Chapter-9 अनुक्रम तथा श्रेणी

प्रश्नावली 9.1

प्रश्न 1 से 6 तक के अनुक्रमों में प्रत्येक के प्रथम पाँच पद लिखिए, जिनका नाव पद दिया गया है।

प्रश्न 1.
$a_n = n(n + 2)$.
हल:
$a_n = n(n + 2)$
n का मान 1, 2, 3, 4, 5 रखने पर
$a_1 = 1 \times 3 = 3$,
$a_2 = 2 \times 4 = 8$,
$a_3 = 3 \times 5 = 15$,
$a_4 = 4 \times 6 = 24$,
$a_5 = 5 \times 7 = 35$
अतः दिए गए अनुक्रम के पाँच पद 3, 8, 15, 24, 35 हैं।

प्रश्न 2.
a_n = [latex]\frac { n }{ n + 1 }[/latex]

हल : $a_n = \frac{n}{n+1}$

n का मान 1, 2, 3, 4, 5 रखने पर

$$a_1 = \frac{1}{2}, a_2 = \frac{2}{3}, a_3 = \frac{3}{4}, a_4 = \frac{4}{5}, a_5 = \frac{5}{6}$$

$\therefore$ अनुक्रम के पाँच पद $\frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}$ हैं।

प्रश्न 3.
$a_n = 2^n$

हल : $a_n = 2^n$ में n का मान 1, 2, 3, 4, 5 रखने पर

$$a_1 = 2^1 = 2, a_2 = 2^2 = 4, a_3 = 2^3 = 8, a_4 = 2^4 = 16, a_5 = 2^5 = 32$$

अत: अनुक्रम के पाँच पद 2, 4, 8, 16, 32 हैं।

प्रश्न 4.
a_n = [latex]\frac { 2n – 3 }{ 6 }[/latex]

हल : $a_n = \frac{2n-3}{6}$ में $n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर

$$a_1 = \frac{2-3}{6} = -\frac{1}{6},\ a_2 = \frac{4-3}{6} = \frac{1}{6},\ a_3 = \frac{6-3}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2},$$

$$a_4 = \frac{8-3}{6} = \frac{5}{6},\ a_5 = \frac{10-3}{6} = \frac{7}{6}$$

अत: अनुक्रम के पाँच पद $-\frac{1}{6}, \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}$ हैं।

प्रश्न 5.
$a_n = (-1)^{n-1} 5^{n+1}$.

हल : $a_n = (-1)^{n-1} 5^{n+1}$, n में 1, 2, 3, 4, 5 रखने पर

$a_1 = (-1)^0 5^2 = 25$, $a_2 = (-1)^1 . 5^3 = -125$, $a_3 = (-1)^2 5^4 = 625$,

$a_4 = (-1)^3 5^5 = -3125$, $a_5 = (-1)^4 . 5^6 = 15625$

अनुक्रम के पाँच पद 25, – 125, 625, – 3125, 15625 हैं।

प्रश्न 6. $a_n = n \frac{n^2+5}{4}$.

हल : $a_n = n \frac{n^2+5}{4}$, n में 1, 2, 3, 4, 5 रखने पर

$$a_1 = 1. \frac{6}{4} = \frac{3}{2},\ a_2 = 2. \frac{9}{4} = \frac{9}{2},\ a_3 = 3. \frac{14}{4} = \frac{21}{2}$$

$$a_4 = 4. \frac{21}{4} = 21,\ a_5 = 5. \frac{30}{4} = \frac{75}{2}$$

अत: अनुक्रम के पाँच पद $\frac{3}{2}, \frac{9}{2}, \frac{21}{2}, 21, \frac{75}{2}$ हैं।

निम्नलिखित प्रश्न 7 से 10 तक के अनुक्रमों में प्रत्येक का वांछित पद ज्ञात कीजिए, जिनका शव पद दिया गया है:

प्रश्न 7.

$a_n = 4n - 3, a_{17}, a_{24}$

हल : $$a_n = 4n - 3,$$

$n = 17$ लेने पर,

$$a_{17} = 4 \times 17 - 3 = 68 - 3 = 65$$

$n = 24$ लेने पर,

$$a_{24} = 4 \times 24 - 3 = 96 - 3 = 93.$$

प्रश्न 8. $a_n = \frac{n^2}{2^n}$: a_7.

हल : $$a_n = \frac{n^2}{2^n}$$

$n = 7$ रखने पर,

$$a_7 = \frac{7^2}{2^7} = \frac{49}{128}.$$

प्रश्न 9. $a_n = (-1)^{n-1}n^3$; a_9.

हल : $$a_n = (-1)^{n-1} n^3,$$

$n = 9$ रखने पर,

$$a_9 = (-1)^{9-1} 9^3 = 729.$$

प्रश्न 10. $a_n = \frac{n(n-2)}{n+3}$: a_{20}.

हल :

$$a_n = \frac{n(n-2)}{n+3},$$

$n = 20$ लेने पर,

$$a_{20} = \frac{20 \times 18}{23} = \frac{360}{23}.$$

प्रश्न 11 से 13 तक प्रत्येक अनुक्रम के पाँच पद लिखिए तथा संगत श्रेणी ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 11.

$a_1 = 3$, $a_n = 3a_{n-1} + 2$ सभी $n > 1$ के लिए।

हल : $a_n = 3a_{n-1} + 2$, और $a_1 = 3$

अनुक्रम में $n = 2, 3, 4, 5$ रखने पर,

$$a_2 = 3a_1 + 2 = 3 \times 3 + 2 = 11$$

$$a_3 = 3a_2 + 2 = 3 \times 11 + 2 = 35$$

$$a_4 = 3a_3 + 2 = 3 \times 35 + 2 = 107$$

$$a_5 = 3a_4 + 2 = 3 \times 107 + 2 = 323$$

अत: संगत श्रेणी $3 + 11 + 35 + 107 + 323 + \ldots$

प्रश्न 12. $a_1 = -1, a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$, जहाँ $n \geq 2$.

हल : $a_1 = -1, a_n = \frac{a_{n-1}}{n}$, n में 2, 3, 4, 5 रखने पर,

$$a_2 = \frac{a_1}{2} = \frac{-1}{2}, a_3 = \frac{a_2}{3} = \frac{\frac{-1}{2}}{3} = -\frac{1}{6}$$

$$a_4 = \frac{a_3}{4} = \frac{\frac{-1}{6}}{4} = -\frac{1}{24}$$

$$a_5 = \frac{a_4}{5} = \frac{\frac{-1}{24}}{5} = -\frac{1}{120}$$

अत: संगत श्रेणी $= (-1) + \left(\frac{-1}{2}\right) + \left(\frac{-1}{6}\right) + \left(\frac{-1}{24}\right) + \left(\frac{-1}{120}\right) + \ldots$

प्रश्न 13.

$a_1 = a_2 = 2, a_n = a_{n-1} - 1$, जहाँ $n > 2$.

हल : $a_1 = a_2 = 2$ (दिया है)

और $a_n = a_{n-1} - 1$

$n = 3, 4, 5$ रखने पर,

$$a_3 = a_2 - 1 = 2 - 1 = 1$$
$$a_4 = a_3 - 1 = 1 - 1 = 0$$
$$a_5 = a_4 - 1 = 0 - 1 = -1$$

अत: अनुक्रम के पाँच पद 2, 2, 1, 0 और -1 हैं। संगत श्रेणी $= 2 + 2 + 1 + 0 + (-1)$.

प्रश्न 14.

Fibonacci अनुक्रम निम्नलिखित रूप में परिभाषित है :

$1 = a_1 = a_2$, तथा $a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$, $n > 2$ तो, $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ ज्ञात कीजिए जबकि $n = 1, 2, 3, 4, 5$.

हल :

$$a_1 = 1, a_2 = 1$$

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}$$

$n = 3, 4, 5, 6$ रखने पर,

$$a_3 = a_2 + a_1 = 1 + 1 = 2$$

$$a_4 = a_3 + a_2 = 2 + 1 = 3$$

$$a_5 = a_4 + a_3 = 3 + 2 = 5$$

$$a_6 = a_5 + a_4 = 5 + 3 = 8$$

अब $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ में $n = 1, 2, 3, 4, 5$ रखने पर

$$\frac{a_2}{a_1} = \frac{1}{1} = 1,\ \frac{a_3}{a_2} = \frac{2}{1} = 1,\ \frac{a_4}{a_3} = \frac{3}{2},\ \frac{a_5}{a_4} = \frac{5}{3},\ \frac{a_6}{a_5} = \frac{8}{5}.$$

प्रश्नावली 9.2

प्रश्न 1.

1 से 2001 तक के विषम पूर्णांकों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : श्रेणी 1 + 3 + 5 + 7 +....+ 2001

मान लीजिए n**वाँ पद** 2001 **तब**

$$2001 = a + (n - 1)d$$
$$= 1 + (n - 1). 2$$
$$= 1001$$

अत: **योगफल** $S = \frac{n}{2}(a + l)$

$$= \frac{1001}{2}[1 + 2001]$$

$$= \frac{1001}{2} \times 2002$$

$$= 1002001.$$

प्रश्न 2.

100 तथा 1000 के मध्य उन सभी प्राकृत संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए जो 5 के गुणज हों।

हल : 100 और 1000 के बीच की संख्याएँ जो 5 की गुणज हैं उनका योगफल

$$= 105 + 110 + 115 + \ldots + 995$$

मान लीजिए 995, nवाँ पद है।

$\therefore$ n वाँ पद $= a + (n-1)d$

$\Rightarrow$ $995 = 105 + (n-1)5$

$$5.(n-1) = 995 - 105$$

$$= 890$$

$$n - 1 = \frac{890}{5} = 178$$

या $n = 179$

अत: योगफल, $S_{179} = \frac{179}{2}[2 \times 105 + (179-1).5]$

$= \frac{179}{2}[2 \times 105 + 178 \times 5]$

$= 179[105 + 89 \times 5]$

$= 98450.$

प्रश्न 3.

किसी समांतर श्रेणी में प्रथम पद 2 है तथा प्रथम पांच पदों का भागफल, अगले पांच पदों के

योगफल का एक चौथाई है। दर्शाइए कि 20वाँ पद -112 है।

हल : मान लीजिए, d सार्वअंतर है जबकि $a = 2$

$$\text{प्रथम पाँच पदों का योगफल} = \frac{5}{2}[2 \times 2 + 4 \times d]$$

$$= 5\,[2 + 2d] = 10\,(1 + d)$$

तथा

$$6\text{वाँ पद} = 2 + (6 - 1).\,d = 2 + 5d$$

$$\text{अगले पांच पदों का योगफल} = \frac{5}{2}[2(2 + 5d) + (5 - 1)d]$$

$$= \frac{5}{2}[4 + 10d + 4d]$$

$$= \frac{5}{2}[4 + 14d] = 5\,(2 + 7d)$$

$$\text{प्रथम पाँच पदों का योगफल} = \frac{1}{4}\text{अगले पाँच पदों का योगफल}$$

$$10(1 + d) = \frac{1}{4} \times 5\,(2 + 7d)$$

$$\therefore \quad 8 + 8d = 2 + 7d$$

$$\therefore \quad d = 2 - 8 = -6$$

$$20\text{वाँ पद} = a + (20 - 1)\,d$$

$$= 2 + 19\,(-6)$$

$$= 2 - 114 = -112.$$

प्रश्न 4.

समांतर श्रेढी – 6, [latex]\frac { -11 }{ 2 }[/latex] , 5 …… के कितने पदों का योगफल – 25 है?

हल : दिया है: $a = -6, d = -\frac{11}{2} + 6 = \frac{1}{2}$

मान लीजिए n पदों का योगफल -25 है।

$$-25 = \frac{n}{2}\left[2 \times (-6) + (n-1) \times \frac{1}{2}\right]$$

$$-50 = n\left[-12 + \frac{1}{2}(n-1)\right]$$

$$= -12n + \frac{1}{2}n(n-1)$$

-2 से गुणा करने पर,
$$100 = 24n - n(n-1)$$
$$= 24n - n^2 + n$$
$$n^2 - 25n + 100 = 0 \text{ या } (n-5)(n-20) = 0$$
$$n = 5, 20$$

अतः अभीष्ट पदों की संख्या = 5 या 20.

प्रश्न 5.

किसी समांतर श्रेढ़ी का p वाँ पद [latex]\frac { 1 }{ q }[/latex] तथा p वा पद [latex]\frac { 1 }{ p }[/latex] हो, तो सिद्ध कीजिए कि प्रथम pq पदों का योग [latex]\frac { 1 }{ 2 }[/latex] (pq + 1) होगा, जहाँ p ≠ q.

हल : मान लीजिए प्रथम पद $= a$

और सार्व अंतर $= d$

$\therefore$ pवाँ पद $= a + (p-1)\,d = \dfrac{1}{q}$ ...(1)

qवाँ पद $= a + (q-1)\,d = \dfrac{1}{p}$ ...(2)

समी (2) को (1) में से घटाने पर,

$$(p-q)\,d = \frac{1}{q} - \frac{1}{p} = \frac{p-q}{pq}$$

$$\Rightarrow \qquad d = \frac{1}{pq}$$

d का मान समी (1) में रखने पर,

$$\therefore \qquad a + (p-1)\,\frac{1}{pq} = \frac{1}{q}$$

$$a = \frac{1}{q} - \frac{p-1}{pq} = \frac{1}{q} - \frac{1}{q} + \frac{1}{pq} = \frac{1}{pq}$$

$\therefore$ pqपदों का योग $= \dfrac{n}{2}\,[2a + (n-1)d]$

$$= \frac{pq}{2}\left[2 \times \frac{1}{pq} + (pq-1)\frac{1}{pq}\right]$$

$$= \frac{1}{2}[2 + pq - 1]$$

$$= \frac{1}{2}\,[pq + 1].$$

प्रश्न 6.

