Chapter-5 सम्मिश्र संख्याएँ और द्विघातीय समीकरण

प्रश्नावली 5.1

प्रश्न 1 से 10 तक की सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक को a + ib के रूप में व्यक्त कीजिए।

प्रश्न 1.

(5i) ([latex]\frac { -3 }{ 5 }[/latex] i)

हल:

$$(5i)\left(-\frac{3}{5}i\right) = -5 \times \frac{3}{5} \times i \times i$$
$$= -3i^2 = 3.$$

प्रश्न 2.

$i^9 + i^{19}$

हल:

$$i^9 + i^{19} = i^8 . i + i^{18} . i$$
$$= [i^2]^4 . i + [i^2]^9 \; i$$
$$= (-1)^4 \, i + (-1)^9 \, i = i - i = 0.$$

प्रश्न 3.

i^{-39}

हल:

$$i^{-39} = \frac{1}{i^{39}} = \frac{1}{i^{38}.i} = \frac{1}{(i^2)^{19}.i}$$
$$= \frac{1}{(-1)^{19}.i} = \frac{1}{-i} = -\frac{1}{i} \times \frac{i}{i} = -\frac{i}{i^2} = -\frac{i}{-1}$$
$$= i.$$

प्रश्न 4.

3(7 + i7) + i (7 + i7)

हल:

3(7 + i7) + i (7 + i7)
= 21 + 21i + 7i + 7i²
= 21 + 28i + 7(-1) [∵ i² = -1]
= 21 – 7 + 28i
= 14 + 28j

प्रश्न 5.

(1 – i) – (-1 + i6)

हल:

(1 – i) – (-1 + i6)
= (1 – i) + (1 – 6i) (UPBoardSolutions.com)
= 1 – i + 1 – 6i
= 2 – 7i

प्रश्न 6. $\left(\frac{1}{5}+i\frac{2}{5}\right)-\left(4+i\frac{5}{2}\right)$

हल : $\left(\frac{1}{5}+i\frac{2}{5}\right)-\left(4+i.\frac{5}{2}\right) = \frac{1}{5}+\frac{2}{5}i-4-\frac{5}{2}i$

$$= \left(-4+\frac{1}{5}\right)+\left(\frac{2}{5}-\frac{5}{2}\right)i$$

$$= -\frac{19}{5}+\frac{4-25}{10}i$$

$$= -\frac{19}{5}-\frac{21}{10}i.$$

प्रश्न 7. $\left[\left(\frac{1}{3}+i\frac{7}{3}\right)+\left(4+i\frac{1}{3}\right)\right]-\left(-\frac{4}{3}+i\right)$.

हल : $\left[\left(\frac{1}{3}+i\frac{7}{3}\right)+\left(4+i\frac{1}{3}\right)\right]-\left(-\frac{4}{3}+i\right)$

$$= \frac{1}{3}+\frac{7}{3}i+4+\frac{1}{3}i+\frac{4}{3}-i$$

$$= \left(\frac{1}{3}+4+\frac{4}{3}\right)+\left(\frac{7}{3}+\frac{1}{3}-1\right)i$$

$$= \frac{17}{3}+\frac{5}{3}i.$$

प्रश्न 8.
$(1 - i)^4$
हल:

$$\begin{aligned}(1-i)^4 &= [(1-i)^2]^2 \\ &= [1-2i+i^2]^2 \\ &= [1-2i-1]^2 \\ &= (-2i)^2 \\ &= -2i \times -2i \\ &= 4i^2 = 4(-1) = -4.\end{aligned}$$

प्रश्न 9.
([latex]\frac { 1 }{ 3 }[/latex] + 3i)³
हल:

$$\left(\frac{1}{3}+3i\right)^3 = \left(\frac{1}{3}\right)^3 + 3.\left(\frac{1}{3}\right)^2(3i) + 3\left(\frac{1}{3}\right)(3i)^2 + (3i)^3$$

$$= \frac{1}{27} + 9 \times \frac{1}{9}i + 9(-1) + 27i^2.\,i$$

$$= \frac{1}{27} + i - 9 - 27i$$

$$= \left(\frac{1}{27} - 9\right) + (1 - 27)i$$

$$= -\frac{242}{27} - 26i\,.$$

प्रश्न 10.

(-2 – [latex]\frac { 1 }{ 3 }[/latex] i)³

हल : $\left(-2-\frac{1}{3}i\right)^3 = (-1)^3\left(2+\frac{1}{3}i\right)^3 = -\left(2+\frac{1}{3}i\right)^3$

$$= -\left[2^3 + 3.2^2\left(\frac{1}{3}i\right) + 3.2\left(\frac{1}{3}i\right)^2 + \left(\frac{1}{3}i\right)^3\right]$$

$$= -\left[8 + 3.4 \times \frac{1}{3}i + 6.\frac{i^2}{9} + \frac{1}{27}i^3\right]$$

$$= -\left[8 + 4i - \frac{2}{3} + \frac{1}{27}i^2.i\right]$$

$$= -\left[\frac{22}{3} + \left(4 - \frac{1}{27}\right)i\right]$$

$$= \left[-\frac{22}{3} - \frac{107}{27}i\right]$$

$$= -\frac{22}{3} - \frac{107}{27}i.$$

प्रश्न 11 से 13 तक की सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक का गुणात्मक प्रतिलोम ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 11.

