Chapter-13 सीमा और अवकलज

प्रश्नावली 13.1

प्रश्न 1 से 22 तक निम्नलिखित सीमाओं के मान प्राप्त कीजिए:

प्रश्न 1. $\lim_{x \to 3} x + 3.$

हल : $\lim_{x \to 3} (x + 3) = 3 + 3 = 6.$

प्रश्न 2. $\lim_{x \to \pi} \left(x - \frac{22}{7} \right).$

हल : $\lim_{x \to \pi} \left(x - \frac{22}{7} \right) = \pi - \frac{22}{7}$

प्रश्न 3. $\lim_{r \to 1} (\pi r^2).$

हल : $\lim_{r \to 1} (\pi r^2) = \pi \cdot 1^2 = \pi.$

प्रश्न 4. $\lim_{x \to 4} \frac{4x + 3}{x - 2}.$

हल :

$$\lim_{x \to 4} \frac{4x + 3}{x - 2} = \frac{4 \times 4 + 3}{4 - 2}$$

$$= \frac{16 + 3}{2} = \frac{19}{2}$$

प्रश्न 5. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{x^{10} + x^5 + 1}{x - 1}$.

हल : $$\lim_{x \to -1} \frac{x^{10} + x^5 + 1}{x - 1} = \frac{(-1)^{10} + (-1)^5 + 1}{-1 - 1}$$

$$= \frac{+1 - 1 + 1}{-2} = -\frac{1}{2}.$$

प्रश्न 6. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{(x + 1)^5 - 1}{x}$.

हल : $$\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^5 - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(1 + 5x + 10x^2 + 10x^3 + 5x^4 + x^5) - 1}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{x(5 + 10x + 10x^2 + 5x^3 + x^4)}{x}$$

$$= \lim_{x \to 0} (5 + 10x + 10x^2 + 5x^3 + x^4)$$

$$= 5.$$

वैकल्पिक विधि : हम जानते हैं :

$$\lim_{x \to a} \frac{x^n - 1}{x - 1} = na^{n-1}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^5 - 1}{x} = \lim_{x \to 0} \frac{(x+1)^5 - 1}{(x+1) - 1}$$

$$= \lim_{x \to 0} 5(x + 1)^4$$

$$= 5.$$

प्रश्न 7. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x-10}{x^2-4}$.

हल : $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{3x^2-x-10}{x^2-4}=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(x-2)(3x+5)}{(x-2)(x+2)}$

$=\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{(3x+5)}{(x+2)}$

$=\dfrac{3\times 2+5}{2+2}=\dfrac{11}{4}$.

प्रश्न 8. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-81}{2x^2-5x-3}$.

हल : $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{x^4-81}{2x^2-5x-3}=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x-3)(x+3)(x^2+9)}{(x-3)(2x+1)}$

$=\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{(x+3)(x^2+9)}{(2x+1)}$

$=\dfrac{(3+3)(9+9)}{(6+1)}$

$=\dfrac{6\times 18}{7}=\dfrac{108}{7}$.

प्रश्न 9. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+b}{cx+1}$.

हल : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{ax+b}{cx+1}=\dfrac{0+b}{0+1}=b$.

प्रश्न 10. $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z^{\frac{1}{3}}-1}{z^{\frac{1}{6}}-1}$.

हल : $\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{z^{\frac{1}{3}}-1}{z^{\frac{1}{6}}-1}=\lim\limits_{z\to 1}\dfrac{\left(z^{\frac{1}{6}}-1\right)\left(z^{\frac{1}{6}}+1\right)}{z^{\frac{1}{6}}-1}=\dfrac{1+1}{1}=2.$

प्रश्न 11. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}$, $a+b+c\neq 0.$

हल : $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{ax^2+bx+c}{cx^2+bx+a}=\dfrac{a(1)^2+b(1)+c}{c(1)^2+b(1)+a}=\dfrac{a+b+c}{c+b+a}=1.$

प्रश्न 12. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x+2}$.

हल :

$$\lim_{x\to -2}\frac{\frac{1}{x}+\frac{1}{2}}{x+2}=\lim_{x\to -2}\frac{x+2}{2x(x+2)}$$

$$=\lim_{x\to -2}\frac{1}{2x}=\frac{1}{2(-2)}=-\frac{1}{4}.$$

प्रश्न 13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx}$.

हल : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{bx}=\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}\cdot\dfrac{a}{b}=\dfrac{a}{b}.$ $\left[\because \lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{ax}=1\right]$

प्रश्न 14. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin ax}{\sin bx}$, $a, b \neq 0$.

हल :
$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx} = \lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin ax}{ax}\right)\left(\frac{bx}{\sin bx}\right)\times\frac{a}{b}$$
$$= 1 \times 1 \times \frac{a}{b} = \frac{a}{b}.$$

प्रश्न 15. $\lim\limits_{x\to \pi}\dfrac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$.

हल :
$$\lim_{x\to \pi}\frac{\sin(\pi - x)}{\pi(\pi - x)}$$

$\pi - x = \theta$ लीजिए, जब $x \to \pi$, $\theta \to 0$

$$\therefore \quad \lim_{x\to \pi}\frac{1}{\pi}\cdot\frac{\sin(\pi - x)}{(\pi - x)} = \lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\pi\theta} = \lim_{\theta\to 0}\frac{1}{\pi}\cdot\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)$$
$$= \frac{1}{\pi}.$$

प्रश्न 16. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\pi - x}$.

हल : $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos x}{\pi - x} = \dfrac{\cos 0}{\pi - 0} = \dfrac{1}{\pi}$.

प्रश्न 17. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{\cos 2x-1}{\cos x-1}$.

हल : $$\lim_{x\to0}\frac{\cos 2x-1}{\cos x-1}=\lim_{x\to0}\frac{1-2\sin^2 x-1}{\cos x-1}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2\sin^2 x}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{2(1-\cos x)(1+\cos x)}{1-\cos x}$$

$$=\lim_{x\to0}2(1+\cos x)=2(1+\cos 0)$$

$$=2\times2=4.$$

प्रश्न 18. $\lim\limits_{x\to0}\dfrac{ax+x\cos x}{b\sin x}$.

हल : $$\lim_{x\to0}\frac{ax+x\cos x}{b\sin x}=\lim_{x\to0}\frac{x(a+\cos x)}{(\sin x).b}$$

$$=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\sin x}\right).\frac{a+\cos x}{b}$$

$$=\lim_{x\to0}\frac{a+\cos x}{b} \qquad \left[\because \lim_{x\to0}\frac{x}{\sin x}=1\right]$$

$$=\frac{a+\cos 0}{b}=\frac{a+1}{b}.$$

प्रश्न 19. $\lim\limits_{x\to0} x\sec x$.

हल : $$\lim_{x\to0} x\sec x=\lim_{x\to0}\left(\frac{x}{\cos x}\right)$$

$$=\frac{0}{\cos 0}=\frac{0}{1}=0.$$

प्रश्न 20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx}, a, b, a + b \neq 0.$

हल : $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin ax + bx}{ax + \sin bx}$

अंश और हर को x से भाग करने पर,

$$= \lim_{x \to 0} \left(\frac{\frac{\sin ax}{x} + b}{a + \frac{\sin bx}{x}} \right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{\left(\frac{\sin ax}{ax}\right) a + b}{a + \left(\frac{\sin bx}{bx}\right) b}$$

$$= \frac{1.a + b}{a + 1.b} = \frac{a + b}{a + b} = 1, a + b \neq 0.$$

प्रश्न 21. $\lim_{x \to 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x)$.

