

Chapter-15 सांख्यिकी

प्रश्नावली 15.1

प्रश्न 1 व 2 में दिए गए आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष विचलन ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1.

4, 7, 8, 9, 10, 12, 13, 17.

$$\text{हल : समांतर माध्य } \bar{x} = \frac{4+7+8+9+10+12+13+17}{8} = \frac{80}{8} = 10$$

$$\begin{aligned}\Sigma |x_i - \bar{x}| &= |4 - 10| + |7 - 10| + |8 - 10| + |9 - 10| \\ &\quad + |10 - 10| + |12 - 10| + |13 - 10| + |17 - 10| \\ &= 6 + 3 + 2 + 1 + 0 + 2 + 3 + 7 = 24\end{aligned}$$

$$\therefore \text{माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन MD } (\bar{x}) = \frac{\Sigma |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{24}{8} = 3.$$

प्रश्न 2.

38, 70, 48, 40, 42, 55, 63, 46, 54, 44.

$$\begin{aligned}\text{हल : समांतर माध्य, } \bar{x} &= \frac{38+70+48+40+42+55+63+46+54+44}{10} \\ &= \frac{500}{10} = 50\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\therefore \Sigma |x_i - \bar{x}| &= |38 - 50| + |70 - 50| + |48 - 50| + |40 - 50| \\ &\quad + |42 - 50| + |55 - 50| + |63 - 50| + |46 - 50| + |54 - 50| + |44 - 50| \\ &= 12 + 20 + 2 + 10 + 8 + 5 + 13 + 4 + 4 + 6 = 84\end{aligned}$$

$$\therefore \text{MD } (\bar{x}) = \frac{\Sigma |x_i - \bar{x}|}{n} = \frac{84}{10} = 8.4.$$

प्रश्न 3 व 4 के आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 3.

13, 17, 16, 14, 11, 13, 10, 16, 11, 18, 12, 17.

हल:

आँकड़ों को आरोही क्रम में लिखने पर

10, 11, 11, 12, 13, 13, 14, 16, 16, 17, 17, 18

$$\frac{12}{2} = 6\text{वाँ पद} = 13 \text{ और } 7\text{वाँ पद} = 14$$

$$\text{माध्यिका} = \frac{13+14}{2} = \frac{27}{2} = 13.5$$

$$\begin{aligned}\Sigma |x_i - M| &= |10 - 13.5| + |11 - 13.5| + |11 - 13.5| + |12 - 13.5| \\ &\quad + |13 - 13.5| + |13 - 13.5| + |14 - 13.5| + |16 - 13.5| \\ &\quad + |16 - 13.5| + |17 - 13.5| + |17 - 13.5| + |18 - 13.5| \\ &= 3.5 + 2.5 + 2.5 + 1.5 + 0.5 + 0.5 + 0.5 + 2.5 + 2.5 + 3.5 + 3.5 + 4.5 \\ &= 28\end{aligned}$$

$$\therefore \text{माध्य विचलन (M)} = \frac{\Sigma |x_i - M|}{n} = \frac{28}{12} = 2.33.$$

प्रश्न 4.

36, 72, 46, 42, 60, 45, 53, 46, 51, 49.

हल : दिए हुए आँकड़ों को आरोही क्रम में लिखने पर

36, 42, 45, 46, 46, 49, 51, 53, 60, 72

$$n = 10$$

$$\therefore \frac{10}{2} = 5\text{वाँ पद} = 46, \text{ और } 5 + 1 = 6\text{वाँ पद} = 49$$

$$\begin{aligned}\therefore \text{माध्यिका} &= \frac{46 + 49}{2} \\ &= \frac{95}{2} = 47.5\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\Sigma |x_i - M| &= |36 - 47.5| + |42 - 47.5| + |45 - 47.5| + |46 - 47.5| + |49 - 47.5| \\ &\quad + |51 - 47.5| + |53 - 47.5| + |60 - 47.5| + |72 - 47.5| \\ &= 11.5 + 5.5 + 2.5 + 1.5 + 1.5 + 1.5 + 3.5 + 5.5 + 12.5 + 24.5 \\ &= 70\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{माध्य विचलन (M)} &= \frac{\Sigma |x_i - M|}{n} \\ &= \frac{70}{10} \\ &= 7.\end{aligned}$$

प्रश्न 5 व 6 के आँकड़ों के लिए माध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 5.

| | | | | | |
|-------|---|----|----|----|----|
| x_i | 5 | 10 | 15 | 20 | 25 |
| f_i | 7 | 4 | 6 | 3 | 5 |

हल:

| x_i | f_i | $f_i x_i$ | $ x_i - \bar{x} $ | $f_i x_i - \bar{x} $ |
|-------|-------|-----------|-------------------|-----------------------|
| 5 | 7 | 35 | 9 | 63 |
| 10 | 4 | 40 | 4 | 16 |
| 15 | 6 | 90 | 1 | 6 |
| 20 | 3 | 60 | 6 | 18 |
| 25 | 5 | 125 | 11 | 55 |
| योग | 25 | 350 | | 158 |

$$\bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i}$$

$$= \frac{350}{25} = 14$$

$$\text{माध्य विचलन} = \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{N}$$

$$= \frac{158}{25} = 6.32.$$

प्रश्न 6.

| x_i | 10 | 30 | 50 | 70 | 90 |
|-------|----|----|----|----|----|
| f_i | 4 | 24 | 28 | 16 | 8 |

हल:

| x_i | f_i | $f_i x_i$ | $ x_i - \bar{x} $ | $f_i x_i - \bar{x} $ |
|-------|-------|-----------|-------------------|-----------------------|
| 10 | 4 | 40 | 40 | 160 |
| 30 | 24 | 720 | 20 | 480 |
| 50 | 28 | 1400 | 0 | 0 |
| 70 | 16 | 1120 | 20 | 320 |
| 90 | 8 | 720 | 40 | 320 |
| योग | 80 | 4000 | | 1280 |

$$\begin{aligned}\bar{x} &= \frac{\sum f_i x_i}{\sum f_i} \\ &= \frac{4000}{80} = 50\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{माध्य विचलन} &= \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{N} \\ &= \frac{1280}{80} \\ &= 16.\end{aligned}$$

प्रश्न 7 व 8 के आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 7.

| | | | | | | |
|-------|---|---|---|----|----|----|
| x_i | 5 | 7 | 9 | 10 | 12 | 15 |
| f_i | 8 | 6 | 2 | 2 | 2 | 6 |

हल :

| x_i | f_i | $c.f$ | $ x_i - M $ | $f_i x_i - M $ |
|-------|-------|-------|-------------|-----------------|
| 5 | 8 | 8 | 2 | 16 |
| 7 | 6 | 14 | 0 | 0 |
| 9 | 2 | 16 | 2 | 4 |
| 10 | 2 | 18 | 3 | 6 |
| 12 | 2 | 20 | 5 | 10 |
| 15 | 6 | 26 | 8 | 48 |
| योग | 26 | | | 84 |

