

# **Stochastik**

## **Mitschrift**

Vorlesung bei: Prof. Dr. Kabluchko

Datum: 4. Juni 2019  
Sommersemester 2019

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

# Inhaltsverzeichnis

<b>1</b>	<b>Zufallsexperimente</b>	<b>4</b>
1.1	Produktexperimente . . . . .	4
1.2	Boole'sche Algebra . . . . .	6
1.3	De Morgan-Regeln . . . . .	7
1.4	Wahrscheinlichkeiten . . . . .	7
1.4.1	Empirisches Gesetz der großen Zahlen . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Kombinatorik</b>	<b>9</b>
2.1	Urnenmodelle . . . . .	10
2.2	Binomialkoeffizient . . . . .	12
2.3	Binomischer Lehrsatz . . . . .	13
2.3.1	Pascal'sches Dreieck und Trigonometrie . . . . .	14
2.4	Hypergeometrische Verteilung . . . . .	14
2.5	Touren . . . . .	15
2.6	Allgemeine hypergeometrische Verteilung . . . . .	16
2.7	Multinomialkoeffizient . . . . .	17
2.7.1	Multinomialverteilung mit Zurücklegen . . . . .	18
<b>3</b>	<b>Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie</b>	<b>20</b>
3.1	Eigenschaften von $\mathbb{P}$ . . . . .	20
3.2	Ungleichungen für Wahrscheinlichkeiten . . . . .	22
<b>4</b>	<b>Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeiten</b>	<b>23</b>
4.1	Eigenschaften der bedingten Wahrscheinlichkeiten . . . . .	24
4.2	Unabhängige Ereignisse . . . . .	25
4.2.1	Eigenschaften der Unabhängigkeit . . . . .	26
<b>5</b>	<b>Satz von Bayes</b>	<b>29</b>
5.1	Bayes-Formel . . . . .	30
<b>6</b>	<b>Zufallsvariablen</b>	<b>33</b>
<b>7</b>	<b>Harmonische Reihe</b>	<b>39</b>
7.1	Harmonische Reihe . . . . .	39
7.1.1	Satz 10.1 . . . . .	39
7.1.2	Satz 10.2, Euler, 1734 . . . . .	39
7.2	Alternierende harm.Reihe . . . . .	40

## Inhaltsverzeichnis

<b>8</b>	<b>Diskrete Verteilungen</b>	<b>43</b>
8.1	Uniforme Verteilungen . . . . .	43
8.2	Binomialverteilung . . . . .	43
<b>9</b>	<b>Geometrische Verteilung</b>	<b>46</b>
<b>10</b>	<b>Poisson Verteilung</b>	<b>50</b>
10.1	Exkurs über die Zahl $e$ . . . . .	50
10.2	Poisson Verteilung . . . . .	51
10.2.1	Satz 11.6: Poisson-Grenzwertsatz . . . . .	51
10.2.2	Satz 11.7 . . . . .	53
<b>11</b>	<b>Varianz und Kovarianz</b>	<b>55</b>
11.1	Satz 14.1 . . . . .	55
11.2	Satz 14.2 . . . . .	55
11.3	Satz 14.3 . . . . .	57
11.4	Schwaches Gesetz der großen Zahlen . . . . .	58
11.4.1	GGZ - Kurzfassung . . . . .	59
11.5	Satz 11.4: Markov-Ungleichung . . . . .	59
11.6	Satz 14.5 Chebyshev-Ungl . . . . .	59
11.6.1	Beweis des GGZ . . . . .	60
11.7	Kovarianz . . . . .	60
11.7.1	Satz 14.6 . . . . .	60
11.7.2	Satz 14.7 . . . . .	60
11.8	Satz 14.8 . . . . .	61
11.9	Dimensionsloses Maß für Zusammenhang zwischen zwei ZV $x, y$ . . . . .	62
11.9.1	Exkurs über die Cauchy-Schwarz-Ungleichung . . . . .	62
11.9.2	Satz 14.9 Auch Cauchy-Schwarz . . . . .	62
11.9.3	Satz 14.10 . . . . .	63
11.10	Schätzer für $\mathbb{E}$ , $\text{Var}$ , $\text{Cov}$ . . . . .	64
<b>12</b>	<b>Geometrische Wahrscheinlichkeiten</b>	<b>65</b>
<b>13</b>	<b>Stetige ZV: Verteilungsfunktion und Dichte</b>	<b>69</b>
13.1	Dichte einer ZV . . . . .	70
13.1.1	Zusammenhang zwischen Dichte und Verteilungsfunktion . . . . .	71

# 1 Zufallsexperimente

## Beispiele

### Werfen einer Münze

Ausgänge: K, Z

Grundmenge  $\Omega = \{K, Z\}$

### Werfen eines Würfels

Ausgänge: 1...6

Grundmenge  $\Omega = \{1, \dots, 6\}$

### Zwei Münzen gleichzeitig werfen

$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$

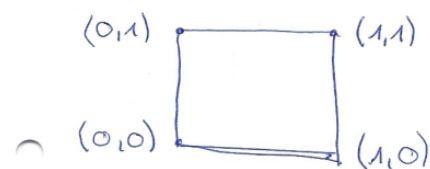
ZK heißt 1. Zeigt Zahl, zweite Kopf. KZ andersherum. Dies gilt wenn die Münzen **unterscheidbar** sind

### n Münzen werfen

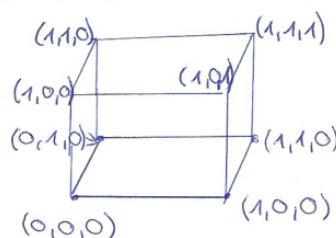
$\Omega = \{K, Z\}^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \{K, Z\} \forall i = 1, \dots, n\}$

$\#\Omega = 2^n$

- für  $n=2$  (grafisch)



- für  $n=3$



Frage: können wir  $\Omega = \{0, \dots, n\}^n$  wählen?  
↳ nein! - unvollständige Beschreibung

**Frage:** Können wir  $\Omega = \{0, \dots, n\}^{n=4}$  wählen?

## 1.1 Produktexperimente

Betrachte  $n$  Experimente mit Grundmengen  $E_1, \dots, E_n$

Führe diese Experimente unabhängig voneinander aus.

Grundmenge des Gesamtexperiment ist

$\Omega = E_1 \times \dots \times E_n = \{(e_1, \dots, e_n) : e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n\}$

$\#\Omega = \#E_1 \cdot \dots \cdot \#E_n$

## 1 Zufallsexperimente

### Beispiele

**Münze und Würfel werfen**  $E_1 = \{K, Z\}$   $E_2 = \{1, \dots, 6\}$

$$\Omega = E_1 \times E_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline K1 & K2 & K3 & K4 & K5 & K6 \\ \hline Z1 & Z2 & Z3 & Z4 & Z5 & Z6 \\ \hline \end{array}$$

$$\Omega = 12$$

### Definition: Ereignis

Ereignis = Teilmenge von  $\Omega$

**Beispiel:** 1 Würfel.  $\Omega = \{1, \dots, 6\}$

Ereignisse:  $A = \text{"Würfel zeigt gerade Zahl"} = \{2, 4, 6\}$

$B = \text{"Primzahl gewürfelt"} = \{2, 3, 5\}$

**Interpretation:** Zufallsexperiment wird ausgeführt  $\Rightarrow$

Wir erfahren den Ausgang  $w \in \Omega$

Sei  $A \subset \Omega$ . Liegt  $w \in A$ , so sagen wir "A ist eingetreten".

$w \notin A \Rightarrow$  "A nicht eingetreten"

**Beispiel:** 2 Würfel.  $\Omega = 1, \dots, 6^2$

$A = \text{"Augensumme} = 10" = \{(6, 4), (5, 5), (4, 6)\}$

Unmögliches Ereignis:  $\emptyset$

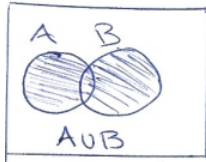
Sicheres Ereignis (tritt immer ein)  $= \Omega$

## 1.2 Boole'sche Algebra

Seien  $A \subset \Omega$ ;  $B \subset \Omega$

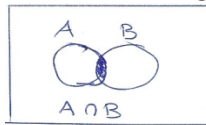
$$A \cup B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ oder } w \in B\}$$

= "mindestens ein Ereignis tritt ein."



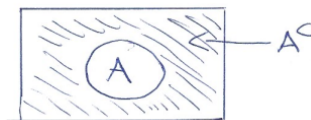
$$A \cap B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ und } w \in B\}$$

= "beide Ereignisse treten ein."



$$A^C = \{w \in \Omega : w \notin A\}$$

= "A tritt nicht ein"



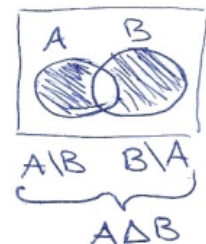
$$A \setminus B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ und } w \notin B\}$$

= "A tritt ein **und** B tritt nicht ein" =  $A \cap B^C$

$$B \setminus A = B \cap A^C$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

= "**genau** ein Ereignis tritt ein"



**Beispiel:** 2 Würfel  $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$

$$A = \text{"1. Würfel zeigt 6"} = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$B = \text{"2. Würfel zeigt 6"} = \{(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6)\}$$

$$A \cap B = \{(6,6)\}$$

$$A \cup B = \{(6,1), \dots, (6,6), (1,6), \dots, (5,6)\} \quad A \Delta B = \{(6,1), \dots, (6,5), \dots, (1,6), \dots, (5,6)\}$$

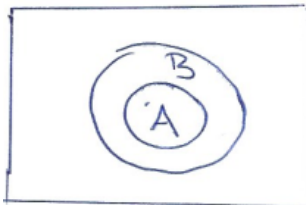
**Definition: Disjunkt**

Ergebnis A und B sind disjunkt, wenn  $A \cap B = \emptyset$   
D.h. A und B können nicht gleichzeitig eintreten.