हल : $$\lim_{x \to 0} (\operatorname{cosec} x - \cot x) = \lim_{x \to 0}\left(\frac{1}{\sin x} - \frac{\cos x}{\sin x}\right)$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{\sin x} \times \frac{\sin x}{\sin x}$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{(1 - \cos x).\sin x}{(1 - \cos x)(1 + \cos x)}$$

$$= \lim_{x \to 0}\left(\frac{\sin x}{1 + \cos x}\right)$$

$$= \frac{0}{2} = 0.$$

प्रश्न 22. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$.

हल : $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\tan 2x}{x - \frac{\pi}{2}}$ में $x = \dfrac{\pi}{2} + h$ रखने पर,

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan 2\left(\frac{\pi}{2} + h\right)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan(\pi + 2h)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\tan 2h}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\sin 2h}{2h} \cdot \frac{2}{\cos 2h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{2}{\cos 2h} \qquad \left(\because \lim_{h \to 0} \frac{\sin 2h}{2h} = 1\right)$$

$$= \frac{2}{\cos 0} = \frac{2}{1} = 2.$$

प्रश्न 23. $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$ **और** $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ **ज्ञात कीजिए, जहाँ**

$$f(x) = \begin{cases} 2x+3 & x \le 0 \\ 3(x+1), & x \ge 0 \end{cases}$$

हल : (i) जब $x < 0$, $\quad f(x) = 2x + 3$

$\therefore \lim\limits_{x\to 0} f(x)$ के लिए सारणी इस प्रकार है

x	-0.01	-0.001	-0.0001
$f(x)$	2.98	2.998	2.9998

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0^-} f(x) = 3$$

जब $x > 0$, $\qquad f(x) = 3(x + 1)$

x का मान 0 के निकट और 0 से अधिक रखने पर

x	0.01	0.001	0.0001
$f(x)$	3.03	3.003	3.0003

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0^+} f(x) = 3$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{x\to 0} f(x) = 3$$

दूसरी विधि $\qquad \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \lim\limits_{h\to 0} f(a-h)$, x को $a-h$ रखने से

यहां पर जब $x < 0$, $f(x) = 2x + 3$

$$\therefore \quad \lim_{x \to a^-} (2x + 3) = \lim_{h \to 0} [2(0 - h) + 3]$$

$$= \lim_{h \to 0} (-2h + 3) = 3$$

जब $x > 0$ $f(x) = 3(1 + x)$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{h \to 0} f(a + h),$$ x को $a + h$ रखने से

$$\lim_{x \to a^+} (3 + 3x) = \lim_{h \to 0} [3 + 3(0 + h)$$

$$= \lim_{h \to 0} (3 + 3h) = 3$$

$$\because \quad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^+} f(x) = 3$$

अत: $$\lim_{x \to 0} f(x) = 3.$$

(ii) जब $x < 1$, $f(x) = 3(x + 1)$

$\lim_{x \to 1^-} f(x)$ ज्ञात करने के लिए $f(x)$ में x का 1 के निकट और 1 से कम मान रखने पर

x	0.9	0.99	0.999	0.9999
$f(x)$	5.7	5.77	5.997	5.9997

$$\therefore \quad \lim_{x \to 1^-} 3(x+1) = 6$$

अब x का मान 1 के निकट और 1 से अधिक $f(x)$ में रखने पर

x	1.01	1.001	1.0001
$f(x)$	6.03	6.003	6.0003

$$\therefore \quad \lim_{x \to 1^+} 3(x+1) = 6$$

$$\therefore \quad \lim_{x \to 1} f(x) = 6$$

वैकल्पिक विधि : $\lim_{x \to 1^-} f(x+1) = \lim_{h \to 0} 3(1 - h + 1) = \lim_{h \to 0} 3(2 - h) = 6$

$$\lim_{x \to 1^+} 3(x+1) = \lim_{h \to 0} 3(1 + h + 1) = \lim_{h \to 0} 3(2 + h) = 6$$

$$\Rightarrow \quad \lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^+} f(x) = 6$$

अत: $\lim_{x \to 1} f(x) = 6.$

प्रश्न 24. $\lim_{x\to1} f(x)$ **ज्ञात कीजिए, जहाँ** $f(x)=\begin{cases} x^2-1, & x\le1 \\ -x^2-1, & x>1 \end{cases}$

हल : जब $x<1$, $\quad f(x)=x^2-1$

फलन में x का मान 1 से कम और 1 के निकट रखने पर,

x	0.9	0.99	0.999
$f(x)$	−0.19	−0.0199	−0.0019999

$$\therefore \qquad \lim_{x\to1^-} f(x)=0 \qquad \text{...(i)}$$

जब $x>1$, $\quad f(x)=-x^2-1$

फलन में x का मान 1 से अधिक और 1 के निकट रखने पर,

x	1.1	1.01	1.0001
$f(x)$	−2.21	−2.0201	−2.002001

$$\therefore \qquad \lim_{x\to1^+} f(x)=-2 \qquad \text{...(ii)}$$

समीकरण (i) और (ii) को जोड़ने पर,

$$2b=8 \quad \text{या } b=4$$

समी (i) में $b=4$ रखने पर,

$$4+a=4 \quad \text{या } a=0$$

अत: $\qquad a=0,\ b=4.$

प्रश्न 25. $\lim_{x\to 0} f(x)$ **का मान प्राप्त कीजिए, जहाँ** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0. \end{cases}$

हल : यदि $x < 0$, $\quad |x| = -x$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{-x}{x}\right) = -1$$

और यदि $x > 0$, $\quad |x| = x$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \frac{|x|}{x} = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{x}\right) = 1$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

अतः $\quad x = 0$ पर सीमा का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 26. $\lim_{x\to 0} f(x)$ **ज्ञात कीजिए, जहाँ** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x}{|x|}, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$

हल : यदि $x < 0$, $\quad |x| = -x$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} \left(\frac{x}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0^-} \frac{-x}{x} = -1.$$

और यदि $x > 0$, $\quad |x| = x$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} \left(\frac{x}{|x|}\right) = \lim_{x\to 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

अतः $x = 0$ पर सीमा का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 27. $\lim\limits_{x\to 5} f(x)$ **ज्ञात कीजिए, जहाँ** $f(x) = |x| - 5$.