बारंबारता का योग = 26

$$\frac{26}{2} = 13^{\text{वाँ पद}} = 7 \text{ और } 14^{\text{वाँ पद}} = 7$$

$$\therefore \text{माध्यिका} = \frac{7+7}{2} = 7$$

\therefore माध्यिका के सापेक्ष विचलन

$$(M) = \frac{\sum f_i |x_i - M|}{N} = \frac{84}{26} = 3.23.$$

प्रश्न 8.

| | | | | | |
|-------|----|----|----|----|----|
| x_i | 15 | 21 | 27 | 30 | 35 |
| f_i | 3 | 5 | 6 | 7 | 8 |

हल:

| x_i | f_i | $c.f$ | $ x_i - 30 $ | $f_i x_i - 30 $ |
|-------|-------|-------|--------------|------------------|
| 15 | 3 | 3 | 15 | 45 |
| 21 | 5 | 8 | 9 | 45 |
| 27 | 6 | 14 | 3 | 18 |
| 30 | 7 | 21 | 0 | 0 |
| 35 | 8 | 29 | 5 | 40 |
| योग | 29 | | | 148 |

$$\text{माध्यिका} = \frac{29+1}{2} = 15\text{वाँ पद} = 30$$

$$\begin{aligned}\text{M.D. (M)} &= \frac{\sum f_i |x_i - M|}{N} \\ &= \frac{148}{29} = 5.1.\end{aligned}$$

प्रश्न 9 व 10 के आँकड़ों के लिए मध्य के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 9.

| आय प्रतिदिन | 0 – 100 | 100 – 200 | 200 – 300 | 300 – 400 | 400 – 500 | 500 – 600 | 600 – 700 | 700 – 800 |
|-------------------------|---------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| व्यक्तियों की संख्या | 4 | 8 | 9 | 10 | 7 | 5 | 4 | 3 |

हल : माना $a = 350$, $h = 100$, $d_i = \frac{x_i - 350}{100}$

| वर्ग | मध्य मूल x_i | d_i | बारंबारता f_i | $f_i d_i$ | $ x_i - \bar{x} $ | $f_i x_i - \bar{x} $ |
|---------|-------------------|-------|--------------------|-----------|-------------------|-----------------------|
| 0-100 | 50 | -3 | 4 | -12 | 308 | 1232 |
| 100-200 | 150 | -2 | 8 | -16 | 208 | 1664 |
| 200-300 | 250 | -1 | 9 | -9 | 108 | 972 |
| 300-400 | 350 | 0 | 10 | 0 | 8 | 80 |
| 400-500 | 450 | 1 | 7 | 7 | 92 | 644 |
| 500-600 | 550 | 2 | 5 | 10 | 192 | 960 |
| 600-700 | 650 | 3 | 4 | 12 | 292 | 1168 |
| 700-800 | 750 | 4 | 3 | 12 | 392 | 1176 |
| योग | | | 50 | 4 | | 7896 |

$$\begin{aligned}\bar{x} &= a + \frac{\sum f_i d_i}{N} \times h \\ &= 350 + \frac{4}{50} \times 100 \\ &= 358\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{माध्य विचलन} &= \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{N} \\ &= \frac{7856}{50} \\ &= 157.92.\end{aligned}$$

प्रश्न 10.

| ऊँचाई (सेमी में) | 95 – 105 | 105 – 115 | 115 – 125 | 125 – 135 | 135 – 145 | 145 – 155 |
|------------------|----------|-----------|-----------|-----------|-----------|-----------|
| लड़कों की संख्या | 9 | 13 | 26 | 30 | 12 | 10 |

हल:

| वर्ग | मध्य मूल x_i | d_i $\frac{x_i - 130}{10}$ | बारंबारता f_i | $f_i d_i$ | $ x_i - \bar{x} $ | $f_i x_i - \bar{x} $ |
|-----------|-------------------|---------------------------------|--------------------|-----------|-------------------|-----------------------|
| 95 – 105 | 100 | -3 | 9 | -27 | 25.3 | 227.7 |
| 105 – 115 | 110 | -2 | 13 | -26 | 15.3 | 198.9 |
| 115 – 125 | 120 | -1 | 26 | -26 | 5.3 | 137.8 |
| 125 – 135 | 130 | 0 | 30 | 0 | 4.7 | 141.0 |
| 135 – 145 | 140 | 1 | 12 | 12 | 14.7 | 176.4 |
| 145 – 155 | 150 | 2 | 10 | 20 | 24.7 | 247.0 |
| योग | | | 100 | -47 | | 1128.8 |

$$\begin{aligned}
 \text{माध्य } \bar{x} &= a + \left(\frac{\sum f_i d_i}{\sum f_i} \right) \times h \\
 &= 130 + \left(\frac{-47}{100} \right) \times 10 \\
 &= 130 - 4.7 = 125.3
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \text{माध्य विचलन} &= \frac{\sum f_i |x_i - \bar{x}|}{N} \\
 &= \frac{1128.8}{100} = 11.288.
 \end{aligned}$$

प्रश्न 11.

निम्नलिखित आँकड़ों के लिए माध्यिका के सापेक्ष माध्य विचलन ज्ञात कीजिए:

| अंक | 0 – 10 | 10 – 20 | 20 – 30 | 30 – 40 | 40 – 50 | 50 – 60 |
|--------------------|--------|---------|---------|---------|---------|---------|
| लड़कियों की संख्या | 6 | 8 | 14 | 16 | 4 | 2 |

हल:

| वर्ग | मध्य मूल | f_i | c.f. | $ x_i - M $ | $f_i x_i - M $ |
|---------|----------|-------|------|-------------|-----------------|
| 0 – 10 | 5 | 6 | 6 | 22.86 | 137.16 |
| 10 – 20 | 15 | 8 | 14 | 12.86 | 102.88 |
| 20 – 30 | 25 | 14 | 28 | 2.86 | 40.04 |
| 30 – 40 | 35 | 16 | 44 | 7.14 | 114.24 |
| 40 – 50 | 45 | 4 | 48 | 17.14 | 68.56 |
| 50 – 60 | 55 | 2 | 50 | 27.14 | 54.28 |
| | | | | योग | 517.16 |

$$\text{माध्यिका} = l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h$$

$$= 20 + \frac{25 - 14}{14} \times 10 = 20 + \frac{110}{14}$$

$$= 20 + 7.86 = 27.86$$

$$\text{माध्य विचलन (M)} = \frac{\sum f_i |x_i - M|}{\sum f_i}$$

$$= \frac{517.16}{50} = 10.34$$

प्रश्न 12.

