Stochastik

Mitschrift

Vorlesung bei: Prof. Dr. Kabluchko

Datum: 24. Mai 2019
Sommersemester 2019

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

1 Zufallsexperimente

Beispiele

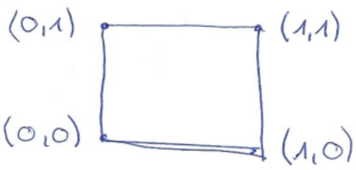
Werfen einer Münze
Ausgänge: K,Z
Grundmenge Ω = {K,Z}

Werfen eines Würfel
Ausgänge : 1...6
Grundmenge Ω = {1,...,6}

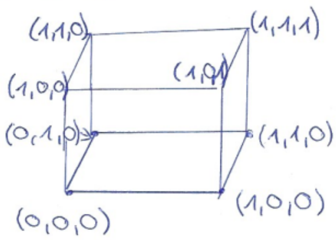
Zwei Münzen gleichzeitig werfen
Ω = {KK,KZ,ZK,ZZ}
ZK heißt 1. Zeigt Zahl, zweite Kopf. KZ andersherum. Dies gilt wenn die Münzen **unterscheidbar sind**

n Münzen werfen
$\Omega = \{K, Z\}^n = \{(a_1, ..., a_n) : a_i \in \{K, Z\} \forall i = 1, ..., n\}$
$\#\Omega = 2^n$

- für $n = 2$ (grafisch)



- für $n = 3$



Frage: Können wir $\Omega = \{0, ..., n\}$ wählen?
↳ Nein! - Unvollständige beschreibung

Frage: Können wir $\Omega = \{0, ..., n\}^{n=4}$ wählen?

1.1 Produktexperimente

Betrachte n Experimente mit Grundmengen $E_1, ..., E_n$
Führe diese Experimente unabhängig voneinander aus.

Grundmenge des Gesamtexperiment ist
$\Omega = E_1 \times ... \times E_n = \{(e_1, ..., e_n) : e_1ß \in E_1, ..., e_n \in E_n\}$
$\#\Omega = \#E_1 \bullet ... \bullet \#E_n$

Beispiele

Münze und Würfel werfen $E_1 = \{K, Z\}$ $E_2 = \{1, ..., 6\}$

$\Omega = E_1 \times E_2 =$

K1	K2	K3	K4	K5	K6
Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6

$\Omega = 12$

Definition: Ereignis

Ereignis = Teilmenge von Ω
Beispiel: 1 Würfel. $\Omega = \{1,...,6\}$
Ereignisse: A = "Würfel zeigt gerade Zahl" = $\{2,4,6\}$
B = 'Primzahl gewürfelt' = $\{2,3,5\}$

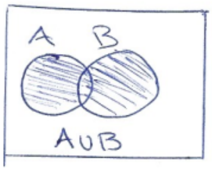
Interpretation: Zufallsexperiment wird ausgeführt $\Rightarrow$
Wir erfahren den Ausgang w $\in \Omega$
Sei A $\subset \Omega$. Liegt w $\in$ A, so sagen wir "A ist eingetreten".
w $\notin$ A $\Rightarrow$ "A nicht eingetreten"

Beispiel: 2 Würfel. $\Omega = 1, ..., 6^2$
A = "Augensumme = 10" = $\{(6,4),(5,5),(4,6)\}$

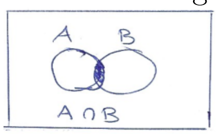
Unmögliches Ereignis: $\emptyset$
Sicheres Ereignis (tritt immer ein) = Ω

1.2 Boole'sche Algebra

Seien A $\subset \Omega$; B $\subset \Omega$
A $\cup$ B = {w $\in \Omega$: w $\in$ A oder w $\in$ B}
= "mindestens ein Ereignis tritt ein."



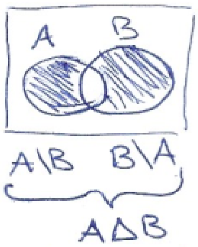
A $\cap$ B = {w $\in \Omega$: w $\in$ A und w $\in$ B}
= "beide Ereignisse treten ein.".



$A^C = \{w \in \Omega : w \notin A\}$
= "A tritt nicht ein"

A\B = $\{w \in \Omega : w \in A$ und $w \notin B\}$
= "A tritt ein **und** B tritt nicht ein" = $A \cap B^C$

B\A = $B \cap A \subset$
AΔB = (A\B)$\cup$(B\A)
= "**genau** ein Ereignis tritt ein"



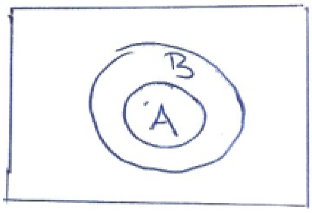
Beispiel: 2 Würfel $\Omega = \{1, ..., 6\}^2$
A = "1. Würfel zeigt 6 " = {(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)}
B = "2. Würfel zeigt 6" = Das gleiche, nur vertauscht

A $\cap$ B = {(6,6)}
A $\cup$ B = {(6,1),...,(6,6),(1,6),...,(5,6)} A Δ B = {(6,1),...,(6,5),...,(1,6),...(5,6)}

Definition: Disjunkt
Ergebnis A und B sind disjunkt, wenn A $\cap$ B = $\emptyset$
D.h. A und B können nicht gleichzeitig eintreten.

Beispiel: A und A^C,
A$\setminus$B,
AΔB,
und A$\cap$B sind disjunkt.

Definition: A $\subset$ B, wenn $\forall w \in A \Rightarrow w \in B$
Wenn A eintritt, dann tritt auch B ein.



1.3 De Morgan-Regeln

$(A \cup B)^C$ = "Kein Ereignis tritt ein" = "A tritt nicht ein **und** B tritt nicht ein" = $A^C \cap B^C$
Regel:$(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

$(A \cap B)^C$ ="**mindestens** ein Ereignis tritt nicht ein." = "A tritt nicht ein **oder** B tritt nicht ein." = $A^C \cup B^C$

Regel: $(A \cup B)^C$
Allgemein:
$(A_1 \cup, A_2, \cup, ...)^C = A_1^C \cap A_2^C \cap ...$
$(A_1 \cap, A_2, \cap, ...)^C = A_1^C \cup A_2^C \cup ...$

1.4 Wahrscheinlichkeiten

Buffon:
4040 Würfe einer Münze. 2048 Kopf.

Pearson: 24000 Würfe, 12012 Kopf

Rechner:100000 Würfe, 50106 Kopf. Häufigkeit: 0,50106

1.4.1 Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Betrachte Zufallsexperiment und Ereignis A $\subset \Omega$
Wiederhole das Experiment n Mal.
Zähle, wie oft A eingetreten ist: $kn(A)$

$$\frac{k_n(A)}{n}(\text{Häufigkeit}) \underset{n\to\infty}{\to} \mathbb{P}[A](\text{Wkeit von A0})$$

Definition: Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Paar (Ω,p), wobei Ω eine Menge ist und

$$: \Omega \to [0,1] \text{ mit } \sum_{w} \in \Omega p(w) = 1$$

Wahrscheinlichkeit eines Ausgangs w $\in$ Sigma ist p(w)
Wahrscheinlichkeit eines Ereignis A $\subset \Omega : \mathbb{P}[A] = \Sigma_{w \in A}\, p(w)$

Definition Ein Laplace-Experiment liegt vor, wenn

$$\#\Sigma = n < \infty \text{ und } p(w) = \frac{1}{n}\forall w \in \Omega[\text{Ausgänge sind gleichwahrscheinlich}]$$

Dann gilt :

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Beispiel: 2 **faire** Würfel $\Omega = \{1, ..., 6\}^2 \qquad \#\Omega = 36$
A = "Augensumme = 10" = {(6,4),(5,5),(4,6)}

$$\mathbb{P}[A] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

B = "Augensumme = 11" = {(6,5),(5,6)} $\to \mathbb{P} = \frac{1}{18}$

Beispiel: Nicht-Laplace-Experiment
$\Omega = \{1, 2, 3\} \qquad p(1) = \frac{1}{4} \quad p(2) = \frac{1}{4} \quad p(3) = \frac{1}{2}$
oder $\Omega = \{1, 2, 3A, 3B\} \Rightarrow$ Laplace-Experiment, da
$p(w) = \frac{1}{4}\forall w.\mathbb{P}[3] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$

2 Kombinatorik

Beispiel: Geburtstagsproblem K = 200 Personen
A = "mindestens 2 Personen haben am gleichen Tag Geburtstag"
$\mathbb{P}[A] = ?$

Modell: n = 365 Tage im Jahr

Ausgänge: Liste der Länge K besteht aus Zahlen zwischen 1 und n

$\Omega = \{1, ..., n\}^K = \{(a_1, ..., a_k) : a_i \in \{1, ..., 365\} \forall i = 1, ..., k\}$
a_i = Geburtstag der i-ten Person.
$\#\Omega = \underbrace{n * n * ... * n}_{K} = n^K = 365^{200}$
$\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\#\Omega}$
Gegenereignis A^C = "alle Geburtstage sind (paarweise) verschieden"

$$\#A^C = \underbrace{n}_{\text{Mögl. für Person 1}} * \underbrace{(n-1)}_{\text{Mögl. für Person 2}} * \underbrace{(n-2)}_{\text{Mögl. für 3. Person}} * ... * \underbrace{(n-K+1)}_{\text{Mögl. für Person k}} =$$

$(n)_K$ mit K≤n
$\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#\Omega - \#A^C}{\#\Omega} = 1 - \frac{\#A^C}{\#\Omega} = 1 - \frac{n(n-1)...(n-K+1)}{n^K}$
Beispiel:
K = 23 Personen: $\mathbb{P}[A]$ =0.507
K = 200: $\mathbb{P}[A] = 0.999999...8 \approx 1$

2.1 Urnenmodelle

Urne mit Bällen 1,...,n. Es wird k mal jeweils ein Ball zufällig gezogen. [*GRAFIK URNE]
Möglichkeiten:

a) Mit/ohne Zurücklegen

b) Nummern der Bälle mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Insgesamt 4 Modelle:

1. **Mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge**
   Ausgänge dieses Experiments sind Listen der Länge K bestehend aus Zahlen zwischen 1 und n.
   $\Omega = \{(a_1, ..., a_k) : a_i \in \{1, ..., n\} \forall i = 1, .., K\}$
   a_i = die Nummer des i-ten Ball
   Beachte
   - Es ist möglich, dass $a_i = a_j$ (mit Zurücklegen)
   - $(5, 3, 7, ...) \neq (3, 5, 7, ...)$

   Beispiel:
   - Geburtstage von Personen. Bälle = Tage.
     Jede Person zieht einen Ball zufällig.
   - k-maliges Würfeln. 6 Bälle = 6 Seiten des Würfels

   $$\#\Omega = \underbrace{n * n * ... * n}_{K} = n^K$$

2. **Ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge**
   $\Omega = \{(a_1, ...a_k) : a_i \in \{1, ..., n\}, \quad \underbrace{a_i \neq a_j \forall i \neq j}_{\text{Paarweise verschiedene Elemente}} \quad \}$
   $\#\Omega = n * (n-1) * (n-2) * ... * (n-K+1)$
   Beachte
   - (1,3,**2**,4,5,**2**,...) $\notin \Omega$
   - (5,3,7,...) $\neq$ (3,5,7,...)

   Bemerkungen:
   - Falls k > n: $\#\Omega = 0$
   - Für k = n:
     $\#\Omega = n * (n-1) * ... * 1 = 1 * 2 * 3 * ... * n = n!$
     Ausgänge sind Permutationen:
     n= 3:(1,2,3),(1,3,2),(2,1,3),(2,3,1)

3. **Ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge**
   Ausgänge: Listen der Länge K aus verschiedenen Elementen.
   Allerdings wird die Reihenfolge nicht berücksichtigt, d.h. {2,5,3} = {5,3,2}
   Ausgänge sind K-elementige Teilmengen von {1,...,n}.

   $\Omega = \{A : A \subset \{1, ..., n\}, |A| = k\}$ oder
   $\Omega = \{(a_1, ..., a_k) : a_i \in \{1, ..., n\}, \underbrace{a_1 < a_2 < ... < a_k}_{\text{Reihenfolge wird durch sortieren gelöscht}}\}$

   $\#\Omega = \frac{n*(n-1)*...*(n*K+1)}{K!}$ K Objekte aus n Objekten auswählen
   $= \binom{n}{k}$

   Beispiel: Lotto, 49 Kugeln. 6 Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen.
   Wir tippen auf eine Kombination aus 6 Nummern
   A = "Man hat alle 6 geraten" $\mathbb{P}[A] = \frac{1}{\binom{49}{6}}$

   1. Lösung:
   Ω = Menge aller 6-elementigen Teilmengen von {1,...,49}.
   Die Kugeln werden mit einem Griff gezogen.
   $\#\Omega = \binom{49}{6}$ $\#A = 1$ [die Kombination, auf die wir tippen]
   $\mathbb{P}[A] = \frac{1}{\binom{49}{6}} \approx 7,15 * 10^{-8}$

   2. Lösung:
   Kugeln werden einzeln gezogen, Nummern werden notiert:
   $\Omega = \{(a_1, ..., a_6) : a_i \in \{1, ..., 49\}, a_i \neq a_i \forall i \neq j\}$
   $\#\Omega = 49 * 48 * 47 * ... * (49 - 6 + 1)$ $\#A = 6!$
   Wir tippen auf {1,...,6}. wir gewinnen bei allen Permutationen von 1,...,6.
   $\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{6!}{49*48*...*44} = \frac{1}{\binom{49}{6}}$

   Beispiel:
   Wie hoch ist die Chance, dass 2 mal in Folge die gleichen Zahlen gezogen werden?
   Bis zum Zeitpunkt gab es K = 3016 Ziehungen.
   Insgesamt gibt es $\binom{49}{6}$ Gewinnreihen.

   A = "Bei mindestens 2 Ziehungen wurde die gleiche Reihe gezogen"
   $\approx$ Geburtstagsproblem

   A^C = "Alle Ziehungen ergeben verschiedene Reihen"

   $\mathbb{P}[A] = 1 - \frac{n(n-1)...(n-K+1)}{n^K} = 0{,}278$

   $\Rightarrow$ **Ferni-Dirar-Statistik**

4. **Mit zurücklegen und ohne Reihenfolge**
   K Vögel setzen sich auf n Bäume
   - Mehrfachbesetzungen möglich
   - Vögel identisch

   Wieviele Besetzungen sind möglich?