यदि किसी समांतर श्रेणी 25, 22, 19, ……. के कुछ पदों का योगफल 116 है तो अंतिम पद ज्ञात कीजिए।

हल : दिया है : $a = 25, d = 22 - 25 = -3$

मान लीजिए इस श्रेणी में n पद हैं।

$$n \text{ पदों का योगफल} = 116 = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[2 \times 25 + (n-1)(-3)]$$

$$= \frac{n}{2}[50 - 3(n-1)]$$

$$= \frac{n}{2}[50 - 3n + 3]$$

$$= \frac{n}{2}[53 - 3n]$$

$\therefore$ $$232 = 53n - 3n^2$$

या $$3n^2 - 53n + 232 = 0$$

$$(n-8)(3n-29) = 0$$

$$n \neq \frac{29}{3}$$

या $$n = 8$$

अत: $$8\text{वाँ पद} = a + (n-1)d$$

$$= 25 + (8-1)(-3)$$

$$= 25 - 21$$

$$= 4.$$

प्रश्न 7.

उस समांतर श्रेणी के n पदों को योगफल ज्ञात कीजिए जिसका वाँ पद 5k + 1 हैं।

हल : दिया है, kवाँ पद $= T_k = 5k + 1$

$k = 1, 2$ रखने पर

$$T_1 = 5 \times 1 + 1$$
$$= 5 + 1 = 6$$
$$T_2 = 5 \times 2 + 1$$
$$= 10 + 1 = 11$$
$$d = T_2 - T_1$$
$$= 11 - 6 = 5$$

$\therefore$ n पदों का योगफल $= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

$$= \frac{n}{2}[2 \times 6 + (n-1) . 5]$$

$$= \frac{n}{2}[12 + 5n - 5]$$

$$= \frac{n}{2}[5n + 7].$$

प्रश्न 8.

यदि किसी समांतर श्रेणी के n पदों का योगफले $pn + qn^2$ है, जहाँ p तथा q अचर हों तो

सार्वअंतर ज्ञात कीजिए।

हल : n पदों का योगफल $= S_n = pn + qn^2$

$n = 1, 2$ रखने पर

$$T_1 = S_1 = p \times 1 + q \times 1 = p + q$$

$$S_2 = p \times 2 + q \times 2^2$$

$$= 2q + 4q$$

$$T_2 = S_2 - S_1 = (2p + 4q) - (p + q) = p + 3q$$

$$d = \mathrm{T}_2 - \mathrm{T}_1$$

$$= (p + 3q) - (p + q) = 2q$$

सार्वअंतर $= 2q.$

प्रश्न 9.

दो समांतर श्रेणियों के n पदों के योगफल का अनुपात 5n + 4 : 9n + 6 हो, तो उनके 18 वें पदों का अनुपात ज्ञात करो।

हल:

मान लीजिए समातर श्रेणियों के प्रथम पद a_1, a_2, तथा सार्वअंतर d_1 और d_2 हैं। यदि S_n, S'_n उनके संगत योगफल हैं। T_{18} और T'_{18} उनके संगत 18वें पद हैं।

$$S_n = \frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)\,d_1]$$

$$S'_n = \frac{n}{2}[2a_2 + (n-1)\,d_2]$$

$$\therefore \quad \frac{S_n}{S_n'} = \frac{\frac{n}{2}[2a_1 + (n-1)d_1]}{\frac{n}{2}[2a_2 + (n-1)d_2]}$$

$$\frac{2a_1 + (n-1)d_1}{2a_2 + (n-1)d_2} = \frac{5n+4}{9n+6}$$

हमें ज्ञात करना है

$$\frac{T_{18}}{T'_{18}} = \frac{a_1 + (18-1)d_1}{a_2 + (18-1)d_2}$$

अंश और हर दोनों को 2 से गुणा करने पर

$$\frac{T_{18}}{T'_{18}} = \frac{2a_1 + 2(18-1)d_1}{2a_2 + 2(18-1)d_2}$$

$$= \frac{2a_1 + 34d_1}{2a_2 + 34d_2}$$

समी (1) और (2) की तुलना करने पर

$$n - 1 = 34 \text{ या } n = 35$$

समी (2) में $n = 35$ रखने पर

$$\frac{T_{18}}{T'_{18}} = \frac{2a_1 + 34d_1}{2a_2 + 34d_2}$$

$$= \frac{5 \times 35 + 4}{9 \times 35 + 6}$$

$$= \frac{179}{321}.$$

प्रश्न 10.

यदि किसी समांतर श्रेणी के प्रथम p पदों का योग, प्रथम q पदों के योगफल के बराबर हो, तो प्रथम (p + q) पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए a प्रथम पद व d सार्व अंतर है।

$\therefore$ p पदों का योगफल $= \frac{p}{2}[2a + (p-1)d]$ ...(1)

q पदों का योगफल $= \frac{q}{2}[2a + (q-1)d]$ ...(2)

प्रश्नानुसार,

$$\therefore \quad \frac{p}{2}[2a + (p-1)d] = \frac{q}{2}[2a + (q-1)d]$$

$$2ap + p(p-1)d = 2aq + q(q-1)d$$

या $$2a(p-q) + [p(p-1) - q(q-1)]d = 0$$

या $$2a(p-q) + (p^2 - q^2 - (p-q)]d = 0$$

या $$2a(p-q) + (p-q)[p+q-1]d = 0 \quad ...(3)$$

$p - q$ से भाग करने पर

$$2a + (p + q - 1)d = 0$$

$p + q$ पदों का योगफल $= \frac{p+q}{2}[2a + (p+q-1)d]$

$= \frac{p+q}{2} \times 0 = 0.$ [$\therefore$ समीकरण (3) से]

प्रश्न 11.

यदि किसी समांतर श्रेणी के प्रथम p, q, r पदों का योगफल क्रमशः a, b, c, हो तो सिद्ध कीजिए कि:

$$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0.$$

हल : p पदों का योगफल $= \frac{p}{2}[2a+(p-1)d] = a$

$$2a+(p-1)\,d = \frac{2a}{p} \qquad \ldots(1)$$

q पदों का योगफल $= \frac{q}{2}[2a+(q-1)d] = b$

$$2a+(q-1)d = \frac{2b}{q} \qquad \ldots(2)$$

r पदों का योगफल $= \frac{r}{2}[2a+(r-1)d] = c$

$$\therefore \qquad 2a+(r-1)d = \frac{2c}{r} \qquad \ldots(3)$$

समी (1) को $q-r$ से, समी (2) को $(r-p)$ से, समी. (3) को $(p-q)$ से गुणा करके जोड़ने पर

$$[2a+(p-1)d](q-r)+[2a+(q-1)d](r-p)+[2a+(r-1)d](p-q)$$

$$=\frac{2a}{p}(q-r)+\frac{2b}{q}(r-p)+\frac{2c}{r}(p-q)$$

$$\Rightarrow \frac{2a}{p}(q-r)+\frac{2b}{q}(r-p)+\frac{2c}{r}(p-q)$$

$$= 2a[q-r+r-p+p-q]+d\,[(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)]$$

$$= 0+d\,[p(q-r)+q(r-p)+r(p-q)-[q-r+r-p+p-q]$$

$$= d[pq-pr+qr-pq+pr-qr] = 0$$

2 से भाग देने पर

$$\frac{a}{p}(q-r)+\frac{b}{q}(r-p)+\frac{c}{r}(p-q)=0.$$

इति सिद्धम।

प्रश्न 12.

किसी समांतर श्रेणी के m तथा n पदों के योगफलों का अनुपात $m^2 : n^2$ है तो दर्शाइए कि वे m तथा n वें पदों का अनुपात (2m – 1) : (2n -1) है।

हल : मान लीजिए समांतर श्रेणी का पहला पद a और सार्व अंतर d है।

$\therefore$ m पदों का योगफल $= \frac{m}{2}[2a + (m-1)d]$

n पदों का योगफल $= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$

दिया है: $$\frac{\frac{m}{2}[2a+(m-1)d]}{\frac{n}{2}[2a+(n-1)d]} = \frac{m^2}{n^2}$$

या $$\frac{2a+(m-1)d}{2a+(n-1)d} = \frac{m}{n} \quad ...(1)$$

अब $$\frac{a+(m-1)d}{a+(n-1)d} = \frac{2a+(2m-2)d}{2a+(2n-2)d} \quad ...(2)$$

समी. (1) और (2) की तुलना करने पर

समी. (1) में $m - 1$ के स्थान पर समी. (2) में $2m - 2$ अथवा m के स्थान पर $2m - 1$ रखने पर तथा इसी प्रकार $n - 1$ के स्थान पर $2n - 2$ है अथवा n के स्थान पर $2n - 1$ रखने पर

$\therefore$ $$\frac{2a+(2m-2)d}{2a+(2n-2)d} = \frac{2m-1}{2n-1}$$

या $$\frac{a+(m-1)d}{a+(n-1)d} = \frac{m \text{वाँ पद}}{n \text{वाँ पद}} = \frac{2m-1}{2n-1}.$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 13.

यदि किसी समांतर श्रेणी के पदों का योगफल $3n^2 + 5n$ है तथा इसका m वाँ पद 164 है तो m का मान ज्ञात करो।

हल : n पदों का योगफल, $S_n = 3n^2 + 5n$

$n = 1, 2$ रखने पर

$$S_1 = 3.1^2 + 5.1 = 8 = \text{पहला पद} = a$$

$$S_2 = 3.2^2 + 5.2 = 12 + 10 = 22$$

$$\text{दूसरा पद}, \; T_2 = S_2 - S_1 = 22 - 8 = 14$$

$$\text{सार्व अंतर} = 14 - 8 = 6$$

$$m\text{वाँ पद} = a + (m-1)d = 164$$

$$8 + (m-1) \times 6 = 164$$

$$6(m-1) = 164 - 8 = 156$$

$$\therefore \quad m - 1 = \frac{156}{6} = 26$$

या $$m = 27.$$

प्रश्न 14.

8 और 26 के बीच ऐसी 5 संख्याएँ डालिए ताकि प्राप्त अनुक्रम एक समांतर श्रेणी बन जाए।

हल : माना A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, संख्या 8 और 26 के बीच डाली गई हैं। जिससे

8, A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, 26 समांतर श्रेणी का रूप है।

इस अनुक्रम के कुल पद = 7

पहला पद = 8,

अंतिम पद = 26, यदि सार्व अंतर d हो, तो

$$26 = a + (n - 1)d = 8 + (7 - 1)d$$

$$6d = 26 - 8 = 18,$$

$$d = \frac{18}{6} = 3$$

दूसरा पद $= A_1 = 8 + 3 = 11$

$$A_2 = 11 + 3 = 14$$

$$A_3 = 14 + 3 = 17$$

$$A_4 = 17 + 3 = 20$$

$$A_5 = 20 + 3 = 23$$

अत: A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, के मान क्रमशः 11, 14, 17, 20, 23 हैं।

प्रश्न 15. यदि $\frac{a^n + b^m}{a^{n-1} + b^{n-1}}$, a तथा b के मध्य समांतर माध्य हो, तो n का मान ज्ञात कीजिए।

हल : a और b के बीच समांतर माध्य $= \frac{a+b}{2}$

$\Rightarrow$ $$\frac{a^n + b^n}{a^{n-1} + b^{n-1}} = \frac{a+b}{2}$$

या $$2(a^n + b^n) = (a + b)(a^{n-1} + b^{n-1})$$

या $$2a^n + 2b^n = a^n + ab^{n-1} + a^{n-1}b + b^n$$

या $$a^n - ab^{n-1} = a^{n-1}b - b^n$$

या $$a(a^{n-1} - b^{n-1}) - a^{n-1}b + b^n = 0$$

या $$a(a^{n-1} - b^{n-1}) - b(a^{n-1} - b^{n-1}) = 0$$

या $$(a - b)(a^{n-1} - b^{n-1}) = 0$$

या $a = b$ या $a^{n-1} = b^{n-1}$

$\therefore$ $$a^{n-1} = b^{n-1}$$

या $$\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} = 1$$

अर्थात् $$\left(\frac{a}{b}\right)^{n-1} = 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^0 \Rightarrow n - 1 = 0 \text{ या } n = 1.$$

प्रश्न 16.

m संख्याओं को 1 तथा 31 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रम एक समांतर श्रेणी है। और 7 वीं एवं (m – 1) वीं संख्याओं का अनुपात 5 : 9 है, तो m का मान ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए 1, A_1, A_2,...., A_m, 31, समांतर श्रेणी है।

$$\text{कुल पद} = m + 2$$

$$\text{अंतिम पद} = 31$$

$$31 = a + (m + 2 - 1)d = 1 + (m + 1)d$$

$$\therefore \quad d = \frac{31-1}{m+1} = \frac{30}{m+1}$$

$$A_7 = a + 7d$$

$$= 1 + 7\ \frac{30}{m+1} = \frac{210+m+1}{m+1}$$

$$= \frac{211+m}{m+1}$$

$$A_{m-1} = 1 + (m - 1)d = 1 + (m - 1)\frac{30}{m+1}$$

$$= \frac{m+1+30m-30}{m+1}$$

$$= \frac{31m-29}{m+1}$$

दिया है : $$\frac{7\text{ वाँ पद}}{(m-1)\text{ वाँ पद}} = \frac{5}{9}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{m-211}{31m-29} = \frac{5}{9}$$

या $$5(31m - 29) = 9\ (m + 211)$$

$$155m - 145 = 9m + 1899$$

$$146m = 1899 + 145 = 2044$$

$$m = \frac{2044}{146} = 14.$$

प्रश्न 17.