4 – 3i.

हल : $4-3i$ का गुणात्मक प्रतिलोम $= \dfrac{1}{4-3i}$

$$= \frac{1}{4-3i} \times \frac{4+3i}{4+3i}$$

$$= \frac{4+3i}{16-9i^2} = \frac{4+3i}{16+9}$$

$$= \frac{4}{25} + \frac{3}{25} i .$$

प्रश्न 12.

√5 + 3i.

हल : $\sqrt{5}+3i$ का गुणात्मक प्रतिलोम

$$= \frac{1}{\sqrt{5}+3i} = \frac{1}{\sqrt{5}+3i} \times \frac{\sqrt{5}-3i}{\sqrt{5}-3i}$$

$$= \frac{\sqrt{5}-3i}{5-9i^2} = \frac{\sqrt{5}-3i}{5+9}$$

$$= \frac{\sqrt{5}}{14} - \frac{3}{14} i .$$

प्रश्न 13.

-i.

हल:

-1 का गुणात्मक प्रतिलोम

$$= \frac{1}{-i} = \frac{1}{-i} \times \frac{i}{i} = -\frac{i}{i^2} = -\frac{i}{-1} = i.$$

प्रश्न 14.
निम्नलिखित व्यंजक को a + ib के रूप में व्यक्त कीजिए:

$$\frac{(3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)-(\sqrt{3}-i\sqrt{2})}$$

हल : $$\frac{(3+i\sqrt{5})(3-i\sqrt{5})}{(\sqrt{3}+\sqrt{2}i)-(\sqrt{3}-i\sqrt{2})} = \frac{9-i^2.5}{\sqrt{3}+\sqrt{2}i-\sqrt{3}+\sqrt{2}i} = \frac{9+5}{2\sqrt{2}i}$$

$$= \frac{14}{2\sqrt{2}i} = \frac{7}{\sqrt{2}i} \times \frac{i}{i} = \frac{7i}{\sqrt{2}i^2}$$

$$= -\frac{7i}{\sqrt{2}} = -\frac{7\sqrt{2}}{2}i.$$

प्रश्नावली 5.2

प्रश्न 1 से 2 तक सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक का मापांक और कोणांक ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1.
z = -1 – i√3

हल : मान लीजिए $z = -1 - i\sqrt{3} = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

अर्थात् $r\cos\theta = -1$, $r\sin\theta = -\sqrt{3}$

वर्ग करके जोड़ने पर, $r^2 = 1 + 3 = 4$ या $r = 2$

z का मापांक $= 2$

अब $$\cos\theta = -\frac{1}{2} = -\cos\frac{\pi}{3}$$

और $$\sin\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} = -\sin\frac{\pi}{3}$$

यहां पर $\sin\theta$ व $\cos\theta$ दोनों ऋणात्मक हैं $\therefore$ θ तीसरे चतुर्थांश में हैं।

$\therefore\ \theta = \pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$ या $\theta = \frac{4\pi}{3} - 2\pi = -\frac{2\pi}{3}$

$\therefore$ कोणांक $= \frac{-2\pi}{3}$ और मापांक $= 2.$

प्रश्न 2.
-√3 + i.

हल : मान लीजिए $z = -\sqrt{3} + i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\Rightarrow r\cos\theta = -\sqrt{3},\ r\sin\theta = 1$

वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 3 + 1 = 4$$

$\therefore$ $$r^2 = 4 \text{ या } r = 2$$

अब $$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{1}{-\sqrt{3}} = -\frac{1}{\sqrt{3}}$$

$\because$ $\sin\theta$ धनात्मक और $\cos\theta$ ऋणात्मक है।

$\therefore$ θ दूसरे चतुर्थांश में स्थित है।

$$-\frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{6}\right)$$

$$= \tan\frac{5\pi}{6} \Rightarrow \theta = \frac{5\pi}{6}$$

अतः कोणांक $= \frac{5\pi}{6}$, मापांक $= 2$.

प्रश्न 3 से 8 तक सम्मिश्र संख्याओं में प्रत्येक को ध्रुवीय रूप में रूपांतरित कीजिए:

प्रश्न 3.
1 – i

हल : मान लीजिए $z = 1 - i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\therefore \qquad r\cos\theta = 1$ तथा $r\sin\theta = -1$

वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 1 + 1 = 2$$

या $\qquad r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2$

या $\qquad r^2 = 2$ या $r = \sqrt{2}$

अब $\cos\theta$ धनात्मक है और $\sin\theta$ ऋणात्मक है।

$\therefore \theta$ चौथे चतुर्थांश में है।

$$\tan\theta = \frac{-1}{1} = -1 = \tan\left(2\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \tan\left(-\frac{\pi}{4}\right)$$

$\therefore \qquad \theta = -\frac{\pi}{4}$

अतः z का ध्रुवीय रूप $= \sqrt{2}\left(\cos\frac{-\pi}{4} + i\sin\frac{-\pi}{4}\right)$.