**Beispiel:** A und  $A^c$ ,  
 $A \setminus B$ ,  
 $A \Delta B$ ,  
und  $A \cap B$  sind disjunkt.

**Definition:**  $A \subset B$ , wenn  $\forall w \in A \Rightarrow w \in B$   
Wenn A eintritt, dann tritt auch B ein.



## 1.3 De Morgan-Regeln

$(A \cup B)^c =$  "Kein Ereignis tritt ein" = "A tritt nicht ein **und** B tritt nicht ein" =  $A^c \cap B^c$

**Regel:**  $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c =$  "**mindestens** ein Ereignis tritt nicht ein." = "A tritt nicht ein **oder** B tritt nicht ein." =  $A^c \cup B^c$

**Regel:**  $(A \cup B)^c$

**Allgemein:**

$$(A_1 \cup A_2 \cup \dots)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \dots$$

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \dots$$

## 1.4 Wahrscheinlichkeiten

**Buffon:**

4040 Würfe einer Münze. 2048 Kopf.

**Pearson:** 24000 Würfe, 12012 Kopf

**Rechner:** 100000 Würfe, 50106 Kopf. Häufigkeit: 0,50106

### 1.4.1 Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Betrachte Zufallsexperiment und Ereignis  $A \subset \Omega$

Wiederhole das Experiment  $n$  Mal.

Zähle, wie oft  $A$  eingetreten ist:  $kn(A)$

$$\frac{k_n(A)}{n} (\text{Häufigkeit}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A] (\text{Wkeit von } A)$$

**Definition:** Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Paar  $(\Omega, p)$ , wobei  $\Omega$  eine Menge ist und

$$p: \Omega \rightarrow [0, 1] \text{ mit } \sum_w p(w) = 1$$

Wahrscheinlichkeit eines Ausgangs  $w \in \Omega$  ist  $p(w)$

Wahrscheinlichkeit eines Ereignis  $A \subset \Omega: \mathbb{P}[A] = \sum_{w \in A} p(w)$

**Definition** Ein Laplace-Experiment liegt vor, wenn

$$\#\Omega = n < \infty \text{ und } p(w) = \frac{1}{n} \forall w \in \Omega [\text{Ausgänge sind gleichwahrscheinlich}]$$

Dann gilt :

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

**Beispiel:** 2 faire Würfel  $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2 \quad \#\Omega = 36$

$A = \text{"Augensumme} = 10" = \{(6,4), (5,5), (4,6)\}$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$B = \text{"Augensumme} = 11" = \{(6,5), (5,6)\} \rightarrow \mathbb{P} = \frac{1}{18}$



**Beispiel:** Nicht-Laplace-Experiment

$$\Omega = \{1, 2, 3\} \quad p(1) = \frac{1}{4} \quad p(2) = \frac{1}{4} \quad p(3) = \frac{1}{2}$$

oder  $\Omega = \{1, 2, 3A, 3B\} \Rightarrow$  Laplace-Experiment, da

$$p(w) = \frac{1}{4} \forall w. \mathbb{P}[3] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$



## 2 Kombinatorik

**Beispiel:** Geburtstagsproblem  $K = 200$  Personen  
 $A =$  "mindestens 2 Personen haben am gleichen Tag Geburtstag"  
 $P[A] = ?$

**Modell:**  $n = 365$  Tage im Jahr

**Ausgänge:** Liste der Länge  $K$  besteht aus Zahlen zwischen 1 und  $n$

$$\Omega = \{1, \dots, n\}^K = \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in \{1, \dots, 365\} \forall i = 1, \dots, k\}$$

$a_i =$  Geburtstag der  $i$ -ten Person.

$$\#\Omega = \underbrace{n * n * \dots * n}_K = n^K = 365^{200}$$

$$P[A] = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Gegenereignis  $A^C =$  "alle Geburtstage sind (paarweise) verschieden"

$$\#A^C = \underbrace{n}_{\text{Mögl. für Person 1}} * \underbrace{(n-1)}_{\text{Mögl. für Person 2}} * \underbrace{(n-2)}_{\text{Mögl. für 3. Person}} * \dots * \underbrace{(n-K+1)}_{\text{Mögl. für Person k}} = (n)_K \text{ mit } K \leq n$$

$$P[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#\Omega - \#A^C}{\#\Omega} = 1 - \frac{\#A^C}{\#\Omega} = 1 - \frac{n(n-1)\dots(n-K+1)}{n^K}$$

**Beispiel:**

$K = 23$  Personen:  $P[A] = 0.507$

$K = 200$ :  $P[A] = 0.999999\dots 8 \approx 1$

## 2.1 Urnenmodelle

Urne mit Bällen  $1, \dots, n$ . Es wird  $k$  mal jeweils ein Ball zufällig gezogen. [\*GRAFIK URNE]

**Möglichkeiten:**

- a) Mit/ohne Zurücklegen
- b) Nummern der Bälle mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Insgesamt 4 Modelle:

### 1. Mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Ausgänge dieses Experiments sind Listen der Länge  $K$  bestehend aus Zahlen zwischen 1 und  $n$ .

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in \{1, \dots, n\} \forall i = 1, \dots, K\}$$

$a_i$  = die Nummer des  $i$ -ten Ball

**Beachte**

- Es ist möglich, dass  $a_i = a_j$  (mit Zurücklegen)
- $(5, 3, 7, \dots) \neq (3, 5, 7, \dots)$

**Beispiel:**

- Geburtstage von Personen. Bälle = Tage.  
Jede Person zieht einen Ball zufällig.
- $k$ -maliges Würfeln. 6 Bälle = 6 Seiten des Würfels

$$\#\Omega = \underbrace{n * n * \dots * n}_K = n^K$$

### 2. Ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in \{1, \dots, n\}, \underbrace{a_i \neq a_j \forall i \neq j}_{\text{Paarweise verschiedene Elemente}}\}$$

$$\#\Omega = n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * (n - K + 1)$$

**Beachte**

- $(1, 3, \mathbf{2}, 4, 5, \mathbf{2}, \dots) \notin \Omega$
- $(5, 3, 7, \dots) \neq (3, 5, 7, \dots)$

**Bemerkungen:**

- Falls  $k > n$ :  $\#\Omega = 0$
- Für  $k = n$ :  
 $\#\Omega = n * (n - 1) * \dots * 1 = 1 * 2 * 3 * \dots * n = n!$   
 Ausgänge sind Permutationen:  
 $n = 3: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1)$

### 3. Ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Ausgänge: Listen der Länge K aus verschiedenen Elementen.

Allerdings wird die Reihenfolge nicht berücksichtigt, d.h.  $\{2,5,3\} = \{5,3,2\}$

Ausgänge sind K-elementige Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$ .

$$\Omega = \{A : A \subset \{1, \dots, n\}, |A| = k\} \text{ oder}$$

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in \{1, \dots, n\}, \underbrace{a_1 < a_2 < \dots < a_k}_{\substack{\text{Reihenfolge wird} \\ \text{durch sortieren gelöscht}}}\}$$

$$\begin{aligned} \#\Omega &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-K+1)}{K!} && K \text{ Objekte aus } n \text{ Objekten auswählen} \\ &= \binom{n}{K} \end{aligned}$$

**Beispiel:** Lotto, 49 Kugeln. 6 Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen.

Wir tippen auf eine Kombination aus 6 Nummern

$$A = \text{"Man hat alle 6 geraten"} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

#### 1. Lösung:

$\Omega$  = Menge aller 6-elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, 49\}$ .

Die Kugeln werden mit einem Griff gezogen.

$$\#\Omega = \binom{49}{6} \quad \#A = 1 \text{ [die Kombination, auf die wir tippen]}$$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{1}{\binom{49}{6}} \approx 7,15 \cdot 10^{-8}$$

#### 2. Lösung:

Kugeln werden einzeln gezogen, Nummern werden notiert:

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_6) : a_i \in \{1, \dots, 49\}, a_i \neq a_j \forall i \neq j\}$$

$$\#\Omega = 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \dots \cdot (49 - 6 + 1) \quad \#A = 6!$$

Wir tippen auf  $\{1, \dots, 6\}$ . wir gewinnen bei allen Permutationen von  $1, \dots, 6$ .

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{6!}{49 \cdot 48 \cdot \dots \cdot 44} = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

#### Beispiel:

Wie hoch ist die Chance, dass 2 mal in Folge die gleichen Zahlen gezogen werden?

Bis zum Zeitpunkt gab es  $K = 3016$  Ziehungen.

Insgesamt gibt es  $\binom{49}{6}$  Gewinnreihen.

$A$  = "Bei mindestens 2 Ziehungen wurde die gleiche Reihe gezogen"

$\approx$  Geburtstagsproblem

$A^C$  = "Alle Ziehungen ergeben verschiedene Reihen"

$$\mathbb{P}[A] = 1 - \frac{n(n-1) \cdot \dots \cdot (n-K+1)}{n^K} = 0,278$$

$\Rightarrow$  **Ferni-Dirar-Statistik**

#### 4. Mit zurücklegen und ohne Reihenfolge

K Vögel setzen sich auf n Bäume

- Mehrfachbesetzungen möglich
- Vögel identisch

**Wieviele Besetzungen sind möglich?**

**Lösung:**

Insgesamt  $\underbrace{K}_{\text{Vögel}} + \underbrace{n-1}_{\text{"Trennwände"}}$  Symbole, davon K Kreuze

$$\#\Omega = \binom{K+n-1}{K} = \binom{K+n-1}{n-1}$$

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

$\Rightarrow$  Bose-Einstein-Statistik (für diese Vorlesung unwichtig)

## 2.2 Binomialkoeffizient

**Definition:** Der Binomialkoeffizient  $\binom{n}{k}$  ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von  $\{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \text{Formel: } \binom{n}{k} &= \frac{n * (n-1) * \dots * (n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)! * k!} \end{aligned}$$

mit  $k \in \{0, \dots, n\}$

**Wieso teilen wir durch (k!)?**

Weil jede k-elementige Teilmenge k!-mal gezählt wurde. (z.B.  $\{3,5,9\}$  als  $(3,5,9)$ ,  $(3,9,5), \dots$ )

**Beispiel:** 20 Schüler.

Es soll eine Fußballmannschaft gebildet werden.