हल : $$f(x) = |x| - 5$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^-} [|x| - 5]$$

$$= \lim_{h\to 0} [|5-h| - 5]$$

$$= \lim_{h\to 0} [5-h-5] = \lim_{h\to 0} (-h) = 0$$

$$\lim_{x\to 5^+} f(x) = \lim_{x\to 5^+} [|x| - 5] = \lim_{h\to 0} [|5+h| - 5]$$

$$= \lim_{h\to 0} [5+h-5] = \lim_{h\to 0} h = 0$$

$$\lim_{x\to 5^-} f(x) = \lim_{x\to 5^+} f(x)$$

$$\lim_{x\to 5} f(x) = 0.$$

प्रश्न 28. मान लीजिए $f(x) = \begin{cases} a+bx, & x<1 \\ 4, & x=1 \\ b-ax, & x>1 \end{cases}$

और यदि $\lim\limits_{x\to 1} f(x) = f(1)$**, तो** a **और** b **के संभव मान क्या हैं?**

हल : जब $x < 1$, $f(x) = a + bx$

बाएँ पक्ष की सीमा ज्ञात करने हेतु, x का मान 1 से कम और 1 के निकट $f(x)$ में रखने पर,

x	0.99	0.999	0.9999
$f(x)$	$a+1.99b$	$a+0.999b$	$a+0.9999b$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 1^-} f(x) = a + b$$

दाएं पक्ष की सीमा ज्ञात करने के लिए, $f(x) = b - ax$, इसमें 1 से अधिक और 1 के निकट, x का मान रखने पर

x	1.01	1.0001	1.00001
$f(x)$	$b-1.01a$	$b-1.0001a$	$b-1.00001a$

$$\therefore \quad \lim_{x\to 1^+} f(x) = b - a$$

$\therefore$ यदि $x = 1$ पर सीमा का अस्तित्व है तो

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) = a + b = b + a = f(1) = 4$$

$$\therefore \quad b + a = 4 \qquad \text{...(i)}$$

$$\lim_{x\to 1^+} f(x) = b - a = f(1) = 4$$

$$\therefore \quad b - a = 4 \qquad \text{...(ii)}$$

समी (i) और (ii) से,

$$\lim_{x\to 1^-} f(x) \neq \lim_{x\to 1^+} f(x)$$

$\therefore$ अतः $x = 1$ पर सीमा का अस्तित्व नहीं है।

प्रश्न 29. मान लीजिए $a_1, a_2, \ldots, a_n$ अचर वास्तविक संख्याएँ हैं और एक फलन $f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$ से परिभाषित है। $\lim_{x \to a_1} f(x)$ क्या है? किसी $a \neq a_1, a_2, \ldots a_n$ के लिए $\lim_{x \to a} f(x)$ का परिकलन कीजिए।

हल : गुणनखंण्ड $(x - a_1)$ के लिए,

यदि $x \to a_1, \quad x - a_1 \to 0$

$$\therefore \lim_{x \to a_1} (x - a_2) = (a_1 - a_2)$$

$$f(x) = (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$$

$$\lim_{x \to a_1} f(x) = \lim_{x \to a_1} (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$$

$$= \lim_{x \to a_1} (x - a_1) \lim_{x \to a_1} (x - a_2)(x - a_3) \ldots (x - a_n)$$

$$= 0 \times (a_1 - a_2)(a_1 - a_3) \ldots (a - a_n)\ 0.$$

जब $\qquad a \neq a_1, a_2 \ldots\ldots, a_n$

जैसे ही $x \to a, x - a_1 \to a - a_1$

$a - a_1$,न तो शून्य है न ही अपरिभाषित है।

इस प्रकार दूसरे गुणनखंड के मान $a - a_2, a - a_3, \ldots, a - a_n$ होंगें।

अत: $$\lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} (x - a_1)(x - a_2) \ldots (x - a_n)$$

$$= (a - a_1)(a - a_2) \ldots (a - a_n).$$

प्रश्न 30 : यदि $f(x)=\begin{cases}|x|+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ |x|-1, & x>0\end{cases}$ तो a के किन मानों के लिए $\lim_{x\to a} f(x)$ का अस्तित्व है?

हल : दिया गया फलन :

$$f(x) = \begin{cases}|x|+1, & x<0\\ 0, & x=0\\ |x|-1, & x>0\end{cases}$$

(i) $x = 0$ पर,

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (1-x) = 1$$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{x\to 0^+} (x-1) = -1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) \neq \lim_{x\to 0^+} f(x)$$

$x = 0$ पर $\lim_{x\to 1} f(x)$ का अस्तित्व नहीं है।

(ii) जब $a < 0$

$$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^-} (1-x) = 1-a$$

$$\lim_{x\to a^+} f(x) = \lim_{x\to a^+} (1-x) = 1-a$$

$\therefore$ $$\lim_{x\to a^-} f(x) = \lim_{x\to a^+} f(x)$$

अर्थात $$\lim_{x\to a} f(x) = 1-a$$

(iii) जब $a > 0$

$$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^-} (x - 1) = a - 1$$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^+} (x - a) = a - 1$$

$\therefore$ $$\lim_{x \to a^-} f(x) = \lim_{x \to a^+} f(x)$$

अत: $$\lim_{x \to a} f(x) = a - 1$$

इस प्रकार

जब $a < 0$, $\lim_{x \to a} f(x) = 1 - a$

जब $a > 0$, $\lim_{x \to a} f(x) = a - 1.$

अत: सभी a, $a \neq 0$ के लिए $\lim_{x \to a} f(x)$ का अस्तित्व है।

प्रश्न 31. यदि फलन $f(x)$, $\lim_{x \to 1} \dfrac{f(x) - 2}{x^2 - 1} = \pi$ को संतुष्ट करता है, तो $\lim_{x \to 1} f(x)$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल : जैसे ही $x \to 1$, फलन $\dfrac{f(x) - 2}{x^2 - 1} \to \pi$ (दिया है)

जैसे ही $x \to 1, x^2 - 1 \to 0 \Rightarrow f(x) - 2 \to 0$

जिससे, जैसे ही $x \to 1$ $\dfrac{f(x) - 2}{x^2 - 1}, \dfrac{0}{0}$ के रूप में होगा

$\Rightarrow$ जैसे ही $x \to 1, f(x) - 2 \to 0 \quad \therefore f(x) \to 2$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2.$$

प्रश्न 32. किन पूर्णांकों m और n के लिए $\lim_{x \to 0} f(x)$ और, $\lim_{x \to 1} f(x)$ दोनों का अस्तित्व है, यदि

$$f(x) = \begin{cases} mx^2 + n, & x < 0 \\ nx + m, & 0 \le x \le 1 \\ nx^3 + m, & x > 1 \end{cases}$$

हल :- (i) $x = 0$ पर,

$$\lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} (mx^2 + n) = n$$

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} (nx + m) = m$$

$$\Rightarrow \quad m = n$$

(ii) $x = 1$ पर,

$$\lim_{x \to 1^-} f(x) = \lim_{x \to 1^-} (nx + m) = n + m = 2m, m \in R$$

$$\lim_{x \to 1^+} f(x) = \lim_{x \to 1^+} (nx^3 + m) = n + m = 2m, m \in R$$

$\therefore \quad m = n, n \in R$ के लिए

$$\lim_{x \to 0} f(x) = m, m \in R$$

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 2m, m \in R$$

अतः $\lim_{x \to 0} f(x)$ के अस्तित्व हेतु $m = n$ अनिवार्य रूप से होना चाहिए; m तथा n के किसी भी पूर्णांक मान के लिए $\lim_{x \to 1} f(x)$ का अस्तित्व है।

प्रश्नावली 13.2

प्रश्न 1.