प्रश्न 4.
-1 + i.

हल : मान लीजिए $z = -1 + i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$$\Rightarrow \quad r\cos\theta = -1 \text{ और } r\sin\theta = 1$$

इनका वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 1$$

या $$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 1$$

$$r^2 = 2 \quad \text{या} \quad r = \sqrt{2}$$

यहाँ $\cos\theta$ ऋणात्मक तथा $\sin\theta$ धनात्मक है

$\Rightarrow$ θ दूसरे चतुर्थांश में है।

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta = -1$$

$$= \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{3\pi}{4}$$

अतः z का ध्रुवीय रूप $= \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$.

प्रश्न 5.
-1 – i.

हल : मान लीजिए $z = -1 - i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\therefore r\cos\theta = -1, r\sin\theta = -1$

इनका वर्ग करके जोड़ने पर,

$\therefore \quad r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 1 + 1 = 2$

या $\quad r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2$

$\therefore \quad r^2 = 2$ या $r = \sqrt{2}$

यहाँ $\cos\theta$ और $\sin\theta$ दोनों ही ऋणात्मक हैं।

$\therefore \theta$ तीसरे चतुर्थांश में है।

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta = \frac{-1}{-1} = 1 = \tan\frac{\pi}{4}$$

$$= \tan\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{5\pi}{4} = \tan\left(-\frac{3\pi}{4}\right)$$

$\therefore \theta = \frac{5\pi}{4}$ या $-\frac{3\pi}{4}$

z का ध्रुवीय रूप $= \sqrt{2}\left(\cos\frac{5\pi}{4} + i\sin\frac{5\pi}{4}\right)$

या $\sqrt{2}\left(\cos\frac{-3\pi}{4} + i\sin\frac{-3\pi}{4}\right)$.

प्रश्न 6.

-3.

हल : मान लीजिए $z = -3 = r(\cos\theta + \sin\theta)$

$$\therefore \quad r\cos\theta = -3,\ r\sin\theta = 0$$

इनका वर्ग करके जोड़ने पर,

$$\therefore \quad r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 9$$

$$r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r^2 = 9 \text{ या } r = 3$$

अब $\dfrac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \dfrac{0}{-3} = 0$ परन्तु $r\cos\theta$ ऋणात्मक है।

$$\therefore \quad \theta = \pi$$

$\therefore$ z का ध्रुवीय रूप $= 3(\cos\pi + i\sin\pi)$.

प्रश्न 7.

√3 + i

हल : मान लीजिए $z = \sqrt{3} + i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\therefore \quad r\cos\theta = \sqrt{3},\ r\sin\theta = 1$

वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 3 + 1 = 4$$

या $\quad r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 4$

$$r^2 = 4 \text{ या } r = 2$$

$\therefore \quad \cos\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ और $\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

$\sin\theta$ और $\cos\theta$ दोनों ही धनात्मक है।

$\therefore$ θ पहले चतुर्थांश में है।

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \frac{1}{\sqrt{3}} \text{ या } \tan\theta = \frac{1}{\sqrt{3}} = \tan\frac{\pi}{6},$$

$$\theta = \frac{\pi}{6}$$

z का ध्रुवीय रूप $= 2\left(\cos\dfrac{\pi}{6} + i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$.

प्रश्न 8.
i.

हल : मान लीजिए $z = i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$

$\Rightarrow \quad r\cos\theta = 0$ और $r\sin\theta = 1$

वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 0 + 1$$

या $\quad r^2(\sin^2\theta + \cos^2\theta) = 1$

या $\quad r^2 = 1$ या $r = 1$

तब $\quad \cos\theta = 0, \sin\theta = 1 \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{2}$

$\therefore \quad z$ का ध्रुवीय रूप $= \left(\cos\frac{\pi}{2} + i\sin\frac{\pi}{2}\right).$

प्रश्नावली 5.3

निम्नलिखित समीकरणों में से प्रत्येक को हल कीजिए:

प्रश्न 1.
$x^2 + 3 = 0$.

हल:

$x^2 + 3 = 0$ या $x^2 = -3$ या $x = \pm\sqrt{-3} = \pm\sqrt{3}\,i$.

प्रश्न 2.
$2x^2 + x + 1 = 0$.

हल : दिया गया है : $2x^2 + x + 1 = 0$,

समीकरण $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

$a = 2, b = 1, c = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.2.1}}{2.2}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{4}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{7}\, i}{4}.$$

प्रश्न 3.

$x^2 + 3x + 9 = 0$.

