{3}\right)$ और $\left(0, \frac{-8}{3}\right)$ हैं जो दी हुई रेखा से 4 इकाई दूरी पर हैं।

प्रश्न 5.

मूल बिन्दु से बिन्दुओं $(\cos\theta, \sin\theta)$ और $(\cos\phi, \sin\phi)$ को मिलाने वाली रेखा की लांबिक दूरी ज्ञात कीजिए।

हल:

$(\cos\theta, \sin\theta)$ और $(\cos\phi, \sin\phi)$ को मिलाने वाली रेखा का समीकरण,

$$y - y_1 = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}(x - x_1)$$

$$y - \sin\theta = \frac{\sin\phi - \sin\theta}{\cos\phi - \cos\theta}(x - \cos\theta)$$

$$= \frac{2\cos\frac{\phi+\theta}{2}\sin\frac{\phi-\theta}{2}}{-2\sin\frac{\phi+\theta}{2}\sin\frac{\phi-\theta}{2}}(x - \cos\theta)$$

$$= \frac{-\cos\frac{\theta+\phi}{2}}{\sin\frac{\theta+\phi}{2}}(x - \cos\theta)$$

या $y\sin\frac{\theta+\phi}{2} - \sin\theta\sin\frac{\theta+\phi}{2} = -x\cos\frac{\theta+\phi}{2} + \cos\frac{\theta+\phi}{2}\cos\theta$

या $x\cos\frac{\theta+\phi}{2} + y\sin\frac{\theta+\phi}{2} = \cos\theta\cos\frac{\theta+\phi}{2} + \sin\theta\sin\frac{\theta+\phi}{2}$

$$= \cos\left(\theta - \frac{\theta+\phi}{2}\right) = \cos\left(\frac{\theta-\phi}{2}\right)$$

∴ मूल बिन्दु (0, 0) से इस रेखा की दूरी

$$= \left| \frac{0+0-\cos\frac{\theta-\phi}{2}}{\cos^2\frac{\theta+\phi}{2}+\sin^2\frac{\theta+\phi}{2}} \right| \quad \left[\because d = \frac{ax_1+by_1+c_1}{\sqrt{a^2+b^2}} \right]$$

$$= \cos\frac{\theta-\phi}{2}$$

प्रश्न 6.

रेखाओं $x - 7y + 5 = 0$ और $3x + y = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से खींची गई और y -अक्ष के समान्तर रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : दी गयी रेखाएँ

$$x - 7y + 5 = 0 \quad \dots(1)$$

$$3x + y = 0 \quad \dots(2)$$

समी (2) से,

$$y = -3x$$

y का मान समी (1) में रखने पर,

$$x - 7(-3x) + 5 = 0$$

या $22x + 5 = 0$

$$x = \frac{-5}{22}$$

अब

$$y = -3x = -3\left(\frac{-5}{22}\right) = \frac{15}{22}$$

वह रेखा का जो $\left(-\frac{5}{22}, \frac{15}{22}\right)$ से जाती है और y -अक्ष के समान्तर है, समीकरण $x = -\frac{5}{22}$ या $22x + 5 = 0$.

प्रश्न 7.

रेखा $\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1$ पर लंब उस बिन्दु से खींची गई रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जहाँ यह रेखा y -अक्ष से मिलती है।

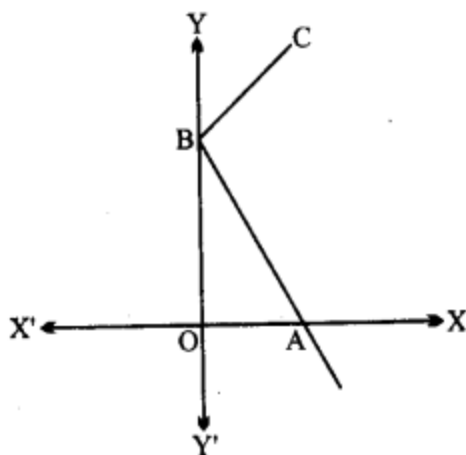
हल : रेखा AB का समीकरण,

$$\frac{x}{4} + \frac{y}{6} = 1 \text{ या } 3x + 2y = 12,$$

$$2y = -3x + 12$$

$$y = \frac{-3}{2}x + \frac{12}{2}$$

$$\text{रेखा } AB \text{ की ढाल} = \frac{-3}{2}$$



$$AB \perp BC,$$

$$\therefore BC \text{ की ढाल} = \frac{2}{3}$$

\therefore रेखा y -अक्ष पर प्रतिच्छेद करती है, इसलिए बिन्दु $B(0, 6)$ है।

$\therefore BC$ रेखा का समीकरण

$$y - 6 = \frac{2}{3}(x - 0)$$

$$\text{या } 3y - 18 = 2x$$

$$\text{या } 2x - 3y + 18 = 0.$$

प्रश्न 8.