नीचे दिए गए 100 व्यक्तियों की आयु के बंटन की माध्यिका आयु के सापेक्ष माध्य विचलन की गणना कीजिए:

| आयु | 16 – 20 | 21 – 25 | 26 – 30 | 31 – 35 | 36 – 40 | 41 – 45 | 46 – 50 | 51 – 55 |
|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| संख्या | 5 | 6 | 12 | 14 | 26 | 12 | 16 | 9 |

हल:

हल : दिए गए आँकड़ों की सतत बारंबारता बंटन में बदलते हुए :

| वर्ग | मध्य मूल | f_i | c.f. | $ x_i - M $ | $f_i x_i - M $ |
|-------------|----------|-------|------|-------------|-----------------|
| 15.5 – 20.5 | 18 | 5 | 5 | 20 | 100 |
| 20.5 – 25.5 | 23 | 6 | 11 | 15 | 90 |
| 25.5 – 30.5 | 28 | 12 | 23 | 10 | 120 |
| 30.5 – 35.5 | 33 | 14 | 37 | 5 | 70 |
| 35.5 – 40.5 | 38 | 26 | 63 | 0 | 0 |
| 40.5 – 45.5 | 43 | 12 | 75 | 5 | 60 |
| 45.5 – 50.5 | 48 | 16 | 91 | 10 | 160 |
| 50.5 – 55.5 | 53 | 9 | 100 | 15 | 135 |
| | योग | 100 | | योग | 735 |

माध्यिका वर्ग : $35.5 - 40.5, l = 35.5, h = 5, C = 37, f = 26$

$$\begin{aligned}\therefore \text{माध्यिका} &= l + \frac{\frac{N}{2} - C}{f} \times h \\ &= 35.5 + \left(\frac{50 - 37}{26} \right) \times 5 \\ &= 35.5 + \frac{13}{26} \times 5 = 35.5 + 2.5 = 38\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{माध्य विचलन (M)} &= \frac{\sum f_i |x_i - M|}{N} \\ &= \frac{735}{100} = 7.35\end{aligned}$$

प्रश्नावली 15.2

प्रश्न 1 से 5 तक के लिए आँकड़ों के लिए माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 1.

6, 7, 10, 12, 13, 4, 8, 12.

हल:

$$\begin{aligned}\text{माध्य } \bar{x} &= \frac{\sum x_i}{n} \\ &= \frac{6+7+10+12+13+4+8+12}{8} \\ &= \frac{72}{8} = 9.\end{aligned}$$

| x_i | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ |
|-------|-----------------|---------------------|
| 6 | -3 | 9 |
| 7 | -2 | 4 |
| 10 | 1 | 1 |
| 12 | 3 | 9 |
| 13 | 4 | 16 |
| 4 | -5 | 25 |
| 8 | -1 | 1 |
| 12 | 3 | 9 |
| | | 74 |

$$\begin{aligned}\text{प्रसरण} &= \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{74}{8} = 9.25.\end{aligned}$$

प्रश्न 2.

प्रथम n प्राकृत संख्याएँ।

हल : पहली n प्राकृत संख्याएँ : 1, 2, 3, ..., n

$$\text{माध्य } \bar{x} = \frac{1+2+3+\dots+n}{n} = \frac{1}{n} \cdot \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n+1}{2} \quad [\text{पहली } n \text{ प्राकृत संख्याओं का योग } \frac{n(n+1)}{2}]$$

$$\Sigma x_i^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$\text{प्रसरण} = \frac{\Sigma(x_i - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n^2} [n\Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2]$$

$$= \frac{1}{n^2} \left[n \frac{n(n+1)(n+2)}{6} - \frac{n^2(n+1)^2}{4} \right]$$

$$= \frac{1}{12} [2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2]$$

$$= \frac{n+1}{12} [2(2n+1) - 3(n+1)]$$

$$= \frac{n+1}{12} [4n+2-3n-3]$$

$$= \frac{(n+1)(n-1)}{12} = \frac{n^2-1}{12}$$

प्रश्न 3.

3 के प्रथम 10 गुणज।

हल:

प्रथम दस 3 के गुणज : 3, 6, 9, 12, 15, 18, 21, 24, 27, 30

| x_i | $y_i = \frac{x_i - 15}{3}$ | y_i^2 |
|-------|----------------------------|---------|
| 3 | -4 | 16 |
| 6 | -3 | 9 |
| 9 | -2 | 4 |
| 12 | -1 | 1 |
| 15 | 0 | 0 |
| 18 | 1 | 1 |
| 21 | 2 | 4 |
| 24 | 3 | 9 |
| 27 | 4 | 16 |
| 30 | 5 | 25 |
| योग | 5 | 85 |

$$\text{माध्य } \bar{x} = A + \frac{\Sigma y_i}{n} \times h$$

$$= 15 + \frac{5}{10} \times 3$$

$$= 15 + 1.5 = 16.5.$$

$$\text{प्रसरण, } \sigma^2 = \frac{h^2}{n^2} [n \Sigma y_i^2 - (\Sigma y_i)^2]$$

$$= \frac{9}{100} [10 \times 85 - 25]$$

$$= \frac{9}{100} [850 - 25]$$

$$= \frac{9 \times 825}{100}$$

$$= \frac{7425}{100} = 74.25$$

अतः

माध्य = 16.5, प्रसरण = 74.25.

प्रश्न 4.

| | | | | | | | |
|-------|---|----|----|----|----|----|----|
| x_i | 6 | 10 | 14 | 18 | 24 | 28 | 30 |
| f_i | 2 | 4 | 7 | 12 | 8 | 4 | 3 |

हल:

| x_i | f_i | $f_i x_i$ | $x_i - \bar{x}$ | $(x_i - \bar{x})^2$ | $f_i (x_i - \bar{x})^2$ |
|-------|-------|-----------|-----------------|---------------------|-------------------------|
| 6 | 2 | 12 | -13 | 169 | 338 |
| 10 | 4 | 40 | -9 | 81 | 324 |
| 14 | 7 | 98 | -5 | 25 | 175 |
| 18 | 12 | 216 | -1 | 1 | 12 |
| 24 | 8 | 198 | 5 | 25 | 200 |
| 28 | 4 | 115 | 9 | 81 | 324 |
| 30 | 3 | 90 | 11 | 121 | 363 |
| योग | 40 | 760 | | | 1736 |

$$\text{माध्य } \bar{x} = \frac{760}{40} = 19$$

$$\begin{aligned} \text{प्रसरण } \sigma^2 &= \frac{\sum f_i (x_i - \bar{x})^2}{N} \\ &= \frac{1736}{40} = 43.4 \end{aligned}$$

अतः माध्य = 19, प्रसरण = 43.4.

प्रश्न 5.

| | | | | | | | |
|-------|----|----|----|----|-----|-----|-----|
| x_i | 92 | 93 | 97 | 98 | 102 | 104 | 109 |
| f_i | 3 | 2 | 3 | 2 | 6 | 3 | 3 |

हल : मान लीजिए कल्पित माध्य $A = 98$, $\therefore y_i = x_i - 98$

| x_i | f_i | y_i | fy_i | y_i^2 | fy_i^2 |
|-------|-------|-------|--------|---------|----------|
| 92 | 3 | -6 | -18 | 36 | 108 |
| 93 | 2 | -5 | -10 | 25 | 50 |
| 97 | 3 | -1 | -3 | 1 | 3 |
| 98 | 2 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 102 | 6 | 4 | 24 | 16 | 96 |
| 104 | 3 | 6 | 18 | 36 | 108 |
| 109 | 3 | 11 | 33 | 121 | 363 |
| योग | 22 | | 44 | | 728 |

$$\text{माध्य} = A + \frac{\sum f_i y_i}{N} = 98 + \frac{44}{22}$$

$$= 98 + 2 = 100.$$

$$\text{प्रसरण } \sigma^2 = \frac{1}{N^2} [N \sum f_i y_i^2 - (\sum f_i y_i)^2]$$

$$= \frac{1}{(22)^2} [22 \times 728 - 44 \times 44]$$

$$= \frac{1}{22} [728 - 88]$$

$$= \frac{640}{22} = \frac{320}{11} = 29.09.$$

प्रश्न 6.