   Lösung:
   Insgesamt $\underbrace{K}_{\text{Vögel}} + \underbrace{n-1}_{\text{"Trennwände"}}$ Symbole, davon K Kreuze
   $\#\Omega = \binom{K+n-1}{K} = \binom{K+n-1}{n-1}$
   $\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$
   $\Rightarrow$ Bose-Einstein-Statistik (für diese Vorlesung unwichtig)

2.2 Binomialkoeffizient

Definition: Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von {1,..,n}

$$\textbf{Formel: } \binom{n}{k} = \frac{n*(n-1)*...*(n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{(n-k)!*k!}$$

mit k $\in$ {0,...,n}

Wieso teilen wir durch (k!)?
Weil jede k-elementige Teilmenge k!-mal gezählt wurde. (z.B. {3,5,9} als (3,5,9), (3,9,5),...)

Beispiel: 20 Schüler.
Es soll eine Fußballmanschafft gebildet werden.
Anzahl der Möglichkeiten ohne Berücksichtigung der Positionen: $\binom{20}{10}$

Beispiel: 52 Karten, davon 4 Asse. Wir ziehen 4 Karten ohne zurücklegen.
Wahrscheinlichkeit, dass alle 4 Asse sind = ?
Ω = 4-elementige Teilmengen von {1,...,52}
#A=1 $\qquad \mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\Omega} = \frac{1}{\binom{52}{4}} = 3,7*10^{-6}$

Beispiel: 52 Karten, 4 werden gezogen.
A = "Alle sind Pik" $\mathbb{P}[A]$ =? $\qquad \#A = \binom{13}{4}$
$\#\Omega = \binom{52}{4} \qquad \mathbb{P}[A] = \frac{\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}} \approx 2,64*10--3$

Satz 3.1:
Wenn $0 \leq$ k $\leq$n-1, dann gilt: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Beweis: Wir wollen aus n Elementen k auswählen.
Hier gibt es zwei Fälle:

1. Wir haben das Element "n" ausgewählt.
   Es verbleiben n-1 Elemente, von denen k-1 ausgewählt werden sollen.
   $\Longrightarrow$ $\binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten

2. Wir haben das Element "n" nicht ausgewählt.
   Es verbleiben n-1 Elemente, von denen k ausgewählt werden sollen.
   $\Longrightarrow$ $\binom{n-1}{k}$ Möglichkeiten

2.3 Binomischer Lehrsatz

$(x+y)^0 = 1$
$(x+y)^1 = x + y$
$(x+y)^2 = x^2 + 2xy + y^2$
$(x+y)^3 = x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3$
$(x+y)^n = x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \ldots + y^n$

Abbildung 2.1: Pascalsches Dreieck

Satz 3.2.:
$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$

Beweis:
Beim Ausmultiplizieren zählen wir, wie oft der Term $x^k y^{n-k}$ entsteht.
Aus k Faktoren muss x als Beitrag ausgewählt werden, aus dem Rest y. $(x+y)^n = (x+y)(x+y) * \ldots * (x+y)$
$\binom{n}{k}$ Möglichkeiten $\square$

Bemerkung: $\binom{n}{k} = \binom{n}{k-1}$, d.h. jede (Spalte vom Pascal'schen Dreieck) liest sich von rechts genauso wie von links.
k Elemente auswählen $\Leftrightarrow$ n-k nicht auswählen.

Beobachtung: Zeilen summieren im Pascal'schen Dreieck: Zeilen summieren im Pascal'schen Dreieck: Summe ist 2^n

Satz 3.3: $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$

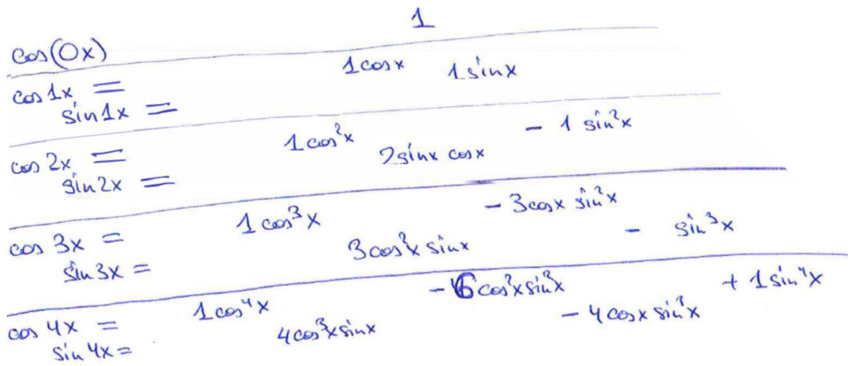
Beweis:
$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n \quad \square$

Übung: (ähnlich)
$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \ldots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \ldots$

2.3.1 Pascal'sches Dreieck und Trigonometrie

Bekannt: $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$
$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

Es gibt auch Formeln für $\sin(3x), \cos(3x)$,...



Allgemein:
$\sin(nx) = \binom{n}{1}\cos^{n-1}(x)\sin x - \binom{n}{3}\cos^{n-1} x \sin^3 x + \binom{n}{5}\cos^{n-5} x \sin^5 x - ...$

$\cos(nx) = \cos^n x - \binom{n}{2}\cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4}\cos^{n-4} x \sin^4 x - ...$

Beweis: Induktion (Übung YAAAY)

2.4 Hypergeometrische Verteilung

Teich mit n Fischen: n_1 Fische rot
$n_1 + n_2 = n$ n_2 Fische gelb

Fischer fängt k Fische (ohne Zurücklegen) mit k≤n

A="k_1 rote und k_2 gelbe Fische gefangen."mit $k_1 + k_2 = k$

$\mathbb{P}[A] =?$

Lösung: $\Omega = \{T \subseteq \{1,...,n\}, \#T = k\}$ $\quad \#\Omega = \binom{n}{k}$

Ereignis A = "Aus n_1 roten Fischen k_1 auswählen $\binom{n_1}{k_1}$ und aus n_2 gelben Fischen k_2 auswählen $\binom{n_2}{k_2}$"

Diese sind beliebig kombinierbar.

Insgesamt: $\#A = \binom{n_1}{k_1} * \binom{n_2}{k_2}$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\binom{n_1}{k_1} * \binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}}$$

Beispiel: Lotto: 6 aus 49

Ereignis A = "Man hat genau 3 richtig"

$\mathbb{P}$[A] = ?

Lösung:
$\Omega = \{T \subseteq \{1, ..., 49\}, |T| = 6\} \qquad \#\Omega = \binom{49}{6}$

Ohne Einschränkung tippen wir auf {1,...,6} damit A eintritt:

- Es müssen 3 Kugeln aus {1,...,6} gezogen werden: $\binom{6}{3}$ Möglichkeiten
- Es müssen 3 Kugeln aus {7,...,49} gezogen werden: $\binom{43}{3}$ Möglichkeiten

  #A = $\binom{6}{3} * \binom{43}{3}$

  $\mathbb{P}[A] = \frac{\binom{6}{3} * \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \approx 0,0176$

2.5 Touren

1. 5 Städte aus 12 Städten für eine Rundreise auswählen.
   # Touren = ?

   Lösung: 12 Möglichkeiten für Startpunkt
   11 Möglichkeiten für die nächste Stadt usw.

   Insgesamt: $12 * 11 * 10 * 9 * 8$ Möglichkeiten

2. 12 Personen, Ausschuss aus 5 Personen, darunter 1 Vorsitzender
   # Möglichkeiten = ?

   Lösung 1: $\underbrace{\binom{12}{5}}_{\text{Vositzenden auswählen}} * 5$

   Lösung 2: $\underbrace{12}_{\text{Vorsitzender}} * \binom{11}{4}$

2.6 Allgemeine hypergeometrische Verteilung

Teich mit n Fischen und r möglichen Farben:

n_1 Fische haben Farbe 1, $\quad n_1 + n_2 + ... + n_3 = n$
...
n_r Fische haben Farbe r

Fischer fängt K Fische
A = "genau k_1 Fische mit Farbe 1 gefangen, ... , genau k_r Fische mit Farbe r gefangen" mit $k_1 + ... + k_r = k$

$\mathbb{P}[A] =?$

Lösung: $\Omega = \{T \subset \{1, ..., n\} : \#T = k\} \qquad \#\Omega = \binom{n}{k}$

$\#A = \binom{n_1}{k_1} * \binom{n_2}{k_2} * ... * \binom{n_r}{k_r}$

k_1 Fische mit Farbe 1 auswählen: $\binom{n_1}{k_1}$
k_r Fische mit Farbe r auswählen: $\binom{n_r}{k_r}$

$$\mathbb{P}[A] = \underbrace{\frac{\binom{n_1}{k_1} * ... * \binom{n_r}{k_r}}{\binom{n}{k0}}}_{\text{Allgemeine hypergeometrische Verteilung}}$$

Beispiel: 52 Karten
Zufällig auf 2 Spieler verteilt. Jeder Spieler bekommt 26 Karten.

A = "Spieler 1 bekommt genau 3 Asse, 2 Könige und 1 Dame''
$\mathbb{P}[A] =?$

Lösung: $\#\Omega = \binom{52}{26} * \underbrace{\binom{26}{26}}_{=1}$

$$\#A = \underbrace{\binom{4}{3}}_{\text{3 A aus 4}} * \underbrace{\binom{4}{2}}_{\text{2 K aus 4}} * \underbrace{\binom{4}{1}}_{\text{1 D aus 4}} * \underbrace{\binom{40}{20}}_{\substack{\text{aus 40 verbl.} \\ \text{Karten 20 auswählen}}}$$

Beispiel: Zug mit 10 Waggons, jeweils 50 Plätze.
30 Personen suchen sich zufällig Plätze aus

A = "in jedem Waggon genau 3 Personen"

Lösung: $\#\Omega = \binom{500}{30}$ [30 Plätze ausgewählt, die besetzt werden sollen]

$$\#A = \underbrace{\binom{50}{3} * \binom{50}{3} * ... * \binom{50}{3}}_{1} 0 = \binom{50}{3}^{10}$$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\binom{50}{3}^{10}}{\binom{500}{30}}$$

2.7 Multinomialkoeffizient

Beispiel: k verschiedene Gegenstände sollen auf r Fächer verteilt werden, s.d.:
Im 1. Fach k_1 Gegenstände landen, $k_1 + k_2 + ... + k_r = k$
Im 2. Fach k_2 Gegenstände landen,
...
Im r. Fach k_r Gegenstände landen
\# Möglichkeiten = ?

Lösung:
Wähle k_1 Gegenstände für Fach 1: $\binom{k}{k_1}$
Wähle k_2 Gegenstände für Fach 2: $\binom{k-k_1}{k_2}$
Wähle k_3 Gegenstände für Fach 3: $\binom{k-k_1-k_2}{k_3}$
...
Wähle k_r Gegenstände für Fach r: $\binom{k-k_1-k_2-...-k_{r-1}}{k_r} = \binom{k_r}{k_r} = 1$

Insgesamt: $\binom{k}{k_1} * \binom{k-k_1}{k_2} * \binom{k-k_1-k_2}{k_3} * ... * \binom{k-k_1-k_2-...-k_{r-1}}{k_r} =$
$\frac{k!}{k_1! * k_2! * ... * k_r!}$
$k! = 1 * 2 * ... * k$
$1! = 1$
$0! =!$ $\quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! * 0!} = \frac{1}{0!} = 1$

Definition: Multinomialkoeffizient

$\binom{k}{k_1, k_2, ..., k_r} := \frac{k!}{k_1! * k_2! * ... * k_r!}$

Spezifalfall: r = 2:

$\binom{k}{k_1, k - k_1} = \frac{k!}{k_1!(k-k_1)!} = \binom{k}{k_1} = \binom{k}{k-k_1}$

Multinomialformel:

$$\underbrace{(x+y+z+t)^n = (x+y+z+t) * (x+y+z+t) * ... * (x+y+z+t)}_{\text{n Mal}}$$

$$= \Sigma x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} t^{k_4} \qquad k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{0, 1, ...\}, k_1 + ...k_4 = n$$

Beispiel: Aus 33 Schülern sollen 3 Fußballmannschaften gebildet werden.
\#Mögl = ?

Lösung: $\binom{33}{11, 11, 11} = \frac{33!}{11!11!11!}$ [falls Mannschaften unterscheidbar]

Wenn Mannschaften **nicht** unterscheidbar sind: $\binom{33}{11, 11, 11}/3!$

Beispiel: Wie viele 16-stellige Zahlen kann man mit einem Ziffernvorrat von **3 Einsen**, **5 Dreien** und **8 Sechsen** schreiben?

1,1,1,3,3,3,3,3,6,6,6,6,6,6,6,6

Lösung: 16 Stellen □□□... □
3 Stellen auswählen, die mit Einsen besetzt werden. $\binom{16}{3}$
Es verbleiben 13 Stellen. 5 Stellen auswählen, die mit Dreien besetzt werden $\binom{13}{5}$
Es verbleiben 8 Stellen. Es bleibt nur eine Möglichkeit für die 8 Sechsen.

Insgesamt: $\binom{16}{3} * \binom{13}{5} * 1 = \binom{16}{3,5,8} = \dfrac{16!}{3!5!8!}$
Fächer: 1,3,6
Gegenstände: Stellen

2.7.1 Multinomialverteilung mit Zurücklegen

Beispiel: Fische mit $n = \underbrace{n_1}_{\text{Farbe 1}} +, .., n_r$

Fischer fängt k Fische **mit Zurücklegen**

A = "genau k_1 Fische mit Farbe 1 gefangen,
...
genau k_r Fische mit Farbe r"

$\mathbb{P}[A] =?$

Lösung: $\Omega = \{1, ..., n\}^k \qquad \#\Omega = n^k$
Betrachte Ereignis:

- Zuerst weise jeder Ziehung eine Farbe zu, s.d. $\forall i \in$ {1,..,r} Farbe i genau k_i Ziehungen zugeordnet wird.
  Mögl.:$\binom{k}{k_1, k_2, ..., k_r}$
- Bei gegebenen Farben ordnen wir nun jeder Ziehung einen Fisch zu.

A besteht aus $\binom{k}{k_1, ..., k_r}$ "Kopien" von B, somit

$$\#A = \binom{k}{k_1, ..., k_r} * n_1^{k_r} * ... * n_r^{k_r}$$

B = "bei Ziehungen $1, ..., k_n$ Farbe 1 gezogen,
bei Ziehungen $k_1 + 1, ..., k_1 + k_2$: Farbe 2,
...
bei Ziehungen $k_1 + ... + k_r + 1, ..., k$: Farbe r"

$$\#B = \underbrace{n_1 * ... * n_1}_{k_1} * \underbrace{n_2 * ... * n_2}_{k_2} * ... * \underbrace{n_r * ... * n_r}_{k_r} = n_1^{k_1} * ... * n_r^{k_r}$$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \binom{k}{k_1, ..., k_r} * \left(\frac{n_1}{n}\right)^{k_1} * \left(\frac{n_2}{n}\right)^{k_2} * ... * \left(\frac{n_r}{n}\right)^{k_r} \qquad \square$$

Beispiel: Eine faire Münze wird n mal geworfen.