रेखाओं $y - x = 0$, $x + y = 0$, और $x - k = 0$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

हल : $y - x = 0$ और $y + x = 0$ बिन्दु $(0, 0)$ पर मिलते हैं।

$x = k$ को $y - x = 0$ में रखने से, $y - k = 0$ या $y = k$

$x - k = 0$ और $y - x = 0$ बिन्दु (k, k) पर मिलते हैं।

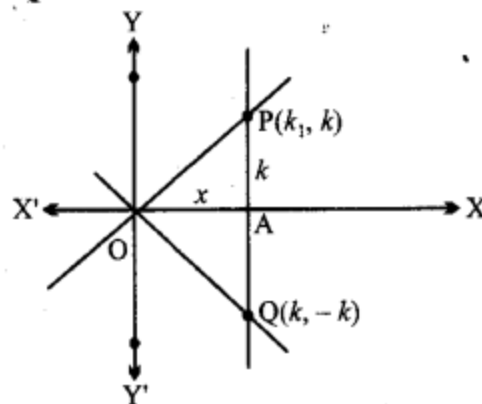
$x = k$ को $y + x = 0$ में रखने से,

$$y + k = 0 \text{ या } y = -k$$

$x = k$ और $y + x = 0$ बिन्दु $(k, -k)$ पर मिलते हैं।

अब बिन्दु $(0, 0)$, (k, k) और $(k, -k)$ से बने त्रिभुज का क्षेत्रफल

$$\begin{aligned} &= \left| \frac{1}{2} [0 \cdot (-2k) + k(-k) + k(-k)] \right| \\ &= \left| \frac{1}{2} (-k^2 - k^2) \right| \\ &= k^2 \text{ वर्ग इकाई।} \end{aligned}$$



दूसरी विधि : त्रिभुज OPQ का क्षेत्रफल

$$= 2 \times \text{क्षेत्रफल } \triangle OAP$$

$$= 2 \times \left[\frac{1}{2} \times k \times k \right] = k^2 \text{ वर्ग इकाई।}$$

प्रश्न 9.

p का मान ज्ञात कीजिए जिससे तीन रेखाएँ $3x + y - 2 = 0$, $px + 2y - 3 = 0$ और $2x - y - 3 = 0$ एक बिन्दु पर प्रतिच्छेद करें।

हल : दी गयी रेखाएँ $3x + y = 2$... (1)

$2x - y = 3$... (2)

समी (1) और (2) को जोड़ने पर,

$$5x = 5 \text{ या } x = 1$$

$\therefore y = 2 - 3x = 2 - 3 = -1$

\therefore समी (1) और (2) वाली रेखाएँ बिन्दु $(1, -1)$ पर प्रतिच्छेद करती हैं।

तीसरी रेखा $px + 2y - 3 = 0$ भी इसी बिन्दु से जाती है इसलिए $(1, -1)$ इस समीकरण को संतुष्ट करेगा।

$$p \times 1 + 2 \times (-1) - 3 = 0$$

$$p - 2 - 3 = 0$$

$\therefore p = 5$

अतः दी गयी रेखाएँ संगामी हैं यदि $p = 5$.

प्रश्न 10. यदि तीन रेखाएँ जिनके समीकरण $y = m_1x + c_1$, $y = m_2x + c_2$ और $y = m_3x + c_3$ हैं, संगामी हैं, तो दिखाइए कि $m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$.

हल : समीकरण $y = m_1x + c_1$... (1)

$y = m_2x + c_2$... (2)

समी. (2) को समी (1) में से घटाने पर,

$$0 = (m_1 - m_2)x + c_1 - c_2$$

$$\therefore x = -\frac{c_1 - c_2}{m_1 - m_2}$$

समी (1) में x का मान रखने पर,

$$\begin{aligned} y &= -\frac{m_1(c_1 - c_2)}{m_1 - m_2} + c_1 \\ &= \frac{-m_1(c_1 - c_2) + c_1(m_1 - m_2)}{m_1 - m_2} \end{aligned}$$

अतः बिन्दु $\left[-\frac{c_1 - c_2}{m_1 - m_2}, \frac{-m_1(c_1 - c_2) + c_1(m_1 - m_2)}{m_1 - m_2} \right]$ रेखा $y = m_3x + c_3$ पर पड़ता है तो

$$\therefore \frac{-m_1(c_1 - c_2) + c_1(m_1 - m_2)}{m_1 - m_2} = m_3 \left(-\frac{c_1 - c_2}{m_1 - m_2} \right) + c_3$$

$m_1 - m_2$ से गुणा करने पर

$$-m_1(c_1 - c_2) + c_1(m_1 - m_2) = -m_3(c_1 - c_2) + c_3(m_1 - m_2)$$

$$-m_1c_1 + m_1c_2 + m_1c_1 - m_2c_1 = -m_3c_1 + m_3c_2 + m_1c_3 - m_2c_3$$

या $m_1c_2 - m_2c_1 - m_1c_3 + m_2c_3 + m_3c_1 - m_3c_2 = 0$

या $m_1(c_2 - c_3) + m_2(c_3 - c_1) + m_3(c_1 - c_2) = 0$.