$x = 10$ पर $x^2 – 2$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : $x = a$ पर $f(x)$ का अवकलज

$$= \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$\therefore x = 10$ पर $x^2 - 2$ का अवकलज

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\left[(10+h)^2 - 2\right] - (10^2 - 2)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{100 + 20h + h^2 - 2 - 100 + 2}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{20h + h^2}{h} = \lim_{h \to 0} (20 + h) = 20.$$

प्रश्न 2.

$x = 100$ पर $99x$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल :

$$f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$f'(100) = \lim_{h \to 0} \frac{99(100+h) - 99 \times 100}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{99 \times h}{h} = 99.$$

प्रश्न 3.

$x = 1$ पर x का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल :

$$f'(a) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{(1+h) - 1}{h} = 1.$$

प्रश्न 4.

प्रथम सिद्धांत से निम्नलिखित फलनों का अवकलज ज्ञात कीजिए:

(i) $x^3 - 27$.

हल : दिया है. $f(x) = x^3 - 27$

$$f(x+h) = (x+h)^3 - 27$$
$$= x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 27$$
$$f(x+h) - f(x) = (x^3 + 3x^2h + 3xh^2 + h^3 - 27) - (x^3 - 27)$$
$$= 3x^2h + 3xh^2 + h^3$$
$$= h(3x^2 + 3xh + h^2)$$

$\therefore$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 1} \frac{h(3x^2 + 3xh + h^2)}{h} = 3x^2.$$

(ii) $(x - 1)(x - 2)$.

हल : $f(x) = (x-1)(x-2) = x^2 - 3x + 2$

$$f(x+h) = (x+h)^2 - 3(x+h) + 2$$
$$= (x^2 + 2xh + h^2) - (3x + 3h) + 2$$

$\therefore$
$$f(x+h) - f(x) = (x^2 + 2xh + h^2) - (3x + 3h) + 2 - (x^2 - 3x + 2)$$
$$= 2xh + h^2 - 3h$$
$$= h(2x + h - 3)$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{h(2x + h - 3)}{h} = 2x - 3.$$

(iii) $\dfrac{1}{x^2}$.

$$f(x) = \frac{1}{x^2}, f(x+h) = \frac{1}{(x+h)^2}$$

$$\therefore \qquad f(x+h) - f(x) = \frac{1}{(x+h)^2} - \frac{1}{x^2}$$

$$= \frac{x^2 - (x+h)^2}{x^2(x+h)^2}$$

$$= \frac{x^2 - [x^2 + 2xh + h^2]}{x^2(x+h)^2}$$

$$= \frac{-h(2x+h)}{x^2(x+h)^2}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{-h(2x+h)}{x^2(x+h)^2 h}$$

$$= \frac{-2x}{x^2 x^2} = -\frac{2}{x^3}$$

(iv) $\dfrac{x+1}{x-1}$.

हल :
$$f(x) = \frac{x+1}{x-1} \quad \text{और} \quad f(x+h) = \frac{x+h+1}{x+h-1}$$

$$f(x+h) - f(x) = \frac{x+1+h}{x-1+h} - \frac{x+1}{x-1}$$

$$= \frac{(x+1)(x-1) + h(x-1) - (x+1)(x-1) - h(x+1)}{(x-1)(x-1+h)}$$

$$= \frac{h(x-1-x-1)}{(x-1)(x-1+h)}$$

$$= \frac{-2h}{(x-1)(x-1+h)}$$

$\therefore$
$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2h}{h(x-1)(x-1+h)} = \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

प्रश्न 5. फलन $f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + ... + \frac{x^2}{2} + x + 1$ के लिए सिद्ध कीजिए कि $f'(1) = 100 f'(0)$.

हल : $\because \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

$$\therefore \qquad f(x) = \frac{x^{100}}{100} + \frac{x^{99}}{99} + ... + \frac{x^2}{2} + x + 1$$

$$\therefore \qquad f'(x) = \frac{100x^{99}}{100} + \frac{99x^{98}}{99} + ... + \frac{2x}{2} + 1$$

$$= x^{99} + x^{98} + ... + x + 1$$

$x = 1$ पर, $\qquad f'(1) = 1 + 1 + ... + x + 1$

$x = 0$ पर, $\qquad f'(0) = 1$

बायाँ पक्ष $\qquad f'(1) = 100,$

दायाँ पक्ष $= 100 f'(0) = 100 \times 1 = 100$

अत : $\qquad$ बायाँ पक्ष = दायाँ पक्ष।

प्रश्न 6. किसी अचर वास्तविक संख्या a के लिए $x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + ... + a^{n-1}x + a^n$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : हम जानते हैं कि $\frac{d}{dx}[f(x)] = f'(x)$

और $\qquad \frac{d}{dx} x^n = nx^{n-1}$

माना $\qquad f(x) = x^n + ax^{n-1} + a^2x^{n-2} + ... + a^{n-1}x + a^n$

इसका अवकलन करने पर

$$f'(x) = nx^{n-1} + a.(n-1)x^{n-2} + a^2.(n-2)x^{n-3} + ... + a^{n-1}.1$$

$$= nx^{n-1} + (n-1)ax^{n-2} + (n-2)a^2x^{n-3} + ... + a^{n-1}.$$

प्रश्न 7.

किन्हीं अचरों a और b के लिए

(i) $(x - a)(x - b)$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : माना
$$f(x) = (x - a)\ (x - b)$$
$$= x^2 - (a + b)\ x + ab$$

इसका अवकलन करने पर
$$f'(x) = 2x^{2-1} - (a + b)\ 1 + 0$$
$$= 2x - (a + b).$$

(ii) $(ax^2 + b)^2$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : माना
$$f(x) = (ax^2 + b)^2 = a^2x^4 + 2abx^2 + b^2$$

$\therefore$
$$f'(x) = a^2 \,.\, 4x^3 + 2ab \,.\, 2x + 0$$
$$= 4a^2x^3 + 4abx$$
$$= 4ax(ax^2 + b)$$

(iii) $\dfrac{x-a}{x-b}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल :
$$f(x) = \frac{x-a}{x-b} = \frac{u}{v} \quad \text{(मान लिया)}$$
$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$\therefore$
$$f'(x) = \frac{\left|\dfrac{d}{dx}(x-a)\right|(x-b) - (x-a)\dfrac{d}{dx}(x-b)}{(x-b)^2}$$
$$= \frac{1.(x-b) - (x-a)\times 1}{(x-b)^2}$$
$$= \frac{a-b}{(x-b)^2}.$$

प्रश्न 8. किसी अचर a के लिए $\dfrac{x^n - a^n}{x - a}$ का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : माना
$$f(x) = \frac{x^n - a^n}{x - a} = \frac{u}{v}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{\left|\frac{d}{dx}(x^n - a^n)\right|(x-a) - (x^n - a^n)\frac{d}{dx}(x-a)}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{nx^{n-1}(x-a) - (x^n - a^n).1}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{nx^n - nax^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2}$$

$$= \frac{nx^n - nax^{n-1} - x^n + a^n}{(x-a)^2}.$$

प्रश्न 9.

निम्नलिखित के अवकलज ज्ञात कीजिए:

(i) $2x-\frac{3}{4}$.

हल : (i) मान लीजिए $f(x) = 2x - \frac{3}{4}$

$$\therefore \quad f'(x) = 2\frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}\left(-\frac{3}{4}\right)$$

$$= 2.1 + 0 = 2.$$

(ii) $(5x^3 + 3x - 1)(x - 1)$.