$\mathbb{P}[\text{k Mal "Kopf"}] = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$, dann:

$$\#\Omega = \{Z, K\}^n \quad \#\Omega = 2^n \quad \#A = \binom{n}{k}$$

[Auswahl von k Würfen, in denen Kopf geworfen wurde]

Zwei Aufgaben:

1. Rundreise. Kunde darf 5 aus 12 verschiedenen Städten auswählen. Anzahl der Touren: 12*11*10*9*8, nicht $\binom{12}{5}$ [Tour geordnet]

2. 12 Personen. Es soll ein Ausschuss aus 5 Personen gebildet werden, davon 1 Vorsitzender. Anzahl der Mögl: $\binom{12}{5} * 5$, oder $12 * \binom{11}{4}$

3 Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie

Ω = Menge aller Ausgänge eines Zufallsexperiments

Ereignisse := Teilmengen von Ω

$\mathcal{P}(\Omega)$ = Menge aller Ereignisse = Potenzmenge von Ω
$\#\mathcal{P}(\Omega) = 2^{\#\Omega}$

Wahrscheinlichkeit ist eine Funktion $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \to [0, 1], A \mapsto \mathbb{P}[A]$ mit

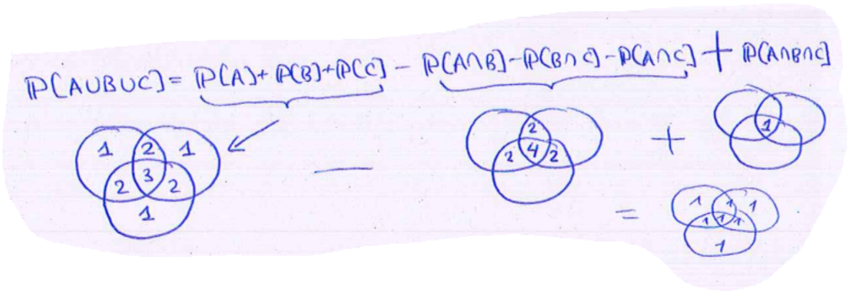
- $\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup ...] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + ...$
  $\forall A_1, A_2, ... \subset \Omega$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$
- $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

3.1 Eigenschaften von $\mathbb{P}$

1. $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$
2. $\forall A_1, ..., A_n \subset \Omega$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
   $\mathbb{P}[A_1 \cup, ..., \cup A_n] = \mathbb{P}[A_1] + ... + \mathbb{P}[A_n]$

   Spezialfall: Für A,B $\subset \Omega$ mit A $\cap B = \emptyset$
   gilt $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$
3. $\forall A \in \Omega \quad \mathbb{P}[A^C] = 1 - \mathbb{P}[A]$
4. $\forall A, B \subset \Omega : \mathbb{P}[A \backslash B] = \mathbb{P}[A] - \underbrace{\mathbb{P}[A \cap B]}_{\text{Nicht } \mathbb{P}[B]}$
5. A,B $\subset \Omega$ (nicht disjunkt)
   $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$
6. Siebformel oder Einschluss-Ausschluss-Formel.

Für 3 Ereignisse A, B, C $\subset \Omega$
$\mathbb{P}[A \cup B \cup C] =$
$\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[B \cap C] - \mathbb{P}[C \cap A] + \mathbb{P}[A \cap B \cap C]$



Für 4 Ereignisse A,B,C,D
$\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}B + \mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[D] - (\mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[A \cap C] + ... + \mathbb{P}[C \cap B])$
$+(\mathbb{P}[A \cap B \cap C] + \mathbb{P}[B \cap C \cap D] + ...) - \mathbb{P}[A \cap B \cap C \cap D]$

Für n Ereignisse $A_1, A_2, ..., A_n$:
$\mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^n A_k] = \Sigma_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i] - \Sigma_{1 \le i < j \le n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] + \Sigma_{1 \le i < j < k \le n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j \cap A_k] - ...$
$+(-1)^{n+1} \mathbb{P}[A_1 \cap ... \cap A_n]$

Beispiel:
n Briefe werden zufällig in n adressierte Briefumschläge gesteckt.

Ereignis A = "mind. 1 Brief wird in den richtigen Umschlag gesteckt"

$\mathbb{P}[A] = ?$

Lösung:
Briefe 1,2,3,4,5,6

$$\Omega = \{ \underbrace{(a_1, ..., a_i)}_{\substack{a_i \text{ gibt an, in welchen} \\ \text{Umschlag Brief i gesteckt wird}}} : a_i \in \{1, ..., n\} a_i \neq a_j \forall i \neq j\}$$

$\#\Omega = n * (n-1) * ... + 1 = n! \quad \#A = ?$
A $= \{(a_1, ..., a_n) \in \Omega : \exists k$ mit $A_k = k\}$

A $= A_1 \cup ... \cup A_n$ mit
A_k = "Brief k wird in Umschlag k gesteckt"

$$\mathbb{P}[A_k] = \frac{\#A_k}{\#\Omega} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$A_1, ..., A_n$ nicht disjunkt.

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = \frac{\#(A_1 \cap A_2)}{n!} = \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = \frac{\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{n!} = \frac{(n-3)!}{n!}$$

Allgemein: $\mathbb{P}[A_{i1} \cap A_{i2} \cap ... \cap A_{il}] = \dfrac{(n-l)!}{n!}$

Siebformel: $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A_1 \cup ... \cup A_n] = n * \frac{1}{n} - \binom{n}{2} * \dfrac{(n-2)!}{n!} + \dfrac{(n-3)!}{n!} - ...$
$= \Sigma_{l=1}^{n} \binom{1}{l} * \dfrac{(n-l)!}{n!} * (-1)^{l+1} = \Sigma_{l=1+n}^{n} \dfrac{(-1)^{l+1}}{l!}$
$= 1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} - \dfrac{1}{4!} + ... + (-1)^{n+1} \dfrac{1}{n!}$
Für $n \to \infty \quad \lim\limits_{n \to \infty} \mathbb{P}[A] = 1 - \dfrac{1}{2!} + \dfrac{1}{3!} - \dfrac{1}{4!} + ...$
$= 1 - (\dfrac{1}{2!} - \dfrac{1}{3!} + ...) = 1 - \dfrac{1}{e} \approx 0.632$

3.2 Ungleichungen für Wahrscheinlichkeiten

$\mathbb{P}[\Omega] = 1$
$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup ...] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + ...$
falls $A_i \cap A_j = \emptyset \, \forall i + j$

7.:
$\forall A \subset B \subset \Omega \Rightarrow \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$

Beweis: $B = A \cup (B \backslash A)$ (disjunkt)
$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A] + \underbrace{\mathbb{P}[B \backslash A]}_{\geq 0} \geq \mathbb{P}[A] \quad \square$

8.:
$\forall A, B \subset \Omega : \mathbb{P}[A \cup B] \leq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$

Allgemeiner: $\forall A_1, ..., A_n \subset \Omega : \mathbb{P}[A_1 \cup ... \cup A_n] \leq \mathbb{P}[A_1] + ... + \mathbb{P}[A_n]$

9.: Noch allgemeiner:
$\forall A_1, A_2, ... \subset \Omega : \mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k] \leq \Sigma_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_k]$

Beweis:
$B_1 = A_1$
$B_2 = A_2 \backslash A_1$
$B_3 = A_3 \backslash (A_1 \cup A_2)$
...
Dann gilt:
$$\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}_{\text{Nicht disj.}} = \underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k}_{\text{disj.!!!}}$$

$\mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k] = \mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k] \overset{\text{Axiom}}{=} \Sigma_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[B_k] \underset{B_k \subset A_k}{\leq} \Sigma_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_k] \quad \square$

4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeiten

Beispiel: 2 faire Würfel

$\Omega = \{1, ..., 6\}^2 \quad \#\Omega = 36$

Ereignis A = "Erster Würfel zeit eine 6"
Ereignis B = "Augensumme = 10"

Jemand teilt uns mit: B ist eingetreten.

$A = \{(6,1), (6,2), ..., (6,6)\} \quad \#A = 6$

$\mathbb{P}[A] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $B = \{ \underbrace{(6,4)}_{\text{A tritt ein}}, (5,5), (4,6)\}$

$\mathbb{P}[A|B] = \frac{1}{3}$

Definition:
Seien $A, B \subset \Omega$.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B ist definiert als:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

Annahme: $\mathbb{P}[B] \neq 0$

Beispiel:
Fairer Würfel wird 10x geworfen.
Uns wird mitgeteilt, dass mindestens eine 6 gewürfelt wurde.
Bedingte Wkeit, dass der erste Wurf eine 6 war = ?

Lösung:

$\Omega = \{(a_1, ..., a_{10}) : a_i \in \{1, .., 6\}\} \quad \#\Omega = \overbrace{6 * 6 * ... * 6}^{10} = 6^{10}$

B = "mindestens eine 6 gewürfelt"

B^C = "keine 6 gewürfelt" $= \{(a_1, ..., a_10) : a_i \in \{1, 2, ..., 5\}\}$

$\#B = 6^{10} - 5^{10} \quad \#B^C = 5^{10}$

$\mathbb{P}[B] = \dfrac{6^{10} - 5^{10}}{6^{10}}$

A = " der erste Wurf ist eine 6" $= \{(6, a_2, ..., a_{10}) : a_i \in \{1, ..., 6\}\}$

$\#A = 1 * \underbrace{6 * 6 * ... * 6}_{9-mal} = 6^9$

$\mathbb{P}[A] = \frac{6^9}{6^{10}} = \frac{1}{6}$

$A \cap B = A$

$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] = \frac{1}{6}$

$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{6^9}{6^{10} - 5^{10}} = 0,19$

$\mathbb{P}[A|B] = 0,19$

$\mathbb{P}[A] = 0,16$

Alternativ: $\mathbb{P}[A|B] = \frac{\#(A \cap B)}{\#B}$

4.1 Eigenschaften der bedingten Wahrscheinlichkeiten

1. $\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \leq 1$ (und ≥ 0)
2. $\mathbb{P}[\Omega|B] = \frac{\mathbb{P}[\Omega \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[B]} = 1$
   $\mathbb{P}[\emptyset|B] = 0$
3. Falls $A_1, A_2, ...$ disj. sind, gilt:
   $$\mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right)|B\right] = \Sigma_{k=1}^{\infty} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\mathbb{P}\left[(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap B\right]}{\mathbb{P}[B]}$$
   $$= \frac{\mathbb{P}\left[\bigcup_{k=1}^{\infty}(A_k \cap B)\right]}{\mathbb{P}[B]}$$
   $$\stackrel{A_\cap B, A_2 \cap B, ...\text{disj}}{=} \frac{\Sigma_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}[A_k \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \Sigma_{k=1}^{\infty}\frac{\mathbb{P}[A_k \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \Sigma_{k=1}^{\infty}\mathbb{P}[A_k|B] \quad \square$$
4. $\mathbb{P}[A^C|B] = 1 - \mathbb{P}[A|B]$
5. Multiplikationsregel:
   $\mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = \mathbb{P}[A_1] * \mathbb{P}[A_2|A_1]$
   $\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = \mathbb{P}[A_1] * \mathbb{P}[A_2|A_1] * \mathbb{P}[A_3|(A_1 \cap A_2)]$

Beispiel:
Sterbewahrscheinlichkeiten $q_0, q_1, ...$
q_n = Wahrscheinlichkeit, als eine n-jährige Person, dass Alter n+1 nicht zu erreichen.
$q_0 = 0,0046$ Wkeit, dass eine Person ≥ 50 alt wird
$q_1 = 0,0004$
$q_2 = 0,0002$
Lösung:
$A_n :=$ "Person hat das Alter von n Jahren erreicht"
$\mathbb{P}[A_{50}] = ?$
Gegeben sind $q_n = \mathbb{P}\left[A_{n+1}^C | A_n\right] \quad 1 - q_n = \mathbb{P}[A_{n+1}|A_n]$
$\mathbb{P}[A_{50}] = \mathbb{P}[A_1] * \mathbb{P}[A_2|A_1] * \mathbb{P}[A_3|(A_1 \cap A_2)] * \mathbb{P}[A_4|\underbrace{(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}_{A_3}] * ... *$
$\mathbb{P}[A_{50}|\underbrace{(A_1 \cap ... \cap A_{49})}_{A_{49}}]$
$= (1 - q_0) * (1 - q_1) * ... * (1 - q_{49})$
$\mathbb{P}[\text{Person lebt genau 50 Jahre}] = (1 - q_0) * (1 - q_1) * ... * (1 - q_{49}) * q_{50}$ □

4.2 Unabhängige Ereignisse

Zwei Formeln:

1. $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$, falls A ∩ B = ∅
2. $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B]$, falls A und B unabhängig

Bemerkung: Disjunkt und unabhängig sind verschiedene Begriffe.
Seien A, B disjunkt (d.h. A ∩ B = ∅)
$\Rightarrow [\underbrace{A \cap B}_{\emptyset}] = 0 \neq \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B]$
⇒ A und B abh. (Falls $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] \neq 0$
Definition:
Ereignisse A,B,C heißen

- paarweise unabhängig, wenn $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B]$, $\mathbb{P}[A \cap C] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[C]$, $\mathbb{P}[B \cap C] = \mathbb{P}[B] * \mathbb{P}[C]$
- unabhängig, wenn zusätzlich: $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B] * \mathbb{P}[C]$

unabhängig ⇒ paarweise unabhängig

Beispiel:
3 Ereignisse, die paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig sind.