एक व्यक्ति ऋण का भुगतान 100 रुपए की प्रथम किश्त से शुरू करता है। यदि वह प्रत्येक किश्त में 5 रुपए प्रति माह बढ़ाता है, तो 30 वीं किश्त की राशि क्या होगी?

हल:

पहली किश्त a = 100 रु.

हर माह किश्त में बढ़ोत्तरी = सार्व अंतर = 5 रु.

30वीं किश्त = समांतर श्रेणी का 30वाँ पद = a + (n – 1)d

= 100 + (30 – 1) 5 = 100 + 29 x 5 = 100 + 145 = 245 रु.

प्रश्न 18.

एक बहुभुज के दो क्रमिक अंतः कोणों का अंतर 5° है। यदि सबसे छोटा कोण 120° हो, तो बहुभुज की भुजाओं की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : एक n भुजाओं वाले बहुभुज के अंत: कोणों का योग

$$= 180n - 360 \quad \text{...(1)}$$

दिया है कि एक अंत: कोण = समांतर श्रेणी का पहला पद = 120°

क्रमिक अंत: कोणों का अंतर = समांतर श्रेणी का सार्व अंतर = $d = 5$

∴ n अंत: कोणों का योग = समांतर श्रेणी के n पदों का योग

$$= \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[2 \times 120 + (n-1) \times 5]$$

$$= \frac{n}{2}[240 + 5n - 5]$$

$$= \frac{n}{2}[5n + 235] \quad \text{...(2)}$$

समी (1) और (2) से, $\frac{n}{2}[5n + 235] = 180n - 360$

या $\quad \therefore \quad 5n^2 + 235\,n = 360n - 720$

या $\quad 5n^2 - 125n + 720 = 0$

या $\quad n^2 - 25n + 144 = 0$

$\therefore \quad (n - 16)(n - 9) = 0$

$\therefore \quad n = 16, 9$

परन्तु $\quad n \neq 16$ इसलिए $n = 9$.

प्रश्नावली 9.3

प्रश्न 1.

गुणोत्तर श्रेणी [latex]\frac { 5 }{ 2 }[/latex] , [latex]\frac { 5 }{ 4 }[/latex] , [latex]\frac { 5 }{ 8 }[/latex] ……. का 20 वाँ तथा n वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद, $a = \frac{5}{2}$

$$\text{दूसरा पद} = \frac{5}{4}, \text{ सार्व अनुपात} = \frac{1}{2}$$

$$n\text{वाँ पद} = ar^{n-1} = \frac{5}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{5}{2^n}.$$

$n = 20$ रखने पर, $\quad 20\text{वाँ पद} = \frac{5}{2^{20}}$.

प्रश्न 2.

उस गुणोत्तर श्रेणी का 12 वाँ पद ज्ञात कीजिए, जिसका 8वाँ पद 192 तथा सार्व अनुपात 2 है।

हल : मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद $= a$

सार्व अनुपात $= 2$

12वाँ पद $= a \times 2^{12-1} = 2^{11} a$

8वाँ पद $= a.\ 2^{8-1} = a\ .\ 2^7 = 128a$

दिया है : 8वाँ पद $= 192$

$\therefore$ $128a = 192$

या $a = \frac{192}{128} = \frac{3}{2}$

$\therefore$ 12वाँ पद $= 2^{11} \times \frac{3}{2}$

$= 2^{10} \times 3$

$= 1024 \times 3$

$= 3072.$

प्रश्न 3.

किसी गुणोत्तर श्रेणी का 5 वाँ, 8 वाँ तथा 11 वाँ पदक्रमशः p, q तथा s हैं, तो दिखाइए कि $q^2 = ps$.

हल : मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद $= a$

सार्व तथा अनुपात $= r$

5वाँ पद $= ar^{5-1} = ar^4 = p$

8वाँ पद $= ar^{8-1} = ar^7 = q$

11वाँ पद $= ar^{11-1} = ar^{10} = s$

बायाँ पक्ष $= q^2 = (ar^7)^2 = a^2.\ r^{14}$

दायाँ पक्ष $= ps = ar^4\ ar^{10} = a^2\ r^{14}$

अतः $q^2 = ps.$

प्रश्न 4.

किसी गुणोत्तर श्रेणी का चौथा पद उसके दूसरे पद का वर्ग है तथा प्रथम पद -3 है, तो 7वाँ पद ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद, $a = -3$

तथा सार्व-अनुपात $= r$

चौथा पद $= ar^{4-1} = ar^3 = -3r^3$

दूसरा पद $= ar = -3r$

दिया है : चौथा पद = (दूसरे पद)^2

$\Rightarrow \quad -3r^3 = (-3r)^2 = 9r^2$

$r = -3$

7वाँ पद $= ar^{7-1} = ar^6 = (-3)\,(-3)^6$

$= (-3)^7 = -2187.$

प्रश्न 5.

अनुक्रमों को कौन सा पद:

(a) $2, 2\sqrt{2}, 4, \ldots ; 128$ है ?

(b) $\sqrt{3}, 3, 3, \ldots ; 729$ है ?

(c) $\frac{1}{3}, \frac{1}{9}, \frac{1}{27}, \ldots ; \frac{1}{19683}$ है ?

हल : (a) गुणोत्तर श्रेणी का पहला व दूसरा पद क्रमशः 2 और $2\sqrt{2}$

$\therefore$ सार्व-अनुपात $= \frac{2\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$

nवाँ पद $= ar^{n-1} = 2\,(\sqrt{2})^{n-1} = 128$

$\Rightarrow \quad 2.2^{\frac{n-1}{2}} = 128$ या $2^{\frac{n-1}{2}} = 64 = 2^6$

$\therefore \qquad \frac{n-1}{2} = 6, n-1 = 12$ या $n = 13.$

(b) गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद $= \sqrt{3}$

दूसरा पद $= 3$

सार्व अनुपात $= \frac{3}{\sqrt{3}} = \sqrt{3}$

nवाँ पद $= ar^{n-1}$

$$= \sqrt{3}(\sqrt{3})^{n-1} = (\sqrt{3})^n = 3^{\frac{n}{2}}$$

दिया है: $\qquad n$वाँ पद $= 3^{\frac{n}{2}} = 729 = 3^6$

अर्थात् $\qquad \frac{n}{2} = 6 = n = 12$

(c) गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद, $a = \frac{1}{3}$

दूसरा पद $= \frac{1}{9}$

$\therefore \qquad$ सार्व अनुपात $= \frac{1}{9} \div \frac{1}{3} = \frac{1}{9} \times 3 = \frac{1}{3}$

nवाँ पद $= ar^{n-1} = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \frac{1}{3^n}$

दिया है : $\qquad \frac{1}{3^n} = \frac{1}{19683} = \frac{1}{3^9}$

अतः $\qquad n = 9.$

प्रश्न 6.

x के किस मान के लिए संख्याएँ [latex]\frac { -2 }{ 7 }[/latex], x , [latex]\frac { -7 }{ 2

}[/latex] गुणोत्तर श्रेणी में हैं?

हल : संख्याएँ a, b और c गुणोत्तर श्रेणी में है यदि $b^2 = ac$

$\therefore -\frac{2}{7}, x, \frac{-7}{2}$ गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

यदि
$$x^2 = \left(-\frac{2}{7}\right)\left(-\frac{7}{2}\right) = 1$$
$$x = \pm 1.$$

प्रश्न 7 से 10 तक प्रत्येक गुणोत्तर श्रेणी का योगफल निर्दिष्ट पदों तक ज्ञात कीजिए।

प्रश्न 7.

0.15, 0.015, 0.0015, ….. 20 पदों तक।

हल : गुणोत्तर श्रेणी 0.15, 0.015, 0.0015

$$\text{पहला पद, } a = 0.15$$
$$\text{सार्व अनुपात, } r = \frac{0.015}{0.15} = 0.1$$
$$\text{गुणोत्तर श्रेणी का योगफल} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$
$$= \frac{0.15[1-(0.1)^{20}]}{1-(0.1)}$$
$$= \frac{0.15[1-(0.1)^{20}]}{0.9}$$
$$= \frac{1-(0.1)^{20}}{6}.$$

प्रश्न 8.

√7, √21, 3√7, …. n पदों तक।

हल : गुणोत्तर श्रेणी $\sqrt{7}, \sqrt{21}, 3\sqrt{7}, \ldots\ldots$

पहला पद, $a = \sqrt{7}$, सार्व अनुपात, $r = \frac{\sqrt{21}}{\sqrt{7}} = \sqrt{3}$

n पदों का योग $= \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ जब $r > 1$

$$= \frac{\sqrt{7}\left[\left(\sqrt{3}\right)^n - 1\right]}{r-1}$$

$$= \frac{\sqrt{7}\,(3^{n/2} - 1)}{\sqrt{3}-1} \times \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}+1}$$

$$= \frac{\sqrt{7}\left(\sqrt{3}+1\right)\left(3^{\frac{n}{2}} - 1\right)}{2}.$$

प्रश्न 9.

1, -a, $-a^2$, $-a^3$ …. n पदों तक (यदि a ≠ -1).

हल : गुणोत्तर श्रेणी $1, -a, a^2, -a^3, \ldots$

$$\text{पहला पद, } a = 1, \text{ सार्व अनुपात, } r = \frac{-a}{1} = -a$$

$$\therefore \quad n \text{ पदों का योग} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}, r > 1$$

$$= \frac{a(-a)^n)}{1-r} =, r > 1$$

$$= \frac{1.\left[1-(-a)^n\right]}{1-(-a)}$$

$$= \frac{[1-(-a)^n]}{1+a}.$$

प्रश्न 10.

x^3 , x^5, x^7 … n पदों तक (यदि x ≠ ±1).

हल : गुणोत्तर श्रेणी $x^3, x^5, x^7, \ldots$

$$\text{पहला पद, } a = x^3, \text{ सार्व अनुपात, } r = \frac{x^5}{x^3} = x^2$$

$$\therefore \quad n \text{ पदों का योगफल} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{x^3.\left[1-(x^2)^n\right]}{1-x^2}$$

$$= \frac{x^3.\left[1-x^{2n}\right]}{1-x^2}.$$

प्रश्न 11. मान ज्ञात कीजिए $\sum_{k=1}^{11}(2+3^k)$.

हल : $\sum_{k=1}^{11}(2+3^k) = (2+3)+(2+3^2)+(2+3^3)+\ldots 11$ पदों तक

$= 2\times 11 + (3+3^2+3^3+\ldots 11$ पदों तक$)$

$$= 22 + \frac{3(3^{11}-1)}{3-1} \quad \left[\because a=3, r=3, S=\frac{a(r^n-1)}{r-1}\right]$$

$$= 22 + \frac{3}{2}(3^{11}-1).$$

प्रश्न 12.

एक गुणोत्तर श्रेणी के तीन पदों का योगफल [latex]\frac { 39 }{ 10 }[/latex] है तथा उनका

गुणनफल 1 है। सार्व अनुपात तथा पदों को ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी के तीन पद $\frac{a}{r}$, a तथा ar हैं।

योगफल, $\frac{a}{r} + a + ar = \frac{39}{10}$ ...(1)

तथा गुणनफल $= \frac{a}{r} \times a \times ar = a^3 = 1$

या $a = 1$ ...(2)

समी (1) में $a = 1$ रखने पर

$$\frac{1}{r} + 1 + r = \frac{39}{10}$$

$10r$ से गुणा करने पर

$$10 + 10r + 10r^2 = 39r$$
$$10r^2 - 29r + 10 = 0$$
$$(2r - 5)(5r - 2) = 0$$
$$r = \frac{5}{2} \text{ या } \frac{2}{5}$$
$$a = 1$$
$$\frac{1}{r} = \frac{5}{2}, r = \frac{2}{5}$$

$\therefore$ गुणोत्तर श्रेणी के पद $= \frac{5}{2}, 1, \frac{2}{5}$ या $\frac{2}{5}, 1, \frac{5}{2}$.

प्रश्न 13.

मुणोत्तर श्रेणी 3, 3^2, 3^3, …… के कितने पद आवश्यक हैं ताकि उनका योगफल 120 हो जाए।

हल : मान लो गुणोत्तर श्रेणी के कुल पद = n

पहला पद, $a = 3$, सार्व अनुपात, $r = \frac{3^2}{3} = 3$

n पदों का योगफल $= \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, r > 1$

$$= \frac{3(3^n - 1)}{3 - 1} = 120$$

या $3(3^n - 1) = 120 \times 2 = 240$

3 से भाग देने पर

$$3^n - 1 = \frac{240}{3} = 80$$

या $3^n = 80 + 1 = 81 = 3^4$

अत: $n = 4$.

प्रश्न 14.

किसी गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम तीन पदों का योगफल 16 है तथा अगले 3 पदों का योग 128 है तो गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद, सार्व अनुपात तथा n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी $a, ar, ar^2, ...$ है।

पहला पद $= a$, सार्व अनुपात $= r$

$$\text{तीन पदों का योगफल} = \frac{a(1-r^3)}{1-r} = 16 \qquad ...(1)$$

$$\text{चौथा पद} = a \times r^{n-1} = ar^{4-1} = ar^3$$

$$\text{अगले तीन पदों का योगफल} = \frac{ar^3(1-r^3)}{1-r} = 128 \qquad ...(2)$$

समी (2) को (1) से भाग देने पर,

$$\frac{ar^3(1-r^3)}{1-r} \times \frac{1-r}{a(1-r^3)} = \frac{128}{16} = 8$$

$\therefore$ $r^3 = 8$ या $r = 2$

$\therefore$ समी (1) में r का मान रखने पर

$$\frac{a(1-8)}{1-2} = 16 \text{ या } 7a = 16$$

$$\therefore \quad a = \frac{16}{7}$$

यहाँ $r > 1$ $\therefore$ $$S_n = \frac{\frac{16}{7}(2^n - 1)}{2-1}$$

$$= \frac{16}{7}(2^n - 1)$$

अतः $a = \frac{16}{7}$, $r = 2$, $S_n = \frac{16}{7}(2^n - 1)$.