प्रश्न 11.

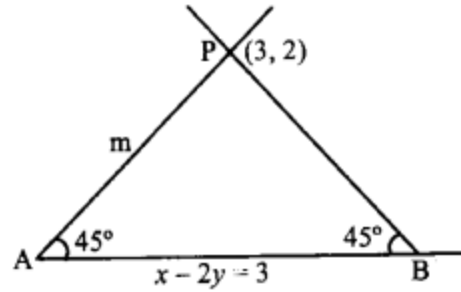
बिन्दु $(3, 2)$ से जाने वाली उस रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x - 2y = 3$ से 45° का कोण बनाती है।

हल : माना रेखा AB का समीकरण : $x - 2y = 3$

या
$$y = \frac{1}{2}x - 3$$

तब रेखा AB की ढाल $= \frac{1}{2}$

*



मान लीजिए PA रेखा इसके साथ 45° का कोण बनाती है और इसकी ढाल $= m$

$$\pm \tan 45 = \frac{m - \frac{1}{2}}{1 + m \times \frac{1}{2}}$$

या

$$\pm 1 = \frac{2m - 1}{m + 2}$$

+ve चिन्ह लेने पर, $1 = \frac{2m-1}{m+2}$

या $2m - 1 = m + 2$

$\therefore m = 3$

-ve चिन्ह लेने पर, $-1 = \frac{2m-1}{m+2}$

या $2m - 1 = -m - 2$

$\therefore 3m = -1$

या $m = \frac{-1}{3}$

अतः रेखा PA का समीकरण जहाँ बिन्दु $P = (3, 2)$ हो और $m = \frac{-1}{3}$ हो

$$y - 2 = -\frac{1}{3}(x - 3)$$

$$3y - 6 = -x + 3$$

या $x + 3y - 9 = 0$

अब जब ढाल $m = 3$ हो, तब बिन्दु $P(3, 2)$ से रेखा का समीकरण,

$$y - 2 = 3(x - 3)$$

$$y - 2 = 3x - 9$$

या $3x - y - 7 = 0.$

प्रश्न 12.

रेखाओं $4x + 7y - 3 = 0$ और $2x - 3y + 1 = 0$ के प्रतिच्छेद बिन्दु से जाने वाली रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए जो अक्षों से समान अंतः खण्ड बनाती हैं।

हल : $4x + 7y = 3$... (1)

* $2x - 3y = -1$... (2)

समी (2) को 2 से गुणा करने पर,

$$4x - 6y = -2 \quad \dots (3)$$

समी (3) को (1) में से घटाने पर

$$13y = 5$$

$\therefore y = \frac{5}{13}$

y का मान समी (1) में रखने पर,

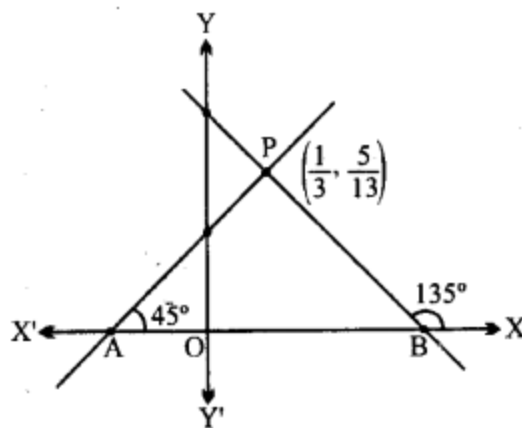
$$4x + 7 \times \frac{5}{13} = 3$$

या

$$4x = 3 - \frac{35}{13} = \frac{39 - 35}{13} = \frac{4}{13}$$

\therefore

$$x = \frac{1}{13}$$



दो हुई रेखाएँ बिन्दु $\left(\frac{1}{3}, \frac{5}{13}\right)$ पर प्रतिच्छेद करती हैं।

जो रेखा अक्षों पर बने अंतः खण्ड समान हैं तो वह धन x -अक्ष के साथ 45° या 135° का कोण बनाती हैं।
इसलिए उसकी ढाल ± 1 होगी।

\therefore PA और PB रेखाओं के समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

(i) जब $m = 1$ हो, तब $y - \frac{5}{13} = 1 \left(x - \frac{1}{13} \right)$

या $13y - 5 = 13x - 1$ या $13x - 13y + 4 = 0$.

(ii) जब $m = -1$ हो, तब $y - \frac{5}{13} = -1 \left(x - \frac{1}{13} \right)$

$$13y - 5 = -13x + 1$$

\therefore $13x + 13y - 6 = 0$.