Anzahl der Möglichkeiten ohne Berücksichtigung der Positionen:  $\binom{20}{10}$

**Beispiel:** 52 Karten, davon 4 Asse. Wir ziehen 4 Karten ohne zurücklegen.

Wahrscheinlichkeit, dass alle 4 Asse sind = ?

$\Omega = 4\text{-elementige Teilmengen von } \{1, \dots, 52\}$

$$\#A=1 \quad \mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\Omega} = \frac{1}{\binom{52}{4}} = 3,7 * 10^{-6}$$

**Beispiel:** 52 Karten, 4 werden gezogen.

$A = \text{"Alle sind Pik"}$   $\mathbb{P}[A] = ?$   $\#A = \binom{13}{4}$

$$\#\Omega = \binom{52}{4} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}} \approx 2,64 * 10^{-3}$$

**Satz 3.1:**

Wenn  $0 \leq k \leq n-1$ , dann gilt:  $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

**Beweis:** Wir wollen aus  $n$  Elementen  $k$  auswählen.

Hier gibt es zwei Fälle:

1. Wir haben das Element "n" ausgewählt.  
Es verbleiben  $n-1$  Elemente, von denen  $k-1$  ausgewählt werden sollen.  
 $\implies \binom{n-1}{k-1}$  Möglichkeiten
2. Wir haben das Element "n" nicht ausgewählt.  
Es verbleiben  $n-1$  Elemente, von denen  $k$  ausgewählt werden sollen.  
 $\implies \binom{n-1}{k}$  Möglichkeiten

## 2.3 Binomischer Lehrsatz

$$\begin{aligned}(x+y)^0 &= 1 \\(x+y)^1 &= x+y \\(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\(x+y)^n &= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + y^n\end{aligned}$$

**Satz 3.2.:**

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

**Beweis:**

Beim Ausmultiplizieren zählen wir, wie oft der Term  $x^k y^{n-k}$  entsteht.

Aus  $k$  Faktoren muss  $x$  als Beitrag aus-

gewählt werden, aus dem Rest  $y$ .  $(x+y)^n = (x+y)(x+y) \cdot \dots \cdot (x+y)$

$\binom{n}{k}$  Möglichkeiten □

**Bemerkung:**  $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$ , d.h. jede (Spalte vom Pascal'schen Dreieck) liest sich von rechts genauso wie von links.

$k$  Elemente auswählen  $\Leftrightarrow n-k$  nicht auswählen.

**Beobachtung:** Zeilen summieren im Pascal'schen Dreieck: Zeilen summieren im Pascal'schen Dreieck: Summe ist  $2^n$

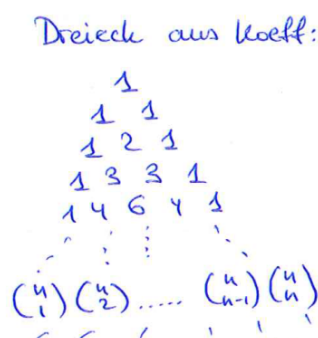
**Satz 3.3:**  $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

**Beweis:**

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n \quad \square$$

**Übung:** (ähnlich)

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$



**Abbildung 2.1:** Pascalsches Dreieck

### 2.3.1 Pascal'sches Dreieck und Trigonometrie

**Bekannt:**  $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$   
 $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

Es gibt auch Formeln für  $\sin(3x)$ ,  $\cos(3x)$ , ...

**Allgemein:**

$$\sin(nx) = \binom{n}{1} \cos^{n-1}(x) \sin x - \binom{n}{3} \cos^{n-1} x \sin^3 x + \binom{n}{5} \cos^{n-5} x \sin^5 x - \dots$$

$$\cos(nx) = \cos^n x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots$$

**Beweis:** Induktion (Übung YAAAY)

## 2.4 Hypergeometrische Verteilung

Teich mit  $n$  Fischen:  $n_1$  Fische rot  
 $n_1 + n_2 = n$   $n_2$  Fische gelb

Fischer fängt  $k$  Fische (ohne Zurücklegen) mit  $k \leq n$

$A = "k_1 \text{ rote und } k_2 \text{ gelbe Fische gefangen.}"$  mit  $k_1 + k_2 = k$

$P[A] = ?$

**Lösung:**  $\Omega = \{T \subseteq \{1, \dots, n\}, \#T = k\}$   $\#\Omega = \binom{n}{k}$

Ereignis  $A = "Aus n_1 \text{ roten Fischen } k_1 \text{ auswählen } \binom{n_1}{k_1} \text{ und aus } n_2 \text{ gelben Fischen } k_2 \text{ auswählen } \binom{n_2}{k_2}"$

Diese sind beliebig kombinierbar.

Insgesamt:  $\#A = \binom{n_1}{k_1} * \binom{n_2}{k_2}$

$$P[A] = \frac{\binom{n_1}{k_1} * \binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}}$$

**Beispiel:** Lotto: 6 aus 49

Ereignis A = "Man hat genau 3 richtig"

$P[A] = ?$

**Lösung:**

$$\Omega = \{T \subseteq \{1, \dots, 49\}, |T| = 6\} \quad \#\Omega = \binom{49}{6}$$

Ohne Einschränkung tippen wir auf  $\{1, \dots, 6\}$  damit A eintritt:

- Es müssen 3 Kugeln aus  $\{1, \dots, 6\}$  gezogen werden:  $\binom{6}{3}$  Möglichkeiten
- Es müssen 3 Kugeln aus  $\{7, \dots, 49\}$  gezogen werden:  $\binom{43}{3}$  Möglichkeiten

$$\#A = \binom{6}{3} * \binom{43}{3}$$

$$P[A] = \frac{\binom{6}{3} * \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \approx 0,0176$$

## 2.5 Touren

1. 5 Städte aus 12 Städten für eine Rundreise auswählen.

# Touren = ?

**Lösung:** 12 Möglichkeiten für Startpunkt

11 Möglichkeiten für die nächste Stadt usw.

**Insgesamt:**  $12 * 11 * 10 * 9 * 8$  Möglichkeiten

2. 12 Personen, Ausschuss aus 5 Personen, darunter 1 Vorsitzender

# Möglichkeiten = ?

**Lösung 1:**  $\underbrace{\binom{12}{5}}_{\text{Vorsitzenden auswählen}} * 5$

**Lösung 2:**  $\underbrace{12}_{\text{Vorsitzender}} * \binom{11}{4}$

## 2.6 Allgemeine hypergeometrische Verteilung

Teich mit  $n$  Fischen und  $r$  möglichen Farben:

$n_1$  Fische haben Farbe 1,  $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$

...

$n_r$  Fische haben Farbe  $r$

Fischer fängt  $K$  Fische

$A =$  "genau  $k_1$  Fische mit Farbe 1 gefangen, ..., genau  $k_r$  Fische mit Farbe  $r$  gefangen" mit  $k_1 + \dots + k_r = k$

$P[A] = ?$

**Lösung:**  $\Omega = \{T \subset \{1, \dots, n\} : \#T = k\}$   $\#\Omega = \binom{n}{k}$

$$\#A = \binom{n_1}{k_1} * \binom{n_2}{k_2} * \dots * \binom{n_r}{k_r}$$

$k_1$  Fische mit Farbe 1 auswählen:  $\binom{n_1}{k_1}$

$k_r$  Fische mit Farbe  $r$  auswählen:  $\binom{n_r}{k_r}$

$$P[A] = \frac{\binom{n_1}{k_1} * \dots * \binom{n_r}{k_r}}{\underbrace{\binom{n}{k_0}}_{\text{Allgemeine hypergeometrische Verteilung}}}$$

**Beispiel:** 52 Karten

Zufällig auf 2 Spieler verteilt. Jeder Spieler bekommt 26 Karten.

$A =$  "Spieler 1 bekommt genau 3 Asse, 2 Könige und 1 Dame"

$P[A] = ?$

$$\text{Lösung: } \#\Omega = \binom{52}{26} * \underbrace{\binom{26}{26}}_{=1}$$

$$\#A = \underbrace{\binom{4}{3}}_{3 \text{ A aus } 4} * \underbrace{\binom{4}{2}}_{2 \text{ K aus } 4} * \underbrace{\binom{4}{1}}_{1 \text{ D aus } 4} * \underbrace{\binom{40}{20}}_{\substack{\text{aus } 40 \text{ verbl.} \\ \text{Karten } 20 \text{ auswählen}}}$$

**Beispiel:** Zug mit 10 Waggons, jeweils 50 Plätze.

30 Personen suchen sich zufällig Plätze aus

$A =$  "in jedem Waggon genau 3 Personen"

**Lösung:**  $\#\Omega = \binom{500}{30}$  [30 Plätze ausgewählt, die besetzt werden sollen]

$$\#A = \underbrace{\binom{50}{3} * \binom{50}{3} * \dots * \binom{50}{3}}_1 = \binom{50}{3}^{10}$$

$$P[A] = \frac{\binom{50}{3}^{10}}{\binom{500}{30}}$$



## 2.7 Multinomialkoeffizient

**Beispiel:**  $k$  verschiedene Gegenstände sollen auf  $r$  Fächer verteilt werden, s.d.:

Im 1. Fach  $k_1$  Gegenstände landen,  $k_1 + k_2 + \dots + k_r = k$

Im 2. Fach  $k_2$  Gegenstände landen,

...

Im  $r$ . Fach  $k_r$  Gegenstände landen

# Möglichkeiten = ?

**Lösung:**

Wähle  $k_1$  Gegenstände für Fach 1:  $\binom{k}{k_1}$

Wähle  $k_2$  Gegenstände für Fach 2:  $\binom{k-k_1}{k_2}$

Wähle  $k_3$  Gegenstände für Fach 3:  $\binom{k-k_1-k_2}{k_3}$

...