3 Würfel: x_1, x_2, x_3 seien die 3 Augenzahlen

$A ='' x_1 = x_2'' \quad B ='' x_2 = x_3'' \quad C ='' x_3 = x_1''$

$\Omega = \{1, ..., 6\}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \{1, ..., 6\}\} \quad \#\Omega = 6^3$
$A = \{(a, a, c) : a, c \in \{1, ..., 6\}\}$
$B = \{(a, b, b) : a, b \in \{1, ..., 6\}\}$
$C = \{(a, b, a) : a, b \in \{1, .., 6\}\}$

$\#A = 6^2 \quad \#B = 6^2 \quad \#C = 6^2$

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[C] = \frac{6^2}{6^3} = \frac{1}{6}$$

Behauptung: Seien A, B, C paarweise unabhängig. Wir zeigen: $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B]$
$A \cap B ='' x_1 = x_2, x_2 = x_3'' ='' x_1 = x_2 = x_3'' = \{(a, a, a) : a \in \{1, ..., 6\}\}$
$\#(A \cap B) = 6$
$$\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B] \Rightarrow \text{ A und B unabh}$$
Behauptung: Seien A,B,C abhängig.
$A \cap B \cap C ='' x_1 = x_2, x_2 = x_3, x_3 = x_1'' ='' x_1 = x_2 = x_3'' \quad \#(A \cap B \cap C) = 6$
$$\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} \neq \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B] * \mathbb{P}[C] \Rightarrow A, B, C \text{ abhängig}$$

4.2.1 Eigenschaften der Unabhängigkeit

Seien A,B unabhängige Ereignisse. Dann sind

- A und B^C unabhängig
- A^C und B unabhängig
- A^C und B^C unabhängig

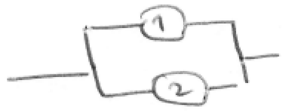
Beweis: Wir zeigen A und B^C sind unabhängig

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[A \cap B^C] =& \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[A \cap B] \underset{\text{A, B unabh}}{=} \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B] \\ & \mathbb{P}[A] * (1.\mathbb{P}[B]) = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B^C] \Rightarrow A, B^C \text{ unabhängig} \quad \square\end{aligned}$$

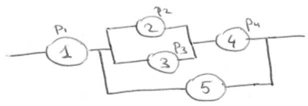
Weitere **Behauptungen**: Seien A,B,C unabhängig. Dann sind:

- A,B $\cup$ C unabhängig
- A, B $\cap$ C unabhängig
- A, B Δ C unabhängig

Beispiel: Zuverlässigkeit: System besteht aus **n** Komponenten 1,...,n
Wahrscheinlichkeit, dass Komponente **i** ausfällt ist $\mathbb{P}[A_i] = p_i$



a) Parallelschaltung
   $\mathbb{P}[\text{Ausfall des Systems}] = \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = p_1 p_2$



b) Reihenschaltung
   $\mathbb{P}[\text{Ausfall des Systems}] = \mathbb{P}[\underbrace{A_1 \cup A_2}_{\substack{\text{nicht disj,}\\ \text{unabh}}}] = 1 - \mathbb{P}[(A_1 \cup A_1)^C] \overset{\text{de Morgan}}{=}$

   $1 - \mathbb{P}[\underbrace{A_1^C \bigcap A_2^C}_{\text{unabh}}]$
   $= 1.\mathbb{P}[A_1^C] * \mathbb{P}[A_2^C]$
   $= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$

   $\mathbb{P}[\text{Ausfall}] = ?$

Ereignis, dass das System ausfällt:
A = Ausfall des Systems = $A_1 \cup (A_5 \cap (A_4 \cup (A_2 \cap A_3)))$
$\mathbb{P}[A] = ?$
$\mathbb{P}[\text{2 und 3 fällt aus}] = p_2 p_3$
$\mathbb{P}[\text{2,3,4 fällt aus}] = p_2 p_3 + p_4 - p_2 p_3 p_4$
$\mathbb{P}[\text{2,3,4,5 fällt aus}] = (p_2 p_3 + p_4 - p_2 p_3 p_4) p_5$
$\mathbb{P}[A] = p_1 + p_{\text{Rest}} - p_1 p_{\text{Rest}} = ...$ (Prof sagt trivial) $\square$

Definition: n Ereignisse $A_1, A_2, ..., A_n$ sind

- paarweise unabhängig, wenn $\mathbb{P}[A_i \cap A_j] = \mathbb{P}[A_i] * \mathbb{P}[A_j] \forall i \neq j$
- unabhängig, wenn: $\forall m \in \{2, ..., n\}\ \forall 1 \leq i_1 < i_2 < ... < i_m \leq n$

$$\mathbb{P}[A_{i1} \cap A_{i2} \cap ... \cap A_{im}] = \mathbb{P}[A_{i1} * ... * \mathbb{P}[A_{im}]$$

  (D.h. Produktformel gilt für alle Teilfamilien)

Behauptung: Blockungslemma

Beispiel: Seien A,B,C,D,E,F,G unabhängige Ereignisse.

$$(A\Delta C) \cap E^C \cup C,\ B^C \cap F,\ D \cup G \quad \text{unabhängig}$$

$$\text{Aber:} \quad A\Delta\mathbf{C} \text{ und } B \cup \mathbf{C} \text{ sind im Allgemeinen abhängig}$$

Bemerkungen:

Ω und A sind immer unabhängig.

$\mathbb{P}[\Omega \cap A] = \mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[\Omega] * \mathbb{P}[A]$

$\emptyset$ und A sind immer unabhängig

$\mathbb{P}[\emptyset \cap A] = \mathbb{P}[\emptyset] = 0 = \mathbb{P}[\emptyset] * \mathbb{P}[A]$

5 Satz von Bayes

Satz: Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $\Omega = B_1 \dot{\cup} ... \dot{\cup} B_n$ disjunkte Zerlegung von Ω, d.h. $B_i \cap B_j = \emptyset \; \forall i \neq j$ und $\Omega = B_1 \cup ... \cup B_n$

Sei $\mathbb{P}[B_i] \neq 0 \forall i$

Sei A $\subset \Omega$ ein weiteres Ereignis. Dann gilt:

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B_1] * \mathbb{P}[A|B_1] + \mathbb{P}[B_2] * \mathbb{P}[A|B_2] + ...$$

Beweis: $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \cap B_1] + \mathbb{P}[A \cap B_2] + ... = \mathbb{P}[B_1] * \mathbb{P}[A|B_1] + \mathbb{P}[B_2] * \mathbb{P}[A|B_2] + ...$ □

Beispiel:

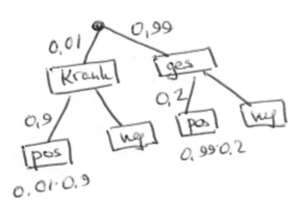
1% der Population ist krank, Rest ist gesund

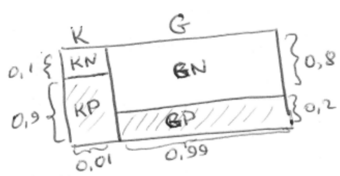
Schnelltest: Bei einer kranken Person mit Wahrscheinlichkeit 90% positiv.
Bei einer gesunden Person mit Wahrscheinlichkeit 20% positiv

A= "Test ist Positiv" $\quad \mathbb{P}[A] = 0,001 * 0.9 + 0,99 * 0,2 = 0,207$
Lösung mit der Formel
B_1 = "Person krank" $\quad B_2$ = "Person gesund"
$\mathbb{P}[B_1] = 0,01 \Rightarrow \mathbb{P}[B_2] = 0,99$

$\mathbb{P}[A|B_1] = 0,9 \quad$ [nicht $\mathbb{P}[A \cap B_1] \mathbb{P}[A|B_2] = 0,2$

$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B_1] * \mathbb{P}[A|B_1] + \mathbb{P}[B_2] * \mathbb{P}[A|B_2]$
$= 0,01 * 0.9 + 0.99 * 0,2$





A = KP $\dot{\cup}$ GP.

5.1 Bayes-Formel

Satz 2.2:
Seien A,B $\subset \Omega$ zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}[A] \neq 0, \mathbb{P}[B] \neq 0$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}[B|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B] * \mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A]}$$

Beweis: Linke Seite $= \mathbb{P}[B|A] = \dfrac{\mathbb{P}[B \cap A]}{\mathbb{P}[A]}$

Rechte Seite $= \dfrac{\mathbb{P}[A|B] * \mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A]} = \dfrac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[A]} \quad \square$

Beispiel 1: (Population Personen: krank und gesund)

1% der Population ist krank.

Schnelltest: Bei einer Kranken Person mit Wahrscheinlichkeit 90% positiv.
Bei einer gesunden Person mit Wahrscheinlichkeit 20% positiv

Eine gesunde Person wurde positiv getestet.
Wahrscheinlichkeit, dass diese Person krank ist?

Lösung 1:
Ω = Population $\qquad B_1$ = "Person ist krank"
$B_2 = B_1^C$ = "Person ist gesund"

A = "Person wurde positiv getestet"
Aufgabenstellung: $\mathbb{P}[B_1] = 0,01 \Rightarrow \mathbb{P}[B_2] = 1 - 0,01 = 0,99$

1. $\mathbb{P}[A|B_1] = 0,9$
2. $\mathbb{P}[A|B_2] = 0,2$

$\mathbb{P}[B_1|A] = ?$
Bayes-Formel: $\mathbb{P}[B_1|A] \overset{\text{Bayes}}{=} \dfrac{\mathbb{P}[A|B_1] * \mathbb{P}[B_1]}{\mathbb{P}[A]} \overset{\text{totale Wkeit}}{=}$

$$\frac{\mathbb{P}[A|B_1] * \mathbb{P}[B_1]}{\mathbb{P}[A|B_1] * \mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[A|B_2] * \mathbb{P}[B_2]} = \frac{0,9 * 0,01}{0,9 * 0,01 + 0,2 * 0,99} = 0,043$$

$\mathbb{P}[B_2|A] = 1 - \mathbb{P}[B_1|A] = 1 - 0,043$

Lösung 2:
$\mathbb{P}[A] = 0,01 * 0,9 + 0,99 * 0,2 = 0,207$

$$\mathbb{P}[\text{krank}|\text{positiv getestet}] = \frac{0,01 * 0,9}{0,01 * 0,9 + 0,99 * 0,2} = 0,043$$

Lösung 3:
Laplace-Experiment mit Ω = {KP, KN, GP, GN}
P(KP) = 0,9*0,01 P(GP) = 02*0,99
P(KN) = 0,1*0,01 P(GN) = 0,8*0,99

A = "Person positiv" = {KP, GP}
B_1 = "Person krank" = {KP, KN}

$$\mathbb{P}[B_1|A] = \frac{\mathbb{P}[B_1 \cap A]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{P(\mathrm{KP})}{P(\mathrm{KP}) + P(\mathrm{GP})} = ...$$

Beispiel 2: (2 Jungen Problem)
Im Nachbarhaus: Familie mit 2 Kindern.
Sie beobachten: Im Garten spielt ein Junge.
Wkeit, dass das $\underbrace{\text{andere Kind auch ein Junge}}_{\text{d.h. beide sind Jungen}}$ ist = ?

Lösung:
Grundmenge: Ω = {MM1, MM2, MJ1, MJ2, JM1, JM2, JJ1, JJ2}
MM1 = Beides Mädchen, erste Kind im Garten

B = "Im Garten spielt ein Junge" = {MJ2, JM1, JJ1,JJ2}
A = "Beide Kinder sind Jungen" = {JJ1, JJ2} $A \cap B$ ={JJ1,JJ2}

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{2/8}{4/8} = 0.5$$

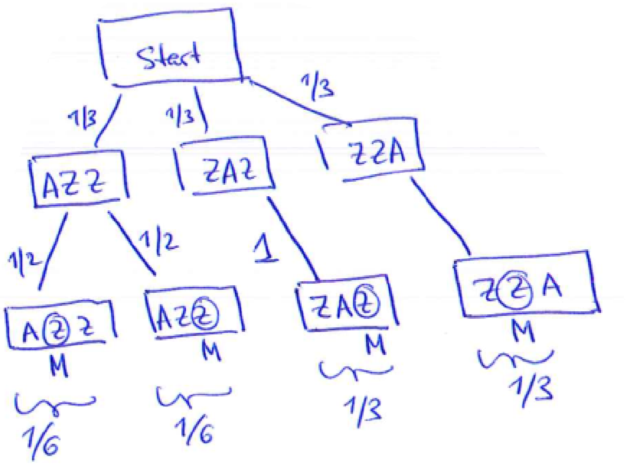
Beispiel 3: (Ziegenproblem)

3 Türen Hinter einer Tür $\to$ Auto
Hinter den beiden anderen $\to$ Ziegen

Sie zeigen auf Tür 1. (Tür 1 bleibt aber geschlossen)
Moderator öffnet eine der beiden anderen Türen $\to$ Ziege.
Sie dürfen bei Tür 1 bleiben oder wechseln. Was ist besser?

Aufgabenstellung ist unvollständig. Wir machen die Annahme: Moderator weiß, wo das Auto steht und will das Auto nicht zeigen.

Lösung:



$\Omega = \{$A**Z**Z, AZ**Z**,ZA**Z**,Z**Z**A$\}$ Dick geschrieben: Vom Moderator gewählt

p(A**Z**Z) $= \frac{1}{3} * \frac{1}{2}$
p(AZ**Z**) $= \frac{1}{3} * \frac{1}{2}$
p(ZA**Z**) $= \frac{1}{3} * 1$
p(Z**Z**A) $= \frac{1}{3} * 1$
$\mathbb{P}$[Auto hinter Tür 1] = p(A**Z**Z)+p(AZ**Z**) $= \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$
$\mathbb{P}$[Türwechsel führt zum Erfolg] = p(ZA**Z**)+p(Z**Z**A) $= \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$

Also wechseln!

6 Zufallsvariablen

Definition:
Eine ZV ist eine Funktion X:$\Omega \to \mathbb{R}$

Beispiel:
2 Würfel. $\Omega = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \{1, ..., 6\}\}$

Erste Augenzahl: $X_1(a_1, a_2) = a_1$
Zweite Augenzahl $X_2(a_1, a_2) = a_2$
Augensumme: $X(a_1, a_2) = a_1 + a_2 \qquad x = x_1 + x_2$
Größe Augenzahl: $y(a_1, a_2) = max(a_1, a_2)$

In dieser Vorlesung sei Ω immer endlich

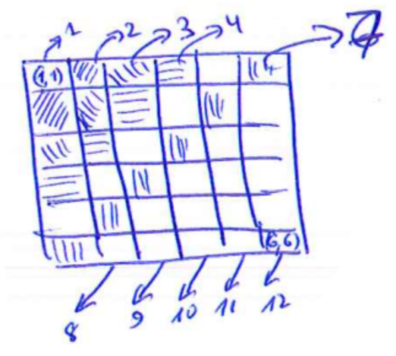
Definition:
Eine Verteilung einer ZV X ist die Angabe der Werte und der Wahrscheinlichkeiten dieser Werte.
Zähldichte von X : $\Omega \to \mathbb{R}$ ist $P_x : \mathbb{R} \to [0, 1]$

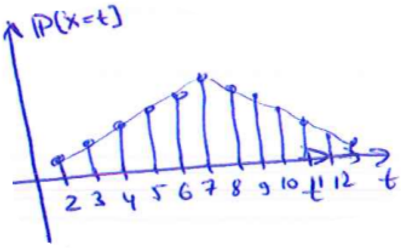
$$P_x(t) = \mathbb{P}\underbrace{[x = t]}_{\text{Er.}} = \mathbb{P}[\underbrace{\{w \in \Omega : X(\omega) = t\}}_{x^{-1}(t)}]$$

Beispiel: 2 Würfel. $x(a_1, a_2) = a_1 + a_2$ Augensumme

t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}[x = t]$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

{x=2} = {(1,1)}
{x=3}={(1,2),(2,1)}
{x=4} = {(1,3),(3,1),(2,2)}
...