लघु विधि द्वारा माध्य वे मानक विचलन ज्ञात कीजिए:

| x_i | 60 | 61 | 62 | 63 | 64 | 65 | 66 | 67 | 68 |
|-------|----|----|----|----|----|----|----|----|----|
| f_i | 2 | 1 | 12 | 29 | 25 | 12 | 10 | 4 | 5 |

हल : मान लीजिए कल्पित माध्य $A = 64$

तथा $y_i = x_i - 64$

| x_i | f_i | y_i | $f_i y_i$ | y_i^2 | $f_i y_i^2$ |
|-------|-------|-------|-----------|---------|-------------|
| 60 | 2 | -4 | -8 | 16 | 32 |
| 61 | 1 | -3 | -3 | 9 | 9 |
| 62 | 12 | -2 | -24 | 4 | 48 |
| 63 | 29 | -1 | -29 | 1 | 29 |
| 64 | 25 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 65 | 12 | 1 | 12 | 1 | 12 |
| 66 | 10 | 2 | 20 | 4 | 40 |
| 67 | 4 | 3 | 12 | 9 | 36 |
| 68 | 5 | 4 | 20 | 16 | 80 |
| | 100 | | 0 | 60 | 286 |

$$\begin{aligned}\text{माध्य, } \bar{x} &= A + \frac{\sum f_i y_i}{N} \\ &= 64 + 0 = 64.\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{प्रसरण, } \sigma^2 &= \frac{1}{N^2} [N \sum f_i y_i^2 - (\sum f_i y_i)^2] \\ &= \frac{1}{(100)^2} [100 \times 286 - 0]\end{aligned}$$

$$= \frac{286}{100} = 2.86$$

$$\text{मानक विचलन, } \sigma = \sqrt{2.86} = 1.69.$$

प्रश्न 7 व 8 में दिए गए बारंबारता बंटन के लिए माध्य व प्रसरण ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 7.

| | | | | | | | |
|-------------|--------|---------|---------|----------|-----------|-----------|-----------|
| वर्ग : | 0 – 30 | 30 – 60 | 60 – 90 | 90 – 120 | 120 – 150 | 150 – 180 | 180 – 210 |
| बारंबारता : | 2 | 3 | 5 | 10 | 3 | 5 | 2 |

हल : माना कल्पित माध्य $A = 105$, वर्ग अंतराल $h = 30$

$$y_i = \frac{x_i - A}{h} = \frac{x_i - 105}{30}$$

| वर्ग | मध्य मूल्य (x_i) | बारंबारता (f_i) | y_i | $f_i y_i$ | y_i^2 | $f_i y_i^2$ |
|-----------|-------------------------|------------------------|-------|-----------|---------|-------------|
| 0 – 30 | 15 | 2 | -3 | -6 | 9 | 18 |
| 30 – 60 | 45 | 3 | -2 | -6 | 4 | 12 |
| 60 – 90 | 75 | 5 | -1 | -5 | 1 | 5 |
| 90 – 120 | 105 | 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 120 – 150 | 135 | 3 | 1 | 3 | 1 | 3 |
| 150 – 180 | 165 | 5 | 2 | 10 | 4 | 20 |
| 180 – 210 | 195 | 2 | 3 | 6 | 9 | 18 |
| योग | | 30 | | 2 | | 76 |

$$\text{माध्य } \bar{x} = A + \left(\frac{\sum f_i y_i}{N} \right) \times h$$

$$= 105 + \frac{2}{30} \times 30 = 107.$$

$$\text{प्रसरण } \sigma^2 = \frac{h^2}{N^2} [N \sum f_i y_i^2 - (\sum f_i y_i)^2]$$

$$= \frac{30 \times 30}{30 \times 30} [30 \times 76 - 2^2]$$

$$= 2280 - 4 = 2276.$$

प्रश्न 8.

| वर्ग : | 0-10 | 10-20 | 20-30 | 30-40 | 40-50 |
|-------------|------|-------|-------|-------|-------|
| बारंबारता : | 5 | 8 | 15 | 16 | 6 |

हल : माना कल्पित माध्य $A = 25$, वर्ग अंतराल $= 10$

$$y_i = \frac{x_i - A}{h} = \frac{x_i - 25}{10}$$

| वर्ग | मध्य मूल्य (x_i) | बारंबारता (f_i) | y_i | $f_i y_i$ | y_i^2 | $f_i y_i^2$ |
|-------|-------------------------|------------------------|-------|-----------|---------|-------------|
| 0-10 | 5 | 5 | -2 | -10 | 4 | 20 |
| 10-20 | 15 | 8 | -1 | -8 | 1 | 8 |
| 20-30 | 25 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 30-40 | 35 | 16 | 1 | 16 | 1 | 16 |
| 40-50 | 45 | 6 | 2 | 12 | 4 | 24 |
| योग | | 50 | | 10 | | 68 |

$$\text{माध्य, } \bar{x} = A + \left(\frac{\sum f_i y_i}{N} \right) \times h$$

$$= 25 + \left(\frac{10}{50} \right) \times 10 = 25 + 2 = 27.$$

$$\text{प्रसरण, } \sigma^2 = \frac{h^2}{N^2} [N \sum f_i y_i^2 - (\sum f_i y_i)^2]$$

$$= \frac{100}{2500} [50 \times 68 - 100]$$

$$= \frac{50}{25} [68 - 2] = 2 \times 66 = 132.$$

प्रश्न 9.