Wähle  $k_r$  Gegenstände für Fach  $r$ :  $\binom{k-k_1-k_2-\dots-k_{r-1}}{k_r} = \binom{k_r}{k_r} = 1$

Insgesamt:  $\binom{k}{k_1} * \binom{k-k_1}{k_2} * \binom{k-k_1-k_2}{k_3} * \dots * \binom{k-k_1-k_2-\dots-k_{r-1}}{k_r} =$

$$\frac{k!}{k_1! * k_2! * \dots * k_r!}$$

$$k! = 1 * 2 * \dots * k$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1 \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! * 0!} = \frac{1}{0!} = 1$$

**Definition: Multinomialkoeffizient**

$$\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_r} := \frac{k!}{k_1! * k_2! * \dots * k_r!}$$

Spezialfall:  $r = 2$ :

$$\binom{k}{k_1, k-k_1} = \frac{k!}{k_1! (k-k_1)!} = \binom{k}{k_1} = \binom{k}{k-k_1}$$

**Multinomialformel:**

$$\underbrace{(x + y + z + t)^n = (x + y + z + t) * (x + y + z + t) * \dots * (x + y + z + t)}_{n \text{ Mal}}$$

$$= \sum x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} t^{k_4} \quad k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{0, 1, \dots\}, k_1 + \dots + k_4 = n$$

**Beispiel:** Aus 33 Schülern sollen 3 Fußballmannschaften gebildet werden.

#Mögl = ?

**Lösung:**  $\binom{33}{11, 11, 11} = \frac{33!}{11! 11! 11!}$  [falls Mannschaften unterscheidbar]

Wenn Mannschaften **nicht** unterscheidbar sind:  $\binom{33}{11, 11, 11} / 3!$

**Beispiel:** Wie viele 16-stellige Zahlen kann man mit einem Ziffernvorrat von **3 Einsen**, **5 Dreien** und **8 Sechsen** schreiben?

1,1,1,3,3,3,3,3,6,6,6,6,6,6,6,6

**Lösung:** 16 Stellen  $\square\square\square\dots\square$

3 Stellen auswählen, die mit Einsen besetzt werden.  $\binom{16}{3}$

Es verbleiben 13 Stellen. 5 Stellen auswählen, die mit Dreien besetzt werden  $\binom{13}{5}$

Es verbleiben 8 Stellen. Es bleibt nur eine Möglichkeit für die 8 Sechsen.

**Insgesamt:**  $\binom{16}{3} * \binom{13}{5} * 1 = \binom{16}{3,5,8} = \frac{16!}{3!5!8!}$

Fächer: 1,3,6

Gegenstände: Stellen

## 2.7.1 Multinomialverteilung mit Zurücklegen

**Beispiel:** Fische mit  $n = \underbrace{n_1}_{\text{Farbe 1}} + \dots, n_r$

Fischer fängt k Fische **mit Zurücklegen**

A = "genau  $k_1$  Fische mit Farbe 1 gefangen,

...

genau  $k_r$  Fische mit Farbe r"

$P[A] = ?$

**Lösung:**  $\Omega = \{1, \dots, n\}^k \quad \#\Omega = n^k$

Betrachte Ereignis:

- Zuerst weise jeder Ziehung eine Farbe zu, s.d.  $\forall i \in \{1, \dots, r\}$  Farbe i genau  $k_i$  Ziehungen zugeordnet wird.

Mögl.:  $\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_r}$

- Bei gegebenen Farben ordnen wir nun jeder Ziehung einen Fisch zu.

A besteht aus  $\binom{k}{k_1, \dots, k_r}$  "Kopien" von B, somit

$$\#A = \binom{k}{k_1, \dots, k_r} * n_1^{k_1} * \dots * n_r^{k_r}$$

B = "bei Ziehungen 1, ...,  $k_n$  Farbe 1 gezogen,

bei Ziehungen  $k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2$ : Farbe 2,

...

bei Ziehungen  $k_1 + \dots + k_r + 1, \dots, k$  : Farbe r"

## 2 Kombinatorik

$$\#B = \underbrace{n_1 * \dots * n_1}_{k_1} * \underbrace{n_2 * \dots * n_2}_{k_2} * \dots * \underbrace{n_r * \dots * n_r}_{k_r} = n_1^{k_1} * \dots * n_r^{k_r}$$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \binom{k}{k_1, \dots, k_r} * \left(\frac{n_1}{n}\right)^{k_1} * \left(\frac{n_2}{n}\right)^{k_2} * \dots * \left(\frac{n_r}{n}\right)^{k_r} \quad \square$$

**Beispiel:** Eine faire Münze wird n mal geworfen.

$$\mathbb{P}[k \text{ Mal "Kopf"}] = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}, \text{ dann:}$$

$$\#\Omega = \{Z, K\}^n \quad \#\Omega = 2^n \quad \#A = \binom{n}{k} \quad \begin{array}{l} \text{[Auswahl von k Würfeln,} \\ \text{in denen Kopf geworfen wurde]} \end{array}$$

### Zwei Aufgaben:

1. Rundreise. Kunde darf 5 aus 12 verschiedenen Städten auswählen.  
Anzahl der Touren:  $12*11*10*9*8$ , nicht  $\binom{12}{5}$  [Tour geordnet]
2. 12 Personen. Es soll ein Ausschuss aus 5 Personen gebildet werden, davon 1 Vorsitzender. Anzahl der Mögl:  $\binom{12}{5} * 5$ , oder  $12 * \binom{11}{4}$

# 3 Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie

$\Omega$  = Menge aller Ausgänge eines Zufallsexperiments

Ereignisse := Teilmengen von  $\Omega$

$\mathcal{P}(\Omega)$  = Menge aller Ereignisse = Potenzmenge von  $\Omega$

$$\#\mathcal{P}(\Omega) = 2^{\#\Omega}$$

Wahrscheinlichkeit ist eine Funktion  $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1], A \mapsto \mathbb{P}[A]$  mit

- $\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \dots] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + \dots$   
 $\forall A_1, A_2, \dots \subset \Omega$  mit  $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$
- $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

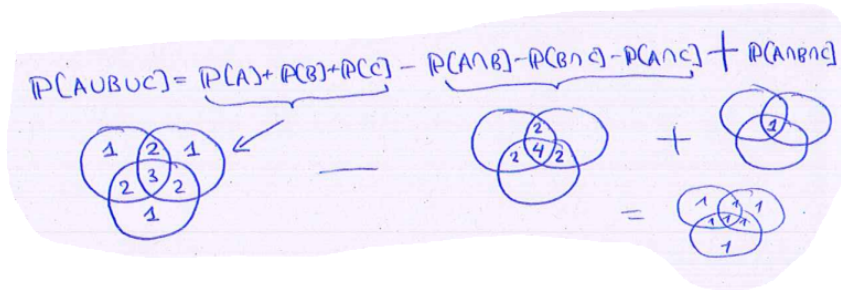
## 3.1 Eigenschaften von $\mathbb{P}$

1.  $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$
2.  $\forall A_1, \dots, A_n \subset \Omega$  mit  $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$   
 $\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_n] = \mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_n]$   
**Spezialfall:** Für  $A, B \subset \Omega$  mit  $A \cap B = \emptyset$   
gilt  $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$
3.  $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$
4.  $\forall A, B \subset \Omega : \mathbb{P}[A \setminus B] = \mathbb{P}[A] - \underbrace{\mathbb{P}[A \cap B]}_{\text{Nicht } \mathbb{P}[B]}$
5.  $A, B \subset \Omega$  (nicht disjunkt)  
 $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$
6. Siebformel oder Einschluss-Ausschluss-Formel.

**Für 3 Ereignisse A, B, C  $\subset \Omega$**

$$\mathbb{P}[A \cup B \cup C] =$$

$$\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[B \cap C] - \mathbb{P}[C \cap A] + \mathbb{P}[A \cap B \cap C]$$



**Für 4 Ereignisse A, B, C, D**

$$\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[D] - (\mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[A \cap C] + \dots + \mathbb{P}[C \cap B])$$

$$+ (\mathbb{P}[A \cap B \cap C] + \mathbb{P}[B \cap C \cap D] + \dots) - \mathbb{P}[A \cap B \cap C \cap D]$$

**Für n Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_n$ :**

$$\mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^n A_k] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i] - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j \cap A_k] - \dots + (-1)^{n+1} \mathbb{P}[A_1 \cap \dots \cap A_n]$$

**Beispiel:**

n Briefe werden zufällig in n adressierte Briefumschläge gesteckt.

Ereignis A = "mind. 1 Brief wird in den richtigen Umschlag gesteckt"

$$\mathbb{P}[A] = ?$$

**Lösung:**

Briefe 1,2,3,4,5,6

$$\Omega = \{ \underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{\substack{a_i \text{ gibt an, in welchen} \\ \text{Umschlag Brief } i \text{ gesteckt wird}}} : a_i \in \{1, \dots, n\} a_i \neq a_j \forall i \neq j \}$$

$$\#\Omega = n * (n - 1) * \dots + 1 = n! \quad \#A = ?$$

$$A = \{(a_1, \dots, a_n) \in \Omega : \exists k \text{ mit } A_k = k\}$$

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_n \text{ mit}$$

$A_k$  = "Brief k wird in Umschlag k gesteckt"

$$\mathbb{P}[A_k] = \frac{\#A_k}{\#\Omega} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

$A_1, \dots, A_n$  nicht disjunkt.

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = \frac{\#(A_1 \cap A_2)}{n!} = \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = \frac{\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{n!} = \frac{(n-3)!}{n!}$$

$$\text{Allgemein: } \mathbb{P}[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_l}] = \frac{(n-l)!}{n!}$$

**Siebformel:**  $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_n] = n * \frac{1}{n} - \binom{n}{2} * \frac{(n-2)!}{n!} + \frac{(n-3)!}{n!} - \dots$

$$= \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} * \frac{(n-l)!}{n!} * (-1)^{l+1} = \sum_{l=1}^n \frac{(-1)^{l+1}}{l!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

Für  $n \rightarrow \infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A] = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots$

$$= 1 - \left( \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \right) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.632$$

## 3.2 Ungleichungen für Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[\Omega] = 1$$

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \dots] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + \dots$$

falls  $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

**7.:**

$$\forall A \subset B \subset \Omega \Rightarrow \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$$

**Beweis:**  $B = A \cup (B \setminus A)$  (disjunkt)

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A] + \underbrace{\mathbb{P}[B \setminus A]}_{\geq 0} \geq \mathbb{P}[A] \quad \square$$

**8.:**

$$\forall A, B \subset \Omega : \mathbb{P}[A \cup B] \leq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$$

**Allgemeiner:**  $\forall A_1, \dots, A_n \subset \Omega : \mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_n] \leq \mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_n]$

**9.:** Noch allgemeiner:

$$\forall A_1, A_2, \dots \subset \Omega : \mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_k]$$

**Beweis:**

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$

$$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$$

...