प्रश्न 15.

एक गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम पद a = 729 तथा 7वाँ पद 64 है, तो S_7 ज्ञात कीजिए।

हल : गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद, $a = 729$

मान लीजिए सार्व अनुपात $= r$

$\therefore$ 7वाँ पद $= ar^{7-1} = ar^6$

$$729\, r^6 = 64$$

$$\Rightarrow \quad r^6 = \frac{64}{729} = \left(\frac{2}{3}\right)^6$$

$$\therefore \quad r = \frac{2}{3}$$

अब

$$S_7 = \frac{a(1-r^n)}{1-r} = \frac{729\left[1-\left(\frac{2}{3}\right)^7\right]}{1-\frac{2}{3}}$$

$$= 729 \times 3 \times \left[\frac{2187-128}{2187}\right]$$

$$= \frac{729 \times 3}{2187}(2059)$$

$$= 2059.$$

प्रश्न 16.

एक गुणोत्तर श्रेणी को ज्ञात कीजिए, जिसके प्रथम दो पदों का योगफल -4 है तथा 5वाँ पद तृतीय पद को 4 गुना है।

हल : मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद $= a$,

सार्व अनुपात $= r$

$\therefore$ 4वाँ पद $= ar^3 = x$

10वाँ पद $= ar^9 = y$

16वाँ पद $= ar^{15} = z$

$\therefore$ $y^2 = (ar^9)^2 = a^2r^{18}$

और $zx = ar^{15} \times ar^3 = a^2r^{18}$

$\therefore$ $y^2 = xz$

अतः x, y, z गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

$\therefore$ गुणोत्तर श्रेणी $-\frac{4}{3}, -\frac{8}{3}, -\frac{16}{3}, \ldots$ है

और जब $r = -2$, $\therefore a(1-2) = -4$, या $a = 4$

गुणोत्तर श्रेणी है: 4, – 8, 16, – 32,....

प्रश्न 17.

यदि किसी गुणोत्तर का 4 वाँ, 10 वाँ तथा 16 वाँ पद क्रमशः x, y तथा z हैं, तो सिद्ध कीजिए कि

x, y, z गुणोत्तर श्रेणी में हैं।

हल : मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद $= a$

सार्व अनुपात $= r$

पहले दो पदों का योग $= a + ar = -4$

5वाँ पद $= ar^4$, तीसरा पद $= ar^2$

5वाँ पद $= 4 \times$ तीसरा पद

$$ar^4 = 4 \times ar^2$$

$\therefore$ $r^2 = 4$ या $r = \pm 2$

समी (1) में $r = 2$ रखने पर

$$a(1 + 2) = -4$$

$$\therefore \quad a = -\frac{4}{3}$$

प्रश्न 18.

अनुक्रम 8, 88, 888, ……. के n पदों का योग ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए $S = 8 + 88 + 888 + ...n$ पदों तक

$= 8\ [1 + 11 + 111 + ...\ n$ पदों तक$]$

$= \frac{8}{9}\ [9 + 99 + 999 + ...n$ पदों तक$]$

$= \frac{8}{9}[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + ...n$ पदों तक$]$

$= \frac{8}{9}[(10 + 100 + 1000 + ...n$ पदों तक $- n]$

$$= \frac{8}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right] \qquad \left[\because S = \frac{a(r^n - 1)}{r - 1}, a = 10, r = 10\right]$$

$$= \frac{8}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right]$$

$$= \frac{80}{81}(10^n - 1) - \frac{8}{9}n.$$

प्रश्न 19.

अनुक्रम 2, 4, 8, 16, 32, तथा 128, 32, 8, 2, [latex]\frac { 1 }{ 2 }[/latex] के संगत पेदीं के

गुणनफल से बने अनुक्रम का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : अनुक्रम 2, 4, 8, 16, 32 तथा 128, 32, 8, 2, $\frac{1}{2}$ के संगत पदों के गुणनफल $2 \times 128, 4 \times 32, 8 \times 8, 16 \times 2, 32 \times \frac{1}{2}$ या 256, 128, 64, 32, 16.

गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद, $a = 256$

$$r = \frac{128}{256} = \frac{1}{2}, n = 5$$

$$\therefore \quad \text{योगफल} = \frac{256\left[1-\left(\frac{1}{2}\right)^5\right]}{1-\frac{1}{2}}$$

$$= 256 \times 2\left(1-\frac{1}{32}\right)$$

$$= 256 \times 2 \times \frac{31}{32}$$

$$= 16 \times 31 = 496.$$

प्रश्न 20.

दिखाइए कि अनुक्रम a, ar, ar^2,….ar^{n-1} तथा A, AR, AR^2, … AR^{n-1} के संगत पदों के गुणनफल से बना अनुक्रमे गुणोत्तर श्रेणी होती है तथा सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।

gy %अनुक्रम $a, ar, ar^2, \ldots ar^{n-1}$ तथा $A, AR, AR^2, \ldots AR^{n-1}$ के संगत पदों के गुणनफल से बना अनुक्रम

या $\quad aA, arAR, ar^2. AR^2, \ldots$

या $\quad aA, aArR, aAr^2 R^2, \ldots$

स्पष्ट है कि यह पद गुणोत्तर श्रेणी में है।

इसका पहला पद $= a$A

$$\text{सार्व अनुपात} = \frac{aArR}{aA} = rR.$$

प्रश्न 21.

ऐसे चार पद ज्ञात कीजिए जो गुणोत्तर श्रेणी में हो, जिसका तीसरा पद प्रथम पद से 9 अधिक हो,

तथा दूसरा पद चौथे पद से 18 अधिक हो।

हल : मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी $a, ar, ar^2, ar^3, \ldots$ है

तीसरा पद $= ar^2$, प्रथम पद $= a$

$\therefore \quad ar^2 - a = 9$

दूसरा पद $= ar$, चौथा पद $= ar^3$

$ar - ar^3 = 18$

समी (1) को (2) से भाग देने पर,

$$\frac{a(r^2-1)}{a(r-r^3)} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$$

या $\quad 2(r^2-1) = r - r^3$

$\therefore \quad r^3 + 2r^2 - r - 2 = 0$

या $\quad (r-1)(r+1)(r+2) = 0$

या $\quad r = 1, -1, -2$ यदि $r = -2$,

समी (1) से, $\quad a(4-1) = 9$

$\therefore \quad a = 3$

$\therefore$ गुणोत्तर श्रेणी के चार पद $3, -6, 12, -24$.

प्रश्न 22.

यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का p वाँ, q वाँ तथा r वाँ पद क्रमशः a, b, तथा c हो, तो सिद्ध कीजिए

कि $a^{q-r} . b^{r-p} – c^{p-q} = 1$.

हल : मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद A और सार्व अनुपात R है

$$p\text{वाँ पद} = AR^{p-1} = a \quad \text{....(1)}$$

$$q\text{वाँ पद} = AR^{q-1} = b \quad \text{....(2)}$$

$$r\text{वाँ पद} = AR^{r-1} = c \quad \text{....(3)}$$

समी. (1) की $q - r$, समी (2) की $r - p$, समी (3) की $p - q$ घात का प्रयोग करने पर,

$$a^{q-r}. b^{r-p}. c^{p-q} = (AR^{p-1})^{q-r}. (AR^{q-1})^{r-p}. (AR^{r-1})^{p-q}$$

$$= A^{q-r+r-p+p-q} R^{(p-1)(q-r)+(q-1)(r-p)+(r-1)(p-q)}$$

$$= A^{0} \cdot R^{p(q-r)-1(q-r)+q(r-p)-1(r-p)+r(p-q)-1(p-q)}$$

$$= R^{pq-pr-q+r+qr-pq-r+p+rp-rq-p+q}$$

$$= R^{0} = 1.$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 23.

यदि किसी गुणोत्तर श्रेणी का प्रथम तथा n वाँ पद a तथा b हैं, एवं P, n पदों का गुणनफल हो, तो सिद्ध कीजिए कि $P^2 = (ab)^n$.

हल : मान लो गुणोत्तर श्रेणी का सार्व अनुपात r है।

$$\text{पहला पद} = a, \; n\text{वाँ पद} = ar^{n-1} = b$$

$$\therefore \quad P = n \text{ पदों का गुणनफल}$$

$$= a. ar. ar^2. ar^3 .....ar^{n-1}$$

$$= a^n . r^{1+2+3+...+(n-1)} = a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$$P^2 = a^{2n} r^{n(n-1)} \quad ...(1)$$

$$(ab)^n = (a \times ar^{n-1})^n = (a^2 r^{n-1})^n = a^{2n}. r^{n(n-1)} \quad ...(2)$$

समी (1) और (2) से, $P^2 = (ab)^n$.

इति सिद्धम्।

प्रश्न 24.

दिखाइए कि एक गुणोत्तर श्रेणी के प्रथम n पदों का योगफल तथा (n + 1)वें पद से (2n) वें पद

तक के पदों के योगफल का अनुपात [latex]\frac { 1 }{ { r }^{ n } }[/latex] हैं।

हल : मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी का पहला पद a और सार्व अनुपात $= r$ हों, तब

$$n \text{ पदों का योगफल} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \quad ....(1)$$

$$(n+1)\text{वाँ पद} = ar^{n+1-1} = ar^n$$

$\therefore ar^n + ar^{n+1} + ar^{n+2} + ...n$ पदों तक

$$= \frac{ar^n(1-r^n)}{1-r} \quad ....(2)$$

समी (1) को (2) से भाग देने पर,

$$\frac{n \text{ पदों का योगफल}}{\text{अगले } n \text{ पदों का योगफल}} = \frac{a(1-r^n)}{1-r} \div \frac{ar^n(1-r^n)}{1-r}$$

$$= \frac{a(1-r^n)}{1-r} \times \frac{1-r}{ar^n(1-r^n)} = \frac{1}{r^n}$$

इति सिद्धम्।

प्रश्न 25.

यदि a, b, c तथा d गुणोत्तर श्रेणी में हैं तो दिखाइए कि $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab +$

bc + cd)².

हल : मान लीजिए गुणोत्तर श्रेणी का सार्व अनुपात r है।

$\therefore \quad b = ar, c = ar^2, d = ar^3$

$$\text{बायाँ पक्ष} = (a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2)$$
$$= [a^2 + (ar)^2 + (ar^2)^2][(ar)^2 + (ar^2)^2 + (ar^3)^2]$$
$$= a^4 (1 + r^2 + r^4)(r^2 + r^4 + r^6)$$
$$= a^4 r^2 (1 + r^2 + r^4)(1 + r^2 + r^4)$$
$$= a^4 r^2 (1 + r^2 + r^4)^2$$

$$\text{दायाँ पक्ष} = (ab + bc + cd)^2$$
$$= [a \,.\, ar + ar.\, ar^2 + ar^2.\, ar^3]^2$$
$$= a^4 r^2 (1 + r^2 + r^4)^2$$

अत: $(a^2 + b^2 + c^2)(b^2 + c^2 + d^2) = (ab + bc + cd)^2$.

प्रश्न 26.

ऐसी दो संख्याएँ ज्ञात कीजिए जिनको 3 और 81 के बीच रखने पर प्राप्त अनुक्रमः एक गुणोत्तर श्रेणी बन जाए।

हल : मान लीजिए G_1, G_2 ऐसी दो संख्याएँ हैं जिससे 3, G_1, G_2, 81 गुणोत्तर श्रेणी बनाते हैं।

यह कुल चार पद हैं। यदि r सार्व अनुपात हो तो

$\therefore \quad 81 = 3.\, r^{4-1} = 3 \,.\, r^3$

$\Rightarrow \quad r = 3$

$$G_1 = 3r = 3 \,.\, 3 = 9$$
$$G_2 = 3r^2 = 3 \,.\, 3^2 = 27$$

अत: संख्याएँ 9 और 27 हैं।

प्रश्न 27. n का मान ज्ञात कीजिए ताकि $\dfrac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n}$, a तथा b के बीच गुणोत्तर माध्य हो।

हल : a और b के बीच गुणोत्तर माध्य $= \sqrt{ab}$

$$\frac{a^{n+1}+b^{n+1}}{a^n+b^n} = \sqrt{ab}$$

$\therefore$ $$a^{n+1}+b^{n+1} = \sqrt{ab}\,(a^n+b^n)$$

$$= a^{n+\frac{1}{2}}\,b^{\frac{1}{2}} + a^{\frac{1}{2}}\,b^{n+\frac{1}{2}}$$

या $$\left(a^{n+1} - a^{n+\frac{1}{2}}b^{\frac{1}{2}}\right) - \left(a^{\frac{1}{2}}\,b^{n+\frac{1}{2}} - b^{n+1}\right) = 0$$

या $$a^{n+\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) - b^{n+\frac{1}{2}}\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right) = 0$$

या $$\left(a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}}\right)\left(a^{n+\frac{1}{2}} - b^{n+\frac{1}{2}}\right) = 0$$

$$a^{\frac{1}{2}} - b^{\frac{1}{2}} \neq 0$$

$\therefore$ $$a^{n+\frac{1}{2}} - b^{n+\frac{1}{2}} = 0$$

या $$a^{n+\frac{1}{2}} = b^{n+\frac{1}{2}}$$

या $$\left(\frac{a}{b}\right)^{n+\frac{1}{2}} = 1 = \left(\frac{a}{b}\right)^0$$

$\Rightarrow$ $$n + \frac{1}{2} = 0 \text{ या } n = -\frac{1}{2}.$$

प्रश्न 28.