लघु विधि द्वारा माध्य, प्रसरण व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

| ऊँचाई (सेमी में) | 70 – 75 | 75 – 80 | 80 – 85 | 85 – 90 | 90 – 95 | 95 – 100 | 100 – 105 | 105 – 110 | 110 – 115 |
|---------------------|---------|---------|---------|---------|---------|----------|-----------|-----------|-----------|
| बच्चों की संख्या | 3 | 4 | 7 | 7 | 15 | 9 | 6 | 6 | 3 |

हल : $A = 92.5$, $h = 5$, $y_i = \frac{x_i - A}{h} = \frac{x_i - 92.5}{5}$

| वर्ग अंतराल | माध्य मूल्य x_i | बारंबारता f_i | y_i | $f_i y_i$ | y_i^2 | $f_i y_i^2$ |
|-------------|----------------------|--------------------|-------|-----------|---------|-------------|
| 70 – 75 | 72.5 | 3 | -4 | -12 | 16 | 48 |
| 75 – 80 | 77.5 | 4 | -3 | -12 | 9 | 36 |
| 80 – 85 | 82.5 | 7 | -2 | -14 | 4 | 28 |
| 85 – 90 | 87.5 | 7 | -1 | -7 | 1 | 7 |
| 90 – 95 | 92.5 | 15 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 95 – 100 | 97.5 | 9 | 1 | 9 | 1 | 9 |
| 100 – 105 | 102.5 | 6 | 2 | 12 | 4 | 24 |
| 105 – 110 | 107.5 | 6 | 3 | 18 | 9 | 54 |
| 110 – 115 | 112.5 | 3 | 4 | 12 | 16 | 48 |
| योग | | 60 | | 6 | | 254 |

$$\text{माध्य, } \bar{x} = A + \left(\frac{\sum f_i y_i}{N} \right) \times h$$

$$= 92.5 + \frac{6}{60} \times 5$$

$$= 92.5 + 0.5 = 93.$$

$$\text{प्रसरण, } \sigma^2 = \frac{h^2}{N^2} [N \sum f_i y_i^2 - (\sum f_i y_i)^2]$$

$$= \frac{25}{3600} [60 \times 254 - 36]$$

$$= \frac{12}{144} [5 \times 254 - 3]$$

$$= \frac{1}{12} [1270 - 3]$$

$$= \frac{1267}{12} = 105.58.$$

$$\text{मानक विचलन, } \sigma = \sqrt{105.58} = 10.28.$$

प्रश्न 10.

एक डिजाइन में बनाए गए वृत्तों के व्यास (मिमी में) नीचे दिए गए हैं।

| व्यास | 33 – 36 | 37 – 40 | 41 – 44 | 45 – 48 | 49 – 52 |
|-------------------|---------|---------|---------|---------|---------|
| वृत्तों की संख्या | 15 | 17 | 21 | 22 | 25 |

वृत्तों के व्यासों का मानक विचलन के माध्य व्यास ज्ञात कीजिए।

हल:

दिए हुए असतत आँकड़ों को सतत बारंबारता बंटन में बदलने के लिए अंतराल इस प्रकार हैं।

32.5 – 36.5, 36.5 – 40.5, 40.50 – 44.5, 44.5 – 48.5, 48.5 – 52.5

माना $A = 42.5$, $h = 4$, $\therefore y_i = \frac{x_i - 42.5}{4}$

| वर्ग अंतराल | माध्य मूल्य x_i | बारंबारता f_i | y_i | $f_i y_i$ | y_i^2 | $f_i y_i^2$ |
|-------------|----------------------|--------------------|-------|-----------|---------|-------------|
| 32.5 – 36.5 | 34.5 | 15 | -2 | -30 | 4 | 60 |
| 36.5 – 40.5 | 38.5 | 17 | -1 | -17 | 1 | 17 |
| 40.5 – 44.5 | 42.5 | 21 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 44.5 – 48.5 | 42.5 | 22 | 1 | 22 | 1 | 22 |
| 48.5 – 52.5 | 50.5 | 25 | 2 | 50 | 4 | 100 |
| योग | | 100 | | 25 | | 199 |

$$\text{माध्य, } \bar{x} = A + \left(\frac{\sum f_i y_i}{N} \right) \times h$$

$$= 42.5 + \frac{25}{100} \times 4$$

$$= 42.5 + 1 = 43.5.$$

$$\text{प्रसरण } \sigma^2 = \frac{h^2}{N^2} [N \sum f_i y_i^2 - (\sum f_i y_i)^2]$$

$$= \frac{16}{(100)^2} [100 \times 199 - (25)^2]$$

$$= \frac{16 \times 25}{100 \times 100} [4 \times 199 - 25]$$

$$= \frac{1}{25} [796 - 25]$$

$$= \frac{771}{25} = 30.84$$

$$\text{मानक विचलन } \sigma = \sqrt{30.84} = 5.56.$$

प्रश्नावली 15.3

प्रश्न 1.

निम्नलिखित आँकड़ों से बताइए कि A या B में से किसमें अधिक बिखराव है।

| अंक | 10 – 20 | 20 – 30 | 30 – 40 | 40 – 50 | 50 – 60 | 60 – 70 | 70 – 80 |
|--------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|---------|
| समूह A | 9 | 17 | 32 | 33 | 40 | 10 | 9 |
| समूह B | 10 | 20 | 30 | 25 | 43 | 15 | 7 |

हल:

माना कल्पित माध्य $A = 45$, $h = 10$.

$$y_i = \frac{x_i - 45}{h}$$

| वर्ग अंतराल | मध्य मूल्य x_i | y_i | समूह A के लिए | | | समूह B के लिए | | |
|----------------|---------------------|-------|---------------|--------|----------|---------------|--------|----------|
| | | | f_i | fy_i | fy_i^2 | f_i | fy_i | fy_i^2 |
| 10 – 20 | 15 | -3 | 9 | -27 | 81 | 10 | -30 | 90 |
| 20 – 30 | 25 | -2 | 17 | -34 | 68 | 20 | -40 | 80 |
| 30 – 40 | 35 | -1 | 32 | -32 | 32 | 30 | -30 | 30 |
| 40 – 50 | 45 | 0 | 33 | 0 | 0 | 25 | 0 | 0 |
| 50 – 60 | 55 | 1 | 40 | 40 | 40 | 43 | 43 | 43 |
| 60 – 70 | 65 | 2 | 10 | 20 | 40 | 15 | 30 | 60 |
| 70 – 80 | 75 | 3 | 9 | 27 | 81 | 7 | 21 | 63 |
| | | | 150 | -6 | 342 | 150 | -6 | 366 |

सूत्र A के लिए :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= A + \left(\frac{\sum f_i y_i}{N} \right) \times h \\ &= 45 + \frac{-6}{150} \times 10 = 45 - \frac{2}{5} \\ &= 45 - 0.4 = 44.6\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\sigma^2 &= \frac{h^2}{N^2} [N \sum f_i y_i^2 - (\sum f_i y_i)^2] \\ &= \frac{100}{22500} [150 \times 342 - 36] \\ &= \frac{36}{225} [25 \times 57 - 1] \\ &= \frac{4}{25} [1425 - 1] \\ &= \frac{4 \times 1224}{25} = 227.84\end{aligned}$$

$$\therefore \sigma = 15.09$$

$$\begin{aligned}\text{विचरण गुणांक, C.V.} &= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 \\ &= \frac{15.09}{44.6} \times 100 = 33.83.\end{aligned}$$

समूह B के लिए :

$$\bar{x} = A + \left(\frac{\sum f_i y_i}{N} \right) \times h$$

$$= 45 + \frac{-6}{150} \times 10 = 45 - \frac{2}{5}$$

$$= 45 - 0.4 = 44.6$$

$$\sigma^2 = \frac{h^2}{N^2} [N \sum f_i y_i^2 - (\sum f_i y_i)^2]$$

$$= \frac{100}{22500} [150 \times 366 - 36^2]$$

$$= \frac{36}{225} [25 \times 61 - 1]$$

$$= \frac{4}{25} \times 1524 = \frac{6096}{25} = 243.84$$

\therefore

$$\sigma^* = 15.62$$

$$\text{विचरण गुणांक, C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

$$= \frac{1562}{44.6} = 35.02$$

समूह B का विचरण गुणांक समूह A के विचरण गुणांक से अधिक है।

अतः समूह B में अंकों का बिखराव समूह A के अंकों से अधिक है।

प्रश्न 2.