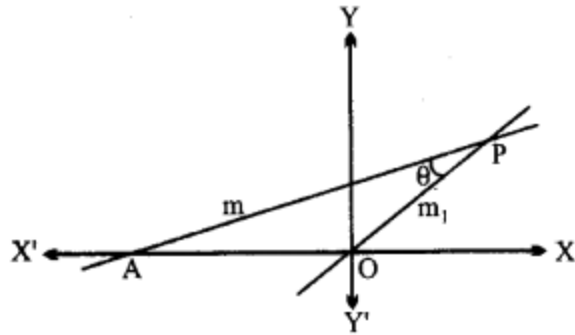
प्रश्न 13. दर्शाइए कि मूल बिन्दु से जाने वाली और रेखा $y = mx + c$ से θ कोण बनाने वाली उस रेखा का

समीकरण $\frac{y}{x} = \pm \frac{m + \tan \theta}{1 - m \tan \theta}$ है।

हल : रेखा PA का समीकरण $y = mx + c$ है

यह रेखा OP के साथ कोण θ बनाती है।

रेखा PA की ढाल $= m$
 मान लीजिए OP की ढाल $= m_1$ है।



अब

$$\tan \theta = \pm \frac{m_1 - m}{1 + m_1 m}, \text{ जहाँ } m = \tan \theta$$

+ve चिन्ह लेने पर,

$$\tan \theta = \frac{m_1 - m}{1 + m_1 m}$$

या $(1 + m_1 m) \tan \theta = m_1 - m$

या $(1 + m_1 m) \tan \theta = m_1 - m$

या $\tan \theta + m_1 m \tan \theta = m_1 - m$

या $m + \tan \theta = m_1 (1 - m \tan \theta)$

या $m_1 = \frac{m + \tan \theta}{1 - m \tan \theta}$

-ve चिन्ह लेने पर,

$$\tan \theta = - \frac{m_1 - m}{1 + m_1 m}$$

$$-(1 + m_1 m) \tan \theta = m_1 - m$$

या $(1 + m_1 m) \tan \theta = -m_1 + m$

$$m_1(1 + m \tan \theta) = m - \tan \theta$$

$$\therefore m_1 = \frac{m - \tan \theta}{1 + m \tan \theta}$$

इसलिए दोनों ढालों को $\frac{m \pm \tan \theta}{1 \mp m \tan \theta}$ से दर्शाया जाता है।

\therefore मूल बिन्दु (0, 0) से जाने वाली रेखा का समीकरण,

$$(y - 0) = m_1 (x - 0)$$

$$y = m_1 \times x$$

या $\frac{y}{x} = m_1$

\therefore अभीष्ट रेखाओं का समीकरण

$$\frac{y}{x} = \frac{m \pm \tan \theta}{1 \mp m \tan \theta}$$

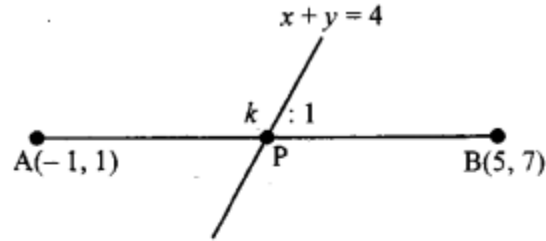
प्रश्न 14.

(-1, 1) और (5, 7) को मिलाने वाली रेखाखण्ड को रेखा $x + y = 4$ किस अनुपात में विभाजित करती है ?

हल:

मान लीजिए बिन्दु P रेखाखण्ड AB को $k : 1$ के अनुपात में विभाजित करता है। जबकि A और

B के क्रमशः $(-1, 1)$ और $(5, 7)$ निर्देशांक हैं।



$$\therefore P \text{ के निर्देशांक } \left(\frac{5k-1}{k+1}, \frac{7k+1}{k+1} \right)$$

रेखा $x + y = 4$ इस बिन्दु P से होकर जाती है।

$$\therefore \frac{5k-1}{k+1} + \frac{7k+1}{k+1} = 4$$

$$\text{या } 5k - 1 + 7k + 1 = 4k + 4$$

$$\text{या } 8k = 4$$

$$\text{या } k = \frac{1}{2}$$

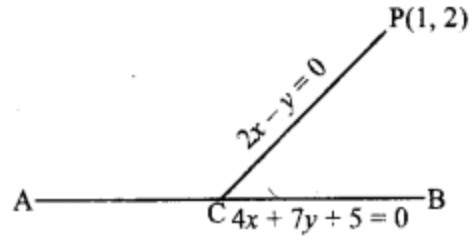
अतः बिन्दु P रेखाखण्ड AB को $1 : 2$ के अनुपात में विभाजित करता है।

प्रश्न 15.