दो संख्याओं का योगफल उनके गुणोत्तर माध्य का 6 गुना है तो दिखाइए कि संख्याएँ (3 + 2√2) : (3 – 2√2) के अनुपात में हैं।

हल : मान लीजिए संख्याएँ a और b हों, तब

$$a \text{ और } b \text{ का गुणोत्तर माध्य} = \sqrt{ab}$$

दिया है :

$$a + b = 6\sqrt{ab}$$

$$a + b + 2\sqrt{ab} = 8\sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 = 8\sqrt{ab} \quad \text{...(1)}$$

$$a + b - 2\sqrt{ab} = 4\sqrt{ab}$$

$$(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = 4\sqrt{ab} \quad \text{...(2)}$$

समी. (1) को (2) से भाग देने पर,

$$\frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b})^2}{(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2} = \frac{8\sqrt{ab}}{4\sqrt{ab}} = 2$$

या

$$\frac{\sqrt{a} + \sqrt{b}}{\sqrt{a} - \sqrt{b}} = \frac{\sqrt{2}}{1}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) + (\sqrt{a} - \sqrt{b})}{(\sqrt{a} + \sqrt{b}) - (\sqrt{a} - \sqrt{b})} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$$

$$\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{2} + 1}{\sqrt{2} - 1}$$

वर्ग करने पर,

$$\frac{a}{b} = \frac{(\sqrt{2} + 1)^2}{(\sqrt{2} - 1)^2} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}}$$

अतः

$$\frac{a}{b} = \frac{3 + 2\sqrt{2}}{3 - 2\sqrt{2}}.$$

प्रश्न 29.

यदि A तथा G दो धनात्मक संख्याओं के बीच क्रमशः समांतर तथा गुणोत्तर माध्य हों, तो सिद्ध करो कि संख्याएँ A ≠ √{(A + G)(A – G)} हैं।

हल : मान लीजिए संख्याएँ a और b हैं।

$$\frac{a+b}{2} = A \quad \text{....(1)}$$

$$\sqrt{ab} = G \quad \text{....(2)}$$

$$A^2 - G^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 - \left(\sqrt{ab}\right)^2$$

$$= \frac{(a+b)^2}{4} - ab = \frac{(a+b)^2 - 4ab}{4}$$

$$= \frac{(a-b)^2}{4}$$

$$\frac{a-b}{2} = \sqrt{A^2 - G^2} \quad \text{...(3)}$$

समी (1) और (3) को जोड़ने पर

$$a = A + \sqrt{A^2 - G^2}$$

(1) में से (3) को घटाने पर

$$b = A - \sqrt{A^2 - G^2}$$

$\therefore$ संख्याएँ a, b को $A \pm \sqrt{A^2 - G^2} = A \pm \sqrt{(A+G)(A-G)}$ से दर्शाया जा सकता है। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 30.

किसी कल्चर में बैक्टीरिया की संख्या प्रत्येक घण्टे के पश्चात् दुगुनी हो जाती है। यदि प्रारंभ में उसमें 30 बैक्टीरिया उपस्थित थे, तो बैक्टीरिया की संख्या दूसरे, चौथे तथा n वें घण्टों बाद क्या होगी ?

हल:

प्रारम्भ में बैक्टीरिया की संख्या a = 30

प्रत्येक घण्टे बाद बैक्टीरिया की संख्या दुगुनी हो जाती है।

सार्व अनुपात = 2

दूसरे घण्टे बाद बैक्टीरिया संख्या = $ar^2 = 30 \times 2^2 = 120$

चौथे घण्टे बाद बैक्टीरिया संख्या = $ar^4 = 30 \times 2^4 = 480$

n वें घण्टे बाद बैक्टीरिया संख्या = $ar^n = 30 \times 2^n$

प्रश्न 31.

500 रुपए धनराशि 10% वार्षिक चक्रवृद्धि ब्याज पर 10 वर्षों बाद क्या हो जाएगी, ज्ञात कीजिए ?

हल : माना A मिश्रधन, P मूलधन, r% प्रतिवर्ष ब्याज की दर तथा n वर्ष का समय हो, तो

$$A = P\left(1+\frac{r}{100}\right)^n$$

दिया है: $P = 500, r = 10\%, n = 10$ वर्ष

$$A = 500\left(1+\frac{10}{100}\right)$$

$$= 500 \times (1.1)^{10}.$$

प्रश्न 32.

यदि किसी द्विघात समीकरण के मूलों के समांतर माध्य एवं गुणोत्तर माध्य क्रमशः 8 तथा 5 हैं, तो द्विधातीय समीकरण ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए द्विघात समीकरण के मूल α और β हों, तब

$$\frac{\alpha+\beta}{2} = 8 \qquad \therefore \alpha+\beta = 16$$

तथा

$$\sqrt{\alpha\beta} = 5 \qquad \therefore \alpha\beta = 25$$

$\therefore$ द्विघातीय समीकरण

$$x^2 - (\alpha+\beta)x + \alpha\beta = 0$$

$$\Rightarrow \qquad x^2 - 16x + 25 = 0.$$

प्रश्नावली 9.4

प्रश्न 1 से 7 तक प्रत्येक श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए:

प्रश्न 1.

1 x 2 + 2 x 3 + 3 x 4 + 4 x 5 +....

हल : $1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + 4 \times 5 + \ldots\ldots$

प्रत्येक पद के दो गुणनखण्ड हैं।

पहले गुणनखंडों से बनी श्रेढ़ी 1, 2, 3, 4......

$\therefore$ nवाँ पद $= n$

दूसरे गुणनखंडों से बनी श्रेढ़ी 2, 3, 4, 5.......

nवाँ पद $= (n + 1)$

$1 \times 2 + 2 \times 3 + 3 \times 4 + \ldots$ का nवाँ पद $= n(n + 1) = n^2 + n$

$\therefore$ श्रेढ़ी का योगफल $= \Sigma n^2 + \Sigma n$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}\left[\frac{2n+1}{3} + 1\right]$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)}{3}.$$

प्रश्न 2.

1 x 2 x 3 + 2 x 3 x 4 + 3 x 4 x 5 + …….

हल : $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \ldots\ldots$

पहले गुणनखंडों की श्रेढ़ी 1, 2, 3, 4, ...n

nवाँ पद $= n$

दूसरे गुणनखंडों की श्रेढ़ी 2, 3, 4, 5,....

nवाँ पद $= (n + 1)$

तीसरे गुणनखंडों की श्रेढ़ी. 3, 4, 5....

nवाँ पद $= (n + 2)$

$\therefore$ $1 \times 2 \times 3 + 2 \times 3 \times 4 + 3 \times 4 \times 5 + \ldots\ldots$ का nवाँ पद

$$= n(n+1)(n+2) = n(n^2 + 3n + 2)$$
$$= n^3 + 3n^2 + 2n$$

$\therefore$ श्रेढ़ी का योगफल $= \Sigma n^3 + 3\Sigma n^2 + 2\Sigma n$

$$= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + \frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}[n(n+1) + 2(2n+1) + 4]$$

$$= \frac{n(n+1)}{4}[n^2 + n + 4n + 2 + 4]$$

$$= \frac{n(n+1)(n^2 + 5n + 6)}{4}$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(n+3)}{4}.$$

प्रश्न 3.

3 x 1^2 + 5 x 2^2 + 7 x 3^2 + …….

हल : $3 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + ...$

पहले गुणनखंड 3, 5, 7,...... का nवाँ पद $= 3 + (n - 1).\ 2 = 2n + 1$

दूसरे गुणनखंड $1^2, 2^2, 3^2.....$ का nवाँ पद $= n^2$

$\therefore\ 3 \times 1^2 + 5 \times 2^2 + 7 \times 3^2 + ...$ का nवाँ पद

$$= (2n + 1)\ n^2 = 2n^3 + n^2$$

दी हुई श्रेढ़ी का योगफल $= 2\Sigma n^3 + \Sigma n^2$

$$= \frac{2n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)}{6}[3n(n + 1) + 2n + 1]$$

$$= \frac{n(n+1)}{6}(3n^2 + 5n + 1)$$

$$= \frac{1}{6}n(n + 1)(3n^2 + 5n + 1).$$

प्रश्न 4. $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+.....$

हल : $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+....$

1, 2, 3,...... का nवाँ पद $= n$

2, 3, 4,......का nवाँ पद $= (n + 1)$

$\therefore$ $\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+$.......का nवाँ पद $= \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$

पदों को T_1 , T_2, T_3, से निरूपित करते हैं और $n = 1, 2, 3$ रखने पर,

$$T_1 = \frac{1}{1} - \frac{1}{2}$$

$$T_2 = \frac{1}{2} - \frac{1}{3}$$

$$T_3 = \frac{1}{3} - \frac{1}{4}$$

$$T_4 = \frac{1}{4} - \frac{1}{5}$$

....

$$T_n = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$$

जोड़ने पर $T_1 + T_2 + T_3 + ... + T_n$

$$= 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}.$$

प्रश्न 5.

$5^2 + 6^2 + 7^2 + \ldots 20^2$.

हल : nवें पद वाली इस श्रेणी में,

$$(n+4)^2 = n^2 + 8n + 16$$

$$S_n = \Sigma T_n = \Sigma n^2 + 8\,\Sigma n + (16 + 16 + \ldots\ldots n.\ \text{पदों तक})$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 8 \times \frac{n(n+1)}{2} + 16n$$

$$= \frac{n}{6}\ [(n+1)(2n+1) + 24(n+1) + 96]$$

$$= \frac{n}{6}\ [2n^2 + 2n + n + 1 + 24n + 24 + 96]$$

$$= \frac{n}{6}\ [2n^2 + 27n + 121]$$

यहाँ $n = 16$ रखने पर,

$$= \frac{16}{6}\ [2 \times 16^2 + 27 \times 16 + 121]$$

$$= \frac{8}{3}\ (512 + 432 + 121]$$

$$= \frac{8}{3} \times 1065$$

$$= 2840.$$

प्रश्न 6.

3 x 8 + 6 x 11 + 9 x 14+…..

हल : $3 \times 8 + 6 \times 11 + 9 \times 14 + ...$

3, 6, 9 का nवाँ पद $= 3n$

8, 11, 14,.....का nवाँ पद $= 8 + (n-1).\ 3 = 3n + 5$

$\therefore$ $3 \times 8 + 6 \times 11 + 9 \times 14 + ...$का nवाँ पद $= 3n(3n+5)$

$$= 3\,(3n^2 + 5n)$$

दी हुई श्रेढ़ी के n पदों का योगफल

$$= 3\,(3\Sigma n^2 + 5\Sigma n)$$

$$= 3\left[\frac{3n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{5n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}[3(2n+1) + 15]$$

$$= \frac{n(n+1)}{2}(6n + 18) = 3n\,(n+1)\,(n+3).$$

प्रश्न 7.

$1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + ...$

हल : $1^2 + (1^2 + 2^2) + (1^2 + 2^2 + 3^2) + ...$

$$n\text{वाँ पद} = 1^2 + 2^2 + 3^2 + ... + n^2$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{n(2n^2+3n+1)}{6}$$

$$= \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

$$= \frac{1}{6}[2\,\Sigma n^3 + 3\Sigma n^2 + \Sigma n]$$

$$= \frac{1}{6}\left[\frac{2.n^2(n+1)^2}{4} + \frac{3.n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{1}{12}[n^2(n+1)^2 + n(n+1)(2n+1) + n(n+1)]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[n(n+1) + (2n+1) + 1]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[n^2 + 3n + 2]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}(n+1)(n+2)$$

$$= \frac{n(n+1)^2(n+2)}{12}.$$

प्रश्न 8 से 10 तक प्रत्येक श्रेणी के n पदों का योग ज्ञात कीजिए जिसका वाँ पद दिया है।

प्रश्न 8.
n (n + 1) (n + 4).