हल : दिए गए समीकरण $x^2 + 3x + 9 = 0$ की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

$a = 1, b = 3, c = 9$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4.1.9}}{2.1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 36}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{-27}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm 3\sqrt{3}\, i}{2}.$$

प्रश्न 4.
$-x^2 + x – 2 = 0$.

हल : दिया गया है : $$-x^2 + x - 2 = 0,$$

-1 से दोनों पक्षों में गुणा करने पर

$$x^2 - x + 2 = 0$$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

$a = 1, b = -1, c = 2$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{7}\, i}{2}.$$

प्रश्न 5.
$x^2 + 3x + 5 = 0$.

हल : दिया गया है: $$x^2 + 3x + 5 = 0$$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

$a = 1, b = 3, c = 5$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 4.1.5}}{2.1}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{9 - 20}}{2}$$

$$= \frac{-3 \pm \sqrt{-11}}{2} = \frac{-3 \pm \sqrt{11}\, i}{2}.$$

प्रश्न 6.
$x^2 - x + 2 = 0.$

हल : दिया है : $$x^2 - x + 2 = 0$$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ **से तुलना करने पर,**

$$\therefore \quad a = 1, b = -1, c = 2$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4.1.2}}{2.1} = \frac{1 \pm \sqrt{-7}}{2}$$

$$= \frac{1 \pm \sqrt{7}\, i}{2}.$$

प्रश्न 7.

$\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$.

हल : दिया है : $\sqrt{2}x^2 + x + \sqrt{2} = 0$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$$a = \sqrt{2},\ b = 1,\ c = \sqrt{2}$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4\sqrt{2}.\sqrt{2}}}{2.\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{-\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{-7}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{7}\,i}{2\sqrt{2}}.$$

प्रश्न 8.

√3 x² – √2 x + 3√3 = 0.

हल : दिया है : $\sqrt{3}\ x^2 - \sqrt{2}\, x + 3\sqrt{3} = 0$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$a = \sqrt{3}\,,\ b = -\sqrt{2}\,,\ c = 3\sqrt{3}$

$$\therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4\sqrt{3}.3\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 36}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{-34}}{2\sqrt{3}}$$

$$= \frac{\sqrt{2} \pm \sqrt{34}\, i}{2\sqrt{3}}.$$

प्रश्न 9.

x² + x + [latex]\frac { 1 }{ \surd 2 }[/latex] = 0

हल : दिया है : $$x^2 + x + \frac{1}{\sqrt{2}} = 0$$

दोनों पक्षों में $\sqrt{2}$ से गुणा करने पर,

$$\sqrt{2}\,x^2 + \sqrt{2}\,x + 1 = 0$$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$a = \sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, $c = 1$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2 - 4.\sqrt{2}.1}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-\sqrt{2} \pm \sqrt{2}\sqrt{1 - 2\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{\sqrt{2}\left(-1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\; i\right)}{2\sqrt{2}}$$

$$= \frac{-1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}\; i}{2}.$$

प्रश्न 10.
x² + [latex]\frac { x }{ \surd 2 }[/latex] + 1 = 0

हल : दिया है :
$$x^2 + \frac{x}{\sqrt{2}} + 1 = 0$$

दोनों पक्षों में $\sqrt{2}$ से गुणा करने पर
$$\sqrt{2}\,x^2 + x + \sqrt{2} = 0$$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर
$$a = \sqrt{2},\ b = 1,\ c = \sqrt{2}$$
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4.\sqrt{2}.\sqrt{2}}}{2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 8}}{2\sqrt{2}}$$
$$= \frac{-1 \pm \sqrt{7}\,i}{2\sqrt{2}}.$$

अध्याय 5 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1. $\left[i^{18}+\left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3$ **का मान ज्ञात कीजिए।**

हल :

$$\left[i^{18}+\left(\frac{1}{i}\right)^{25}\right]^3 = \left[(i^2)^9+\frac{1}{(i^2)^{12}\,i}\right]^3$$

$$= \left[(-1)^9+\frac{1}{(-1)^{12}\,i}\right]^3$$

$$= \left[-1+\frac{1}{i}\times\frac{i}{i}\right]^3$$

$$= [-1-i]^3 = -(1+i)^3$$

[अब $(a+b)^3 = [a^3+3a^2b+3ab^2+b^3]$

$$= -(1+3i+3i^2+i^3)$$

$$= -(1+3i-3+i^2.\,i)$$

$$= -(-2+3i-i)$$

$$= -(-2+2i) = 2-2i.$$

प्रश्न 2. किन्हीं दो सम्मिश्र संख्याओं z_1 और z_2 के लिए सिद्ध कीजिए :

$$\boldsymbol{Re(z_1 z_2) = Re z_1 \, Re z_2 - Im\, z_1 \, Im\, z_2}$$

हल : मान लीजिए $z_1 = a + ib, z_2 = c + id$

$$\therefore \quad z_1 z_2 = (a + ib)(c + id)$$

$$= ac + adi + bci + i^2 bd$$

$$= (ac - bd) + (ad + bc)\, i$$

$$Re\,(z_1 z_2) \text{ का वास्तविक भाग} = ac - bd$$

$$= Re z_1 \, Re z_2 - Im\, z_1 \, Im\, z_2$$

यहाँ पर $Re z_1$ का वास्तविक भाग $= a$, इसी प्रकार $Re\, z_2 = c$

$Im\, z_1 = z_1$ का काल्पनिक भाग $= b$

इसी प्रकार $Im\, z_2 = d.$

प्रश्न 3. $\left(\frac{1}{1-4i}-\frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right)$ **को मानक रूप में परिवर्तित कीजिए।**