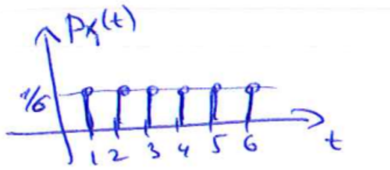




$$P_x(t) = \begin{cases} \dfrac{t-1}{36} & , t \in \{2, ..., 7\} \\ \dfrac{13-t}{36} & , t \in \{7, ..., 12\} \\ 0, t \notin \{2, ..., 12\} \end{cases}$$

Für die erste Augenzahl $x_1(a_1, a_2) = a_1$

t	1	2	3	4	5	6
$\mathbb{P}[\ =\ ]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



Eigenschaften der Zähldichte:

1. $P_x(t) \in [0, 1]$
2. $\sum_{t \in \mathbb{R}} P_x(t) = 1$

Beispiel: Sei A $\subset \Omega$
Indikatorvariable von A:

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

Grafik und Tabelle indikatorvariable

Definition: Sei X ZV mit Verteilung

Werte	y_1	y_2	y_3	...
Wahrscheinlichkeiten	P_1	P_2	P_3	...

$\mathbb{P}[x = y_i] = p_i$

Erwartungswert von X ist $\mathbb{E}X = \sum_i \underbrace{y_i}_{\text{Werte}} \underbrace{P_i}_{\text{Wkeiten}}$

Beispiel: 1 Würfel, x_1 Augenzahl
$\mathbb{E}X_1 = 1 * \frac{1}{6} + 2 * \frac{1}{6} + ... + 6 * \frac{1}{6} = 3,5$
$\mathbb{E}X$ ist **nicht** der wahrscheinlichste Wert: $\mathbb{P}[X = 3,5] = 0$

Bemerkung:
Betrachte $n = 10^6$ Würfe. Augenzahlen: $X_1, X_2, ..., X_n$
Dann gilt $\dfrac{X_1 + ... + X_n}{n} \approx 3.5$

Satz 9.1[alternative Formel für $\mathbb{E}X$]
Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \underbrace{\mathbb{P}[\{\omega\}]}_{p(\omega)}$$

Beweis: Seien $y_1, ..., y_m$ Werte von X

$A_1 = \{X = y_1\}, \dots, A_m = \{X = y_m\}$
$A_i = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = y_i\text{s}\}$
$\Omega = A_i \dot\cup A_2 \dot\cup \dots \dot\cup A_m$ ist disjunkte Zerlegung
$\mathbb{E}X \overset{\text{Def}}{=} \sum_i y_i * p_i = \sum_i y_i \mathbb{P}[A_i]$
$\sum_i y_i \sum_{\omega \in A_i} p(\omega) \overset{w \in A_i}{=} \sum_i \sum_{\omega \in A_i} X(\omega) p(\omega)$
$\Rightarrow X(\omega) = y_i$

Satz 9.2. Seien $x, y : \Omega \to \mathbb{R}$ Zufallsvariablen
Dann gilt: $\mathbb{E}[x + y] = \mathbb{E}X + \mathbb{E}y$

Beweis:
$\mathbb{E}[x + y] \underset{9.1}{=} \sum_{\omega \in \Omega} (x + y)(\omega) * p(\omega) =$

$= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + y(\omega)) p(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) * p(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} y(\omega) * p(\omega) \overset{9.1}{=}$
$\mathbb{E}X + \mathbb{E}y \quad \square$

Bemerkung: Allgemein: Für ZV $X_1, \dots, X_n : \Omega \to \mathbb{R} : \mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_n$

Bemerkung: Sei $X : \Omega \to \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, \mathbb{E}[a * X] = a * \mathbb{E}X$

Beispiel: n Würfel. Augenzahlen: $X_1, \dots, X_n$ Augensumme: S=$X_1 + \dots + X_n$

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}X_n + \dots + \underbrace{\mathbb{E}X_n}_{=3,5} = n * 3,5$$

Beispiel: Lotto 6 aus 49. (ohne Zurücklegen) Tippe auf {1,...,6}
Sei S die Anzahl der richtig geratenen Zahlen.

Werte von S: 0,1,...,6
$\mathbb{P}[S = k] = \frac{\binom{6}{k} * \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}$, für k $\in$ {0,...,6}
$S = X_1 + \dots + X_6$, wobei
$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Ball } \mathbf{i} \text{ gezogen wurde} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$
$\mathbb{E}S \underset{9.2}{=} \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_6$

Bemerkung:

$\mathbb{E}\mathbb{1}_A = \frac{0 \quad \mid \quad 1}{1 - \mathbb{P}[A] \mid \mathbb{P}[A]} = \mathbb{P}[A]$

$\mathbb{E}X_i = \mathbb{P}[\text{Ball } \mathbf{i} \text{ wurde gezogen}]$

$$= \frac{\binom{48}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{\left(\frac{48*47*46*45*44}{5!}\right)}{\left(\frac{48*47*46*45*44}{6!}\right)} = \frac{6!/5!}{49} = \frac{6}{49} \quad \forall i \in \{1,\ldots,6\}$$

$\mathbb{E}S = \mathbb{E}X_1 + \ldots \mathbb{E}X_6 = 6 * \frac{6}{49} = \frac{36}{49}$

Definition:
Seien $X_1,\ldots,X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ ZV
Sie heißen unabhängig, falls:

$$\forall y_1,\ldots,y_n \in \mathbb{R}: \quad \mathbb{P}[X_1 = y_1, X_2 = y_2, \ldots, X_n = y_n]]$$
$$= \mathbb{P}[X_1 = y_1] * \cdots * \mathbb{P}[X_n] = y_n$$

Bemerkung: Sind $X_1,\ldots,X_n$ unabhängig, dann gilt sogar:

$$\forall A_1,\ldots,A_n \subset \mathbb{R} : \mathbb{P}[X_1 \in A_1,\ldots,X_n \in A_n]$$
$$= \mathbb{P}[X_1 \in A_1] * \cdots * \mathbb{P}[X_n \in A_n]$$

Satz 9.3:
Seien $X, Y : \Omega \to \mathbb{R}$ **unabhängige** Zufallsvariablen
Dann gilt: $\mathbb{E}[X * Y] = \mathbb{E}X * \mathbb{E}Y$

2 Eigenschaften:

1. $\mathbb{E}[x + y] = \mathbb{E}x + \mathbb{E}y \quad \forall x, y$
2. $\mathbb{E}[x * y] = \mathbb{E}x * \mathbb{E}y$ $\forall$unabh. x, y

Beweis:
Notation:

Werte von X:

x_1	x_2	$\ldots$
p_1	p_2	$\ldots$

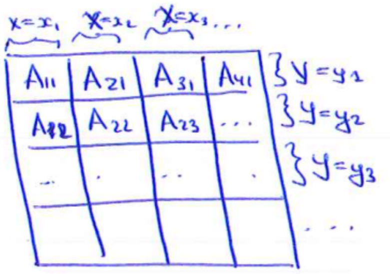
$\mathbb{P}[X = x_i] = p_i$

Werte von Y:

y_1	y_2	$\ldots$
q_1	q_2	$\ldots$

$\mathbb{P}[Y = y_j] = p_j$

Betrachte Ereignisse: $A_{ij} = \{X = x_i, y = y_j\}$
$= \{\omega \in \Omega : X(\omega) = xi, y(\omega) = y_j\}$



$\Omega = \dot{\bigcup\limits_{i,j}} A_{ij}$, d.h. A_{ij} bilden disjunkte Zerlegung von Ω

$\mathbb{E}[x * y] \underset{9.1}{=} \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) * X(\omega) * Y(\omega) =$

$\sum_{i,j} \sum_{\omega \in A_{ij}} (p(\omega) * X(\omega) Y(\omega) x_i y_j) =$

$= \sum_{i,j} (x_i y_j \sum_{w \in A_{ij}}) = \sum_{i,j} x_i y_j \mathbb{P}[A_{ij}]$

$\mathbb{P}[A_{ij}] = \mathbb{P}[X = x_i, Y = y_j] \underset{\text{x,y unabh ZV}}{=} \mathbb{P}[X = x_i] * \mathbb{P}[Y = y_i] = p_i * q_j$

$= \sum_{i,j} x_i y_j p_i q_j = \sum_{i,j} (x_i p_i)(y_j q_j)$

$= (\sum_i x_i p_i)(\sum_j y_j q_j) = \mathbb{E}X * \mathbb{E}Y \quad \square$

Beispiel: (zur Unabhängigkeit von Zufallsvariablen)
Betrachte n faire Würfel

X_i ist die Augenzahl, die der i-te Würfel zeigt

$\Omega = \{(a_1, ..., a_n)\}$ def $X_i(a_1, ..., a_n) = a_i$

Behauptung 1: Zufallsvariablen $X_1, \ldots, X_n$ sind unabhängig

Beweis 1:
Z.z. $\mathbb{P}[X_i = x_1, ..., X_n = x_n] = \mathbb{P}[X_i = x_i] * \ldots \mathbb{P}[X_n = x_n]$

$$\{X_1 = x_1, \ldots X_n = x_n\} = \begin{cases} (x_1, \ldots, x_n), & \text{falls } \forall i : x_i \in \{1, ..., 6\} \\ \emptyset, & \text{falls } \exists i : x_i \notin \{1, ..., 6\} \end{cases}$$

$$\text{LS} = \begin{cases} \frac{1}{6^n}, & \text{falls } \forall i : x_i \in \{x_i \in \{1, ..., 6\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

RS: $\mathbb{P}[X_1 = x_1] =?$

$$\{X_1 = x_1\} = \begin{cases} \{(x_1, a_2, ..., a_n) : a_2, ..., a_n \in \{1, \ldots, 6\}\}, & \text{falls } x_1 \in \{1, \ldots, 6\} \\ \emptyset, & \text{falls } \exists i : x_i \notin \{1, ..., 6\} \end{cases}$$

$$\#\{X_1 = x_i\} = \begin{cases} 6^{n-1}, & \text{falls } x_1 \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[X_1 = x_1] = \begin{cases} \frac{6^{n-1}}{6^n}, & \text{falls } x_1 \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{RS}= \begin{cases} \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \dots \frac{1}{6} = \frac{1}{6^n}, & \text{falls } \forall A_i : x_i \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \exists i : x_i \notin \{1, \dots, 6\} \end{cases}$$

LS = RS $\Rightarrow X_1, \dots, X_n$ unabh. ZV.

Behauptung 2: Sei S $= X_1 + \dots + X_n$ die Augensumme.
Dann sind X_1 und S abhängige Zufallsvariablen

Beweis: Z.z. $\exists$ a,b mit $\mathbb{P}[X_1 = a, S = b] \neq \mathbb{P}[X_1 = a] * \mathbb{P}[S = b]$
Wir zeigen das für a =1, b=6*n

LS: $\mathbb{P}[\underbrace{X_1 = 1, S = 6n}_{\text{Treten nicht gleichzeitig ein}}] = 0$

RS: $\mathbb{P}[X_1 = 1] = \frac{1}{6}$

$\mathbb{P}[S = 6n] = \frac{1}{6^n}$

RS $= \frac{1}{6} * \frac{1}{6^n} \neq 0$

LS $\neq$ RS $\Rightarrow X_1, S$ abh. $\square$

7 Harmonische Reihe

7.1 Harmonische Reihe

Definition: Harmonische Zahlen $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$
Harmonische Reihe: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \lim\limits_{n\to\infty} H_n$

7.1.1 Satz 10.1

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty \qquad H_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$
d.h. $\forall$ A (egal wie groß) $\exists$ n = n(A) : $H_n \geq A$
Beweis:

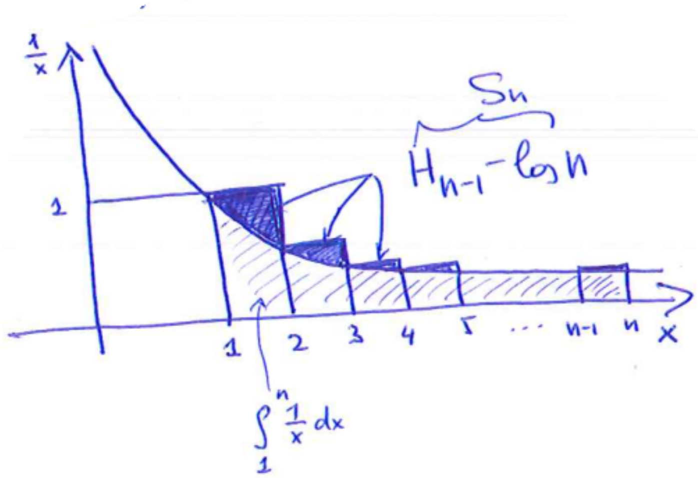
$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots \geq 1+\frac{1}{2}+\overbrace{\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)}^{2\text{ Terme}}+\overbrace{\left(\frac{1}{5}+\dots+\frac{1}{8}\right)}^{4\text{ Terme}}+\overbrace{\left(\frac{1}{9}+\dots+\frac{1}{16}\right)}^{8\text{ Terme}}+\dots$$
$$\geq 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{8}+\dots+\frac{1}{8}\right)+\left(\frac{1}{16}+\dots+\frac{1}{16}\right)+\dots$$
$$= 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}+\dots = \infty.$$

$H_2 \geq 1 + \frac{1}{2}, H_4 \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, H_8 \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
$H_{2^l} \geq 1 + \frac{l}{2}$
$A = 7 * 10^6 \quad 1 + \frac{l}{2} \geq A \quad l \geq 2A - 2$
$H_{2^{1+10^6-2}} \geq 7 * 10^6$

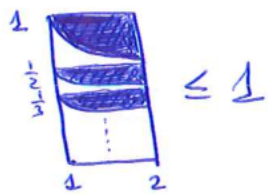
7.1.2 Satz 10.2, Euler, 1734

$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}}_{H_n \to \infty} - \underbrace{\log n}_{\to\infty}$ konvergiert für n $\to \infty$ gegen eine Konstante.