Dann gilt:

$$\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}_{\text{Nicht disj.}} = \underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k}_{\text{disj.!!!}}$$

$$\mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k] = \mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k] \stackrel{\text{Axiom}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[B_k] \underset{B_k \subset A_k}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_k] \quad \square$$

## 4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeiten

**Beispiel:** 2 faire Würfel

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2 \quad \#\Omega = 36$$

Ereignis A = "Erster Würfel zeigt eine 6"

Ereignis B = "Augensumme = 10"

Jemand teilt uns mit: B ist eingetreten.

$$A = \{(6, 1), (6, 2), \dots, (6, 6)\} \quad \#A = 6$$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad B = \{ \underbrace{(6, 4)}_{\text{A tritt ein}}, (5, 5), (4, 6) \}$$

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{1}{3}$$

**Definition:**

Seien  $A, B \subset \Omega$ .

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B ist definiert als:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

Annahme:  $\mathbb{P}[B] \neq 0$

**Beispiel:**

Fairer Würfel wird 10x geworfen.

Uns wird mitgeteilt, dass mindestens eine 6 gewürfelt wurde.

Bedingte Wkeit, dass der erste Wurf eine 6 war = ?

**Lösung:**

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_{10}) : a_i \in \{1, \dots, 6\}\} \quad \#\Omega = \overbrace{6 * 6 * \dots * 6}^{10} = 6^{10}$$

B = "mindestens eine 6 gewürfelt"

$$B^C = \text{"keine 6 gewürfelt"} = \{(a_1, \dots, a_{10}) : a_i \in \{1, 2, \dots, 5\}\}$$

$$\#B = 6^{10} - 5^{10} \quad \#B^C = 5^{10}$$

$$\mathbb{P}[B] = \frac{6^{10} - 5^{10}}{6^{10}}$$

$A = \text{"der erste Wurf ist eine 6"} = \{(6, a_2, \dots, a_{10}) : a_i \in \{1, \dots, 6\}\}$

$$\#A = 1 * \underbrace{6 * 6 * \dots * 6}_{9\text{-mal}} = 6^9$$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{6^9}{6^{10}} = \frac{1}{6}$$

$$A \cap B = A$$

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{6^9}{6^{10} - 5^{10}} = 0,19$$

$$\mathbb{P}[A|B] = 0,19$$

$$\mathbb{P}[A] = 0,16$$

$$\text{Alternativ: } \mathbb{P}[A|B] = \frac{\#(A \cap B)}{\#B}$$

## 4.1 Eigenschaften der bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$1. \mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \leq 1 \text{ (und } \geq 0)$$

$$2. \mathbb{P}[\Omega|B] = \frac{\mathbb{P}[\Omega \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[B]} = 1$$

$$\mathbb{P}[\emptyset|B] = 0$$

3. Falls  $A_1, A_2, \dots$  disj. sind, gilt:

$$\mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) | B\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\mathbb{P}[(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

$$= \frac{\mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap B)]}{\mathbb{P}[B]}$$

$$\stackrel{A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots \text{disj.}}{=} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_k \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}[A_k \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_k|B] \quad \square$$

$$4. \mathbb{P}[A^C|B] = 1 - \mathbb{P}[A|B]$$

5. Multiplikationsregel:

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = \mathbb{P}[A_1] * \mathbb{P}[A_2|A_1]$$

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = \mathbb{P}[A_1] * \mathbb{P}[A_2|A_1] * \mathbb{P}[A_3|(A_1 \cap A_2)]$$



## 4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeiten

### Beispiel:

Sterbewahrscheinlichkeiten  $q_0, q_1, \dots$

$q_n$  = Wahrscheinlichkeit, als eine n-jährige Person, das Alter n+1 nicht zu erreichen.

$$q_0 = 0,0046$$

Wkeit, dass eine Person  $\geq 50$  alt wird

$$q_1 = 0,0004$$

$$q_2 = 0,0002$$

### Lösung:

$A_n$  := "Person hat das Alter von n Jahren erreicht"

$$\mathbb{P}[A_{50}] = ?$$

Gegeben sind  $q_n = \mathbb{P}[A_{n+1}^C | A_n]$   $1 - q_n = \mathbb{P}[A_{n+1} | A_n]$

$$\mathbb{P}[A_{50}] = \mathbb{P}[A_1] * \mathbb{P}[A_2 | A_1] * \mathbb{P}[A_3 | (A_1 \cap A_2)] * \mathbb{P}[A_4 | \underbrace{(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}_{A_3}] * \dots *$$

$$\mathbb{P}[A_{50} | \underbrace{(A_1 \cap \dots \cap A_{49})}_{A_{49}}]$$

$$= (1 - q_0) * (1 - q_1) * \dots * (1 - q_{49})$$

$$\mathbb{P}[\text{Person lebt genau 50 Jahre}] = (1 - q_0) * (1 - q_1) * \dots * (1 - q_{49}) * q_{50} \quad \square$$

## 4.2 Unabhängige Ereignisse

Zwei Formeln:

1.  $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$  , falls  $A \cap B = \emptyset$
2.  $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B]$  , falls A und B unabhängig

**Bemerkung:** Disjunkt und unabhängig sind verschiedene Begriffe.

Seien A, B disjunkt (d.h.  $A \cap B = \emptyset$ )

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}[A \cap B]}_{\emptyset} = 0 \neq \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B]$$

$\Rightarrow$  A und B abh. (Falls  $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] \neq 0$ )

### Definition:

Ereignisse A,B,C heißen

- paarweise unabhängig, wenn  $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B]$ ,  $\mathbb{P}[A \cap C] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[C]$ ,  $\mathbb{P}[B \cap C] = \mathbb{P}[B] * \mathbb{P}[C]$
- unabhängig, wenn zusätzlich:  $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B] * \mathbb{P}[C]$

unabhängig  $\Rightarrow$  paarweise unabhängig

**Beispiel:**

3 Ereignisse, die paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig sind.

3 Würfel:  $x_1, x_2, x_3$  seien die 3 Augenzahlen

$$A = \{x_1 = x_2\} \quad B = \{x_2 = x_3\} \quad C = \{x_3 = x_1\}$$

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \{1, \dots, 6\}\} \quad \#\Omega = 6^3$$

$$A = \{(a, a, c) : a, c \in \{1, \dots, 6\}\}$$

$$B = \{(a, b, b) : a, b \in \{1, \dots, 6\}\}$$

$$C = \{(a, b, a) : a, b \in \{1, \dots, 6\}\}$$

$$\#A = 6^2 \quad \#B = 6^2 \quad \#C = 6^2$$

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[C] = \frac{6^2}{6^3} = \frac{1}{6}$$

**Behauptung:** Seien A, B, C paarweise unabhängig. Wir zeigen:  $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B]$

$$A \cap B = \{x_1 = x_2, x_2 = x_3\} = \{x_1 = x_2 = x_3\} = \{(a, a, a) : a \in \{1, \dots, 6\}\}$$

$$\#(A \cap B) = 6$$

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B] \Rightarrow A \text{ und } B \text{ unabh.}$$

**Behauptung:** Seien A, B, C abhängig.

$$A \cap B \cap C = \{x_1 = x_2, x_2 = x_3, x_3 = x_1\} = \{x_1 = x_2 = x_3\} \quad \#(A \cap B \cap C) = 6$$

$$\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} \neq \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B] * \mathbb{P}[C] \Rightarrow A, B, C \text{ abhängig}$$

### 4.2.1 Eigenschaften der Unabhängigkeit

Seien A, B unabhängige Ereignisse. Dann sind

- A und  $B^C$  unabhängig
- $A^C$  und B unabhängig
- $A^C$  und  $B^C$  unabhängig

**Beweis:** Wir zeigen A und  $B^C$  sind unabhängig

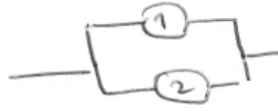
$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A \cap B^C] &= \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[A \cap B] \stackrel{A, B \text{ unabh.}}{=} \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B] \\ &= \mathbb{P}[A] * (1 - \mathbb{P}[B]) = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B^C] \Rightarrow A, B^C \text{ unabhängig} \quad \square \end{aligned}$$

Weitere **Behauptungen:** Seien A, B, C unabhängig. Dann sind:

- $A, B \cup C$  unabhängig
- $A, B \cap C$  unabhängig
- $A, B \Delta C$  unabhängig

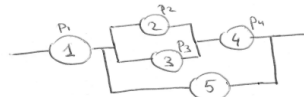
#### 4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeiten

**Beispiel:** Zuverlässigkeit: System besteht aus  $n$  Komponenten  $1, \dots, n$   
Wahrscheinlichkeit, dass Komponente  $i$  ausfällt ist  $\mathbb{P}[A_i] = p_i$



a) Parallelschaltung

$$\mathbb{P}[\text{Ausfall des Systems}] = \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = p_1 p_2$$



b) Reihenschaltung

$$\mathbb{P}[\text{Ausfall des Systems}] = \mathbb{P}[\underbrace{A_1 \cup A_2}_{\text{nicht disj., unabh.}}] = 1 - \mathbb{P}[(A_1 \cup A_1)^C] \stackrel{\text{de Morgan}}{=} 1 - \mathbb{P}[A_1^C \cap A_2^C]$$

$$\begin{aligned} & 1 - \mathbb{P}[\underbrace{A_1^C \cap A_2^C}_{\text{unabh.}}] \\ &= 1 - \mathbb{P}[A_1^C] * \mathbb{P}[A_2^C] \\ &= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}[\text{Ausfall}] = ?$$