हल : $T_n = n(n+1)(n+4) = n(n^2+5n+4)$
$= n^3 + 5n^2 + 4n$

दी हुई श्रेढ़ी के n पदों का योग $= \Sigma n^3 + 5\Sigma n^2 + 4\Sigma n$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{5n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{4n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n(n+1) + 10(2n+1) + 24]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n^2 + 3n + 20n + 10 + 24]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n^2 + 23n + 34].$$

प्रश्न 9.
$n^2 + 2^n$

हल : $T_n = n^2 + 2^n$

दी हुई श्रेढ़ी के n पदों का योग

$= \Sigma n^2 + \Sigma 2^n$

$= \Sigma n^2 + 2 + 2^2 + 2^3 + \ldots\ldots + 2^n$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{2(2^n - 1)}{2-1}$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2(2^n - 1)$$

प्रश्न 10.
$(2n - 1)^2$

हल : $$T_n = (2n-1)^2 = 4n^2 - 4n + 1$$

दी हुई श्रेढ़ी के n पदों का योग

$$= 4\Sigma n^2 - 4\Sigma n + n$$

$$= \frac{4n(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{4n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{n}{3}[4n^2 + 6n + 2 - 6n - 6 + 3]$$

$$= \frac{n}{3}[4n^2 - 1]$$

$$= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3}.$$

अध्याय 9 पर विविध प्रश्नावली

प्रश्न 1.
दर्शाइए कि किसी समांतर श्रेढ़ी के (m + n) वें तथा (m – n) वें पदों का योग m वें पद को दुगुना है।

हल : मान लीजिए समांतर श्रेढ़ी का पहला पद a और सार्व अंतर d है।

$\therefore$ $(m+n)$वाँ पद $= T_{m+n} = a + (m+n-1)d$

$(m-n)$वाँ पद $= T_{m-n} = a + (m-n-1)d$

$$T_{m+n} + T_{m-n} = 2a + (2m-2)d = 2[a + (m-1)d]$$

$= 2 \times T_m = 2 \times m$वाँ पद

प्रश्न 2.
यदि किसी समांतर श्रेढ़ी की तीन संख्याओं का योग 24 है तथा उनका गुणनफल 440 है तो संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए समांतर श्रेढ़ी की तीन संख्याएँ $a - d$, a और $a + d$ हैं।

तीनों संख्याओं का योग $= (a - d) + a + (a + d) = 24$

$\therefore \quad 3a = 24$ या $a = 8$

तीन संख्याओं का गुणनफल $= (a - d).a.(a + d)$

$= a(a^2 - d^2)$

$= 8(64 - d^2) \qquad [\because a = 8]$

या $\quad 8(64 - d^2) = 440$

या $\quad 64 - d^2 = 55$

$\therefore \quad d^2 = 64 - 55 = 9$ या $d = 3$

अत: अभीष्ट संख्याएँ 5, 8, 11.

प्रश्न 3.

माना कि किसी समांतर श्रेढ़ी के n, 2n तथा 3n पदों का योगफल क्रमशः S_1, S_2 तथा S_3 हैं, तो

दिखाइए कि $S_3 = 3(S_2 - S_1)$.

हल : मान लीजिए समांतर श्रेढ़ी का पहला पद a और सार्व अंतर d है।

$$n \text{ पदों का योगफल} = S_1 = \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$2n \text{ पदों का योगफल} = S_2 = \frac{2n}{2}[2a + (2n-1)d]$$

$$2n \text{ पदों का योगफल} = S_3 = \frac{3n}{2}[2a + (3n-1)d]$$

$$S_2 - S_1 = n[2a + (2n-1)d] - \frac{n}{2}[2a + (n-1)d]$$

$$= \frac{n}{2}[\{4a + (4n-2)d\} - \{2a + (n-1)d\}]$$

$$= \frac{n}{2}[2a + (3n-1)d]$$

$\therefore$ $$(S_2 - S_1) = \frac{3n}{2}[2a + (3n-1)d] = S_3$$

अत : $$S_3 = 3(S_2 - S_1).$$

प्रश्न 4.

200 और 400 के मध्य आने वाली ने सभी संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए जो 7 से विभाजित है।

हल : 200 से 400 के मध्य आने वाली संख्याएँ 203, 210, 217,........, 399

मान लीजिए 399, nवाँ पद है।

$$\therefore \qquad 399 = a + (n-1).7$$

$$= 203 + 7(n-1)$$

या $$399 - 203 = 196 = 7(n-1)$$

$$\therefore \qquad n - 1 = \frac{196}{7} = 28 \quad \text{या } n = 29$$

$\therefore$ 203 + 210 + 217 +......+ 399

$$= \frac{29}{2}[203 + 399] \qquad \left[\because S = \frac{n}{2}(a + l)\right]$$

$$= \frac{29}{2}(602) = 29 \times 301$$

$$= 8729.$$

प्रश्न 5.

1 से 100 तक आने वाले ने सभी पूर्णाकों का योगफल ज्ञात कीजिए जो 2 या 5 से विभाजित हों।

हल : 2 से विभाजित होने वाले पूर्णांक 2, 4, 6,....., 100

इनकी कुल संख्या = 50

5 से विभाजित होने वाले पूर्णांक 5, 10, 15, 20,........100

इनकी कुल संख्या = 20

2 और 5 दोनों से विभाजित होने वाले पूर्णांक 10, 20, 30,...., 100

इनकी कुल संख्या = 10

1 से 100 तक आने वाले पूर्णांक जो 2 या 5 से विभाजित हों, तब

= (2 + 4 + 6 + ...50 पदों तक) + (5 + 10 + 15 +...... 20 पदों तक)

– (10 + 20 + 30 +......10 पदों तक)

$$= \frac{50}{2}[4 + (50 - 1). 2] + \frac{20}{2}[10 + (20 - 1).5] - \frac{10}{2}[20 + (10 - 1). 10]$$

$$= \frac{50 \times 102}{2} + 10 \times 105 - 5 \times 110$$

$$= 2250 + 1050 - 550$$

$$= 3050.$$

प्रश्न 6.

दो अंकों की उन सभी संख्याओं का योगफल ज्ञात कीजिए, जिनको 4 से विभाजित करने पर

शेषफल 1 हो।

हल : दो अंको की वे संख्याएँ जो 4 से विभाजित करने पर 1 शेष रहता है 13, 17, 21,......, 97

मान लीजिए n पद हों, तब nवाँ पद,

$$97 = 13 + (n-1) . 4$$

या $$84 = (n-1) \times 4$$

$$\therefore \quad n = 22$$

$$\therefore \quad 13 + 17 + 21 + \ldots\ldots + 97 = \frac{22}{2}[26 + (22-1).4]$$

$$= 11 \times (26 + 84)$$

$$= 11 \times 110$$

$$= 1210.$$

प्रश्न 7. सभी $x, y \in N$ के लिए $f(x+y) = f(x) . f(y)$ को संतुष्ट करता हुआ f एक ऐसा फलन है कि $f(1) = 3$ एवं $\sum_{x=1}^{n} f(x) = 120$ तो n का मान ज्ञात करो।

हल : $$f(1) = 3, f(2) = f(1+1) = f(1) . f(1) = 3.3 = 9$$

$$f(3) = f(1+2) = f(1). f(2) = 3 . 9 = 27$$

$$f(4) = f(1+3) = f(1). f(3) = 3 . 27 = 81$$

इस प्रकार $f(1) + f(2) + f(3) + \ldots\ldots$, n पदों तक

$$= 3 + 9 + 27 + 81 + \ldots\ldots, n \text{ पदों तक } = 120$$

$$\Rightarrow \quad \frac{3(3^n - 1)}{3-1} = 120$$

या $$3(3^n - 1) = 120 \times 2 = 240$$

$$3^n - 1 = \frac{240}{3} = 80$$

या $$3^n = 81 = 3^4$$

अत: $$n = 4.$$

प्रश्न 8.

गुणोचर श्रेढ़ी के कुछ पदों का योग 315 है, उसका प्रथम पद तथा सार्व अनुपात क्रमशः 5 और 2

हैं। अंतिम पद तथा पदों की संख्या ज्ञात करो।

हल : दी हुई गुणोत्तर श्रेणी

$$5 + 10 + 20 + 40 + \ldots\ldots$$

$$n \text{ पदों का योग} = \frac{5(2^n - 1)}{2 - 1} = 315$$

$\therefore$ $2^n - 1 = 63$

या $2^n = 64 = 2^6$

$\Rightarrow$ $n = 6$

$$6\text{वाँ पद} = 5 \times 2^{6-1}$$

$$= 5.2^5$$

$$= 5 \times 32 = 160.$$

प्रश्न 9.

किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी का प्रथम पद 1 है। तीसरे एवं पाँचवें पदों का योग 90 हो, तो गुणोत्तर श्रेढ़ी को सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी का सार्व अनुपात r है।

$$\text{तीसरा पद} = ar^2 = 1.\,r^2 = r^2$$

$$\text{पाँचवाँ पद} = ar^4 = r^4$$

$$\text{तीसरे और पाँचवें पद का योग} = r^2 + r^4 = 90$$

$$r^4 + r^2 - 90 = 0$$

या $(r^2 + 10)(r^2 - 9) = 0$

$\therefore$ $r^2 = -10$ मान्य नहीं है।

$\therefore$ $r^2 - 9 = 0, r^2 = 9$

$\therefore$ $r = \pm 3.$

प्रश्न 10.

किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के तीन पदों का योग 56 है। यदि हम क्रम से इन संख्याओं में से 1, 7, 21 घटाएँ तो हमें एक समांतर श्रेढी प्राप्त होती है। संख्याएँ ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी की तीन संख्याएँ a, ar, ar^2 हैं।

$$\text{तीनों पदों का योग} = a + ar + ar^2 = 56 \qquad \ldots(1)$$

इन संख्याओं में से 1, 7, 21 घटाने पर संख्याएँ

$a - 1, ar - 7, ar^2 - 21$ समांतर श्रेढ़ी में हैं।

$\because \qquad 2(ar - 7) = (a - 1) + (ar^2 - 21)$

या $\qquad 2ar - 14 = ar^2 + a - 22$

$$ar^2 - 2ar + a = 22 - 14 = 8 \qquad \ldots(2)$$

समी.) को (?) से भाग देने पर

$$\frac{a(1 + r + r^2)}{a(1 - 2r + r^2)} = \frac{56}{8} = 7$$

या $\qquad 7(1 - 2r + r^2) = 1 + r + r^2$

$$6r^2 - 15r + 6 = 0$$

$\therefore \qquad 2r^2 - 5r + 2 = 0$

या $\qquad (r - 2)(2r - 1) = 0 \qquad$ या $\qquad r = 2, \frac{1}{2}$

सभी (1) में $r = 2$ रखने पर,

$$a(1 + 2 + 4) = 56 \qquad \text{या} \qquad a = \frac{56}{7} = 8$$

इस प्रकार तीन **संख्याएँ हैं:** 8, 16, 32.

पुन: समी (1) में $r = \frac{1}{2}$ **रखने से,**

$$a\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\right) = 56$$

$$\therefore \quad a = \frac{56 \times 4}{7} = 32$$

$\therefore$ **तीन संख्याएँ 32, 16, 8.**

अत: अभीष्ट संख्याएं 8, 16, 32 **हैं।**

प्रश्न 11.

किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी के पदों की संख्या सम है। यदि उसके सभी पदों का योगफल, विषम स्थान

पर रखे पदों के योगफल को 5 गुना है, तो सार्व अनुपात ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी का पहला पद $= a$ **सार्व अनुपात** $= r$ **और पदों की संख्या** $= 2n$

$$\text{सभी पदों का योगफल} = \frac{a(r^{2n}-1)}{r-1}$$

विषम स्थानों पर रखे पद $a, ar^2, ar^4, \ldots$ n **पदों तक**

$$\text{इनका योग} = a + ar^2 + ar^4 + \ldots\ldots n \text{ पदों तक}$$

$$= \frac{a[(r^2)^n - 1]}{r^2 - 1} = \frac{a(r^{2n}-1)}{r^2-1}$$

दिया है :

गुणोत्तर श्रेढ़ी के $2n$ **पदों का योगफल** $= 5 \times$ **[विषम स्थानों पर स्थित पदों का योगफल]**

$$\Rightarrow \quad \frac{a(r^{2n}-1)}{r-1} = 5 \times \frac{a[(r^2)^n - 1]}{r^2-1}$$

या $$\frac{a(r^{2n}-1)}{r-1} = \frac{5a(r^{2n}-1)}{r^2-1}$$

$$1 = \frac{5}{r+1}$$

या $$r + 1 = 5$$

या $$r = 4.$$

प्रश्न 12.

एक समांतर श्रेढ़ी के प्रथम चार पदों का योगफल 56 है। अंतिम चार पदों का योगफल 112 है। यदि इसका प्रथम पद 11 है, तो पदों की संख्या ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए समांतर श्रेणी

$a + (a + d) + (a + 2d) + ... + l$ जबकि l अंतिम पद nवाँ पद है।

$$\text{प्रथम 4 पदों का योगफल} = \frac{4}{2}[2a + (4 - 1)\,d]$$

$$= 2[22 + 3d] \qquad [\because a = 11]$$

दिया है: $2[22 + 3d) = 56$

$\Rightarrow$ $3d + 22 = 28$ या $d = 2$

$$\text{अंतिम पद} = a + (n - 1)\,d = 11 + (n - 1)\,2$$

$$= 2n + 9$$

अंतिम चार पद $2n + 9, 2n + 7, 2n + 5, 2n + 3$

इनका
$$\text{योगफल} = \frac{4}{2}[2(2n + 9) + (4 - 1).(-2)]$$

$$= 2[4n + 18 - 6]$$

$$= 2[4n + 12]$$

दिया है : $2(4n + 12) = 112$

$\therefore$ $4n + 12 = 56$

$$4n = 56 - 12 = 44$$

$\therefore$ $n = 11.$

प्रश्न 13. यदि $\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{b+cx}{b-cx} = \frac{c+dx}{c-dx}$ $(x \neq 0)$ हो, तो दिखाइए कि a, b, c, d गुणोत्तर श्रेढ़ी में है।

हल : हम जानते हैं कि यदि $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ तब $\frac{a+b}{a-b} = \frac{c+d}{c-d}$

इस नियम के अनुसार, यदि $\frac{a+bx}{a-bx} = \frac{b+cx}{b-cx} = \frac{c+dx}{c-dx}$

तो,
$$\frac{(a+bx)+(a-bx)}{(a+bx)-(a-bx)} = \frac{(b+cx)+(b-cx)}{(b+cx)-(b-cx)}$$

$$= \frac{(c+dx)+(c-dx)}{(c+dx)-(c-dx)}$$

$$\frac{2a}{2bx} = \frac{2b}{2cx} = \frac{2c}{2dx}$$

या
$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d}$$

अत: a, b, c, d गुणोत्तर श्रेढ़ी में है। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 14.