Bemerkung: Die Konstante $\gamma := \underset{n\to\infty}{0}(H_n - \log n) = 0,57721\dots$ heißt Euler-Mascheroni-Konstante
Beweis: $\int_1^n \frac{1}{x}dx$ = (log x) $\Big|_1^n$ 1 n = log n - $\underbrace{\text{log } 1}_{0}$ = log n



$H_{n-1} - \log\, n$ =Fläche S_n
$S_1 < S_2 < S_3 < \ldots$



Außerdem: $S_n \leq 1\, \forall n \in \mathbb{N}$
D.h. $\exists$ lim S_n exisitert und ist $\leq$1 und ≥ 0

$H_n - \log\, n = \underbrace{H_{n-1} - \log\, n}_{\text{Konv. für n}\to\infty} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{0}$, also konvertgiert $H_n - \log\, n$ gegen einem Limes, der zwischen 0 und 1 liegt. □

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} = \log\, n + \gamma + \underbrace{\varepsilon_n}_{\text{Fehler der Appr.}}$, wobei $\varepsilon_n \to 0$ für $n \to \infty$

7.2 Alternierende harm.Reihe

Alternierende harm. Reihe: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = log 2$

Beweis:
$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n}$
$S_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$
$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots - \frac{1}{2n} = H_{2n} - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2n})$
$= H_{2n} - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{n}) = H_{2n} - H_n =$
$\underset{\text{Kor.}}{=} (\log\, 2n + \gamma + \varepsilon_{2n}) - (\log\, n + \gamma + \varepsilon_n)$
$= \log\, 2n - \log\, n + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n$
$= \log\, 2 + \underbrace{\varepsilon_{2n}}_{0} - \underbrace{\varepsilon_n}_{0} \underset{n\to\infty}{\to} log 2$

Aufgabe: Schnecke und Auto
$1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots=\infty$
[GRAFIK schneckeUndAuto Einfügen]
Zeige: Schnecke überholt das Auto in endlicher Zeit
$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots\ =\log 2$
$\underbrace{1+\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{2}}+\underbrace{\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{7}-\dfrac{1}{4}}+\underbrace{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{11}-\dfrac{1}{6}}\cdots=\frac{3}{2}\log 2$

Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty}|a_n|<\infty$
Beispiel:$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$ ist konvergent aber nicht absolut konvergent.

Satz: In einer absolut konvergenten Reihe kann man die Terme umordnen, ohne dass sich die Summe ändert.
Riemann'scher Umordnungssatz: $\forall a\in\mathbb{R}$ gibt es eine Umordnung der Reihe $1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\ldots$, die gegen a konvergiert.

Beweis: Sei $a\geq 0$
Ungerade Terme: $1,\frac{1}{3},\frac{1}{5},\ldots\quad 1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}\cdots=\infty$

Gerade Terme: $\frac{1}{2},\frac{1}{4},\ldots\quad \frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots=\infty$

Nehme ungerade Terme bis die Summe $\geq$ a wird:

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n_1}\geq a$$

Ziehe gerade Terme abm bis die Summe $\leq$ a wird

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n_1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{m_1}\leq a$$

Addiere ungerade Terme bis die Summe wieder $\geq$ a wird

$$1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\cdots+\frac{1}{n_1}-\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-\cdots-\frac{1}{m_1}+\frac{1}{n_1+2}+\frac{1}{n_1+4}+\cdots+\frac{1}{n_2}\geq a$$

usw. $\square$

Bemerkung Über EWert von ZV mit abzählbar ∞-vielen Werten

Betrachte ZV X: Werte:

x_1	x_2	x_3	$\ldots$
p_1	p_2	p_3	$\ldots$

$\mathbb{E}X=\sum_{i=1}^{\infty}x_ip_i$?
Problem: Keine "kanonische" Reihenfolge der Werte x_i Wenn $\sum_{i=1}^{\infty}$ nicht **absolut** konv. $\Rightarrow$kann sich das Ergebnis durch Umordnung ändern

Definition: Sei X ZV wie oben Def.

$$S_+=\sum_{i:x_i\geq 0}x_ip_i,\quad S_=\sum_{i:x_i<0}|x_i|p_i$$

$$\textbf{Fälle}:\begin{cases} \mathbb{E}X \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = S_+ - S_-, & \text{falls } S_+ < \infty, s_- < \infty \\ \mathbb{E}X \overset{\text{def}}{=} +\infty, & \text{falls } S_+ = \infty, s_- < \infty \\ \mathbb{E}X \overset{\text{def}}{=} -\infty, & \text{falls } S_+ < \infty, S_- = \infty \\ \mathbb{E}X \text{nicht definiert }, & \text{falls } S_+ = \infty, S_- = \infty \end{cases}$$

8 Diskrete Verteilungen

8.1 Uniforme Verteilungen

Definition:
ZV X heißt uniform, falls verteilt auf der Menge $\{x_1,\ldots x_n\}$ $(x_i \in \mathbb{R})$, falls:

$$\mathbb{P}[X = x_i] = \frac{1}{n} \forall i = 1, \ldots, n$$

Bemerkung: $\mathbb{E}X = x_1 * \frac{1}{n} + x_2 \frac{1}{n} + \cdots + x_n * \frac{1}{n} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ [arithmetisches Mittel]

Beispiel:
Sei X uniform verteilt auf {1,2,...,n} $\mathbb{E}X = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} =$

1+2+...+ n = $\frac{n(n+1)/2}{n} = \frac{n+1}{2}$

[GRAFIK Treppe Einfügen]

$= \frac{n^2}{n} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$

$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$

$n = 1 : 1$

$n = 2 : 1 + 3 = 4$

$n = 3 : 1 + 3 + 5 = 9$

... Vermutung: $1 + 3 + 5 + \ldots (2n - 1) = n^2$

Proof by picture:

[GRAFIK proofByPicture Einfügen]

8.2 Binomialverteilung

Ein Bernoulli-Exp: Zwei Ausgänge $\underbrace{\text{Erfolg}}_{p}$ (oder 1) und $\underbrace{\text{Misserfolg}}_{1-p}$ (0)

Definition:
ZV X heißt Bernoulli-verteilt, falls

$$\mathbb{P}[x = 1] = p, \mathbb{P}[x = 0] = 1 - p$$

Bez: $x^{\sim}$ Bern(p)

$\mathbb{E}X = 1 * p + 0 * (1 - p) = p$

Nn betrachte n unabh. Bern-Exp. Grundmenge: $\Omega = \{(0,1)^n : a_i \in \{0,1\}\}$
$\mathbb{P}[(0,0,1,0,1,1)] = (1-p)*(1-p)*p*(1-p)*p*p = p^3(1-p)^3$
$\mathbb{P}[(A_1,\ldots,a_n)] = p^k(1-p)^{a-k}$, wobei K $= a_1, + \ldots, +a_n$(Anzahl Erfolge)
Für $p = \frac{1}{2} \Rightarrow$ LaPlace-Experiment
Für $p \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$ kein LaPlace-Experiment

Satz 11.1

Sei X die Anzahl der Erfolge in einem n-fachen Bernoulli-Experiment.
Dann gilt: $\mathbb{P}[x=k] = \binom{n}{k} * p^k(1-p)^{n-k} \quad k = 0,1,\ldots,n$

Beispiel:
$n = 4, k = 2$

$\mathbb{P}[(1,1,0,0)] = p^2 * (1-p)^2$ (1,0,1,0)
$\mathbb{P}[(0,1,1,0) = p^2(1-p)^2$ (1,0,0,1)
(0,0,1,1)

Alle 6 Ausgänge haben Wkeit $p^2(1-p)^2$

Definition:
ZV X wie oben heißt binomialverteilt mit Param n und p
Bez: x~Bin(n,p)

Bemerkung: $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[x=k] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \overset{Bin.Formel}{=} (p+1-p)^n = 1^n = 1$

Satz 11.2

Sei X~Bin(n,p)
Dann gilt $\mathbb{E}X = n * p$

Beweis:

Sei $x_i = \begin{cases} 1 & \text{, falls im i-ten Experiment Erfolg eintritt} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

$\underbrace{x}_{\substack{\text{Anzahl d. Erfolge} \\ \text{in Exp. 1,...,i}}} = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$

$\mathbb{E}x = \mathbb{E}[x_1 + \cdots + x_n] = \overbrace{\mathbb{E}x_1}^{p} + \cdots + \overbrace{\mathbb{E}x_n}^{p} = n * p$
Dann $\mathbb{E}x_i = 1 * p + 0 * (1-p) = p$ $\square$

Beispiel: Werfe faire Münze n Mal

$\mathbb{P}[\text{die Münze zeigt k mal Kopf}] = \binom{n}{k} * (\frac{1}{2}^k) * (\frac{1}{2}^{n-k}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

Beispiel: Werfe fairen Würfel n Mal
$\mathbb{P}[\text{k Sechsen}] = \binom{n}{k} * (\frac{1}{6})^k * (\frac{5}{6})^{n-k}$

Beispiel: Betrachte Urne mit 10 roten und 20 schwarzen Bällen.
Wir ziehen 15 Bälle **mit** Zurücklegen.
Bestimme Wkeit, dass bei 8 Ziehungen roter Ball gezogen wurde
n = 15, p = $\frac{1}{3}$
Gesuchte Wkeit ist: $\binom{15}{8} * (\frac{1}{3})^8 * (\frac{2}{3}^7)$

9 Geometrische Verteilung

Betrachte unendl. Folge von unabh. Bernoulli-Exp. mit Erfolgswkeit p $\in (0,1]$
$\Omega = \{0,1\}^\infty = \{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in \{0,1\}\}$

Zeitpunkt des ersten Erfolges: T : $\Omega \to \mathbb{R}$
$$\mathrm{T}(a_1, a_2, \dots) = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n = 1\}$$

Z.b. $\mathrm{T}(\underbrace{0}_{a_1}, \underbrace{0}_{a_2}, \underbrace{0}_{a_3}, \underbrace{0}_{a_4}, \underbrace{1}_{a_5}, \dots) = 5$
Vert von T? Werte von T:1,2,3,...,∞

Satz 11.3

$\forall k \in \{1,2,\dots\} : \mathbb{P}[T = k] = p(1-p)^{k-1}$
Definition:T heißt geometrisch Verteilt mit Parameter p. Bez: T $\sim$Geo(p)
Beweis: Damit T = k ist, muss die Serie wie folgt aussehen:

$$\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1 \text{ Misserfolge}}, \underbrace{1}_{\text{Erfolg}}, \dots$$

Sei x_i das Ergebnis des i-ten Experiments.
x_i ist ZV mit $\mathbb{P}[x_i = 1] = p, \mathbb{P}[x_i = 0] = 1 - p.$ $\quad x_1, x_2$ sind unabh. ZV
$\mathbb{P}[T = k] = \mathbb{P}[x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{k-1} = 0, x_n = 1] \underset{x_1,\dots,x_n \text{ unabh Zv}}{=}$
$\mathbb{P}[x_i = 0] * \dots * \mathbb{P}[x_{k-1} = 0] * \mathbb{P}[x_k = 1]$
$= \underbrace{(1-p) * \dots * (1-p)}_{k-1} P = p(1-p)^{k-1} \quad \square$

Beispiel: Werfen eine fairen Münze bis zum ersten Mal Kopf.
T=Anzahl der Würfe. $\mathbb{P}[T - k] \underset{p=\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2} * \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^k}, k = 1, 2, \dots$

Bemerkung: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$
[GRAFIK GlasWasser Einfügen]

Exkurs über die geometrische Reihe

Aufgabe: Berechne $1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$
Sei A $= 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n$
Betrachte: q*A $= 1 + q + q^2 + q^3 + \cdots + q^n + q1n + 1$
Abziehen:
$A - qA = 1 - q^{n+1}$
$A(1-q) = 1 - q^{n-1}$
$A \underset{q\neq 1}{=} \dfrac{1-q^{n-1}}{1-q} = \dfrac{q^{n+1}-1}{q-1}$ Für q=1 : $A = n+1$ $\square$
Aufgabe: Berechne $1 + q + q^2 + q^3 + \dots$
Lösung: Sei S $= 1 + q +^2 + \dots$

$$S \underset{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty}(1+q+q^2+\dots+q^n) = \lim_{n\to\infty}\frac{q^{n+1}-1}{q-1} = \begin{cases} \dfrac{1}{1-q} & \text{, falls } |q| < 1 \\ +\infty & \text{, falls } q > 1 \\ \text{exisitert nicht} & \text{, falls } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{Denn } \lim_{n\to\infty} q^{n+1} ? \lim_{n\to\infty} q^n = \begin{cases} 0 & \text{, falls } |q| < 1 \quad (\frac{1}{2})^n \to 0 \\ 1 & \text{, falls } q = 1 \\ +\infty & \text{, falls } q > 1 \quad 2^n \to +\infty \\ \text{existiert nicht} & \text{, falls } q \leq -1 \quad \text{divergiert} \end{cases}$$

Für q = 1: S = 1+1+1+... $= \infty$

Bemerkung: Vorsicht mit der Reihe S=1-1+1-1+1-1+... Sie divergiert.

Geometrische Verteilung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[T=k] = \sum_{k=1}^{\infty} p \underbrace{(1-p)}_{q}^{k-1} = p \underbrace{(1+q+q^2+\dots)}_{\text{gelöst}} = p * \frac{1}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

Satz 11.4

Sei T $\sim$ Geo (p)
$\mathbb{E}T = \dfrac{1}{p}$
Bemerkung:
$p \downarrow 0 \Rightarrow \mathbb{E}T \to \infty$
$p = 1 \Rightarrow \mathbb{E}T = 1$
Beweis:
$\mathbb{E}T = \sum_{k=1}^{\infty} k * \mathbb{P}[T=k] = \sum_{k=1}^{\infty} k * p(1-p)^{k-1} = p\sum_{k=1}^{\infty} k * q^{k-1}$
$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 5q^4 + \dots$ (Entsteht durch Ableiten von $1 + q + q^2 + \cdots = \dfrac{1}{1-q}$)

$= (1+q+q^2+q^3+\dots)' = -\dfrac{1}{(1-q)^2}$

$= (\frac{1}{1-q})' = -1\dfrac{1}{(1-q)^2} * (1-q)' = \dfrac{1}{(1-q)^2} \quad (\frac{1}{x})' = -\frac{1}{x^2}$

$\mathbb{E}T = p * \dfrac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} \quad \Box$

Beispiel:
Werfe eine faire Münze, sie zum ersten mal Kopf zeigt. Wkeit, dass die Anzahl der Würfe gerade ist.

Lösung: $T \sim \text{Geo}(\frac{1}{2})$
$\mathbb{P}[T \in \{2,4,6,\dots\}] = \mathbb{P}[T=2] + \mathbb{P}[T=4] + \dots$
$= \dfrac{1}{2^2} + \dfrac{1}{2^4} + \dfrac{1}{2^6} + \dots$
$= \dfrac{1}{1-1/4} - 1 = \dfrac{4}{3} - 1 = \dfrac{1}{3}$

Beispiel: Würfeln mit einem fairen Würfel bis zu ersten 6. Erwartete Anzahl der Würfe?

Lösung: Erfolg = 6 $\qquad p = \frac{1}{6} \mathbb{E}T = \dfrac{1}{1/6} = 6$

Beispiel Sammler-Problem:
Jede Packung enthält ein Bild. Es gibt n mögl. Bilder, alle gleichwahrscheinlich.
Erwartete Anzahl an Packungen, die man kaufen muss, um alle Bilder zu sammeln.