Ereignis, dass das System ausfällt:

$$A = \text{Ausfall des Systems} = A_1 \cup (A_5 \cap (A_4 \cup (A_2 \cap A_3)))$$

$$\mathbb{P}[A] = ?$$

$$\mathbb{P}[2 \text{ und } 3 \text{ fällt aus}] = p_2 p_3$$

$$\mathbb{P}[2, 3, 4 \text{ fällt aus}] = p_2 p_3 + p_4 - p_2 p_3 p_4$$

$$\mathbb{P}[2, 3, 4, 5 \text{ fällt aus}] = (p_2 p_3 + p_4 - p_2 p_3 p_4) p_5$$

$$\mathbb{P}[A] = p_1 + p_{\text{Rest}} - p_1 p_{\text{Rest}} = \dots \quad (\text{Prof sagt trivial})$$

□

**Definition:**  $n$  Ereignisse  $A_1, A_2, \dots, A_n$  sind

- paarweise unabhängig, wenn  $\mathbb{P}[A_i \cap A_j] = \mathbb{P}[A_i] * \mathbb{P}[A_j] \forall i \neq j$
- unabhängig, wenn:  $\forall m \in \{2, \dots, n\} \forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$

$$\mathbb{P}[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}] = \mathbb{P}[A_{i_1}] * \dots * \mathbb{P}[A_{i_m}]$$

(D.h. Produktformel gilt für alle Teilfamilien)

#### 4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeiten

**Behauptung:** Blockungslemma

**Beispiel:** Seien  $A, B, C, D, E, F, G$  unabhängige Ereignisse.

$$(A \Delta C) \cap E^C \cup C, B^C \cap F, D \cup G \quad \text{unabhängig}$$

Aber:  $A \Delta C$  und  $B \cup C$  sind im Allgemeinen abhängig

**Bemerkungen:**

$\Omega$  und  $A$  sind immer unabhängig.

$$\mathbb{P}[\Omega \cap A] = \mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[\Omega] * \mathbb{P}[A]$$

$\emptyset$  und  $A$  sind immer unabhängig

$$\mathbb{P}[\emptyset \cap A] = \mathbb{P}[\emptyset] = 0 = \mathbb{P}[\emptyset] * \mathbb{P}[A]$$

# 5 Satz von Bayes

## Satz: Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei  $\Omega = B_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} B_n$  disjunkte Zerlegung von  $\Omega$ , d.h.  $B_i \cap B_j = \emptyset \forall i \neq j$  und  $\Omega = B_1 \cup \dots \cup B_n$

Sei  $P[B_i] \neq 0 \forall i$

Sei  $A \subset \Omega$  ein weiteres Ereignis. Dann gilt:

$$P[A] = P[B_1] * P[A|B_1] + P[B_2] * P[A|B_2] + \dots$$

**Beweis:**  $P[A] = P[A \cap B_1] + P[A \cap B_2] + \dots = P[B_1] * P[A|B_1] + P[B_2] * P[A|B_2] + \dots$  □

## Beispiel:

1% der Population ist krank, Rest ist gesund

Schnelltest: Bei einer kranken Person mit Wahrscheinlichkeit 90% positiv.

Bei einer gesunden Person mit Wahrscheinlichkeit 20% positiv

$A = \text{"Test ist Positiv"}$   $P[A] = 0,001 * 0,9 + 0,99 * 0,2 = 0,207$

Lösung mit der Formel

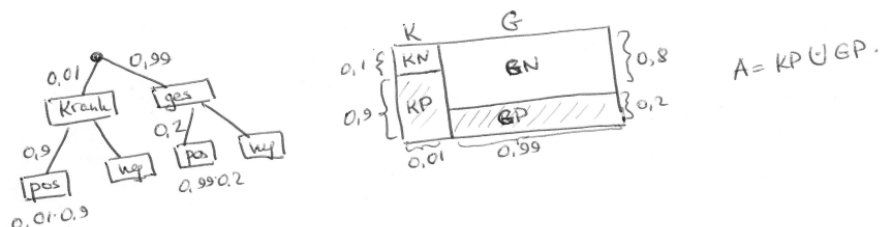
$B_1 = \text{"Person krank"}$   $B_2 = \text{"Person gesund"}$

$P[B_1] = 0,01 \Rightarrow P[B_2] = 0,99$

$P[A|B_1] = 0,9$  [nicht  $P[A \cap B_1]$ ]  $P[A|B_2] = 0,2$

$P[A] = P[B_1] * P[A|B_1] + P[B_2] * P[A|B_2]$

$= 0,01 * 0,9 + 0,99 * 0,2$



## 5.1 Bayes-Formel

### Satz 2.2:

Seien  $A, B \subset \Omega$  zwei Ereignisse mit  $\mathbb{P}[A] \neq 0, \mathbb{P}[B] \neq 0$ . Dann gilt:

$$\mathbb{P}[B|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B] * \mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A]}$$

**Beweis:** Linke Seite =  $\mathbb{P}[B|A] = \frac{\mathbb{P}[B \cap A]}{\mathbb{P}[A]}$

Rechte Seite =  $\frac{\mathbb{P}[A|B] * \mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[A]} \quad \square$

### Beispiel 1: (Population Personen: krank und gesund)

1% der Population ist krank.

Schnelltest: Bei einer Kranken Person mit Wahrscheinlichkeit 90% positiv.

Bei einer gesunden Person mit Wahrscheinlichkeit 20% positiv

Eine gesunde Person wurde positiv getestet.

Wahrscheinlichkeit, dass diese Person krank ist?

### Lösung 1:

$\Omega$  = Population

$B_1$  = "Person ist krank"

$B_2 = B_1^C$  = "Person ist gesund"

$A$  = "Person wurde positiv getestet"

Aufgabenstellung:  $\mathbb{P}[B_1] = 0,01 \Rightarrow \mathbb{P}[B_2] = 1 - 0,01 = 0,99$

1.  $\mathbb{P}[A|B_1] = 0,9$

2.  $\mathbb{P}[A|B_2] = 0,2$

$\mathbb{P}[B_1|A] = ?$

Bayes-Formel:  $\mathbb{P}[B_1|A] \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}[A|B_1] * \mathbb{P}[B_1]}{\mathbb{P}[A]} \stackrel{\text{totale Wkeit}}{=}$

$$\frac{\mathbb{P}[A|B_1] * \mathbb{P}[B_1]}{\mathbb{P}[A|B_1] * \mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[A|B_2] * \mathbb{P}[B_2]} = \frac{0,9 * 0,01}{0,9 * 0,01 + 0,2 * 0,99} = 0,043$$

$\mathbb{P}[B_2|A] = 1 - \mathbb{P}[B_1|A] = 1 - 0,043$

### Lösung 2:

$\mathbb{P}[A] = 0,01 * 0,9 + 0,99 * 0,2 = 0,207$

$\mathbb{P}[\text{krank}|\text{positiv getestet}] = \frac{0,01 * 0,9}{0,01 * 0,9 + 0,99 * 0,2} = 0,043$

## 5 Satz von Bayes

### Lösung 3:

Laplace-Experiment mit  $\Omega = \{KP, KN, GP, GN\}$

$$P(KP) = 0,9 \cdot 0,01$$

$$P(GP) = 0,2 \cdot 0,99$$

$$P(KN) = 0,1 \cdot 0,01$$

$$P(GN) = 0,8 \cdot 0,99$$

$$A = \text{"Person positiv"} = \{KP, GP\}$$

$$B_1 = \text{"Person krank"} = \{KP, KN\}$$

$$P[B_1|A] = \frac{P[B_1 \cap A]}{P[A]} = \frac{P(KP)}{P(KP) + P(GP)} = \dots$$

### Beispiel 2: (2 Jungen Problem)

Im Nachbarhaus: Familie mit 2 Kindern.

Sie beobachten: Im Garten spielt ein Junge.

Wkeit, dass das andere Kind auch ein Junge ist = ?  
d.h. beide sind Jungen

### Lösung:

Grundmenge:  $\Omega = \{MM1, MM2, MJ1, MJ2, JM1, JM2, JJ1, JJ2\}$

MM1 = Beides Mädchen, erste Kind im Garten

$$B = \text{"Im Garten spielt ein Junge"} = \{MJ2, JM1, JJ1, JJ2\}$$

$$A = \text{"Beide Kinder sind Jungen"} = \{JJ1, JJ2\} \quad A \cap B = \{JJ1, JJ2\}$$

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{2/8}{4/8} = 0.5$$

### Beispiel 3: (Ziegenproblem)

3 Türen            Hinter einer Tür  $\rightarrow$  Auto  
                      Hinter den beiden anderen  $\rightarrow$  Ziegen

Sie zeigen auf Tür 1. (Tür 1 bleibt aber geschlossen)

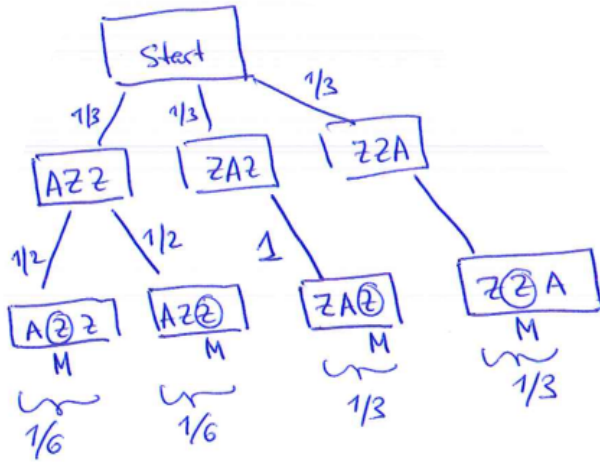
Moderator öffnet eine der beiden anderen Türen  $\rightarrow$  Ziege.

Sie dürfen bei Tür 1 bleiben oder wechseln. Was ist besser?

Aufgabenstellung ist unvollständig. Wir machen die Annahme: Moderator weiß, wo das Auto steht und will das Auto nicht zeigen.