किसी गुणोत्तर श्रेढ़ी में S, n पदों का योग, P उनका गुणनफल तथा R उनके व्युत्क्रमों का योग हो तो सिद्ध कीजिए कि $P^2 R^n = S^n$

हल : मान लीजिए गुणोत्तर श्रेढ़ी $a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1}$

इन n पदों का गुणनफल, $P = a. ar . ar^2 ...... ar^{n-1}$

$$= a^n . r^{1+2+...+(n-1)}$$

$$= a^n r^{\frac{n(n-1)}{2}}$$

$\therefore$ $$P^2 = a^{2n} . r^{n(n-1)}$$

$$R = \frac{1}{a} + \frac{1}{ar} + \frac{1}{ar^2} + ... + \frac{1}{ar^{n-1}}$$

$$= \frac{\frac{1}{a}\left[\left(\frac{1}{r}\right)^n - 1\right]}{\frac{1}{r} - 1}$$

$$= \frac{(1-r^n)r}{ar^n(1-r)}$$

$\therefore$ $$R^n = \frac{(1-r^n)^n}{a^n r^{n(n-1)}(1-r)^n}$$

बायाँ पक्ष : $$P^2 R^n = a^{2n} r^{n(n-1)} \frac{(1-r^n)^n}{a^n r^{n(n-1)}(1-r)^n}$$

$$= \frac{a^n(1-r^n)^n}{(1-r)^n} = S^n$$

जबकि $$S = a + ar + ar^2 + ... + ar^{n-1} = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$$

अतः $$P^2 R^n = S^n.$$

प्रश्न 15.

किसी समांतर श्रेढ़ी का p वाँ, q वाँ, r वाँ पद क्रमशः a, b, c हैं, तो सिद्ध कीजिए : (q – r) a + (r – p) b + (p – q) c = 0.

हल : मान लीजिए समांतर श्रेणी

$$A + (A + d) + (A + 2d) + \ldots\ldots. \text{ है।}$$

pवाँ पद $= A + (p - 1)\, d = a$ ...(1)

qवाँ पद $= A + (q - 1)\, d = b$ ...(2)

rवाँ पद $= A + (r - 1)\, d = c$ ...(3)

समी (2) में से समी (3) को, समी (3) में से समी (1) को, समी (1) में से समी (2) को घटाने पर

$(q - r)\, d = b - c$ ...(4)

$(r - p) d = c - a$ ...(5)

$(p - q)\, d = a - b$ ...(6)

समीकरण (4), (5) तथा (6) को क्रमशः a, b तथा c से गुणा क्ररके जोड़ने पर,

$$a(q - r)d + b(r - p)d + c(p - d)d$$
$$= a(b - c) + b(c - a) + c(a - b)$$
$$= ab - ac + bc - ba + ca - bc$$
$$= 0$$

दोनों पक्षों में d से भाग देने पर,

$$(q - r)a + (r - p)b + (p - q)c = 0.$$

प्रश्न 16. यदि $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right), b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right), c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$ समांतर श्रेढ़ी में हैं, तो सिद्ध करो कि a, b, c समांतर श्रेढ़ी में हैं।

हल : $a\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, $b\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{a}\right)$, $c\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{b}\right)$ समांतर श्रेढ़ी में हैं,

या $a\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, $b\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$, $c\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)$ भी समांतर श्रेढ़ी में हैं।

$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$ से भाग देने पर,

a, b, c समांतर श्रेढ़ी में हैं। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 17.

यदि a, b, c, d गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $(a^n + b^n)$, $(b^n + c^n)$, $(c^n + d^n)$ गुणोत्तर

श्रेढ़ी में हैं।

हल : a, b, c, d गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

मान लीजिए सार्व अनुपात r है।

$$\therefore \quad b = ar, c = ar^2, d = ar^3$$

अब
$$a^n + b^n = a^n + (ar)^n = a^n(1 + r^n)$$

$$b^n + c^n = (ar)^n + (ar^2)^n = a^n r^n + a^n r^{2n}$$

$$= a^n r^n (1 + r^n)$$

$$c^n + d^n = (ar^2)^n + (ar^3)^n = a^n r^{2n} + a^n r^{3n}$$

$$= a^n r^{2n} (1 + r^n)$$

अब $a^n(1 + r^n), a^n(1 + r^n)r^n, a^n(1 + r^n)r^{2n}$

गुणोत्तर श्रेणी हेतु :

$$[a^n (1 + r^n)r^n]^2 = a^{2n} (1 + r^n)^2 r^{2n}$$

तथा $[a^n(1 + r^n)][a^n (1 + r^n)r^{2n}] = a^n. a^n (1 + r^n)^2 r^{2n} = a^{2n} (1 + r^n)^2 r^{2n}$

अतः $(a^n + b^n), (b^n + c^n), (c^n + d^n)$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

प्रश्न 18.

यदि $x^2 - 3x + p = 0$ के मूल a तथा b हैं तथा? $x^2 - 12x + q = 0$ के मूल c तथा d हैं, जहाँ a, b, c, d गुणोत्तर श्रेढ़ी के रूप में हैं। सिद्ध कीजिए कि (q + p) : (q – p) = 17 : 15.

हल : यदि समीकरण $Ax^2 + Bx + C = 0$ के मूल α , β हैं, तो

$$\alpha + \beta = \frac{-B}{A}, \alpha\beta = \frac{C}{A}$$

दिया है कि $x^2 - 3x + p = 0$ के मूल a, b हैं

$\therefore \quad a + b = 3, ab = p \quad$ ...(1)

इसी प्रकार $x^2 - 12x + q = 0$ के मूल c, d हैं

$\therefore \quad c + d = 12. cd = q \quad$ ...(2)

अब a, b, c, d गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं, जिसका मान लीजिए r सार्व अनुपात है।

$\therefore \quad b = ar, c = ar^2, d = ar^3$

$a + b = 3, a + ar = 3 \quad$ ..(3)

$c + d = 12$ या $ar^2 + ar^3 = 12 \quad$ ...(4)

समी (3) को (4) से भाग देने पर,

$$\frac{a(1+r)}{ar^2(1+r)} = \frac{3}{12} \text{ या } \frac{1}{r^2} = \frac{1}{4}$$

या $$r = \pm 2$$

r का मान (3) में रखने पर

$$a(1+r) = 3 \quad \text{या} \quad a(1+2) = 3$$

$\therefore$ $$a = 1$$

$\therefore$ $$b = a\,r = 2, c = a\,r^2 = 4, d = a\,r^3 = 8$$

अब $$\frac{q+p}{q-p} = \frac{cd+ab}{cd-ab} = \frac{(ar^2)(ar^3)+a.ar}{(ar^2)(ar^3)-a.ar}$$

$$= \frac{a^2r(1+r^4)}{a^2r(r^4-1)} = \frac{r^4+1}{r^4-1}$$

$$= \frac{2^4+1}{2^4-1}$$

$$= \frac{16+1}{16-1} = \frac{17}{15}.$$

प्रश्न 19.

दो धनात्मक संख्याओं a और 6 के बीच समांतर माध्य तथा गुणोत्तर मध्य का अनुफ्त m : n है। दर्शाइए कि

$$a : b = \left(m+\sqrt{m^2-n^2}\right) : \left(m-\sqrt{m^2-n^2}\right).$$

हल : a और b के बीच समांतर माध्य $= \dfrac{a+b}{2}$

a और b के बीच गुणोत्तर माध्य $= \sqrt{ab}$

दोनों माध्यों का अनुपात $m : n$

अर्थात् $$\frac{\frac{a+b}{2}}{\sqrt{ab}} = \frac{m}{n}$$

या $$\frac{a+b}{2\sqrt{ab}} = \frac{m}{n}$$

या $$\frac{a+b+2\sqrt{ab}}{a+b-2\sqrt{ab}} = \frac{m+n}{m-n}$$

या $$\frac{\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)^2}{\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)^2} = \frac{m+n}{m-n}$$

वर्गमूल लेकर, $$\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{m+n}}{\sqrt{m-n}}$$

$$\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b})+(\sqrt{a}-\sqrt{b})}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})-(\sqrt{a}-\sqrt{b})} = \frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$$

$$\frac{2\sqrt{a}}{2\sqrt{b}} = \frac{\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n}}{\sqrt{m+n}-\sqrt{m-n}}$$

वर्ग करते हुए, $$\frac{a}{b} = \frac{(\sqrt{m+n}+\sqrt{m-n})^2}{(\sqrt{m-n}-\sqrt{m-n})^2}$$

$$= \frac{(m+n)+(m-n)+2\sqrt{m^2-n^2}}{(m+n)+(m-n)-2\sqrt{m^2-n^2}}$$

$$= \frac{2m+2\sqrt{m^2-n^2}}{2m-2\sqrt{m^2-n^2}} = \frac{m+\sqrt{m^2-n^2}}{m-\sqrt{m^2-n^2}}$$

अतः $$a : b = m+\sqrt{m^2-n^2} : m-\sqrt{m^2-n^2}.$$

प्रश्न 20.

यदि a, b, c समांतर श्रेढ़ी में हैं; b, c, d गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं तथा [latex]\frac { 1 }{ c }[/latex] , [latex]\frac { 1 }{ d }[/latex] , [latex]\frac { 1 }{ e }[/latex] समांतर श्रेढ़ी में हैं, तो सिद्ध

कीजिए कि a, c, e गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं।

हल : a, b, c समांतर श्रेढ़ी में हैं $\therefore \quad \frac{a+c}{2} = b \quad \ldots(1)$

$b, c, d,$ गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं, $\therefore \quad bd = c^2 \quad \ldots(2)$

$\frac{1}{c}, \frac{1}{d}, \frac{1}{e}$ समांतर श्रेढ़ी में हैं, $\therefore \quad \frac{2}{d} = \frac{1}{c} + \frac{1}{e}$

$$\Rightarrow \quad d = \frac{2ce}{c+e} \quad \ldots(3)$$

b और d का मान (1) और (3) से लेकर (2) में रखने पर

$$c^2 = \frac{a+c}{2} \times \frac{2ce}{c+e} = \frac{ce(a+c)}{c+e}$$

या $$c = \frac{e(a+c)}{c+e}$$

या $$c(c+e) = ea + ec$$

या $$c^2 + ce = ea + ec \Rightarrow c^2 = ea$$

अत: a, c, e गुणोत्तर श्रेढ़ी में हैं। **इति सिद्धम्।**

प्रश्न 21.

निम्नलिखित श्रेढ़ियों के n पदों का योग ज्ञात कीजिए:

(i) 5 + 55 + 555 + ……

(ii) 0.6 + 0.66 + 0.666 + …..

हल : (i)

$$S = 5 + 55 + 555 + \ldots\ldots n \text{ पदों तक}$$

$$= \frac{5}{9}[9 + 99 + 999 + \ldots\ldots n \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{5}{9}[(10 - 1) + (100 - 1) + (1000 - 1) + \ldots\ldots n \text{ पदों तक}]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{10 - 1} - n\right]$$

$$= \frac{5}{9}\left[\frac{10(10^n - 1)}{9} - n\right]$$

$$= \frac{50}{81}[10^n - 1] - \frac{5n}{9}.$$

(ii)

$$S = 0.6 + 0.66 + 0.666 + \ldots. n \text{ पदों तक}$$

$= \frac{6}{9}[0.9 + 0.99 + 0.999 + \ldots n \text{ पदों तक}]$

$= \frac{2}{3}[(1 - 0.1) + (1 - 0.01) + (1 - 0.001) + \ldots n \text{ पदों तक}]$

$= \frac{2}{3}[n - \{0.1 + (0.1)^2 + (0.1)^3 + \ldots n \text{ पदों तक}\}]$

$$= \frac{2}{3}\left[n - \frac{0.1\{1-(0.1)^n\}}{1-0.1}\right]$$

$$= \frac{2}{3}\left[n - \frac{1}{9}\{1-(0.1)^n\}\right]$$

$$= \frac{2n}{3} - \frac{2}{27}\left(1 - \frac{1}{10^n}\right)$$

$$= \frac{2n}{3} - \frac{2}{27}(1 - 10^{-n}).$$

प्रश्न 22.

श्रेढ़ी का 20वाँ पद ज्ञात कीजिए : 2 x 4 + 4 x 6 + 6 x 8 + ….. + n पदों तक

हल:

2, 4, 6, ….. का 20 वाँ पद = 2n = 2 x 20 = 40

4, 6, 8…… का 20 वाँ पद = 4 + 19 x 2 = 4 + 38 = 42

2 x 4 + 4 x 6 + 6 x 8 +…… का 20 वाँ पद = 40 x 42 = 1680.

प्रश्न 23.

श्रेणी 3 + 7 + 13 + 21 + 31 + ….. के n पदों का योगफल ज्ञात कीजिए।

हल : मान लीजिए

$$S = 3 + 7 + 13 + 21 + 31 + ... + T_n$$

$$S = \quad 3 + \ 7 + 13 + 21 + ... + T_{n-1} + T_n$$

घटाने पर,

$$0 = 3 + [4 + 6 + 8 + 10 + ... + (n-1) \text{ पदों तक}] - T_n$$

$$T_n = 3 + \frac{n-1}{2}[2 \times 4 + (n-2).\, 2]$$

$$= 3 + \frac{n-1}{2}[8 + 2n - 4]$$

$$T_n = 3 + \frac{n-1}{2}[2n + 4]$$

$$= (n-1)(n+2) + 3$$

$$= n^2 + n - 2 + 3$$

$$= n^2 + n + 1$$

∴ दी हुई श्रेणी का योग

$$= \Sigma n^2 + \Sigma n + n$$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2} + n$$

$$= \frac{n}{6}[(n+1)(2n+1) + 3(n+1) + 6]$$

$$= \frac{n}{6}[2n^2 + 6n + 10]$$

$$= \frac{n}{3}[n^2 + 3n + 5].$$

प्रश्न 24. यदि S_1, S_2, S_3 क्रमशः प्रथम n प्राकृत संख्याओं का योग, उनके वर्गों का योग तथा घनों का योग है, तो सिद्ध कीजिए कि $9S_2^2 = S_3(1 + 8S_1)$.