शेयरों X और Y के नीचे दिए गए मूल्यों से बताइए कि किसके मूल्यों में अधिक स्थिरता है ?

| | | | | | | | | | | |
|---|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| X | 35 | 54 | 52 | 53 | 56 | 58 | 52 | 50 | 51 | 49 |
| Y | 108 | 107 | 105 | 105 | 106 | 107 | 104 | 103 | 104 | 101 |

हल:

माना शेयर X के आँकड़ों में कल्पित माध्य = 52

और शेयर Y के आँकड़ों में कल्पित मा

| शेयर X के लिए | | | शेयर Y के लिए | | |
|---------------|------------------|---------|---------------|-------------------|---------|
| x_i | $y_i = x_i - 52$ | y_i^2 | x_i | $y_i = x_i - 105$ | y_i^2 |
| 35 | -17 | 289 | 108 | 3 | 9 |
| 54 | 2 | 4 | 107 | 2 | 4 |
| 52 | 0 | 0 | 105 | 0 | 0 |
| 53 | 1 | 1 | 105 | 0 | 0 |
| 56 | 4 | 16 | 106 | 1 | 1 |
| 58 | 6 | 36 | 107 | 2 | 4 |
| 52 | 0 | 0 | 104 | -1 | 1 |
| 50 | -2 | 4 | 103 | -2 | 4 |
| 51 | -1 | 1 | 104 | -1 | 1 |
| 49 | -3 | 9 | 101 | -4 | 16 |
| योग | -10 | 360 | | 0 | 40 |

ध्य = 105

शेयर X के लिए :

$$\begin{aligned}\bar{x} &= A + \frac{\Sigma y_i}{n} \\ &= 52 + \frac{-10}{10} \\ &= 52 - 1 = 51\end{aligned}$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2} [n \Sigma y_i^2 - (\Sigma y_i)^2]$$

$$= \frac{1}{100} [10 \times 360 - 100]$$

$$= 36 - 1 = 35$$

$$\sigma = 5.916$$

$$\text{विचरण गुणांक, C.V.} = \frac{\sigma}{x} \times 100$$

$$= \frac{5.916}{51} \times 100 = \frac{591.6}{51} = 11.6$$

शेयर Y के लिए :

$$\begin{aligned} \bar{x} &= A + \frac{\Sigma y_i}{n} \\ &= 105 + \frac{0}{10} = 105 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sigma^2 &= \frac{1}{n^2} [n \Sigma y_i^2 - (\Sigma y_i)^2] \\ &= \frac{1}{100} [10 \times 40 - 0] \\ &= \frac{400}{100} = 4 \end{aligned}$$

$$\therefore \sigma = 2$$

$$\text{विचरण गुणांक C.V.} = \frac{\sigma}{x} \times 100$$

$$= \frac{2}{105} \times 100 = \frac{200}{105} = 1.9$$

विचरण गुणांक Y शेयर में X शेयर की तुलना में कम है।

अतः शेयर Y में, शेयर X की तुलना में अधिक स्थिरता है।

प्रश्न 3.

एक कारखाने की दो फर्मों A और B के कर्मचारियों को दिए मासिक वेतन के विश्लेषण का निम्नलिखित परिणाम है:

| | फर्म A | फर्म B |
|--------------------------------------|---------|---------|
| वेतन पाने वाले कर्मचारियों की संख्या | 586 | 648 |
| मासिक वेतनों का माध्य | 5253 रु | 5253 रु |
| वेतनों के बंटनों का प्रसरण | 100 | 121 |

- (i) A और B में से कौन सी फर्म अपने कर्मचारियों को वेतन के रूप में अधिक राशि देती है?
(ii) व्यक्तिगत वेतनों में किस फर्म A या B में अधिक विचरण है ?

हल:

फर्म A के लिए :

वेतन पाने वाले कर्मचारियों की संख्या = 586

मासिक वेतन की माध्य = 5253 रु

फर्म A द्वारा दिया गया कुल वेतन = $5253 \times 586 = 3078258$ रु

वेतन बंटन का प्रसरण = 100

मानक विचलन = 10

$$\begin{aligned}\text{विचरण गुणांक} &= \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100 \\ &= \frac{10}{5253} \times 100 \\ &= \frac{1000}{5253} \\ &= 0.19\end{aligned}$$

फर्म B के लिए:

वेतन पाने वाले कर्मचारियों की संख्या = 648

मासिक वेतन का संख्या = 5253 रु

फर्म B द्वारा दिया गया कुल वेतन = 5253×648 रु = 3403944 रु

वेतन बंटन का प्रसरण = 121

मानक विचलन = 11

$$\begin{aligned}\text{विचरण गुणांक} &= \frac{\sigma}{\overline{x}} \times 100 \\ &= \frac{11}{5253} \times 100 = 0.21\end{aligned}$$

(i) फर्म A द्वारा दिया गया कुल मासिक वेतन = 3078258 रु

फर्म B द्वारा दिया गया कुल मासिक वेतन = 3403944 रु

अतः फर्म B फर्म A की तुलना में अधिक मासिक वेतन देती है।

(ii) फर्म A के वेतन बंटन की विचरण गुणांक = 0.19 और

फर्म A के वेतन बंटन का विचरण गुणांक = 0.21

अतः फर्म B के वेतन बंटन में अधिक बिखराव है।

प्रश्न 4.

टीम A द्वारा एक सत्र में खेले गए फुटबॉल मैचों के आँकड़े नीचे दिए गए हैं:

| किए गए गोलों की संख्या | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 |
|------------------------|---|---|---|---|---|
| मैचों की संख्या | 1 | 9 | 7 | 5 | 3 |

टीम B द्वारा खेले गए मैचों में बनाए गए गोलों का माध्य 2 प्रति मैच और गोलों का मानक विचलन 1.25 था।

किस टीम को अधिक संगत (consistent) समझा जाना चाहिए ?