## 5 Satz von Bayes

Lösung:



$$\Omega = \{AZZ, AZZ, ZAZ, ZZA\}$$

Dick geschrieben: Vom Moderator gewählt

$$p(AZZ) = \frac{1}{3} * \frac{1}{2}$$

$$p(AZZ) = \frac{1}{3} * \frac{1}{2}$$

$$p(ZAZ) = \frac{1}{3} * 1$$

$$p(ZZA) = \frac{1}{3} * 1$$

$$P[\text{Auto hinter Tür 1}] = p(AZZ) + p(AZZ) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P[\text{Türwechsel führt zum Erfolg}] = p(ZAZ) + p(ZZA) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

**Also wechseln!**



# 6 Zufallsvariablen

## Definition:

Eine ZV ist eine Funktion  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

## Beispiel:

2 Würfel.  $\Omega = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \{1, \dots, 6\}\}$

Erste Augenzahl:  $X_1(a_1, a_2) = a_1$

Zweite Augenzahl  $X_2(a_1, a_2) = a_2$

Augensumme:  $X(a_1, a_2) = a_1 + a_2 \quad x = x_1 + x_2$

Größe Augenzahl:  $y(a_1, a_2) = \max(a_1, a_2)$

**In dieser Vorlesung sei  $\Omega$  immer endlich**

## Definition:

Eine Verteilung einer ZV  $X$  ist die Angabe der Werte und der Wahrscheinlichkeiten dieser Werte.

Zähldichte von  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ist  $P_x : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$P_x(t) = \underbrace{\mathbb{P}[x = t]}_{\text{Er.}} = \mathbb{P}[\underbrace{\{w \in \Omega : X(w) = t\}}_{x^{-1}(t)}]$$

**Beispiel:** 2 Würfel.  $x(a_1, a_2) = a_1 + a_2$  Augensumme

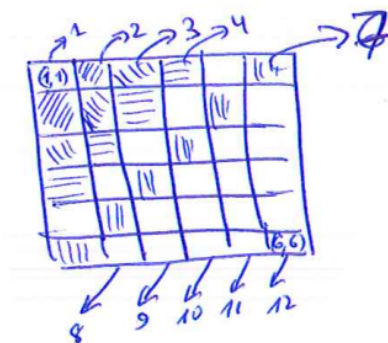
t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}[x = t]$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$\{x=2\} = \{(1,1)\}$

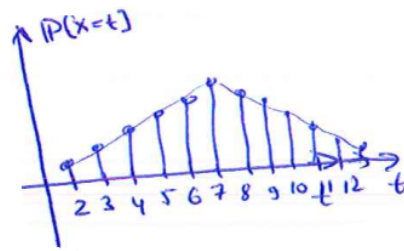
$\{x=3\} = \{(1,2), (2,1)\}$

$\{x=4\} = \{(1,3), (3,1), (2,2)\}$

...

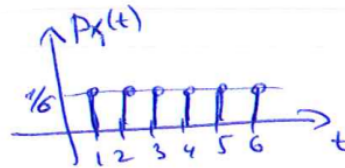


$$P_x(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{36} & , t \in \{2, \dots, 7\} \\ \frac{13-t}{36} & , t \in \{7, \dots, 12\} \\ 0, t \notin \{2, \dots, 12\} \end{cases}$$



Für die erste Augenzahl  $x_1(a_1, a_2) = a_1$

t	1	2	3	4	5	6
$P[=]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



**Eigenschaften der Zähldichte:**

1.  $P_x(t) \in [0, 1]$
2.  $\sum_{t \in \mathbb{R}} P_x(t) = 1$

**Beispiel:** Sei  $A \subset \Omega$

Indikatorvariable von A:

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

Grafik und Tabelle indikatorvariable

**Definition:** Sei X ZV mit Verteilung

Werte	$y_1$	$y_2$	$y_3$	...
Wahrscheinlichkeiten	$P_1$	$P_2$	$P_3$	...

$$P[x = y_i] = p_i$$

$$\text{Erwartungswert von X ist } EX = \sum_i \underbrace{y_i}_{\text{Werte}} \underbrace{P_i}_{\text{Wkeiten}}$$

**Beispiel:** 1 Würfel,  $x_1$  Augenzahl

$$EX_1 = 1 * \frac{1}{6} + 2 * \frac{1}{6} + \dots + 6 * \frac{1}{6} = 3,5$$

EX ist **nicht** der wahrscheinlichste Wert:  $P[X = 3, 5] = 0$

**Bemerkung:**

Betrachte  $n = 10^6$  Würfe. Augenzahlen:  $X_1, X_2, \dots, X_n$

Dann gilt  $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \approx 3.5$

**Satz 9.1** [alternative Formel für EX]

Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ . Dann gilt:

$$EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \underbrace{P[\{\omega\}]}_{p(\omega)}$$

## 6 Zufallsvariablen

**Beweis:** Seien  $y_1, \dots, y_m$  Werte von  $X$

$$A_1 = \{X = y_1\}, \dots, A_m = \{X = y_m\}$$

$$A_i = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = y_i\}$$

$\Omega = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_m$  ist disjunkte Zerlegung

$$\mathbb{E}X \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_i y_i * p_i = \sum_i y_i \mathbb{P}[A_i]$$

$$\sum_i y_i \sum_{\omega \in A_i} p(\omega) \stackrel{w \in A_i}{=} \sum_i \sum_{\omega \in A_i} X(\omega) p(\omega)$$

$$\Rightarrow X(\omega) = y_i$$

**Satz 9.2.** Seien  $x, y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  Zufallsvariablen

Dann gilt:  $\mathbb{E}[x + y] = \mathbb{E}X + \mathbb{E}y$

**Beweis:**

$$\mathbb{E}[x + y] \stackrel{9.1}{=} \sum_{\omega \in \Omega} (x + y)(\omega) * p(\omega) =$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + y(\omega))p(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) * p(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} y(\omega) * p(\omega) \stackrel{9.1}{=} \mathbb{E}X + \mathbb{E}y \quad \square$$

**Bemerkung:** Allgemein: Für ZV  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_n$

**Bemerkung:** Sei  $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, \mathbb{E}[a * X] = a * \mathbb{E}X$

**Beispiel:** n Würfel. Augenzahlen:  $X_1, \dots, X_n$  Augensumme:  $S = X_1 + \dots + X_n$

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}X_1 + \dots + \underbrace{\mathbb{E}X_n}_{=3,5} = n * 3,5$$

**Beispiel:** Lotto 6 aus 49. (ohne Zurücklegen) Tippe auf  $\{1, \dots, 6\}$

Sei  $S$  die Anzahl der richtig geratenen Zahlen.

Werte von  $S$ :  $0, 1, \dots, 6$

$$\mathbb{P}[S = k] = \frac{\binom{6}{k} * \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}, \text{ für } k \in \{0, \dots, 6\}$$

$S = X_1 + \dots + X_6$ , wobei

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Ball } i \text{ gezogen wurde} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}S \stackrel{9.2}{=} \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_6$$

**Bemerkung:**

$$\mathbb{E}1_A = \frac{0}{1 - \mathbb{P}[A]} \Big| \frac{1}{\mathbb{P}[A]} = \mathbb{P}[A]$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_i &= \mathbb{P}[\text{Ball } i \text{ wurde gezogen}] \\ &= \frac{\binom{48}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{\left(\frac{48 * 47 * 46 * 45 * 44}{5!}\right)}{\left(\frac{48 * 47 * 46 * 45 * 44}{6!}\right)} = \frac{6!/5!}{49} = \frac{6}{49} \quad \forall i \in \{1, \dots, 6\} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_6 = 6 * \frac{6}{49} = \frac{36}{49}$$

**Definition:**

Seien  $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ZV

Sie heißen unabhängig, falls:

$$\begin{aligned} \forall y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R} : \quad & \mathbb{P}[X_1 = y_1, X_2 = y_2, \dots, X_n = y_n] \\ &= \mathbb{P}[X_1 = y_1] * \dots * \mathbb{P}[X_n = y_n] \end{aligned}$$

**Bemerkung:** Sind  $X_1, \dots, X_n$  unabhängig, dann gilt sogar:

$$\begin{aligned} \forall A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R} : \quad & \mathbb{P}[X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n] \\ &= \mathbb{P}[X_1 \in A_1] * \dots * \mathbb{P}[X_n \in A_n] \end{aligned}$$

**Satz 9.3:**

Seien  $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  **unabhängige** Zufallsvariablen

Dann gilt:  $\mathbb{E}[X * Y] = \mathbb{E}X * \mathbb{E}Y$

**2 Eigenschaften:**

1.  $\mathbb{E}[x + y] = \mathbb{E}x + \mathbb{E}y \quad \forall x, y$
2.  $\mathbb{E}[x * y] = \mathbb{E}x * \mathbb{E}y \quad \forall \text{unabh. } x, y$

**Beweis:**

Notation:

$$\text{Werte von X: } \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & \dots \\ \hline p_1 & p_2 & \dots \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbb{P}[X = x_i] = p_i$$

$$\text{Werte von Y: } \begin{array}{|c|c|c|} \hline y_1 & y_2 & \dots \\ \hline q_1 & q_2 & \dots \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbb{P}[Y = y_j] = p_j$$

## 6 Zufallsvariablen

Betrachte Ereignisse:  $A_{ij} = \{X = x_i, Y = y_j\}$   
 $= \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j\}$

$A_{11}$	$A_{21}$	$A_{31}$	$A_{41}$	$\{Y=y_1\}$ $\{Y=y_2\}$ $\{Y=y_3\}$
$A_{12}$	$A_{22}$	$A_{32}$	$\dots$	
$\dots$	$\dots$	$\dots$	$\dots$	

$\Omega = \dot{\bigcup}_{i,j} A_{ij}$ , d.h.  $A_{ij}$  bilden disjunkte Zerlegung von  $\Omega$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[X * Y] &\stackrel{9.1}{=} \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) * X(\omega) * Y(\omega) = \\ &= \sum_{i,j} \sum_{\omega \in A_{ij}} (p(\omega) * X(\omega) * Y(\omega) * x_i * y_j) = \\ &= \sum_{i,j} (x_i * y_j * \sum_{\omega \in A_{ij}} p(\omega)) = \sum_{i,j} x_i * y_j * \mathbb{P}[A_{ij}] \\ \mathbb{P}[A_{ij}] &= \mathbb{P}[X = x_i, Y = y_j] \stackrel{x, Y \text{ unabh. ZV}}{=} \mathbb{P}[X = x_i] * \mathbb{P}[Y = y_j] = p_i * q_j \\ &= \sum_{i,j} x_i * y_j * p_i * q_j = \sum_{i,j} (x_i * p_i) * (y_j * q_j) \\ &= (\sum_i x_i * p_i) * (\sum_j y_j * q_j) = \mathbb{E}X * \mathbb{E}Y \quad \square \end{aligned}$$