बिन्दु $(1, 2)$ से रेखा $4x + 7y + 5 = 0$ की $2x - y = 0$ के अनुदिश दूरी ज्ञात करो।

हल:

माना रेखा PC का समीकरण, $2x - y = 0$ जिस पर बिन्दु $P(1, 2)$ स्थित है।



रेखा AB का समीकरण $4x + 7y + 5 = 0$ और $2x - y = 0$ को हल करने पर,

$$\therefore x = \frac{-5}{18}$$

$$\text{और } y = -\frac{5}{9}$$

$\therefore C$ के निर्देशांक $\left(\frac{-5}{18}, -\frac{5}{9}\right)$ जो प्रतिच्छेदन बिन्दु है और P के निर्देशांक $(1, 2)$ हैं।

$$\begin{aligned} \text{अभीष्ट लंबाई } PC &= \sqrt{\left(\frac{-5}{18} - 1\right)^2 + \left(-\frac{5}{9} - 2\right)^2} \\ &= \sqrt{\left(\frac{-23}{18}\right)^2 + \left(\frac{-23}{9}\right)^2} \\ &= \frac{23}{9} \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1} = \frac{23}{9} \cdot \frac{\sqrt{5}}{2} = \frac{23\sqrt{5}}{18}. \end{aligned}$$

प्रश्न 16.

बिन्दु $(-1, 2)$ से खींची जा सकने वाली उस रेखा की दिशा ज्ञात कीजिए जिसका रेखा $x + y = 4$ से प्रतिच्छेदन बिन्दु दिए बिन्दु से 3 इकाई की दूरी पर है।

हल:

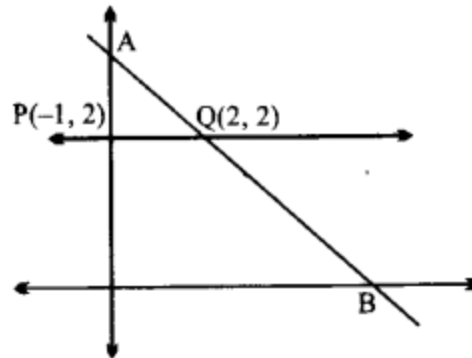
मान लीजिए अभीष्ट रेखा PQ की ढाल m है। रेखा PQ जो बिन्दु $P(-1, 2)$ से होकर जाती है और ढाल m है, का समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 2 = m(x + 1)$$

या

$$mx - y + m + 2 = 0$$



रेखा AB का समीकरण $x + y = 4$

$$\therefore y = 4 - x$$

y का मान समी (1) में रखने पर,

$$mx - (4 - x) + m + 2 = 0$$

या $(m + 1)x + m - 2 = 0$

$$\therefore x = -\frac{m-2}{m+1}$$

अब $y = 4 - x = 4 + \frac{m-2}{m+1}$

$$= \frac{4m+4+m-2}{m+1} = \frac{5m+2}{m+1}$$

दिया है :

$$PQ = 3 \text{ या } PQ^2 = 9$$

$$\therefore \left(-\frac{m-2}{m+1} + 1 \right)^2 + \left(\frac{5m+2}{m+1} - 2 \right)^2 = 9$$

$$\text{या } \left(\frac{-m+2+m+1}{m+1} \right)^2 + \left(\frac{5m+2-2m-2}{m+1} \right)^2 = 9$$

$$\text{या } \frac{9}{(m+1)^2} + \left(\frac{3m}{m+1} \right)^2 = 9$$

$$\text{या } \frac{9+9m^2}{(m+1)^2} = 9$$

$$\text{या } 1+m^2 = (1+m)^2$$

$$\therefore 1+m^2 = 1+2m+m^2 \text{ या } 2m=0$$

$$\text{या } m=0$$

अतः रेखा PQ की ढाल 0 है अर्थात् रेखा x-अक्ष के समांतर है।

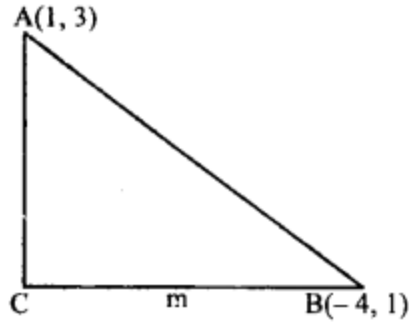
प्रश्न 17.

समकोण त्रिभुज के कर्ण के अंत्य बिन्दु (1, 3) और (-4, 1) हैं। त्रिभुज के पाद (leg) (समकोणीय नाओं) का एक समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल:

माना त्रिभुज ABC एक समकोणीय त्रिभुज है जिसका कर्ण AB है। A और B के निर्देशांक क्रमशः (1, 3) और (-4, 1) हैं।

मान लीजिए BC की ढाल m है।



$AC \perp$

$$\therefore AC \text{ की ढाल} = -\frac{1}{m}$$

रेखा BC का समीकरण,

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - 1 = m(x + 4)$$

$$\text{या } mx - y + 4m + 1 = 0 \quad \dots(1)$$

रेखा AC का समीकरण

$$y - 3 = -\frac{1}{m}(x - 1)$$

$$\text{या } my - 3m = -x + 1$$

$$\text{या } x + my - 3m - 1 = 0 \quad \dots(2)$$

यह दोनों रेखाएँ m के दिए मान से इन का समीकरण ज्ञात कर सकते हैं। यदि BC भुजा x -अक्ष के समांतर हो तो $m = 0$.

$$BC \text{ का समीकरण, } y - 1 = 0$$

$$\text{या } y = 1$$

$\therefore AC$, y -अक्ष के समांतर हो और यह $A(1, 3)$ से जाती है। अतः AC का समीकरण $x = 1$

अतः BC और AC के समीकरण $y = 1$ और $x = 1$ हैं।

प्रश्न 18.