हल : $\left(\frac{1}{1-4i}-\frac{2}{1+i}\right)\left(\frac{3-4i}{5+i}\right)=\left(\frac{1+4i}{(1+4i)(1-4i)}-\frac{2(1-i)}{(1+i)(1-i)}\right)\left[\frac{3-4i}{5+i}\times\frac{5-i}{5-i}\right]$

$$=\left(\frac{1+4i}{1+16}-\frac{2(1-i)}{1+1}\right)\left[\frac{15+4i^2-3i-20i}{25+1}\right]$$

$$=\left(\frac{1}{17}-1+\left(\frac{4}{17}+1\right)i\right)\left[\frac{11}{26}-\frac{23}{26}i\right]$$

$$=\left[-\frac{16}{17}+\frac{21}{17}i\right]\left[\frac{11}{26}-\frac{23}{26}i\right]$$

$$=\left[-\frac{16}{17}\times\frac{11}{26}-\frac{21}{17}\times\frac{23}{26}i^2+\frac{16}{17}\times\frac{23}{26}i+\frac{21}{17}\times\frac{11}{26}i\right]$$

$$=\left[-\frac{176}{442}+\frac{483}{442}+\left(\frac{368}{442}+\frac{231}{442}\right)i\right]$$

$$=\frac{307}{442}+\frac{599}{442}i.$$

प्रश्न 4. यदि $x - iy = \sqrt{\dfrac{a - ib}{c - id}}$, तो सिद्ध कीजिए $x^2 + y^2 = \dfrac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$.

हल :
$$x - iy = \sqrt{\frac{a - ib}{c - id}}$$

i के स्थान पर $-i$ लिखने पर

$$x + iy = \sqrt{\frac{a + ib}{c + id}}$$

समी. (1) और (2) का गुणा करने पर,

$$(x - iy)(x + iy) = \sqrt{\frac{a - ib}{c - id}} \times \sqrt{\frac{a + ib}{c + id}}$$

या
$$x^2 - i^2y^2 = \sqrt{\frac{a^2 - i^2b^2}{c^2 - i^2d^2}}$$

$\therefore$
$$x^2 + y^2 = \sqrt{\frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}}$$

दोनों पक्षों का वर्ग करने पर,

$$(x^2 + y^2)^2 = \frac{a^2 + b^2}{c^2 + d^2}$$

[नोट : पुस्तक के प्रश्न में गलती है।]

प्रश्न 5. निम्नलिखित को ध्रुवीय रूप में परिवर्तित कीजिए :

(i) $\dfrac{1+7i}{(2-i)^2}$ **(ii)** $\dfrac{1+3i}{1-2i}$.

हल : (i) माना

$$z = \frac{1+7i}{(2-i)^2} = \frac{1+7i}{4-4i+i^2} = \frac{1+7i}{4-4i-1}$$

$$= \frac{1+7i}{3-4i} = \frac{1+7i}{3-4i} \times \frac{3+4i}{3+4i}$$

$$= \frac{3+28i^2+4i+21i}{9-16i^2}$$

$$= \frac{3-28+25i}{25}$$

$$= \frac{-25}{25} + \frac{25}{25}i$$

$$= -1 + i$$

$$= r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

$\therefore$ $r\cos\theta = -1, r\sin\theta = 1$

वर्ग करके जोड़ने करने पर $r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta = 1 + 1$

या $r^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = 2$ या $r^2 = 2$ या $r = \sqrt{2}$

$\cos\theta =$ ऋणात्मक, $\sin\theta =$ धनात्मक

$\therefore$ θ दूसरे चतुर्थांश में है।

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan\theta = \frac{1}{-1} = -1, = -\tan\frac{\pi}{4},\ \text{अत: } \tan\theta = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right) = \tan\frac{3\pi}{4}$$

$$\therefore \qquad \theta = \frac{3\pi}{4}$$

अत: r का ध्रुवीय रूप, $\sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$ है।

(ii) $\dfrac{\mathbf{1+3}\boldsymbol{i}}{\mathbf{1-2}\boldsymbol{i}}$.