हल : माना $f(x) = (5x^3 + 3x - 1)(x - 1) = uv$

$$\frac{d}{dx}(uv) = u'v + uv'$$

$$f'(x) = \left[\frac{d}{dx}(5x^3 + 3x - 1)\right](x - 1) + (5x^3 + 3x - 1)\frac{d}{dx}(x - 1)$$

$$= (15x^2 + 3)(x - 1) + (5x^3 + 3x - 1) . 1$$

$$= 15x^3 + 3x - 15x^2 - 3 + 5x^3 + 3x - 1$$

$$= 20x^3 - 15x^2 + 6x - 4.$$

(iii) $x^{-3}(5 + 3x)$.

हल : माना

$$f(x) = x^{-3}(5 + 3x)$$
$$= 5x^{-3} + 3x.\, x^{-3} = 5x^{-3} + 3x^{-2}$$

अवकलन करने पर

$$f'(x) = 5\,(-3)\,x^{-3-1} + 3\,(-2)\,.\,x^{-2-1}$$
$$= -15x^{-4} - 6x^{-3}$$
$$= -\frac{15}{x^4} - \frac{6}{x^3} - \frac{3}{x^4}(5 + 2x).$$

(iv) $x^5(3 - 6x^{-9})$.

हल : माना

$$f(x) = x^5(3 - 6x^{-9})$$
$$= 3x^5 - 6\,.\,x^{5-9} = 3x^5 - 6x^{-4}$$

$\therefore$

$$f'(x) = 3\,.\,5x^{5-1} - 6(-4)\,x^{-4-1}$$
$$= 15x^4 + 24x^{-5} = 15x^4 + \frac{24}{x^5}.$$

(v) $x^{-4}(3 - 4x^{-5})$.

हल : माना

$$f(x) = x^{-4}(3 - 4x^{-5})$$
$$= 3\,.\,x^{-4} - 4.\,x^{-4}\,x^{-5} = 3x^{-4} - 4x^{-9}$$

अवकलन करने पर

$$f'(x) = 3.(-4)\,x^{-4-1} - 4 \times (-9)x^{-9-1}$$
$$= -12x^{-5} + 36x^{-10}$$
$$= -\frac{12}{x^5} + \frac{36}{x^{10}}.$$

(vi) $f(x) = \dfrac{2}{x+1} - \dfrac{x^2}{3x-1}.$

हल : माना
$$f(x) = \frac{2}{x+1} - \frac{x^2}{3x-1}$$
$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$
$$f'(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{2}{x+1}\right) - \frac{d}{dx}\left(\frac{x^2}{3x-1}\right)$$
$$= \frac{\left|\frac{d}{dx}(2)\right|(x+1) - 2\frac{d}{dx}(x+1)}{(x+1)^2} - \frac{\left|\frac{d}{dx}(x^2)\right|(3x-1) - x^2\frac{d}{dx}(3x-1)}{(3x-1)^2}$$
$$= \frac{0-2.1}{(x+1)^2} - \frac{2x(3x-1) - x^2.3}{(3x-1)^2}$$
$$= \frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{6x^2 - 2x - 3x^2}{(3x-1)^2}$$
$$= \frac{-2}{(x+1)^2} - \frac{3x^2 - 2x}{(3x-1)^2}.$$

प्रश्न 10.

प्रथम सिद्धांत से cos x का अवकलज ज्ञात कीजिए।

हल : माना $$f(x) = \cos x$$

$$\therefore \quad f(x+h) = \cos(x+h)$$

$$f(x+h) - f(x) = \cos(x+h) - \cos x$$

$$= -2\sin\frac{x+h+x}{2}\sin\frac{x+h-x}{2}$$

$$= -2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\left[-\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\right]\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right) = -\sin x \qquad \left[\because \lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1\right]$$

अत: $$\frac{d}{dx}\cos x = -\sin x.$$

प्रश्न 11.

निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए:

(i) $\sin x \cos x$.

हल : माना $$f(x) = \sin x \cos x$$

$$\because \quad (uv)' = u'v + uv'$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}(\sin x \cos x) = \left(\frac{d}{dx}\sin x\right)\cos x + \sin x\,\frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= \cos x \,.\, \cos x + \sin x(-\sin x)$$

$$= \cos^2 x - \sin^2 x = \cos 2x.$$

(ii) sec x.

हल : माना $f(x) = \sec x$

$\therefore$ $f(x+h) = \sec(x+h)$

$$f(x+h) - f(x) = \sec(x+h) - \sec x$$

$$= \frac{1}{\cos(x+h)} - \frac{1}{\cos x}$$

$$= \frac{\cos x - \cos(x+h)}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{2\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\left(\frac{h}{2}\right)}{h\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{\sin\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\cos(x+h)\cos x}\cdot\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)$$

$$= \frac{\sin x}{\cos x . \cos x} \qquad \left[\because \lim_{h \to 0} \left(\frac{\sin \frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} \right) = 1\right]$$

$$= \frac{1}{\cos x} . \frac{\sin x}{\cos x} = \sec x \tan x.$$

(iii) 5 sec x + 4 cos x.

हल : माना $\qquad f(x) = 5 \sec x + 4 \cos x$

$\because \qquad \frac{d}{dx}(\sec x) = \sec x \tan x \qquad$ (भाग (ii) देखिए।)

$$\frac{d}{dx} \cos x = -\sin x$$

$$\therefore \qquad f'(x) = 5 \frac{d}{dx}(\sec x) + 4 \frac{d}{dx}(\cos x)$$

$$= 5 \sec x \tan x + 4(-\sin x)$$

$$= 5 \sec x \tan x - 4 \sin x.$$

(iv) cosec x.

हल : माना $\quad f(x) = \text{cosec } x$

और $\quad f(x+h) = \text{cosec } (x+h)$

$$f(x+h) - f(x) = \text{cosec } (x+h) - \text{cosec } x$$

$$= \frac{1}{\sin(x+h)} - \frac{1}{\sin x} = \frac{\sin x - \sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$= \frac{-2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{-2\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-\cos\left(x+\frac{h}{2}\right)}{\sin(x+h)\sin x}\cdot\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)$$

$$= \frac{-\cos x}{\sin x.\sin x}.1$$

$$= -\frac{1}{\sin x}.\frac{\cos x}{\sin x} = -\text{cosec } x \cot x.$$

(v) 3 cot x + 5 cosec x.

हल : माना $f(x) = \cot x$

$\therefore$ $f(x+h) = \cot(x+h)$

$$f(x+h) - f(x) = \cot(x+h) - \cot x$$

$$= \frac{\cos(x+h)}{\sin(x+h)} - \frac{\cos x}{\sin x}$$

$$= \frac{\cos(x+h)\sin x - \cos x \sin(x+h)}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$= \frac{-[\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x]}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$= -\frac{\sin(x+h-x)}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$= -\frac{\sin h}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h} \cdot \left[-\frac{\sin h}{\sin(x+h)\sin x} \right]$$

$$= \lim_{h \to 0} -\left(\frac{\sin h}{h}\right) \frac{1}{\sin(x+h)\sin x}$$

$$= -1. \frac{1}{\sin x \sin x} = -\operatorname{cosec}^2 x$$

अब $$f'(x) = 3\frac{d}{dx} \cot x + 5 \frac{d}{dx} \operatorname{cosec} x$$

$$= 3(-\operatorname{cosec}^2 x) + 5(-\operatorname{cosec} x \cot x)$$

$$= -3\operatorname{cosec}^2 x - 5 \operatorname{cosec} x \cot x.$$

(vi) $5 \sin x - 6 \cos x + 7$.