हल :

| किए गए गोलों की संख्या x_i | मैचों की संख्या f_i | x_i^2 | $f_i x_i$ | $f_i x_i^2$ |
|---------------------------------|--------------------------|---------|-----------|-------------|
| 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 9 | 1 | 9 | 9 |
| 2 | 7 | 4 | 14 | 28 |
| 3 | 5 | 9 | 15 | 45 |
| 4 | 3 | 16 | 12 | 48 |
| | 25 | | 50 | 130 |

टीम A के लिए :

$$\text{किए गए गोलों का माध्य } \bar{x} = \frac{\sum f_i x_i}{N} = \frac{50}{25} = 2$$

$$\begin{aligned}\text{मानक विचलन} &= \frac{1}{N} \sqrt{N \sum f_i x_i^2 - (\sum f_i x_i)^2} \\ &= \frac{1}{25} \sqrt{25 \times 130 - 50 \times 50} \\ &= \frac{2}{25} \sqrt{130 - 100} \\ &= \frac{1}{5} \sqrt{30} = 1.095\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{विचरण गुणांक} &= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 \\ &= \frac{1.095}{2} \times 100 \\ &= 54.75\end{aligned}$$

फर्म B के लिए :

$$\begin{aligned}\text{माध्य } \bar{x} &= 2 \\ \text{मानक विचलन} &= 1.25 \\ \text{विचरण गुणांक} &= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 \\ &= \frac{1.25}{2} \times 100 = 62.5\end{aligned}$$

टीम A का टीम B की तुलना में विचरण गुणांक कम है।
अतः टीम A में टीम B से अधिक स्थिरता है।

प्रश्न 5.

पचास वनस्पति उत्पादों की लंबाई x (सेमी में) और भार y (ग्राम में) के योग और वर्गों के योग नीचे दिए गए हैं।

$$\sum_{i=1}^{50} x_i = 212, \sum_{i=1}^{50} x_i^2 = 902.8, \sum_{i=1}^{50} y_i = 261, \sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 1457.6$$

लंबाई या भार में किसमें अधिक विचरण है ?

हल:

लंबाई के लिए:

$$n = 50, \sum_{i=1}^{50} x_i = 212$$

$$\bar{x} = \frac{212}{50} = 4.24$$

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{n} \sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2} \\ &= \frac{1}{50} \sqrt{50 \times 902.8 - (212)^2} \\ &= \frac{1}{50} \sqrt{45140 - 44944} \\ &= \frac{\sqrt{196}}{50} = \frac{14}{50} = 0.28\end{aligned}$$

$$\text{विचरण गुणांक, C.V.} = \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100$$

$$= \frac{0.28}{4.24} \times 100 = 6.60$$

भार के लिए :

$$n = 50, \sum_{i=1}^{50} y_i = 261, \sum_{i=1}^{50} y_i^2 = 1457.6$$

$$\bar{x} = \frac{\sum y_i}{n} = \frac{261}{50} = 5.22$$

$$\begin{aligned}\sigma &= \frac{1}{n} \sqrt{n \sum y_i^2 - (\sum y_i)^2} \\&= \frac{1}{50} \sqrt{50 \times 1457.6 - (261)^2} \\&= \frac{1}{50} \sqrt{72880 - 68121} \\&= \frac{\sqrt{4759}}{50} = \frac{68.9855}{50} = 1.38\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\text{विचरण गुणांक, C.V.} &= \frac{\sigma}{\bar{x}} \times 100 \\&= \frac{1.38}{5.22} \times 100 = 26.44\end{aligned}$$

भार का विचरण गुणांक, लंबाई के विचरण गुणांक से अधिक है।

अतः भार के बंटन में अधिक विचरण है।

अध्याय 15 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1.

आठ प्रेक्षकों का माध्य तथा प्रसरण क्रमशः 9 और 9.25 है। यदि इनमें से छः प्रेक्षण 6, 7, 10, 12, 12, और 13 हैं, तो शेष दो प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए वे दो संख्याएँ x और y हैं।

$$\therefore \bar{x} = 9 = \frac{6+7+10+12+12+13+x+y}{8}$$

या $72 = 60 + x + y$

$$\therefore x + y = 12 \quad \dots(1)$$

$$\text{प्रसरण } \sigma^2 = \frac{1}{n^2} [n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2]$$

$$\therefore \frac{\sum x_i}{8} = 9$$

$$\therefore 9.25 = \frac{1}{64} [8 \times \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2]$$

$$\therefore \sum x_i = 72$$

$$\begin{aligned} 8 \times \sum x_i^2 &= 9.25 \times 64 + 72 \times 72 \\ &= 592 + 5184 = 5776 \end{aligned}$$

$$\therefore \sum x_i^2 = \frac{5776}{8} = 722$$

या $\sum x_i^2 = 722$

$$\begin{aligned} &= 6^2 + 7^2 + 10^2 + 12^2 + 12^2 + 13^2 + x^2 + y^2 \\ 722 &= 36 + 49 + 100 + 144 + 144 + 169 + x^2 + y^2 \\ &= 642 + x^2 + y^2 \end{aligned}$$

$$\therefore x^2 + y^2 = 722 - 642 = 80$$

$$\text{या } x^2 + y^2 = 80 \quad \dots(2)$$

समीकरण (1) और (2) से

$$x^2 + (12 - x)^2 = 80$$

$$\text{या } 2x^2 - 24x + 144 = 80$$

$$\text{या } x^2 - 12x + 32 = 0$$

$$\text{या } (x - 4)(x - 8) = 0$$

$$\therefore x = 4 \text{ या } 8$$

$$\therefore y = 8 \text{ या } 4$$

अतः वे दो संख्याएँ 4 और 8 हैं।

प्रश्न 2.

सात प्रेक्षणों का माध्य तथा प्रसरण क्रमशः 8 और 16 हैं। यदि इनमें से पाँच प्रेक्षण 2, 4, 10, 12, 14 हैं तो शेष दो प्रेक्षण ज्ञात कीजिए।

हल : माना कि वे दो संख्याएँ x और y हैं।

$$\bar{x} = 8 = \frac{2+4+10+12+14+x+y}{7}$$

या $56 = 42 + x + y$ या $x + y = 56 - 42 = 14$... (1)

$$\sigma^2 = \frac{1}{n^2} [n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2]$$

$$[\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n} \therefore \sum x_i = n \bar{x} = 7 \times 8 = 56]$$

$$\sigma^2 = 16 = \frac{1}{49} [7 \times \sum x_i^2 - (56)^2]$$

$\therefore 7 \sum x_i^2 = 49 \times 16 + 56 \times 56$

या $\sum x_i^2 = 7 \times 16 + 8 \times 56$
 $= 560$

या $2^2 + 4^2 + 10^2 + 12^2 + 14^2 + x^2 + y^2 = 560$

$$460 + x^2 + y^2 = 560$$

$$x^2 + y^2 = 560 - 460 = 100$$
 ... (2)

समीकरण (1) और (2) से

$$x^2 + (14 - x)^2 = 100$$

या $2x^2 - 28x + 196 - 100 = 0$

या $x^2 - 14x + 48 = 0$

$\therefore (x - 6)(x - 8) = 0$

$\therefore x = 6$ या 8

$\therefore y = 8$ या 6

\therefore वे दो संख्याएँ 6 और 8 हैं।

प्रश्न 3.