हल : मान लिया
$$z = \frac{1+3i}{1-2i} = \frac{1+3i}{1-2i} \times \frac{1+2i}{1+2i}$$

$$= \frac{1+6i^2+2i+3i}{1-4i^2}$$

$$= \frac{1-6+5i}{1+4} = \frac{-5}{5} + \frac{5}{5}i$$

$$= -1 + i$$

भाग (i) के अनुसार $-1 + i = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right)$

अत:
$$\frac{1+3i}{1-2i} = \sqrt{2}\left(\cos\frac{3\pi}{4} + i\sin\frac{3\pi}{4}\right).$$

प्रश्न 6 से 9 में दिए गए प्रत्येक समीकरण को हल कीजिए:

प्रश्न 6.

3x² – 4x + [latex]\frac { 20 }{ 3 }[/latex] = 0.

हल : $3x^2 - 4x + \frac{20}{3} = 0$ को 3 से गुणा करने पर

$$9x^2 - 12x + 20 = 0$$

इसकी $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर,

$$a = 9, b = -12, c = 20$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 4.9.20}}{2 \times 9}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{144 - 720}}{18}$$

$$= \frac{12 \pm \sqrt{-576}}{18} = \frac{12 \pm 24i}{18}$$

$$= \frac{2 \pm 4i}{3} = \frac{2}{3} \pm \frac{4}{3} i.$$

प्रत 7.
$x^2 - 2x +$ [latex]\frac { 3 }{ 2 }[/latex] = 0.

हल : $x^2 - 2x + \frac{3}{2} = 0$, इसे 2 से गुणा करने पर

$$2x^2 - 4x + 3 = 0$$

$ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$$a = 2, b = -4, c = 3$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4.2.3}}{2.3}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{16 - 24}}{4}$$

$$= \frac{4 \pm \sqrt{-8}}{4} = \frac{4 \pm 2\sqrt{2}\, i}{4}$$

$$= \frac{2 \pm \sqrt{2}\, i}{2} = 1 \pm \frac{\sqrt{2}}{2}\, i.$$

प्रश्न 8.
$21x^2 - 28x + 10 = 0$.

हल : दिए गए समीकरण $27x^2 - 10x + 1 = 0$ की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$a = 27, b = -10, c = 1$

$$\therefore \quad x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-10) \pm \sqrt{100 - 4.27.1}}{2.27}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{100 - 108}}{54}$$

$$= \frac{10 \pm \sqrt{-8}}{54} = \frac{10 \pm 2\sqrt{2}\,i}{54}$$

$$= \frac{5 \pm \sqrt{2}\,i}{27} = \frac{5}{27} \pm \frac{\sqrt{2}}{27}i.$$

प्रश्न 9. $21x^2 - 28x + 10 = 0$.

हल : $21x^2 - 28x + 10 = 0$ की $ax^2 + bx + c = 0$ से तुलना करने पर

$$a = 21, b = -28, c = 10$$

$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$= \frac{-(-28) \pm \sqrt{(-28)^2 - 4.21.10}}{2.21}$$

$$= \frac{28 \pm \sqrt{784 - 840}}{42} = \frac{28 \pm \sqrt{-56}}{42}$$

$$= \frac{28 \pm 2\sqrt{14}\,i}{42} = \frac{14 \pm \sqrt{14}\,i}{21}$$

$$= \frac{14}{21} \pm \frac{\sqrt{14}}{21} i$$

$$= \frac{2}{3} \pm \frac{\sqrt{14}}{21} i$$

प्रश्न 10. यदि $z_1 = 2 - i, z_2 = 1 + i, \left|\frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i}\right|$ का मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\left[\frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i}\right] = \frac{(2-i)+(1+i)+1}{(2-i)-(1+i)+i}$$

$$= \frac{4}{1-i} = \frac{4}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{4(1+i)}{1-i^2}$$

$$= \frac{4(1+i)}{2} = 2 + 2\,i$$

$$\therefore \quad \left|\frac{z_1 + z_2 + 1}{z_1 - z_2 + i}\right| = |\,2 + 2i\,|$$

$$= \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}.$$

प्रश्न 11. यदि $a + ib = \frac{(x+i)^2}{2x^2+1}$, सिद्ध कीजिए कि $a^2 + b^2 = \frac{(x^2+1)^2}{(2x^2+1)^2}$.

हल :

$$a + ib = \frac{(x+i)^2}{2x^2+1} \quad \ldots($$

i के स्थान पर $-i$ रखने से

$$a - ib = \frac{(x-i)^2}{2x^2+1} \quad \ldots($$

समी. (1) और (2) का गुणा करने पर

$$(a+ib)(a-ib) = \frac{(x+i)^2}{2x^2+1} \times \frac{(x-i)^2}{2x^2+1}$$

या $$a^2 - i^2b^2 = \frac{[(x+i)(x-i)]^2}{(2x^2+1)^2}$$

या $$a^2 + b^2 = \frac{(x^2-i^2)^2}{(2x^2+1)^2}$$

या $$a^2 + b^2 = \frac{(x^2+1)^2}{(2x^2+1)^2}.$$

प्रश्न 12. यदि $z_1 = 2 - i$, $z_2 = -2 + i$, निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

(i) $Re\left(\dfrac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}\right)$ **(ii)** $Im\left(\dfrac{1}{z_1 \bar{z}_1}\right)$.