Lösung:
Wartezeit: $S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n$
mit $T_1 = 1, T_2 \sim \text{Geo}(\dfrac{n-1}{n}), T_3 \sim \text{Geo}(\dfrac{n-2}{n}), \dots, T_n \sim \text{Geo}(\dfrac{1}{n})$
Hier ist T_i die Wartezeit auf ein noch nie gesehenes Bild nachdem i-1 Bilder gesammelt wurden.
$T_i \sim \text{Geo}(\dfrac{n-i+1}{n})$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}S_n = \mathbb{E}[T_1 + \dots + T_n] &= \mathbb{E}T_1 + \mathbb{E}T_2 + \dots + \mathbb{E}T_n \\ &= \underbrace{1}_{\frac{n}{n}} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{1} \\ &= n(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1) = n(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) \quad \Box\end{aligned}$$

Für $n \to \infty \quad \dfrac{\mathbb{E}S_n}{n \log n} \to 1$

Satz 11.5: Vergessenseigenschaft der Geo-Vert

$\mathbb{P}[T > n + k | T > n] = \mathbb{P}[T > k] \quad \forall n, k \in \mathbb{N}, T \sim \mathrm{Geo}(p)$
[auch:$\mathbb{P}[T > n + k | T > n] = \mathbb{P}[T > k]$

Beweis: $\mathbb{P}[T > k] = \mathbb{P}[\text{Versuche } 1, 2, \ldots, k \text{ sind Misserfolge}] = (1 - p)^k$

$$\mathbb{P}[T > n + k | T > n] \underset{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}[T > n + k, T > n]}{\mathbb{P}[T > n]} = \frac{\mathbb{P}[T > n + k]}{\mathbb{P}[\mathbb{T} >]}$$

$$= \frac{(1 - p)^{1-k}}{(1 - p)^n} = (1 - p)^k$$

10 Poisson Verteilung

10.1 Exkurs über die Zahl e

Beispiel: Preis steigt jeden Tag um 1 %
Am Anfang: 1 Euro
Preis nach 100 Tagen = ?
Lösung:
x $\rightarrowtail x + \frac{x}{100}$

Tag 0	Tag 1	Tag 2	...	Tag 100
1	$1 + \frac{1}{100}$	$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^2$	...	$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100}$

$\approx 2{,}7$

Betrachte $a_n = (1 + \frac{1}{n})^n$
n = 100: **2,7**04813...
n = 10000: **2,7181**459 ...
...

Definition: e = $\lim\limits_{n\to\infty} = (1 + \frac{1}{n})^n = 2,7182818\ldots$

$1 + \frac{1}{n} \underset{n\to\infty}{\to} 1$ Unbestimmtheit 1^∞

Formel 1:
$$(1 + \frac{x}{n})^n = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = \left(\left(1 + \frac{1}{m}\right)^m\right)^x \underset{n\to\infty}{\to} e^x \quad x = \text{konst}, n \to \infty$$

Beispiel: $(1 + \frac{1}{n})^n = (1 + \frac{1}{n^2})^{n^2 * \frac{1}{n}} = ((1 + \frac{1}{n^2})^{n^2})^{\frac{1}{n}} \underset{n\to\infty}{\to} e^0 = 1$

Formel 2:
$e^x = \sum_{k=0}^\infty \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \ldots$

Beweis:

1. $(a + \frac{x}{n})^n \to e^x$
2. $(1 + \frac{x}{n})^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} (\frac{x}{n})^k * 1n - k$
   $= \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1) * \cdots * (n-k+1)}{k!} * \frac{x^k}{n^k}$

$= \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} \underbrace{\frac{n(n-1)*\dots*(n-k+1)}{n^k}}_{1} \underset{n\to\infty}{\to} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$

$\frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{n^k} = \underbrace{\frac{1}{n}}_{1} * \underbrace{\frac{n-1}{n}}_{1} \dots * \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_{1} \underset{n\to\infty}{\to} 1$

Beispiel: x = 1

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

10.2 Poisson Verteilung

Sehr viele Bern.-Exp: $n \to \infty$

Sehr kleine Erfolgswahrscheinlichkeit: $p = \frac{\lambda}{n} \quad \lambda = \text{ const.} \quad \lambda > 0$

Die Anzahl der Erfolge ist ZV $S_n \sim \text{Bin}(n, \frac{\lambda}{n}) \quad \mathbb{E}S_n = n * \frac{\lambda}{n} = \lambda$

Beispiel: Wkeit, dass es keinen Erfolg gibt: $\mathbb{P}[S_n = 0] = (1 - \frac{\lambda}{n}) * (1 - \frac{\lambda}{n}) * \dots * (1 - \frac{\lambda}{n}) = (1 - \frac{\lambda}{n})^n \underset{n\to\infty}{\to} e^{-\lambda}$ [Formel 1]$x = -\lambda$

$\underset{\text{Wkeit k Erfolge}}{\mathbb{P}[S_n = k]} = \binom{n}{k} * p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} * (\frac{\lambda}{n})^k (1 - \frac{\lambda}{n})^{n-k} = \underbrace{(1 - \frac{\lambda}{n})^n}_{e^{-\lambda}} * \underbrace{(1 - \frac{\lambda}{n})^{-k}}_{1} * \lambda^k$

$* \frac{n(n-1)\dots(n-k+1)}{k! n^k} \underset{n\to\infty}{\to} e^{-\lambda} * 1 * \lambda^k * 1 * \frac{1}{k!}$

$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$

Definition: ZV X heißt Poissonverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, falls

$$\mathbb{P}[x = k] = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Bemerkung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[x = k] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} * e^{\lambda} = 1$$

10.2.1 Satz 11.6: Poisson-Grenzwertsatz

Sei $S_n \sim \text{Bin}(n \frac{\lambda}{n})$, $\lambda > 0$ konstant.

Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}[S_n = k] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

Beispiel:100 Personen A="mind. eine Person hat heute Geburtstag"
$\mathbb{P}[A] = ?$

Lösung 1 (Exakt): n=100, Bern-Exp
Erfolge im Exp i $\Leftrightarrow$ Person i hat heute Geburtstag
Erfolgswkeit p $= \frac{1}{365}$
A^C "keine Person hat heute Geburtstag"
$\mathbb{P}[A^C] = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = (1-p)^n$
$\mathbb{P}[A] = 1 - \mathbb{P}[A^C] = 1 - (1-p)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^{100} = 0,2399$

Lösung 2 (Approximation): Anzahl d. Personen die heute Geburtstag haben: $S_n \sim \text{Bin}(\underbrace{100}_{n}, \underbrace{\frac{1}{365}}_{p})$

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[S_n \geq 1] = 1 - \mathbb{P}[S_n = 0]$$

$$S_n \sim \text{Bin}(\underbrace{100}_{n}, \underbrace{\frac{1}{365}}_{\frac{\lambda}{n}}) \approx \text{Poi}(\underbrace{\frac{100}{365}}_{\lambda})$$

$\mathbb{P}[A] = 1 - \mathbb{P}[S_n = 0] \approx 1 - \mathbb{P}[\text{Poi}\left(\frac{100}{365}\right) = 0]$
$= 1 - e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-\frac{100}{365}} = 0,2396$

Beispiel: 96 % Prozent der Fluggäste erscheinen. 75 Flugkarten für 73 Plätze verkauft.

$\mathbb{P}[\underbrace{\text{alle Fluggäste bekommen Platz}}_{A}] = ?$

Lösung 1 (Exakt) Die Anzahl der Gäste, die erscheinen: ZV $T_n \sim$Bin(75,096)
$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[T_n \leq 73] = 1 - \mathbb{P}[T_n \geq 74] = 1 - \mathbb{P}[T_n = 74] - \mathbb{P}[T_n = 75]$
$=1 - \binom{75}{74} p^{74} (1-p)^1 \binom{75}{75} * p^{75} (1-p)^0$
$\underset{p=0,96}{=} 1 - 75 * 0,96^{74} * 0,04 - 0,96^{75} = 0,8069\ldots$

Lösung 2 (Approx): $T_n \sim \text{Bin}(\underbrace{75}_{n}, \underbrace{0,96}_{\frac{\lambda}{n}}) \approx \text{Poi}(75 * 0,96)$

Falsch, da 0,96 nicht klein ist

Betrachte Gäste, die nicht erschienen sind: Anzahl:

$S_n \sim \text{Bin}(\underbrace{75}_{\text{groß}}, \underbrace{0,04}_{\text{klein}}) \approx \text{Poi}(\underbrace{75 * 0,04}_{\lambda})$

$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[S_n \geq 2] = 1 - \mathbb{P}[S_n = 0] - \mathbb{P}[S_n = 1] \approx 1 - e^{-\lambda}\frac{\lambda^0}{0!} - e^{-\lambda}\frac{\lambda^1}{1!}$
$= 1 - e^{-75*0,04} - e^{-75*0,04} * 75 * 0,04 = 0,8008$

10.2.2 Satz 11.7

Sei $x \sim \text{Poi}(\lambda)$ $(\lambda > 0)$. Dann gilt $\mathbb{E}x = \lambda$

Beweis:
$\mathbb{E}x = \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}[x = k] = \sum_{k=0}^{\infty} k * e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
$= \sum_{k=1}^{\infty} ke^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$
$= e^{-\lambda}\lambda\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \overset{\text{l=k-1}}{=} e^{-\lambda}\lambda\sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!} = e^{-\lambda}\lambda e^{\lambda} = \lambda$

Faltungsformel: Seien x,y unabh. ZV mit Werten in {0,1,2,...}
Vert von x,y seien gegeben
Vert von x+ ?

Lösung Werte von x+y sind in {0,1,...}

Für $n \in \{0,1,2,\dots\}$ $\mathbb{P}[x + y = n] = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}[x = k, y = n - k] \overset{x,y\text{unabh}}{=} \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}[x = k] * \mathbb{P}[y = n - k]$
x $= k \in \{1,2,\dots\}$ $\quad y = n - k$

Beispiel: $x \sim \text{Bin}(m_1, p)$ $\quad y \sim \text{Bin}(m_2, p)$, unabh. ZV
Behauptung: $x + y \sim \text{Bin}(m_1 + m_2, p)$

Lösung 1: Stochastische Lösung
x ist die Anzahl d. Erf. in m_1 Ber-Exp. mit Erfolgswahrscheinlichkeit p
y ist die Anzahl d. Erf. in m_2 Ber-Exp. mit Erfolgswahrscheinlichkeit p

Insgesamt gibt es $m_1 + m_2$ Bern-Exp. mit Erfolgswahrscheinlichkeit p.
x+y ist die Anzahl d. Erfolge in $m_1 + m_2$ Experimenten$\Rightarrow x + y \sim \text{Bin}(m_1 + m_2, p)$

Lösung 2:
$\mathbb{P}[x = k] = \binom{m_1}{k}p^k(1-p)^{m_1-k},\ k = 0,1,\dots,m_1,\dots$
$\mathbb{P}[y = k]\binom{m_2}{k}p^k(1-p)^{m_2-k}, k = 0,1,\dots,m_2,\dots$
x+y nimmt Wert in {0,1,2,...} an

$\mathbb{P}[x + y = n] = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}[x = k, y = n - k] = \sum_{k=0}^{n}\mathbb{P}[x = k] * \mathbb{P}[y = n - k]$
$(\{x + y = n\} = \{x = 0, y = n\}\dot{\cup}\{x = 1, x = n - 1\}\dot{\cup}\dots\dot{\cup}\{x = n, y = 0\})$
$= \sum_{k=0}^{n}\binom{m_1}{k}p^k(1-p)^{m_1-k} * \binom{m_2}{n-k}p^{n-k}(1-p)^{m_2-(n-k)}$

$= p^n(1-p)^{m_1+m_2-n} \sum_{k=0}^{n} \binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}$
$\underset{\text{Vandermonde-ID}}{=} \binom{m_1+m_2}{n} p^n (1-p)^{m_1+m_2-n} \Rightarrow x+y \sim \text{Bin}(m_1+m_2, p)$

Beweis der Vandermonde-Identität

$\binom{m_1+m_2}{n} = \sum_{k=0}^{n} \binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}$Zähle die Möglichkeiten aus $m_1 + m_2$ Objekten n Objekte auszuwählen

1. Methode $\binom{m_1+m_2}{n}$ Möglichkeiten
2. Wähle zuerst k Objekte aus m_1 Objekten: $\binom{m_1}{k}$ Möglichkeiten
   Aus den restlichen m_2 Objekten müssen wir n-k auswählen: $\binom{m_2}{n-k}$ Möglichkeiten

   Insgesamt: $\binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}$ Möglichkeiten
   k kann Werte 0,. . . ,n annehmen:
   Insgesamt $\sum_{k=0}^{n} \binom{m_1}{k}\binom{m_2}{n-k}$

Beispiel: Seien x ~Poi(λ), y ~Poi(μ)unabh. ZV
Dann gilt: $x + y$ ~Poi($\lambda + y$) (Übung)

11 Varianz und Kovarianz

Definition: Sei X eine ZV. Varianz von X: Var X=$\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$

Beispiel: Sei X uniform verteilt auf {-a,a}
$\mathbb{E}X = \frac{1}{2} * a + \frac{1}{2}(-a) = 0$
Var X = $\mathbb{E}[(x - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] = a^2$

Definition: Standardabweichung von X: $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var X}}$

Wenn X konstant ist, so ist die Varianz = 0

11.1 Satz 14.1

Var X = $\mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$

Kor. $\mathbb{E}[X^2] \geq (\mathbb{E}X)^2$

Beweis: Var X = $\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[\underbrace{X^2}_{A} - \underbrace{2X * \mathbb{E}X}_{B} + \underbrace{(\mathbb{E}X)^2}_{C}]0$

$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2X\mathbb{E}X] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}X)^2]$
$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}X * \mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}X)^2$ da C konstant
$= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$

11.2 Satz 14.2

Sei X ZV, a,b, $\in \mathbb{R}$
Dann gilt

1. Var(aX+b)=Var(aX)=a^2VarX
2. σ(aX+b)=σ(aX)=|a|σ(X) $\sqrt{a^2} = |a|$

Beweis 1:
Var(aX+b) $\underset{\text{def}}{=} \mathbb{E}\left[(aX + b - \mathbb{E}[aX + b])^2\right]$
$= \mathbb{E}\left[(aX + b - a\mathbb{E}\mathbb{X} -)^2\right] = \mathbb{E}[a^2(x - \mathbb{E}X)^2]$
$= a^2\mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = a^2$Var X

Beweis 2:

$\sigma(aX+b) = \sqrt{\mathrm{Var}(aX+b)} \underset{1}{=} \sqrt{a^2 \mathrm{Var\ X}} = \underbrace{\sqrt{a^2}}_{|a|} \underbrace{\sqrt{VarX}}_{\sigma(X)}$

Beispiel: Sei x uniform verteilt auf {1,2,...,n}
D.h. $\mathbb{P}[x=k] = \dfrac{1}{n} \quad \forall k = 1,2,\ldots,n$
Var X= ?