हल :

$S_1 = n$ प्राकृत संख्याओं का योग

$= 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots n$ पदों तक

$$= \frac{n(n+1)}{2} \quad \ldots(1)$$

$S_2 = n$ प्राकृत संख्याओं के वर्गों का योग

$= 1^2 + 2^2 + 3^2 + \ldots\ldots + n^2$

$$= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \ldots(2)$$

$S_3 = n$ प्राकृत संख्याओं के घनों का योग

$= 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots + n^3$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

दायाँ पक्ष $= S_3 (1 + 8S_1)$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}\left[1+8\frac{n(n+1)}{2}\right]$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}[1 + 4n^2 + 4n]$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{4}$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2(2n+1)^2}{36} \times 9$$

$= S_2^2 \times 9 = 9S_2^2$ = बायाँ पक्ष।

प्रश्न 25.

निम्नलिखित श्रेणियों के n पदों का योग ज्ञात कीजिए:

$$\frac{1^3}{1} + \frac{1^3+2^3}{1+3} + \frac{1^3+2^3+3^3}{1+3+5} + \ldots..$$

हल : अंश में दी हुई संख्याएँ $1^3, 1^3 + 2^3, 1^3 + 2^3 + 3^3, \ldots..$

$$n\text{वाँ पद} = 1^3 + 2^3 + 3^3 + \ldots\ldots + n^3$$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

हर में दी हुई संख्याएँ $1, (1 + 3), (1 + 3 + 5), \ldots\ldots$

$$n\text{वाँ पद} = 1 + 3 + 5 + \ldots\ldots n \text{ पदों तक}$$

$$= \frac{n}{2}[2 + (n-1).2] = n^2$$

$\therefore$ दी हुई श्रेणी का nवाँ पद $= \dfrac{\dfrac{n^2(n+1)^2}{4}}{n^2} = \dfrac{(n+1)^2}{4}$

$$= \frac{n^2+2n+1}{4}$$

$\therefore$ दी हुई श्रेणी के n पदों का योग $= \dfrac{1}{4}(\Sigma n^2 + 2\Sigma n + 1)$

$$= \frac{1}{4}\left[\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} + 2\frac{n(n+1)}{2} + n\right]$$

$$= \frac{n}{24}[(n+1)(2n+1) + 6(n+1) + 6]$$

$$= \frac{n}{24}[(2n^2 + 3n + 1) + (6n + 6) + 6]$$

$$= \frac{n}{24}(2n^2 + 9n + 13).$$

प्रश्न 26. दर्शाइए कि $\dfrac{1\times 2^2+2\times 3^2+.....+n(n+1)^2}{1^2\times 2+2^2\times 3+....+n^2(n+1)}=\dfrac{3n+5}{3n+1}$.

हल : अंश का nवाँ पद $= n(n+1)^2 = n(n^2+2n+1)$

$$= n^3 + 2n^2 + n$$

अंश के n पदों का योग $S_1 = \Sigma n^3 + 2\Sigma n^2 + \Sigma n$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{2n(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n\,(n+1) + 4\,(2n+1) + 6]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n^2 + 3n + 8n + 4 + 6]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n^2 + 11n + 10]$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}$$

हर का nवाँ पद $= n^2(n+1) = n^3 + n^2$

हर के n पदों का योग $S_2 = \Sigma n^3 + \Sigma n^2$

$$= \frac{n^2(n+1)^2}{4} + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n(n+1) + 2(2n+1)]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n^2 + 3n + 4n + 2]$$

$$= \frac{n(n+1)}{12}[3n^2 + 7n + 2]$$

$$= \frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{\frac{n(n+1)(n+2)(3n+5)}{12}}{\frac{n(n+1)(n+2)(3n+1)}{12}}$$

$$= \frac{3n+5}{3n+1}.$$

प्रश्न 27.

कोई किसान एक पुराने ट्रैक्टर को 12000 रु. में खरीदता है। वह 6000 रू. नकद भुगतान करता है। और शेष राशि को 500 रू की वार्षिक किस्त के अतिरिक्त उस धन पर जिसका भुगतान न किया गया हो 12% वार्षिक ब्याज भी देता है। किसान को ट्रैक्टर की कुल कितनी कीमत देनी पड़ेगी?

हल : पुराने ट्रैक्टर का मूल्य = 12000 रू

नकद भुगतान = 6000 रू

शेष = 12000 – 6000 = 6000 रू

एक किस्त का भुगतान = 500 रू

$$\text{कुल किस्तें} = \frac{6000}{12} = 12$$

P मूलधन पर 12% प्रतिवर्ष की दर से 1 वर्ष का ब्याज

$$= \frac{P \times 12 \times 1}{100} = \frac{3}{25}P$$

$$\text{एक वर्ष बाद ब्याज} = \frac{3}{25}P = \frac{3}{25} \times 6000$$

एक वर्ष बाद राशि का भुगतान = 500 + ब्याज

$$= 500 + \frac{3}{25} \times 6000$$

$$\text{दो वर्ष बाद ब्याज} = \frac{3}{25} \times 5500 \text{ रू किस्त}$$

$$\text{2 वर्ष बाद भुगतान} = \left(500 + \frac{3}{25} \times 5500\right) \text{रू}$$

12 वर्ष बाद किस्त = $12 \times 500 = 6000$

ब्याज = $\frac{3}{25}$ (6000 + 5500 + 5000 +..... 12 पदों तक)

$$= \frac{3}{25} \cdot \frac{12}{2} [12000 - (12 - 1) \times 500]$$

$$= \frac{3}{25} \cdot \frac{12}{2} [12000 - 5500]$$

$$= \frac{3}{25} \cdot \frac{12}{2} \times 6500$$

= 4680 रू

कुल भुगतान = (12000 + 4680) रू,

= 16680 रू।

प्रश्न 28.

शमशाद अली 22000 रू में एक स्कूटर खरीदता है। वह 4000 रू नकद देता है और शेष राशि को 1000 रू वार्षिक किस्त के अतिरिक्त उस धन पर जिसका भुगतान न किया गया हो 10% वार्षिक ब्याज भी देता है। उसे स्कूटर के लिए कुल कितनी राशि चुकानी पड़ेगी?

हल : स्कूटर की कीमत = 22000 रू

नकद भुगतान = 4000 रू

शेष = 22000 – 4000 = 18000 रू

एक किस्त की राशि = 1000 रू

$\therefore$ कुल किस्तें $= \dfrac{18000}{1000} = 18$

P मूलधन पर एक वर्ष का 10% प्रति वर्ष की दर से ब्याज

$$= \frac{P \times 10 \times 1}{100} = \frac{P}{10}$$

किस्त देने के बाद शेष राशि जिस पर एक वर्ष का ब्याज लगना है,

= 18000, 17000, 16000,....., 1000

कुल ब्याज की राशि

$$= \frac{1}{10}(18000 + 17000 + 16000 + ...+ 18 \text{ पदों तक})$$

$$= \frac{1}{10} \times \frac{18}{2}[2 \times 18000 - (18-1) \times 1000]$$

$$= \frac{9}{10}[36000 - 17000)$$

$$= \frac{9 \times 19000}{10} = 17100 \text{ रू}$$

कुल किश्तों की राशि = 18000 रू

नकद = 4000 रू

कुल भुगतान = (18000 + 17000) + 4000 रू

= 39,100 रू।

प्रश्न 29.

एक व्यक्ति अपने चार मित्रों को पत्र लिखता है। वह प्रत्येक को उसकी नकल करके चार दूसरे

व्यक्तियों को भेजने का निर्देश देता है, तथा जिनसे यह भी करने को कहता है कि प्रत्येक पत्र प्राप्त करने वाला व्यक्ति इस श्रृंखला को जारी रखे। यह कल्पना करके कि श्रृंखला न टूटे तो 8वें पत्रों के समूह भेजे जाने तक कितना डाक खर्च होगा जबकि एक पत्र का डाक खर्च 50 पैसे है।

हल : पहला व्यक्ति चार पत्र लिखता है। पत्र प्राप्त करने वाले 4 व्यक्ति फिर चार-चार पत्र लिखते हैं। इस प्रकार श्रृंखला बढ़ती चली जाती है।

हर अवसर पर पत्रों की संख्याएँ 4, 16, 24....... 8 पदों तक

कुल पत्रों की संख्या = 4 + 16 + 64 + ...8 पदों तक

$$= \frac{4(4^8 - 1)}{4 - 1} = \frac{4}{3}(65536 - 1)$$

$$= \frac{4}{3} \times 65535 = 87380$$

एक पत्र का डाक खर्च $= 50$ पै. $= \frac{1}{2}$ रू

कुल डाक खर्च $= 87380 \times \frac{1}{2}$

$= 43690$ रू

प्रश्न 30.

एक आदमी ने एक बैंक में 10000 रूपये 5% वार्षिक साधारण ब्याज पर जमा किया। जब से रकम बैंक में जमा की गई तब से, 15वें वर्ष में उसके खाते में कितनी रकम हो गई तथा 20 वर्षों

बाद कुल कितनी रकम हो गयी, ज्ञात कीजिए।

हल : बैंक में जमा की गई राशि = 10000 रू

ब्याज की दर = 5% प्रति वर्ष

$$\text{एक वर्ष बाद ब्याज} = \frac{10000 \times 5 \times 1}{100} = 500 \text{ रू}$$

इस प्रकार हर वर्ष उसे 500 रू ब्याज के मिलेंगे।

1 वर्ष, 2 वर्ष, 3 वर्ष,........बाद ब्याज की राशि

500, 1000, 1500, ...

15वें वर्ष में ब्याज $= (n - 1) \times 500 = (15 - 1) \times 500$

$= 14 \times 500$

$= 7000$ रू

मूलधन = 10000 रू

उसके खाते में 15वें वर्ष में = 10000 + 7000

= 17000 रू होंगें

20 वर्ष का ब्याज $= 20 \times 500$

= 10000 रू

मूलधन = 10000 रू

20 वर्ष बाद बैंक में कुल जमा राशि = 10000 + 10000 = 20000 रू।

प्रश्न 31.

एक निर्माता घोषित करता है कि उसे की मशीन जिसका मूल्य 15625 रूपये है, हर वर्ष 20% की

दर से उसका अवमूल्यन होता है। 5 वर्ष के बाद मशीन का अनुमानित मूल्य ज्ञात कीजिए।

हल : यदि किसी मशीन का $r\%$ की दर से अवमूल्यन हो रहा है n वर्ष बाद मशीन का मूल्य $P\left(1-\frac{r}{100}\right)^n$ होगा।

प्रारभ में मशीन का मूल्य P रूपये है।

यहां पर $P = 15625$, $r = 20\%$ प्रति वर्ष, $n = 5$ वर्ष

$\therefore$ उस मशीन का 5 वर्ष बाद का मूल्य

$$= 15625\left(1-\frac{20}{100}\right)^5$$

$$= 15625\left(\frac{4}{5}\right)^5$$

$$= \mathbf{15625 \times (.8)^5 = 5120} \text{ रू।}$$

प्रश्न 32.

किसी कार्य को कुछ दिनों में पूरा करने के लिए 150 कर्मचारी लगाए गए। दूसरे दिन 4 कर्मचारियों ने काम छोड़ दिया, तीसरे दिन चार और कर्मचारियों ने काम छोड़ दिया तथा इस प्रकार अन्य। अब कार्य पूरा करने में 8 दिन अधिक लगते हैं, तो दिनों की संख्या ज्ञात कीजिए, जिनमें कार्य पूरा किया गया।

हल : 150 कर्मचारी उस कार्य को n दिनों में समाप्त करते हैं

$$150 \text{ कर्मचारियों का 1 दिन का काम} = \frac{1}{n}$$

$$1 \text{ कर्मचारी का 1 दिन का काम} = \frac{1}{150n}$$

पहले दिन 150 कर्मचारी 1 दिन में $\frac{150}{150n}$ कार्य करते हैं

दूसरे दिन 146 कर्मचारी 1 दिन में $\frac{146}{150n}$ कार्य करते हैं

तीसरे दिन 142 कर्मचारी 1 दिन में $\frac{142}{150n}$ कार्य करते हैं

वह काम $n + 8$ दिन में पूरा हुआ

$$\therefore \quad \frac{150}{150n} + \frac{146}{150n} + \frac{142}{150n} + \ldots\ldots.(n + 8) \text{ पदों तक} = 1$$

$$\text{या} \quad \frac{1}{150n}[150 + 146 + 142 + \ldots..(n + 8) \text{ पदों तक}] = 1$$

या $\frac{n+8}{2(150n)}[2 \times 150 + (n+8-1) \times (-4)] = 1$

$$(n+8)[300 - 4(n+7)] = 300n$$

या $(n+8)(-4n+272) = 300n$

या $(n+8)(n-68) = -75n$

या $n^2 - 60n - 544 = -75n$

या $n^2 + 15n - 544 = 0$

या $(n+32)(n-17) = 0$

$n \neq -32$ या $n = 17$

कुल समय $= n + 8$ दिन

$= 17 + 8 = 25$ दिन।