हल : (i)

$$\left(\frac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}\right) = \frac{(2-i)(-2+i)}{\overline{(2-i)}} = \frac{-(2-i)(2-i)}{2+i}$$

$$= \frac{-(2-i)^2}{2+i} = \frac{-(4+i^2-4i)}{2+i}$$

$$= \frac{-(4-1-4i)}{2+i} = \frac{-(3-4i)}{2+i}$$

$$= \frac{-(3-4i)}{2+i} \times \frac{2-i}{2-i}$$

$$= \frac{-6-4i^2+3i+8i}{4-i^2} = \frac{-6+4+11i}{4+1}$$

$$= \frac{-2+11i}{5} = -\frac{2}{5} + \frac{11}{5}i$$

$\therefore$ $$Re\left(\frac{z_1 z_2}{\bar{z}_1}\right) = -\frac{2}{5}.$$

(ii) $Im\left(\dfrac{1}{z_1 \bar{z}_1}\right)$

हल :

$$\frac{1}{z_1 \bar{z}_1} = \frac{1}{(2-i)\overline{(2-i)}} = \frac{1}{(2-i)(2+i)}.$$

$$= \frac{1}{4-i^2} = \frac{1}{5}$$

$$Im\left(\frac{1}{z_1\bar{z}_1}\right) = 0.$$

प्रश्न 13. सम्मिश्र संख्या $\frac{1+2i}{1-3i}$ का मापांक और कोणांक ज्ञात कीजिए।

हल : माना
$$z = \frac{1+2i}{1-3i} = \frac{1+2i}{1-3i} \times \frac{1+3i}{1+3i}$$

$$= \frac{1+6i^2+3i+2i}{1-9i^2}$$

$$= \frac{1-6+5i}{1+9}$$

$$= \frac{-5+5i}{10} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i$$

$$-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}i = r(\cos\theta + i\sin\theta)$$

दोनों पक्षों की तुलना करने पर,

$\Rightarrow r\cos\theta = -\frac{1}{2}, r\sin\theta = \frac{1}{2}$

वर्ग करके जोड़ने पर,

$$r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = \left(-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

$$r^2(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = \frac{1}{2} \text{ या } r^2 = \frac{1}{2} \text{ या } r = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

अब $\cos \theta = -ve$, $\sin \theta = +ve$

$\Rightarrow \theta$ दूसरे चतुर्थांश में है।

$$\frac{r\sin\theta}{r\cos\theta} = \tan \theta = -\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}} = -1 = \tan\left(\pi - \frac{\pi}{4}\right)$$

$$= \tan \frac{3\pi}{4}$$

$$\theta = \frac{3\pi}{4}$$

अत: मापांक $= \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, कोणांक $= \dfrac{3\pi}{4}$.

प्रश्न 14. यदि $(x - iy)(3 + 5i)$, $-6 - 24i$ की संयुग्मी है तो वास्तविक संख्याएँ x और y ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\overline{-6-24i} = -6 + 24i \qquad \text{...(1)}$$

$$(x - iy)(3 + 5i) = (3x - 5yi^2 + 5xi - 3yi$$
$$= 3x + 5y + (5x - 3y)i \qquad \text{...(2)}$$

समीकरण (1) और (2) से,

$$3x + 5y + (5x - 3y)i = -6 + 24i$$

वास्तविक व काल्पनिक संख्याओं को समान लिखते हुए

$$3x + 5y = -6 \qquad \text{...(3)}$$
$$5x - 3y = 24 \qquad \text{...(4)}$$

समी. (3) को 3 से और समी. (4) को 5 से गुणा करने पर

$$9x + 15y = -18 \qquad \text{...(5)}$$
$$25x - 15y = 120 \qquad \text{...(6)}$$

समी. (5) और समी (6) को जोड़ने पर,

$$34x = 102 \text{ या } x = \frac{102}{34} = 3$$

x का मान समी. (3) में रखने पर,

$$9 + 5y = -6 \text{ या } 5y = -15, \text{ या } y = -3$$

अतः $x = 3$, $y = -3$.

प्रश्न 15. $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i}$ **का मापांक ज्ञात कीजिए।**

हल : $\dfrac{1+i}{1-i} - \dfrac{1-i}{1+i} = \dfrac{(1+i)^2-(1-i)^2}{(1-i)(1+i)}$

$$= \frac{(1+i^2+2i)-(1+i^2-2i)}{1-i^2}$$

$$= \frac{(1-1+2i)-(1-1-2i)}{1+1}$$

$$= \frac{4i}{2} = 2i$$

$\therefore$ $$\frac{1+i}{1-i} - \frac{1-i}{1+i} = |2i| = \sqrt{4} = 2.$$

प्रश्न 16. यदि $(x+iy)^3 = u+iv$, तो दर्शाइए कि $\dfrac{u}{x}+\dfrac{v}{y} = 4(x^2-y^2)$.