छः प्रेक्षणों को माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 8 तथा 4 हैं। यदि प्रत्येक प्रेक्षण को 3 से गुणा

कर दिया जाए तो परिणामी प्रेक्षणों का माध्य व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल : $\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$

x_i को $3x_i$ से बदलने पर

$$\begin{aligned}\text{नया माध्य} &= \frac{\sum 3x_i}{n} \\ &= \frac{3\sum x_i}{n} = 3\bar{x} = 3 \times 8 = 24.\end{aligned}$$

$$\text{मानक विचलन} \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = 4$$

नए बंटन में x_i को $3x_i$ और \bar{x} को $3\bar{x}$ से बदलने पर

$$\begin{aligned}\text{नया मानक विचलन} &= \sqrt{\frac{\sum (3x_i - 3\bar{x})^2}{n}} \\ &= \sqrt{\frac{\sum 9(x_i - \bar{x})^2}{n}} = \sqrt{\frac{9\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} \\ &= 3\sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}} = 3 \times 4 = 12.\end{aligned}$$

प्रश्न 4. यदि n प्रेक्षणों का माध्य \bar{x} तथा प्रसरण σ^2 है तो सिद्ध कीजिए कि प्रेक्षणों $ax_1, ax_2, ax_3, \dots, ax_n$ का माध्य और प्रसरण क्रमशः $a\bar{x}$ तथा $a^2\sigma^2$ ($a \neq 0$) है।

हल : (i)
$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

x_i को ax_i से बदलने पर

$$\begin{aligned} \text{नया बंटन माध्य} &= \frac{\sum ax_i}{n} \\ &= \frac{a\sum x_i}{n} = a\bar{x}. \end{aligned}$$

इति सिद्धम्।

(ii)
$$\sigma^2 = \frac{\sum (x_i - \bar{x})^2}{n}$$

x_i को ax_i और \bar{x} को $a\bar{x}$ से बदलने पर

$$\text{नया प्रसरण} = \frac{\sum (ax_i - a\bar{x})^2}{n}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{\sum a^2 (x_i - \bar{x})^2}{n} \\ &= \frac{a^2 \sum (x_i - \bar{x})^2}{n} = a^2 \sigma^2. \end{aligned}$$

प्रश्न 5.

बीस प्रेक्षणों का माध्य तथा मानक विचलन क्रमशः 10 तथा 2 हैं। जांच करने पर यह पाया गया कि प्रेक्षण 8 गलत है। निम्न में से प्रत्येक का सही मध्य तथा मानक विचलन ज्ञात कीजिए यदि

(i) गलत प्रेक्षण हटा दिया जाए।

(ii) उसे 12 से बदल दिया जाए।

हल : $\bar{x} = \frac{\Sigma x_i}{n}$ या $10 = \frac{\Sigma x_i}{20}$

$\Rightarrow \Sigma x_i = 10 \times 20 = 200$

मानक विचलन $\sigma = \frac{1}{n} \sqrt{n \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$

$\therefore n\sigma = \sqrt{n \Sigma x_i^2 - (\Sigma x_i)^2}$

या $n \Sigma x_i^2 = n^2 \sigma^2 + (\Sigma x_i)^2$

या $\Sigma x_i^2 = \frac{n^2 \sigma^2 + (\Sigma x_i)^2}{n}$

(i) (a) जब एक प्रेक्षण 8 को निकल दिया।

नए प्रेक्षणों का योग $= 200 - 8 = 192$

नया माध्य $= \frac{192}{19} = 10.11.$

(b) $\Sigma x_i^2 = \frac{(20)^2 \times 4 + (200)^2}{20}$ [$\because \Sigma = 2, \Sigma x_i = 200$]

$= 80 + 10 \times 200$

$= 2080$

नया $\Sigma x_i^2 = 2080 - 8^2$

$= 2080 - 64 = 2016.$

\therefore नया मानक विचलन $= \frac{1}{19} \sqrt{19 \times 2016 - (192)^2}$

$= \frac{1}{19} \times \sqrt{38304 - 36864}$

$= \frac{1}{19} \times \sqrt{1440} = 1.997.$

$$(ii) \quad \text{नया } \Sigma x_i = 200 - 8 + 12 \\ = 204$$

$$\therefore \quad \text{नया माध्य} = \frac{204}{20} = 10.2.$$

$$\Sigma x_i^2 = 2080$$

$$\text{नया } \Sigma x_i^2 = 2080 - 64 + 144 = 2160$$

$$\therefore \quad \text{नया (ठीक) मानक विचलन} = \frac{1}{20} \sqrt{20 \times 2160 - (204)^2} \\ = \frac{1}{20} \sqrt{43200 - 41616} \\ = \frac{\sqrt{1584}}{20} = 1.99.$$

प्रश्न 6.

एक कक्षा के पचास छात्रों द्वारा तीन विषयों गणित, भौतिक शास्त्र व रसायन शास्त्र में प्राप्तांकों का माध्य व मानक विचलन नीचे दिए गए हैं:

| विषय | गणित | भौतिक शास्त्र | रसायन शास्त्र |
|------------|------|---------------|---------------|
| माध्य | 42 | 32 | 40.9 |
| मानक विचलन | 12 | 15 | 20 |

किस विषय में सबसे अधिक विचलन है तथा किसमें सबसे कम विचलन है?

हल :
$$\text{विचरण गुणांक} = \frac{\sigma}{x} \times 100$$

$$\text{गणित विषय में विचरण गुणांक} = \frac{12}{42} \times 100 = 28.57$$

$$\text{भौतिक विषय में विचरण गुणांक} = \frac{15}{32} \times 100 = 46.875$$

$$\text{रसायन विषय में विचरण गुणांक} = \frac{20}{40.9} \times 100 = 48.9$$

अतः रसायन विषय में सबसे अधिक विचलन है तथा गणित में सबसे कम विचलन है।

प्रश्न 7.

100 प्रेक्षणों का माध्य और मानक विचलन क्रमशः 20 और 3 हैं। बाद में यह पाया गया कि तीन प्रेक्षण 21, 21 तथा 18 गलत थे। यदि गलत प्रेक्षणों को हटा दिया जाए तो माध्य व मानक विचलन ज्ञात कीजिए।

हल:

$$\bar{x} = \frac{\sum x_i}{n}$$

$$\begin{aligned}\sum x_i &= n \bar{x} \\ &= 100 \times 20 = 2000\end{aligned}$$

$$\text{नया } \sum x_i = 2000 - 21 - 21 - 18 = 1940$$

$$\text{नया (ठीक) माध्य} = \frac{1940}{97} = 20.$$

$$\sigma = \frac{1}{n} \sqrt{n \sum x_i^2 - (\sum x_i)^2}$$

$$\sum x_i^2 = \frac{n^2 \sigma^2 + (\sum x_i)^2}{n}$$

$$= \frac{(100)^2 \times 9 + (2000)^2}{100}$$

$$= 900 + 20 \times 2000$$

$$= 900 + 40000 = 40900$$

$$\begin{aligned}\sum x_i^2 \text{ का ठीक मान} &= 40900 - (21)^2 - (21)^2 - (18)^2 \\ &= 40900 - 441 - 441 - 324 = 39694\end{aligned}$$

$$(\text{ठीक}) \text{ मानक विचलन} = \frac{1}{97} \sqrt{97 \times 39694 - (1940)^2}$$

$$= \frac{1}{97} \sqrt{3850318 - 3763600}$$

$$= \frac{1}{97} \times \sqrt{86718} = 3.036.$$