Lösung: Var X=$\mathbb{E}[x^2] - (\mathbb{E}[x])^2$

$\mathbb{E}x = \dfrac{n+1}{2}$

$\mathbb{E}[x^2] = \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}[x=k] = \dfrac{1^2+2^2+\cdots+n^2}{n}$

$= \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6}$

Var x $= \dfrac{(n+1)(2n+1)}{6} - (\dfrac{n+1}{2})^2 = \cdots = \dfrac{n^2-1}{12}$

Exkurs über die Teleskopmethode $1^2+2^2+\cdots+n^2 =? \quad \sum_{k=1}^n k^2 =?$

Methode: Finde Funktion F mit $k^2 = F(k) - F(k-1)$

$1^2+2^2+\cdots+n^2 = F(1)-F(0)+F(2)-F(1)+F(3)-F(2)+\cdots+F(n)-F(n-1)$

$= F(n) - F(0)$

$k^2 = F(k) - F(k-1) \leftarrow$ Ziel

$F(k) = \dfrac{k^3}{3} + ak^2 + bk + c \quad a,b,c$ unbekannt

$F(k) - F(k-1) = \dfrac{k^3}{3} + ak^3 + bk + c - \dfrac{(k-1)^3}{3} - a(k-1)^2 - b(k-1) - c$

$= (k^2 - k + \dfrac{1}{3} + a(2k-1) + b)$

$= k^2 + k * (2a-1) + (b + \dfrac{1}{3} - a)$ soll gleich k^2 sein.

$2a - 1 = 0 \Rightarrow a \ = \dfrac{1}{2}$

$b + \dfrac{1}{3} - a = 0 \Rightarrow b = \dfrac{1}{6}$

$F(k) = \dfrac{k^3}{3} = \dfrac{k^2}{2} + \dfrac{1}{6}k + c$

$1^2+2^2+\cdots+n^2 = F(n) - F(0) = \dfrac{n^3}{3} + \dfrac{n^2}{2} + \dfrac{n}{6} + c - c = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Beispiel: Sei X ∼Poi(λ)
Dann gilt $\mathbb{E}$X=Var X = λ

Beweis: $\mathbb{E}X = \lambda$ ist bekannt: $\qquad \mathbb{E}[X^2] =?$

$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^\infty k^2 \mathbb{P}[x=k] = \sum_{k=0}^\infty k^2 e^{-\lambda} \dfrac{\lambda^k}{k!} =?$

$\mathbb{E}[X(X-1)] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\mathbb{P}[x=k] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$
$= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{1*2*\cdots*(k-1)k} = e^{-\lambda} * \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}$
$= e^{-\lambda} * \lambda^2 * \sum_{k=2}^{\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}$
$= e^{-\lambda}\lambda^2 * \sum_{l=0}^{\infty}\frac{\lambda^l}{l!} = e^{-\lambda}\lambda^2 e^{\lambda}$
HIER FEHLT DEFINITIV NICHTS

11.3 Satz 14.3

Für anabh. ZV x,y gilt:

$$\mathrm{Var}[x+y] = \mathrm{Var}\ x + \mathrm{Var}\ y$$

Beweis:
Definition: x' := x-$\mathbb{E}$x $\quad \mathbb{E}x' = \mathbb{E}[x-\mathbb{E}x] = \mathbb{E}x - \mathbb{E}x = 0$

y':= y-$\mathbb{E}$y $\quad \mathbb{E}y' = 0$

$\mathrm{Var}[x+y] \overset{\text{def}}{=} \mathbb{E}[(x+y-\mathbb{E}[x+y])^2] = \mathbb{E}[(x'+y')^2]$
$= \mathbb{E}[x'^2 + y'^2 + 2x'y'] = \mathbb{E}[x'^2] + \mathbb{E}[y'^2] + 2\mathbb{E}[x'y']$

denn $\mathbb{E}[\underbrace{x'y'}_{\text{unabh.}}] = \mathbb{E}[x'] * \mathbb{E}[y'] = 0 * 0 \quad \square$

Bemerkung: Für n unabh. ZV $x_1, \ldots, x_n$ gilt $\mathrm{Var}[x_1 + \ldots, x_n] = \mathrm{Var}\ x_1 + \cdots + \mathrm{Var}\ x_n$

Beispiel: Sei $x \sim$ Bin(n,p) $\qquad$ Var x=?

Lösung: $x = x_1 + \cdots + x_n$, wobei $x_i = \begin{cases} 1 & \text{, falls das i-te Exp. Erfolg ist} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

$x_1, \ldots, x_n$ sind unabh
$x_i \sim \mathrm{Bern}(p)$, d.h. $\mathbb{P}[x_i = 1] = p, \mathbb{P}[x_i = 0] = 1-p$
$\mathbb{E}x_i = p$
$\mathrm{Var} x_i = \mathbb{E}[\underbrace{x_i^2}_{x_i}] - (\mathbb{E}[x_i])^2$
$= \mathbb{E}x_i - (\mathbb{E}x_i)^2 = p - p^2 = p(1-p)$

denn $x_i \in \{0,1\}, x_i^2 = x_i$

Also: Für $x \sim \mathrm{Bin}(n,p) gilt \mathbb{E}x = np, \mathrm{Var}x = np(1-p)$

Bemerkung:

- p = 0 $\Rightarrow x = 0 \Rightarrow \mathrm{Var} x = 0$
- p=1 $\Rightarrow x = n \Rightarrow \mathrm{Var} x = 0$
- Var x $\rightarrow$ max, wenn $p = \frac{1}{2}$

Beispiel: n Würfe mit einem fairen Würfel. S= Augensumme
Var S =?

Lösung:
S=$x_1 + \ldots, x_n$, wobei x_i die Augenzahl im i-ten Wurf ist.
$x_1, \ldots, x_n$ sind unabh. ZV.
x_i ist uniform verteilt auf {1,...,6}
$\mathbb{E}x_i = 3,5 \quad \mathbb{E}S = n * 3,5$
Var $x_i = \dfrac{6^2 - 1}{12} = \dfrac{35}{12} \quad \mathrm{Var} S = \mathrm{Var} x_1 + \cdots + \mathrm{Var} x_n = n * \dfrac{35}{12}$

11.4 Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Seien $x_i, x_2, \ldots$ unabh. identisch verteilte ZV (alle x_i haben die gleiche Verteilung) mit $\mathbb{E}x_i = \mu, \mathbb{E}[x_i^2] < \infty$

Sei $S_n = x_1 + \cdots + x_n$
Dann gilt $\forall \varepsilon > 0 : \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[|\frac{S_n}{n} - \mu| > \varepsilon\right] = 0$

$|\frac{S_n}{n}| > \varepsilon \Leftrightarrow |s_n - n\mu| > n\varepsilon \Leftrightarrow S_n \notin [n\mu - n\varepsilon, n\mu + n\varepsilon]$

Bemerkung:
$\forall \varepsilon > 0 : \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[s_n \notin [n(\mu - \varepsilon), n(\mu + \varepsilon)]\right] = 0$

Gegenereignis:
$\forall \varepsilon > 0 \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}[S_n \in [n(\mu - \varepsilon), n(\mu + \varepsilon)]] = 1$

Beispiel: Faire Münze n-mal werfen. $S_n = x_1 + \cdots + x_n =$ Anzahl von Kopf
$x_i \sim \mathrm{Bern}(\frac{1}{2}), \quad \mu = \mathbb{E}x_i = \frac{1}{2}$
$\forall \varepsilon > 0 : \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[(\frac{1}{2} - \varepsilon)n \leq S_n \leq (\frac{1}{2} + \varepsilon)\right] = 1$

Z.B.:$\varepsilon = 0,01 : \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[0,49n \leq S_n \leq 0,51n\right] = 1$
[GRAFIK SCHWACHES GESETZT N=1000 Einfügen]

Beispiel: Werfen eines fairen Würfels. $S_n =$ Augensumme
$\lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[3,49n \leq S_n \leq 3,51n\right]$

11.4.1 GGZ - Kurzfassung

$x_1, x_2, \ldots$ unabh. id. vert.
$\mathbb{E}x_i = \mu$
$S_n = x_1, \ldots, x_n$
Dann gilt $\forall \varepsilon > 0 : \lim\limits_{n\to\infty} \mathbb{P}\left[|\frac{S_n}{n} - \mu| > \varepsilon\right] = 0$
$\frac{S_n}{n}$ konvergiert gegen μ stochastisch
Vorbereitung zum Beweis des GGZ

11.5 Satz 11.4: Markov-Ungleichung

Sei $x \geq 0$ ZV. Dann gilt für $\forall a > 0$:

$$\mathbb{P}[x \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}x}{a}$$

Beweis:
Es gilt: $x \geq a * \mathbb{1}_{\{x\geq a\}}$ (*)
[GRAFIK GGZ KURVEN Einfügen]
Beweis von (*):
Fall 1: $x \geq a \Rightarrow$ Linke Seite $\geq a, \mathrm{RS} = a$✓

Fall 2: $x < a \Rightarrow \mathrm{LS} \geq 0, \mathrm{RS} = 0$✓

Wende auf (*) den $\mathbb{E}$ an:
$\mathbb{E}x \geq \mathbb{E}\left[a\mathbb{1}_{\{x\geq a\}}\right] = a\mathbb{E}\mathbb{1}_{\{x\geq a\}} = a\mathbb{P}[x \geq a]$
Teile durch a □

11.6 Satz 14.5 Chebyshev-Ungl

Sei X ZV. Dann gilt $\forall a > 0$:

$$\mathbb{P}\left[|x - \mathbb{E}x| \geq a\right] \leq \frac{\mathrm{Var}x}{a^2}$$

Beweis:
$\mathbb{P}\left[|x - \mathbb{E}x| \geq a\right] = \mathbb{P}\left[|x - \mathbb{E}x|^2 \geq a^2\right]$
$\mathbb{P}\left[\underbrace{(x - \mathbb{E}x)}_{y\geq 0}{}^2 \geq a^2\right] \underset{\text{Markov-ungl für y}}{\leq} \frac{\mathbb{E}y}{a2} = \frac{\mathrm{Var}x}{a^2}$

11.6.1 Beweis des GGZ

$S_n = x_1, \dots, x_n$
$\mathbb{E}\left[\frac{x_1, \dots, x_n}{n}\right] = \frac{\mathbb{E}x_1 + \dots \mathbb{E}x_n}{n} = \mu$
$\text{Var}\left[\frac{x_1, \dots, x_n}{n}\right] = \frac{\text{Var}\,[x_1, \dots, x_n]}{n^2} \underset{\text{unabh}}{=} \frac{\text{Var}\,x_1 + \dots + \text{Var}\,x_n}{n^2} =$
$\frac{1}{n}\text{Var}\,x_1 \underset{n\to\infty}{\to} 0$

$$\mathbb{P}\left[|\frac{S_n}{n} - \mu| \geq \varepsilon\right] = \mathbb{P}\left[|Z_n - \mathbb{E}Z_n| \geq \varepsilon\right] \underset{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{\text{Var}\,Z_n}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n}\text{Var}\,x_1}{\varepsilon^2}$$
$$= \underbrace{\frac{\text{Var}\,x_1}{\varepsilon^2}}_{\text{const}} * \underbrace{\frac{1}{n}}_{0} \underset{n\to\infty}{\to} 0 \qquad \square$$

11.7 Kovarianz

Definition:
Seien x,y ZV.
Kovarianz von x und y ist Cov(x,y) = $\mathbb{E}\left[(x - \mathbb{E}x)(y - \mathbb{E}y)\right]$

Beispiel: Cov(x,x) = Var x ≥ 0

11.7.1 Satz 14.6

$\text{Cov}(x, y) = \mathbb{E}\left[xy\right] - (\mathbb{E}x) * (\mathbb{E}y)$
Beweis:$\text{Cov}(x, y) = \mathbb{E}\left[(x - \mathbb{E}x)(y - \mathbb{E}y)\right]$
$= \mathbb{E}\left[xy - (\mathbb{E}x)y - x\mathbb{E}y + \mathbb{E}x * \mathbb{E}y\right]$
$= \mathbb{E}[xy] - \mathbb{E}[\underbrace{(\mathbb{E}x)}_{\text{const}} * y] - \mathbb{E}[x * \underbrace{\mathbb{E}y}_{\text{const}}] + \mathbb{E}[\underbrace{\mathbb{E}x}_{\text{const}} * \underbrace{\mathbb{E}y}_{\text{const}}]$
$= \mathbb{E}[xy] - \mathbb{E}x * \mathbb{E}y - \mathbb{E}y * \mathbb{E}x + \mathbb{E}x * \mathbb{E}y$
$= \mathbb{E}[xy] - \mathbb{E}[x]\mathbb{E}[y]$ $\square$

11.7.2 Satz 14.7

x,y sind unabh $\Rightarrow$ Cov(x,y) $= 0$
Beweis: x,y unabh $\Rightarrow$
Cov(x,y) $= \mathbb{E}[xy] - (\mathbb{E}x)(\mathbb{E}y) = \mathbb{E}x * \mathbb{E}y - \mathbb{E}x * \mathbb{E}y = 0$ $\square$

Bemerkung: $\Leftarrow$ gilt nicht:
Beispiel: von ZV, die unkorreliert abhängig sind. Seien x,y ZV mit $\mathbb{P}[x =$

$1y = 0] = \frac{1}{4}$
$\mathbb{P}[x = -1, y = 0] = \frac{1}{4}$
$\mathbb{P}[x = 0, y = 1] = \frac{1}{4}$
$\mathbb{P}[x = 0, y = -1] = \frac{1}{4}$

1. Beh. x,y sind abh.
   $\mathbb{P}[x = 1] = \frac{1}{4} = \mathbb{P}[x = -1]$
   $\mathbb{P}[x = 0] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$
   $\mathbb{P}[y = 1] = \frac{1}{4} = \mathbb{P}[y = -1]$
   $\mathbb{P}[y = 0] = \frac{1}{2}\mathbb{P}[x = 1, y = 0] = \frac{1}{4}$
   $\mathbb{P}[x = 1] * \mathbb{P}[y = 0] = \frac{1}{4} * \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4}$
   $\Rightarrow$ x,y abh

2. **Behauptung**: Cov(x,y) = 0
   $\mathbb{E}x = 1 * \frac{1}{4} + (-1) * \frac{1}{4} + 0 * \frac{1}{2} = 0$
   $\mathbb{E}y = 0$
   $\mathbb{E}[xy] = 0$, denn x,y ist immer 0
   Cor(x,y) = $\mathbb{E}[xy] - \mathbb{E}x * \mathbb{E}y = 0$