हल : माना $$f(x) = 5 \sin x - 6 \cos x + 7$$

$\therefore$ $$f'(x) = 5\frac{d}{dx} \sin x - 6\frac{d}{dx} \cos x + \frac{d}{dx}(7)$$

$$= 5 \cos x - 6(-\sin x) + 0$$

$$= 5 \cos x + 6 \sin x$$

(vii) 2 tan x – 7 sec x.

हल : माना $f(x) = 2\tan x - 7\sec x$

$$\frac{d}{dx}\sec x = \sec x \tan x \qquad \text{(भाग (ii) देखिए)।}$$

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \lim_{h \to 0} \frac{\tan(x+h) - \tan x}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)}{\cos(x+h)} - \frac{\sin x}{\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\left[\frac{\sin(x+h)\cos x - \cos(x+h)\sin x}{\cos(x+h)\cos x}\right]$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{1}{h}\frac{\sin(x+h-x)}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= \lim_{h \to 0}\left(\frac{\sin h}{h}\right).\frac{1}{\cos(x+h)\cos x}$$

$$= 1.\ \frac{1}{\cos x.\cos x} = \sec^2 x$$

$$\therefore \quad f'(x) = 2\frac{d}{dx}(\tan x) - 7\frac{d}{dx}(\sec x)$$

$$= 2.\ \sec^2 x - 7\ .\ \sec x \tan x$$

$$= 2\sec^2 x - 7\sec x.\ \tan x.$$

अध्याय 13 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1.

प्रथम सिद्धांत से निम्नलिखित फलनों का अवकलज ज्ञात कीजिए:

(i) $-x$.

हल : मान लीजिए $f(x) = -x$

$\therefore \quad f(x+h) = -(x+h) = -x-h$

$$\frac{d}{dx}(-x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{-x-h+x}{h} = -1.$$

(ii) $(-x)^{-1}$.

हल : मान लीजिए $f(x) = (-x)^{-1} = -\frac{1}{x}$

$$\therefore \quad f(x+h) = -\frac{1}{x+h}$$

$$\therefore \quad f(x+h) - f(x) = -\frac{1}{x+h} + \frac{1}{x} = \frac{-x+x+h}{(x+h)x}$$

$$= \frac{h}{x(x+h)}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \lim_{h\to 0}\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot\frac{h}{x(x+h)} = \frac{1}{x^2}.$$

(iii) $\sin(x+1)$.

हल : माना $f(x) = \sin(x+1)$

$\therefore \quad f(x+h) = \sin(x+h+1)$

या $\quad f(x+h) - f(x) = \sin(x+h+1) - \sin(x+1)$

$$= 2\cos\left(x+1+\frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}$$

$\therefore \qquad f'(x) = \dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$

$$= \lim_{h \to 0} . \frac{1}{h} 2 \cos\left(x + 1 + \frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2}$$

$$= \lim_{h \to 0} \cos\,(x + 1 + h) \left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)$$

$$= \cos\,(x + 1). \qquad \left(\because \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1\right)$$

(iv) $\cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$.

हल : माना $\qquad f(x) = \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$

$$f(x + h) = \cos\left(x + h - \frac{\pi}{8}\right)$$

$\therefore \qquad f(x + h) - f(x) = \cos\left(x + h - \frac{\pi}{8}\right) - \cos\left(x - \frac{\pi}{8}\right)$

$$= -2 \sin . \left(x - \frac{\pi}{8} + \frac{h}{2}\right) \sin\frac{h}{2}$$

$$f'(x) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{-2\sin\left(x - \frac{\pi}{8} + \frac{h}{2}\right)\sin\frac{h}{2}}{h}$$

$$= \lim_{h \to 0} -\sin\left(x - \frac{\pi}{8} + \frac{h}{2}\right)\left(\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\right)$$

$$= -\sin\left(x - \frac{\pi}{8}\right). \qquad \left(\because \lim_{h \to 0} \frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}} = 1\right)$$

निम्नलिखित फलनों के अवकलज ज्ञात कीजिए (यह समझा जाए कि a, b, c, p, q, r और s निश्चित शून्येत्तर अचर हैं और m तथा n पूर्णांक हैं।)

प्रश्न 2.

(x + a)

हल :

$$\frac{d}{dx}(x + a) = \frac{d}{dx}(x) + \frac{d}{dx}(a) = 1 + 0 = 1.$$

प्रश्न 3.

(px + q) ([latex s=2]\frac { r }{ x }[/latex] + s)

हल : माना $f(x) = (px + q)\left(\frac{r}{x} + s\right)$

$$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\therefore \quad f'(x) = \left(\frac{d}{dx}(px + q)\right).\left(\frac{r}{x} + s\right) + (px + q)\frac{d}{dx}\left(\frac{r}{x} + s\right)$$

$$= p.\left(\frac{r}{x} + s\right) + (px + q).\left(-\frac{r}{x^2}\right)$$

$$= \frac{pr}{x} + ps - \frac{pr}{x} - \frac{qr}{x^2} = ps - \frac{qr}{x^2}.$$

प्रश्न 4.

(ax + b) (cx + d)²

हल : माना, $f(x) = (ax + b)(cx + d)^2$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{d}{dx}[(ax + b)(cx + d)^2]$$

$$= [\frac{d}{dx}(ax + b)](cx + d)^2 + (ax + b)\frac{d}{dx}(cx + d)^2$$

$$= a.(cx + d)^2 + (ax + b).2c(cx + d)$$

$$= 2c(ax + b)(cx + d) + a(cx + d)^2.$$

प्रश्न 5. $\dfrac{ax+b}{cx+d}$.

हल : माना $$f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(ax+b)\right](cx+d) - (ax+b)\frac{d}{dx}(cx+d)}{(cx+d)^2}$$

$$= \frac{a(cx+d) - (ax+b).c}{(cx+d)^2}$$

$$= \frac{acx + ad - acx - bc}{(cx+d)^2}$$

$$= \frac{ad - bc}{(cx+d)^2}.$$

प्रश्न 6. $\dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}}$

हल : माना $f(x) = \dfrac{1+\dfrac{1}{x}}{1-\dfrac{1}{x}} = \dfrac{\dfrac{x+1}{x}}{\dfrac{x-1}{x}} = \dfrac{x+1}{x-1}$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(x+1)\right](x-1)-(x+1)\frac{d}{dx}(x-1)}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{1.(x-1)-(x+1).1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{x-1-x-1}{(x-1)^2}$$

$$= \frac{-2}{(x-1)^2}.$$

प्रश्न 7. $\dfrac{1}{ax^2+bx+c}$.

हल : माना $f(x) = \dfrac{1}{ax^2+bx+c}$

$$f'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}1\right](ax^2+bx+c)-1\frac{d}{dx}(ax^2+bx+c)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$= \frac{0.(ax^2+bx+c)-(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^2}$$

$$= \frac{-(2ax+b)}{(ax^2+bx+c)^2}.$$

प्रश्न 8. $\dfrac{ax+b}{px^2+qx+r}$.