हल : $(x+iy)^3 = u+iv$

या $u+iv = x^3+3x^2.iy+3.(iy)^2x+(iy)^3$

$= x^3+3x^2yi+3xy^2i^2+i^3y^3$

$= (x^3-3xy^2)+(3x^2y-y^3)i$ $\qquad [\because i^2=-1]$

$\Rightarrow$ $x^3-3xy^2 = u$

या $x^2-3y^2 = \dfrac{u}{x}$ $\qquad$ ...(1)

और $3x^2y-y^3 = v$

या $3x^2-y^2 = \dfrac{v}{y}$ $\qquad$ ...(2)

समीकरण (1) और (2) को जोड़ने पर

$$4x^2-4y^2 = \frac{u}{x}+\frac{v}{y}$$

$\Rightarrow$ $\dfrac{u}{x}+\dfrac{v}{y} = 4(x^2-y^2).$ $\qquad$ इति सिद्धम्।

प्रश्न 17. यदि α और β भिन्न सम्मिश्र संख्याएँ हैं जहाँ $|\beta| = 1$, तब $\left|\frac{\beta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|$ का मान ज्ञात कीजिए ।

हल :

$$\left|\frac{\beta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|^2 = \left(\frac{\beta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\beta}\right)\overline{\left(\frac{\beta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\beta}\right)}$$

$$= \frac{\beta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\beta} \times \frac{\bar{\beta}-\bar{\alpha}}{1-\alpha\bar{\beta}}$$

$$= \frac{\beta\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}+\alpha\bar{\alpha}}{1-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+\alpha\bar{\alpha}.\beta\bar{\beta}}$$

$$= \frac{|\beta|^2-\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}+|\alpha|^2}{1-\alpha\bar{\beta}-\bar{\alpha}\beta+|\alpha|^2.|\beta|^2}$$

दिया है : $|\beta| = 1$ हो, तब

$$= \frac{1+|\alpha|^2-\bar{\alpha}\beta-\alpha\bar{\beta}}{1+|\alpha|^2-\bar{\alpha}\beta-a\bar{\beta}}$$

$$= 1$$

अत:

$$\left|\frac{\beta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\beta}\right|^2 = 1 \text{ या } \left|\frac{\beta-\alpha}{1-\bar{\alpha}\beta}\right| = 1.$$

प्रश्न 18. समीकरण $|1-i|^x = 2^x$ के शून्येत्तर पूर्णांक मूलों की संख्या ज्ञात कीजिए :

हल : $$|1-i|^x = \left(\sqrt{(1)^2+(-1)^2}\right)^x = \left(\sqrt{2}\right)^x = (2)^{x/2}$$

अब $$(1-i)^x = 2^x$$

या $$2^{x/2} = 2^x$$

घातांकों की तुलना से, $$\frac{x}{2} = x$$

$\Rightarrow \frac{x}{2} = x$, यह तब ही हो सकता है जब $x = 0$.

$\Rightarrow$ इस समीकरण का 0 के अतिरिक्त और कोई हल नहीं हो सकता।

प्रश्न 19. यदि $(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih) = A+iB$ है तो दर्शाइए कि

$$(a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2) = A^2+B^2.$$

हल : $$(a+ib)(c+id)(e+if)(g+ih) = A+iB \quad \text{...(1)}$$

i के स्थान पर $-i$ रखने पर,

$$(a-ib)(c-id)(e-if)(g-ih) = A-iB \quad \text{...(2)}$$

समी (1) और (2) को गुणा करने पर,

$$[(a+ib)(a-ib)][(c+id)(c-id)][(e+if)(e-if)][(g+ih)(g-ih)] = (A+iB)(A-iB)$$

$$\Rightarrow (a^2-i^2b^2)(c^2-i^2d^2)(e^2-i^2f^2)(g^2-i^2h^2) = A^2-i^2B^2$$

$$\Rightarrow (a^2+b^2)(c^2+d^2)(e^2+f^2)(g^2+h^2) = A^2+B^2.$$

प्रश्न 20. यदि $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = 1$, तो m का न्यूनतम पूर्णांक मान ज्ञात कीजिए।

हल :

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \times \frac{1+i}{1+i} = \frac{(1+i)^2}{1-i^2}$$

$$= \frac{1+i^2+2i}{1+1}$$

$$= \frac{1-1+2i}{2} = \frac{2i}{2} = i$$

$\therefore$ $$\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^m = i^m = \left(i^4\right)^{\frac{m}{4}} = 1 \qquad [\because i^4 = (i^2)^2 = (-1)^2 = 1]$$

$\Rightarrow$ m संख्या 4 का गुणज है।

$\therefore$ m की कम से कम मूल्य = 4.