किसी बिन्दु के लिए रेखा को दर्पण मानते हुए बिन्दु $(3, 8)$ का रेखा $x + 3y = 7$ में प्रतिबिंब ज्ञात कीजिए।

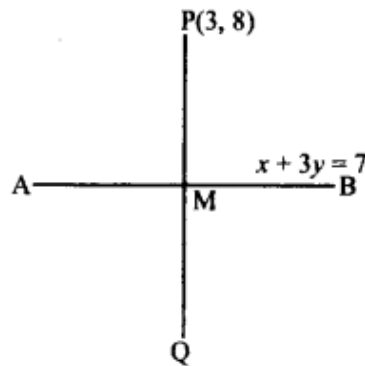
हल:

माना देखा AB का समीकरण $x + 3y = 7$ है और बिन्दु P के निर्देशांक (3, 8) हैं।

$$y = -\frac{1}{3}x + \frac{7}{3}$$

बिन्दु P का प्रतिबिम्ब Q होगा यदि $PQ \perp AB$, PQ और AB बिन्दु M पर इस प्रकार प्रतिच्छेद करते हैं कि

$$PM = QM$$



* रेखा AB की ढाल $= -\frac{1}{3}$

और PQ की ढाल $= 3$

∴ PQ रेखा का समीकरण,

$$\begin{aligned} y - 8 &= 3(x - 3) \\ &= 3x - 9 \end{aligned}$$

या $3x - y = 1$... (1)

AB का समीकरण $x + 3y = 7$... (2)

समी (1) को 3 से गुणा करके समी (2) में जोड़ने पर,

$$10x = 10 \quad \text{या } x = 1$$

समी (1) से $y = 3x - 1 = 3 - 1 = 2$

∴ बिन्दु M के निर्देशांक $(1, 2)$ हैं।

मान लीजिए Q के निर्देशांक (x_1, y_1) हैं

बिन्दु M रेखाखण्ड PQ का मध्य बिन्दु है

∴ जबकि $P(3, 8)$ है।

$$\therefore \frac{x_1 + 3}{2} = 1 \quad \text{या } x_1 = -1$$

$$\frac{y_1 + 8}{2} = 2 \quad \text{या } y_1 = -4$$

∴ P का प्रतिबिम्ब $(-1, -4)$ है।

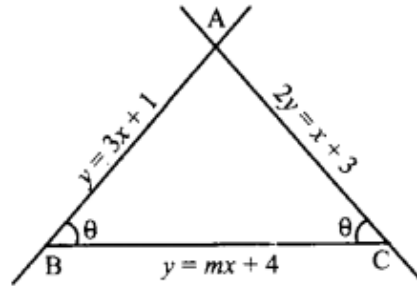
प्रश्न 19.

यदि रेखाएँ $y = 3x + 1$ और $2y = x + 3$, रेखा $y = mx + 4$ पर समान रूप से आनत हो तो m का मान ज्ञात कीजिए।

हल:

रेखा AB का समीकरण, $y = 3x + 1$ की ढाल = 3

रेखा BC का समीकरण, $y = mx + 4$ की ढाल = m



यदि इनके बीच में θ कोण हो, तो

$$\tan \theta = \frac{m-3}{1+3m} \quad \dots(1)$$

रेखा AC का समीकरण, $2y = x + 3$

या $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$

, AC की ढाल = $\frac{1}{2}$

जब AB और AC के बीच कोण θ हो, तब

$$\tan \theta = \pm \frac{m - \frac{1}{2}}{1 + \frac{1}{2}m} = \pm \frac{2m-1}{2+m} \quad \dots(2)$$

समी (1) और समी (2) से,
$$\frac{m-3}{1+3m} = \pm \frac{2m-1}{2+m}$$

+ve चिन्ह लेकर,
$$\frac{m-3}{1+3m} = \frac{2m-1}{2+m}$$

$$\therefore (2m-1)(3m+1) = (m+2)(m-3)$$

या
$$6m^2 - m - 1 = m^2 - m - 6$$

$$\therefore m^2 = -1$$
 मान्य नहीं है।

-ve चिन्ह लेकर
$$\frac{m-3}{1+3m} = -\frac{2m-1}{2+m}$$

$$(3m+1)(2m-1) + (m-3)(m+2) = 0$$

या
$$(6m^2 - m - 1) + (m^2 - m - 6) = 0$$

या
$$7m^2 - 2m - 7 = 0$$

$$\therefore m = \frac{2 \pm \sqrt{4 + 4 \times 49}}{14}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{200}}{14} = \frac{2 \pm 10\sqrt{2}}{14}$$

$$= \frac{1 \pm 5\sqrt{2}}{7}$$

अतः
$$m \text{ का अभीष्ट मान } = \frac{1 \pm 5\sqrt{2}}{7}.$$

प्रश्न 20.