हल : $$\frac{d}{dx}\left(\frac{ax+b}{px^2+qx+r}\right) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(ax+b)\right](px^2+qx+r)-(ax+b)\frac{d}{dx}(px^2+qx+r)}{(px^2+qx+r)^2}$$

$$= \frac{a.(px^2+qx+r)-(ax+b).(2px+q)}{(px^2+qx+r)^2}$$

$$= \frac{(apx^2+aqx+ar)-\left[2apx^2+(aq+2bp)x+bq\right]}{(px^2+qx+r)^2}$$

$$= \frac{-apx^2+ar-2bpx-bq}{(px^2+qx+r)^2}$$

$$= \frac{-apx^2-2bpx+ar-bq}{\left(px^2+qx+r\right)^2}.$$

प्रश्न 9. $\dfrac{px^2+qx+r}{ax+b}$.

हल : $$\frac{d}{dx}\left(\frac{px^2+qx+r}{ax+b}\right) = \frac{\left[\frac{d}{dx}\left(px^2+qx+r\right)\right](ax+b)-\left(px^2+qx+r\right)\frac{d}{dx}(ax+b)}{(ax+b)^2}$$

$$= \frac{(2px+q)(ax+b)-\left(px^2+qx+r\right).a}{(ax+b)^2}$$

$$= \frac{2apx^2+2bpx+aqx+bq-apx^2-aqx-ar}{(ax+b)^2}$$

$$= \frac{apx^2+2bpx+bq-ar}{(ax+b)^2}$$

प्रश्न 10. $\frac{a}{x^4}-\frac{b}{x^2}+\cos x.$

हल : माना
$$f(x)=\frac{a}{x^4}-\frac{b}{x^2}+\cos x$$
$$=ax^{-4}-bx^{-2}+\cos x$$
$$\therefore \quad f'(x)=\frac{d}{dx}(ax^{-4})-\frac{d}{dx}(bx^{-2})+\frac{d}{dx}\cos x$$
$$=-4ax^{-5}-b(-2)x^{-3}-\sin x$$
$$=-\frac{4a}{x^5}+\frac{2b}{x^3}-\sin x.$$

प्रश्न 11.

$4\sqrt{x}-2.$

हल : $$\frac{d}{dx}4\sqrt{x}-2=\frac{d}{dx}\left(4x^{\frac{1}{2}}-2\right)$$
$$=4\times\frac{1}{2}x^{\frac{1}{2}-1}-0=\frac{2}{\sqrt{x}}.$$

प्रश्न 12.

$(ax+b)^n$

हल : माना $$f(x)=(ax+b)^n$$

x के आपेक्ष अवकलन करने पर
$$f'(x)=n(ax+b)^{n-1}\frac{d}{dx}(ax+b)$$
$$=n(ax+b)^{n-1}.a$$
$$=na(ax+b)^{n-1}.$$

प्रश्न 13.

$(ax + b)^n (cx + d)^m$

हल : माना, $f(x) = (ax + b)^n (cx + d)^m$

$$\therefore \quad f'(x) = \left[\frac{d}{dx}(ax + b)^n\right](cx + d)^m + (ax + b)^n \frac{d}{dx}(cx + d)^m$$

$$= na(ax + b)^{n-1}(cx + d)^m + (ax + b)^n . mc(cx + d)^{m-1}$$

$$= (ax + b)^{n-1}(cx + d)^{m-1}[na(cx + d) + mc(ax + b)].$$

प्रश्न 14.

$\sin(x + a)$.

हल : माना $f(x) = \sin(x + a)$

$x + a$ को u रखने पर

$$f(x) = \sin u$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$f'(x) = \frac{d}{dx}(\sin u) = \frac{d}{du}(\sin u)\frac{du}{dx}$$

$$= \cos u . \frac{d}{dx}(x + a) = \cos(x + a) 1$$

$$\therefore \quad \frac{d}{dx}\sin(x + a) = \cos(x + a).$$

प्रश्न 15.
cosec x cot x.

हल : माना $f(x) = \operatorname{cosec} x \cot x$

$\because$ $(uv)' = u'v + uv'$

$\therefore$
$$f'(x) = \left(\frac{d}{dx}\operatorname{cosec} x\right)\cot x + \operatorname{cosec} x \frac{d}{dx}(\cot x)$$
$$= (-\operatorname{cosec} x \cot x)\cot x + \operatorname{cosec} x(-\operatorname{cosec}^2 x)$$
$$= -\operatorname{cosec}^3 x - \operatorname{cosec} x \cot^2 x.$$

प्रश्न 16. $\dfrac{\cos x}{1+\sin x}$.

हल : माना
$$f(x) = \frac{\cos x}{1+\sin x}$$

$$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$f'(x) = \frac{\left(\frac{d}{dx}\cos x\right) \times (1+\sin x) - \cos x \times \frac{d}{dx}(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x(1+\sin x) - \cos x \times \cos x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - \sin^2 x - \cos^2 x}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - (\sin^2 x + \cos^2 x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-\sin x - 1}{(1+\sin x)^2}$$

$$= \frac{-(1+\sin x)}{(1+\sin x)^2}$$

$$= -\frac{1}{1+\sin x}.$$

प्रश्न 17. $\dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$.

हल : माना, $f(x) = \dfrac{\sin x + \cos x}{\sin x - \cos x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(\sin x + \cos x)\right](\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)\frac{d}{dx}(\sin x - \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{(\cos x - \sin x)(\sin x - \cos x) - (\sin x + \cos x)(\cos x + \sin x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(\cos x - \sin x)^2 - (\sin x + \cos x)^2}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-(\cos^2 x + \sin^2 x - 2\cos x \sin x) - (\cos^2 x + \sin^2 x + 2\sin x \cos x)}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= -\frac{1 - 2\sin x \cos x + 1 + 2\cos x \sin x}{(\sin x - \cos x)^2}$$

$$= \frac{-2}{(\sin x - \cos x)^2}.$$

प्रश्न 18. $\dfrac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$.

हल : माना $$f(x) = \frac{\sec x - 1}{\sec x + 1}$$

$$\therefore \quad = \frac{\left[\frac{d}{dx}(\sec x - 1)\right](\sec x + 1) - (\sec x - 1)\frac{d}{dx}(\sec x + 1)}{(\sec x + 1)^2}$$

$$= \frac{\sec x \tan x(\sec x + 1) - (\sec x - 1)(\sec x \tan x)}{(\sec x + 1)^2}$$

$$= \frac{\sec^2 x \tan x + \sec x \tan x - \sec^2 x \tan x + \sec x \tan x}{(\sec x + 1)^2}$$

$$= \frac{2 \sec x \tan x}{(\sec x + 1)^2}.$$

प्रश्न 19. $\sin^n x$.

हल : माना $$f(x) = \sin^n x$$

$\sin x$ को u रखने पर

$$f(x) = u^n$$

x के सापेक्ष अवकलन करने पर

$$f'(x) = \frac{d}{dx} u^n = \frac{d}{du} u^n \times \frac{du}{dx}$$

$$= nu^{n-1} \frac{du}{dx}$$

$$= n \sin^{n-1} x \frac{d}{dx} \sin x = n \sin^{n-1} x . \cos x$$

$$= n \cos x \sin^{n-1} x.$$

प्रश्न 20. $\dfrac{a+b\sin x}{c+d\cos x}$.

हल: माना $f(x) = \dfrac{a+b\sin x}{c+d\cos x}$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(a+b\sin x)\right](c+d\cos x) - (a+b\sin x)\frac{d}{dx}(c+d\cos x)}{(c+d\cos x)^2}$$

$$= \frac{b\cos x(c+d\cos x) - (a+b\sin x)(-d\sin x)}{(c+d\cos x)^2}$$

$$= \frac{bc\cos x + bd\cos^2 x + ad\sin x + bd\sin^2 x}{(c+d\cos x)^2}$$

$$= \frac{bc\cos x + ad\sin x + bd(\sin^2 x + \cos^2 x)}{(c+d\cos x)^2}$$

$$= \frac{bc\cos x + ad\sin x + bd}{(c+d\cos x)^2}.$$

प्रश्न 21. $\dfrac{\sin(x+a)}{\cos x}$.

हल : माना $$f(x) = \frac{\sin(x+a)}{\cos x}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left[\frac{\sin(x+a)}{\cos x}\right] = \frac{\left[\frac{d}{dx}\sin(x+a)\right]\cos x - \sin(x+a)\frac{d}{dx}(\cos x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos(x+a)\cos x - \sin(x+a)(-\sin x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos(x+a)\cos x + \sin(x+a)\sin x}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos(x+a-x)}{\cos^2 x}$$

$$= \frac{\cos a}{\cos^2 x}.$$

प्रश्न 22. $x^4(5\sin x - 3\cos x)$.

हल : $\because$ $$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\therefore \frac{d}{dx}[x^4(5\sin x - 3\cos x) = \left(\frac{d}{dx}x^4\right)(5\sin x - 3\cos x) + x^4\frac{d}{dx}(5\sin x - 3\cos x)$$

$$= 4x^3(5\sin x - 3\cos x) + x^4[5\cos x + 3\sin x)$$

$$= x^3(20\sin x - 12\cos x + 5x\cos x + 3x\sin x).$$

प्रश्न 23. $(x^2 + 1) \cos x$.

हल : $\frac{d}{dx}[(x^2+1)\cos x] = \left[\frac{d}{dx}(x^2+1)\right]\cos x + (x^2+1)\frac{d}{dx}\cos x$

$$= 2x \cos x + (x^2+1)(-\sin x)$$

$$= 2x \cos x - (x^2+1) \sin x$$

$$= -x^2 \sin x - \sin x + 2x \cos x.$$

प्रश्न 24. $(ax^2 + \sin x)(p + q \cos x)$.

हल : $(uv)' = u'v + uv'$

$\therefore \frac{d}{dx}[ax^2 + \sin x)(p + q \cos x)]$

$$= \left[\frac{d}{dx}(ax^2 + \sin x)\right](p + q \cos x) + (ax^2 + \sin x)\frac{d}{dx}(p + q \cos x)$$

$$= (2ax + \cos x)(p + q \cos x) + (ax^2 + \sin x)(-q \sin x)$$

$$= -q \sin x (ax^2 + \sin x) + (p + q \cos x)(2ax + \cos x).$$

प्रश्न 25. $(x + \cos x)(x - \tan x)$

हल : $(uv)' = u'v + uv'$

$\therefore \frac{d}{dx}(x + \cos x)(x - \tan x) = \left[\frac{d}{dx}(x + \cos x)\right](x - \tan x) + (x + \cos x)\frac{d}{dx}(x - \tan x)$

$$= (1 - \sin x)(x - \tan x) + (x + \cos x)(1 - \sec^2 x)$$

$$= (1 - \sin x)(x - \tan x) - (x + \cos x)\tan^2 x.$$

प्रश्न 26. $\dfrac{4x + 5\sin x}{3x + 7\cos x}$.

हल : $$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{4x+5\sin x}{3x+7\cos x}\right) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(4x+5\sin x)\right](3x+7\cos x) - (4x+5\sin x)\frac{d}{dx}(3x+7\cos x)}{(3x+7\cos x)^2}$$

$$= \frac{(4+5\cos x)(3x+7\cos x) - (4x+5\sin x)(3-7\sin x)}{(3x+7\cos x)^2}$$

$$= \frac{(12x+28\cos x+15x\cos x+35\cos^2 x) - (12x-28x\sin x+15\sin x-35\sin^2 x)}{(3x+7\cos x)^2}$$

$$= \frac{28(\cos x + x\sin x) + 15(x\cos x - \sin x) + 35(\cos^2 x + \sin^2 x)}{(3x+7\cos x)^2}$$

$$= \frac{35 + 15x\cos x + 28\cos x + 28x\sin x - 15\sin x}{(3x+7\cos x)^2}.$$

प्रश्न 27. $\dfrac{x^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin x}$.

हल : माना $f(x) = \dfrac{x^2 \cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{\sin x} = \left(\dfrac{x^2}{\sin x}\right)\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\dfrac{x^2}{\sin x}\right)$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\therefore \qquad f'(x) = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{\left(\dfrac{d}{dx}x^2\right)\sin x - x^2 \dfrac{d}{dx}\sin x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{2x\sin x - x^2 \cos x}{\sin^2 x}$$

$$= \frac{x(2\sin x - x\cos x)}{\sqrt{2}\sin^2 x} \text{ या } \frac{x\cos\dfrac{\pi}{4}(2\sin x - x\cos x)}{\sin^2 x}.$$

प्रश्न 28. $\dfrac{x}{1+\tan x}$.

हल :

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{u'v - uv'}{v^2}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x}{1+\tan x}\right) = \frac{\left(\dfrac{d}{dx}(x)\right)(1+\tan x) - x\dfrac{d}{dx}(1+\tan x)}{(1+\tan x)^2}$$

$$= \frac{(1+\tan x) - x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2} = \frac{1+\tan x - x\sec^2 x}{(1+\tan x)^2}.$$

प्रश्न 29. $(x + \sec x)(x - \tan x)$.

हल : $$(uv)' = u'v + uv'$$

$$\therefore \frac{d}{dx}(x + \sec x)(x - \tan x) = \left[\frac{d}{dx}(x + \sec x)\right](x - \tan x) + (x + \sec x)\frac{d}{dx}(x - \tan x)$$

$$= (1 + \sec x \tan x)(x - \tan x) + (x + \sec x)(1 - \sec^2 x).$$

प्रश्न 30. $\dfrac{x}{\sin^n x}$.

हल : माना $$f(x) = \frac{x}{\sin^n x}$$

$$\therefore \quad f'(x) = \frac{\left[\frac{d}{dx}(x)\right]\sin^n x - x\frac{d}{dx}(\sin^n x)}{(\sin^n x)^2}$$

$$= \frac{\sin^n x - x.n\cos x \sin^{n-1} x}{\sin^{2n} x}$$

$$= \frac{\sin^{n-1} x(\sin x - nx\cos x)}{\sin^{2n} x}$$

$$= \frac{\sin x - nx\cos x}{\sin^{n-1} x}.$$