यदि एक चर बिन्दु $P(x, y)$ की रेखाओं $x + y - 5 = 0$ और $3x - 2y + 7 = 0$ से लम्बिक दूरियों का योग सदैव 10 रहे तो दर्शाइए कि P अनिवार्य रूप से एक रेखा पर गमन करता है।

हल : $P(x, y)$ से रेखा $x + y - 5 = 0$ की दूरी

$$= \frac{x + y - 5}{\sqrt{2}}$$

$P(x, y)$ से रेखा $3x - 2y + 7 = 0$ की दूरी

$$= \frac{3x - 2y + 7}{\sqrt{9 + 4}} = \frac{3x - 2y + 7}{\sqrt{13}}$$

दोनों दूरियों का योग = 10 (दिया है)

$$\therefore \sqrt{13}(x + y - 5) + \sqrt{2}(3x - 2y + 7) = 10\sqrt{26}$$

$$\text{या } (\sqrt{13} + 3\sqrt{2})x + (\sqrt{13} - 2\sqrt{2})y - 5\sqrt{13} + 7\sqrt{2} - 10\sqrt{26} = 0$$

जो कि एक सरल रेखा का समीकरण है।

अतः P एक अनिवार्य रूप से एक रेखा पर गमन करता है।

प्रश्न 21.

समांतर रेखाओं $9x + 6y - 7 = 0$ और $3x + 2y + 6 = 0$ से समदूरस्थ रेखा का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : दी गयी समांतर रेखाएँ

$$9x + 6y - 7 = 0 \quad \dots(1)$$

और $3x + 2y + 6 = 0$

या $9x + 6y + 18 = 0 \quad \dots(2)$

एक रेखा जो इसके समांतर है, उसका समीकरण

$$9x + 6y + c = 0 \quad \dots(3)$$

रेखा (1) और (3) के बीच दूरी

$$\frac{(c+7)}{\sqrt{81+36}} = \frac{(c+7)}{\sqrt{117}} \quad \dots(4)$$

रेखा (2) और (3) के बीच दूरी

$$\frac{(c-18)}{\sqrt{81+36}} = \frac{c-18}{\sqrt{117}} \quad \dots(5)$$

दूरियाँ (4) और (5) आपस में समान हैं।

$$\frac{(c+7)}{\sqrt{117}} = \pm \frac{c-18}{\sqrt{117}}$$

[+ve चिन्ह मान्य नहीं है।]

$$c + 7 = -(c - 18)$$

$$= -c + 18$$

$$2c = 18 - 7 = 11$$

या $c = \frac{11}{2}$

c का मान समी (3) में रखने पर,

$$9x + 6y + \frac{11}{2} = 0$$

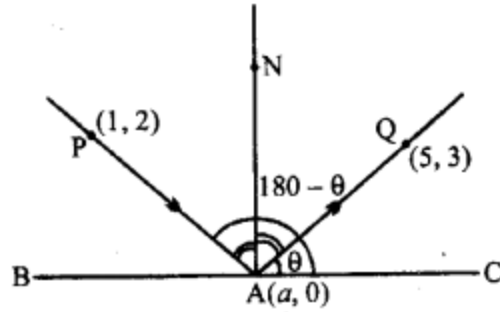
या $18x + 12y + 11 = 0.$

प्रश्न 22.

बिन्दु (1, 2) से होकर जाने वाली एक प्रकाश किरण x-अक्ष के बिन्दु A से परावर्तित होती है और परावर्तित किरण बिन्दु (5, 3) से होकर जाती है। A के निर्देशांक ज्ञात कीजिए।

हल:

मान लीजिए BC , x -अक्ष के अनुदिश उस बिन्दु के निर्देशांक $A(a, 0)$ है। AN इस पर लंब है। PA एक आपतित किरण है और AQ परावर्तित किरण है।



\Rightarrow आपतित कोण PAN = परावर्तित कोण NAQ

$\Rightarrow \angle PAB = \angle QAC$

\Rightarrow यदि QA का झुकाव θ हो तो PA का झुकाव $180 - \theta$ होगा।

QA की ढाल जबकि $Q(5, 3)$ और $A(a, 0)$ हो, तो

$$\tan \theta = \frac{0-3}{a-5} = \frac{-3}{a-5}$$

PA की ढाल जबकि $P(1, 2)$ और $A(a, 0)$ हो, तब

$$\tan (180^\circ - \theta) = \frac{0-2}{a-1}$$

$$\tan (180^\circ - \theta) = -\tan \theta$$

$$\therefore \frac{-2}{a-1} = \frac{-3}{a-5} = \frac{3}{a-5}$$

$$\text{या } -2(a-5) = 3(a-1)$$

$$\text{या } -2a + 10 = 3a - 3$$

$$\text{या } 5a = 13$$

$$\text{या } a = \frac{13}{5}$$

\therefore बिन्दु A के निर्देशांक $\left(\frac{13}{5}, 0\right)$ है।

प्रश्न 23. दिखाइए कि $(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ और $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ बिन्दुओं से रेखा $\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta = 1$ पर खींचे गए लम्बों की लंबाइयों का गुणनफल b^2 है।

हल : दी गयी रेखा $\frac{x}{a} \cos \theta + \frac{y}{b} \sin \theta - 1 = 0$... (1)

$(\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ से खींचे गए लम्ब की लम्बाई

$$P_1 = \frac{-\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cos \theta - 1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}}} \quad \left[\because d = \frac{ax_1 + by_1 + c_1}{\sqrt{a^2 + b^2}} \right]$$

इसी प्रकार $(-\sqrt{a^2 - b^2}, 0)$ से रेखा (1) पर खींचे गए लम्ब की लम्बाई

$$\begin{aligned}
P_2 &= \frac{-\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cos \theta - 1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}}} \\
P_1 P_2 &= \frac{\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cos \theta - 1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}}} \times \frac{-\frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} \cos \theta - 1}{\sqrt{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}}} \\
&= \frac{-\left(\frac{a^2 - b^2}{a^2} \cos^2 \theta - 1\right)}{\frac{\cos^2 \theta}{a^2} + \frac{\sin^2 \theta}{b^2}} \\
&= \frac{-b^2[(a^2 - b^2) \cos^2 \theta - a^2]}{b^2 \cos^2 \theta + a^2 \sin^2 \theta} \\
&= \frac{-b^2[(a^2 - b^2) \cos^2 \theta - a^2]}{b^2 \cos^2 \theta + a^2(1 - \cos^2 \theta)} \quad [\because \sin^2 \theta = 1 - \cos^2 \theta] \\
&= \frac{-b^2[(a^2 - b^2) \cos^2 \theta - a^2]}{(b^2 - a^2) \cos^2 \theta + a^2} \\
&= \frac{-b^2[(a^2 - b^2) \cos^2 \theta - a^2]}{-(a^2 - b^2) \cos^2 \theta - a^2} = b^2.
\end{aligned}$$

इति सिद्धम् ।

प्रश्न 24.

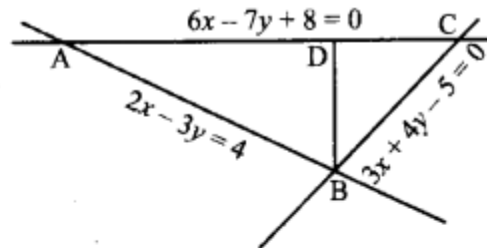
एक व्यक्ति समीकरणों $2x - 3y + 4 = 0$ और $3x + 4y - 5 = 0$ से निरूपित सरल रेखीय पथों के संधि बिन्दुओं (junction/crossing) पर खड़ा है और समीकरण $6x - 7y + 8 = 0$ से निरूपित पथ पर न्यूनतम समय में पहुँचना चाहता है। उसके द्वारा अनुसरित पथ का समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल:

AB और BC दो रेखीय पथ हैं। AB वे BC रेखाओं के समीकरण

$$2x - 3y + 4 = 0 \dots\dots\dots(1)$$

$$\text{और } 3x + 4y - 5 = 0 \dots\dots\dots(2)$$



AB और BC बिन्दु B पर मिलते हैं।

समी (1) को 3 से तथा समी (2) को 2 से गुणा करने पर

$$6x - 9y = -12$$

...(3)

$$6x + 8y = 10$$

...(4)

समी (3) को समी (4) में से घटाने पर,

$$17y = 10 + 12 = 22$$

∴

$$y = \frac{22}{17}$$

y का मान समी (1) में रखने पर,

$$2x - 3 \times \left(\frac{22}{17} \right) = -4$$

या
$$2x = -4 + \frac{66}{17} = \frac{-2}{17}$$

\therefore
$$x = -\frac{1}{17}$$

* इस प्रकार B के निर्देशांक $\left(-\frac{1}{17}, \frac{22}{17} \right)$ हैं।

B से AC तक न्यूनतम समय में पहुँचने के लिए कम से कम दूरी BD ($BD \perp AC$) तय करनी है।

रेखा AC का समीकरण, $6x - 7y + 8 = 0$ की ढाल = $\frac{6}{7}$

$$BD \text{ की ढाल} = -\frac{7}{6}$$

BD बिन्दु $B \left(-\frac{1}{17}, \frac{22}{17} \right)$ से होकर जाती है।

\therefore रेखा BD का समीकरण

$$y - y_1 = m(x - x_1)$$

$$y - \frac{22}{17} = -\frac{7}{6} \left(x + \frac{1}{17} \right)$$

102 से गुणा करने पर,

$$102y - 132 = -119x - 7$$

$$119x + 102y - 125 = 0$$

अतः B से AC तक पहुँचने के लिए BD पथ अपनाना है जिसका समीकरण $119x + 102y - 125 = 0$ है।