**Beispiel:** (zur Unabhängigkeit von Zufallsvariablen)

Betrachte  $n$  faire Würfel

$X_i$  ist die Augenzahl, die der  $i$ -te Würfel zeigt

$\Omega = \{(a_1, \dots, a_n)\}$  def  $X_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$

**Behauptung 1:** Zufallsvariablen  $X_1, \dots, X_n$  sind unabhängig

**Beweis 1:**

Z.z.  $\mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \mathbb{P}[X_1 = x_1] * \dots * \mathbb{P}[X_n = x_n]$

$$\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = \begin{cases} (x_1, \dots, x_n), & \text{falls } \forall i : x_i \in \{1, \dots, 6\} \\ \emptyset, & \text{falls } \exists i : x_i \notin \{1, \dots, 6\} \end{cases}$$

$$LS = \begin{cases} \frac{1}{6^n}, & \text{falls } \forall i : x_i \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

RS:  $\mathbb{P}[X_1 = x_1] = ?$

$$\{X_1 = x_1\} = \begin{cases} \{(x_1, a_2, \dots, a_n) : a_2, \dots, a_n \in \{1, \dots, 6\}\}, & \text{falls } x_1 \in \{1, \dots, 6\} \\ \emptyset, & \text{falls } \exists i : x_i \notin \{1, \dots, 6\} \end{cases}$$

## 6 Zufallsvariablen

$$\#\{X_1 = x_i\} = \begin{cases} 6^{n-1}, & \text{falls } x_1 \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[X_1 = x_1] = \begin{cases} \frac{6^{n-1}}{6^n}, & \text{falls } x_1 \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{RS} = \begin{cases} \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \dots * \frac{1}{6} = \frac{1}{6^n}, & \text{falls } \forall A_i : x_i \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \exists i : x_i \notin \{1, \dots, 6\} \end{cases}$$

LS = RS  $\Rightarrow X_1, \dots, X_n$  unabh. ZV.

**Behauptung 2:** Sei  $S = X_1 + \dots + X_n$  die Augensumme.  
Dann sind  $X_1$  und  $S$  abhängige Zufallsvariablen

**Beweis:** Z.z.  $\exists a, b$  mit  $\mathbb{P}[X_1 = a, S = b] \neq \mathbb{P}[X_1 = a] * \mathbb{P}[S = b]$   
Wir zeigen das für  $a=1, b=6*n$

$$\text{LS: } \mathbb{P}[\underbrace{X_1 = 1, S = 6n}_{\text{Treten nicht gleichzeitig ein}}] = 0$$

$$\text{RS: } \mathbb{P}[X_1 = 1] = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}[S = 6n] = \frac{1}{6^n}$$

$$\text{RS} = \frac{1}{6} * \frac{1}{6^n} \neq 0$$

LS  $\neq$  RS  $\Rightarrow X_1, S$  abh.

□

# 7 Harmonische Reihe

## 7.1 Harmonische Reihe

**Definition:** Harmonische Zahlen  $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$   
 Harmonische Reihe:  $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n$

### 7.1.1 Satz 10.1

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = +\infty \quad H_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

d.h.  $\forall A$  (egal wie groß)  $\exists n = n(A) : H_n \geq A$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{2 \text{ Terme}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ Terme}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ Terme}} + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{2 \text{ Terme}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ Terme}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ Terme}} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty \end{aligned}$$

$$H_2 \geq 1 + \frac{1}{2}, H_4 \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, H_8 \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$H_{2^l} \geq 1 + \frac{l}{2}$$

$$A = 7 * 10^6 \quad 1 + \frac{l}{2} \geq A \quad l \geq 2A - 2$$

$$H_{2^{1+10^6-2}} \geq 7 * 10^6$$

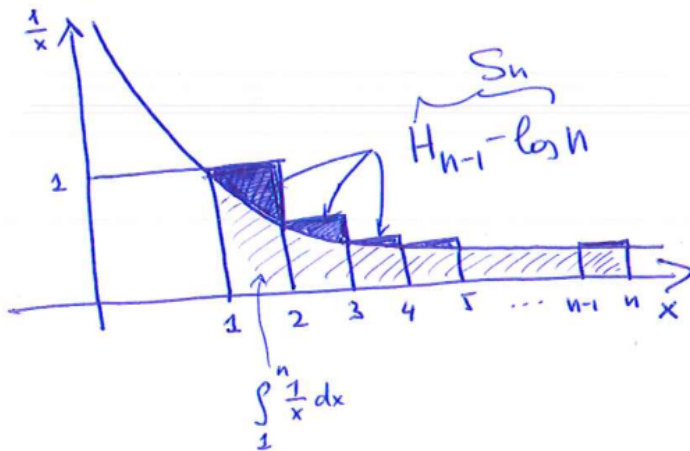
### 7.1.2 Satz 10.2, Euler, 1734

$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}}_{H_n \rightarrow \infty} - \underbrace{\log n}_{\rightarrow \infty}$  konvergiert für  $n \rightarrow \infty$  gegen eine Konstante.

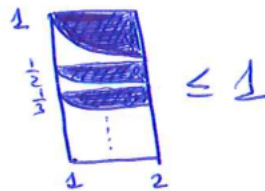
**Bemerkung:** Die Konstante  $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \log n) = 0,57721 \dots$  heißt Euler-Mascheroni-Konstante

**Beweis:**  $\int_1^n \frac{1}{x} dx = (\log x) \Big|_1^n = \log n - \underbrace{\log 1}_0 = \log n$

## 7 Harmonische Reihe



$H_{n-1} - \log n = \text{Fläche } S_n$   
 $S_1 < S_2 < S_3 < \dots$



Außerdem:  $S_n \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$   
 D.h.  $\exists \lim S_n$  existiert und ist  $\leq 1$  und  $\geq 0$

$H_n - \log n = \underbrace{H_{n-1} - \log n}_{\text{Konv. für } n \rightarrow \infty} + \underbrace{\frac{1}{n}}_0$ , also konvergiert  $H_n - \log n$  gegen einem

Limes, der zwischen 0 und 1 liegt. □

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + \underbrace{\varepsilon_n}_{\text{Fehler der Appr.}}$ , wobei  $\varepsilon_n \rightarrow 0$  für  $n \rightarrow \infty$

## 7.2 Alternierende harm.Reihe

Alternierende harm. Reihe:  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$

**Beweis:**

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n}$$

$$S_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = H_{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= H_{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = H_{2n} - H_n =$$

$$= (\log 2n + \gamma + \varepsilon_{2n}) - (\log n + \gamma + \varepsilon_n)$$

Kor.

$$= \log 2n - \log n + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n$$

$$= \log 2 + \underbrace{\varepsilon_{2n}}_0 - \underbrace{\varepsilon_n}_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \log 2$$



## 7 Harmonische Reihe

**Aufgabe:** Schnecke und Auto

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$$

[GRAFIK schneckeUndAuto Einfügen]

**Zeige:** Schnecke überholt das Auto in endlicher Zeit

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}} \dots = \frac{3}{2} \log 2$$

Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty}$  heißt absolut konvergent, wenn  $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$

**Beispiel:**  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$  ist konvergent aber nicht absolut konvergent.

**Satz:** In einer absolut konvergenten Reihe kann man die Terme umordnen, ohne dass sich die Summe ändert.

**Riemann'scher Umordnungssatz:**  $\forall a \in \mathbb{R}$  gibt es eine Umordnung der Reihe  $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ , die gegen  $a$  konvergiert.

**Beweis:** Sei  $a \geq 0$

Ungerade Terme:  $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$   $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots = \infty$

Gerade Terme:  $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$   $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \infty$

Nehme ungerade Terme bis die Summe  $\geq a$  wird:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n_1} \geq a$$

Ziehe gerade Terme abm bis die Summe  $\leq a$  wird

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{m_1} \leq a$$

Addiere ungerade Terme bis die Summe wieder  $\geq a$  wird

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{m_1} + \frac{1}{n_1+2} + \frac{1}{n_1+4} + \dots + \frac{1}{n_2} \geq a$$

usw. □

**Bemerkung** Über EWert von ZV mit abzählbar  $\infty$ -vielen Werten

Betrachte ZV X:      Werte: 

$x_1$	$x_2$	$x_3$	$\dots$
$p_1$	$p_2$	$p_3$	$\dots$

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i?$$

**Problem:** Keine "kanonische" Reihenfolge der Werte  $x_i$  Wenn  $\sum_{i=1}^{\infty}$  nicht absolut konv.  $\Rightarrow$  kann sich das Ergebnis durch Umordnung ändern

**Definition:** Sei X ZV wie oben Def.

$$S_+ = \sum_{i: x_i \geq 0} x_i p_i, \quad S_- = \sum_{i: x_i < 0} |x_i| p_i$$

## 7 Harmonische Reihe

$$\mathbf{F\ddot{a}lle:} \left\{ \begin{array}{ll} EX \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = S_+ - S_-, & \text{falls } S_+ < \infty, s_- < \infty \\ EX \stackrel{\text{def}}{=} +\infty, & \text{falls } S_+ = \infty, s_- < \infty \\ EX \stackrel{\text{def}}{=} -\infty, & \text{falls } S_+ < \infty, S_- = \infty \\ EX \text{ nicht definiert,} & \text{falls } S_+ = \infty, S_- = \infty \end{array} \right.$$

# 8 Diskrete Verteilungen

## 8.1 Uniforme Verteilungen

**Definition:**

ZV  $X$  heißt uniform, falls verteilt auf der Menge  $\{x_1, \dots, x_n\}$  ( $x_i \in \mathbb{R}$ ), falls:

$$\mathbb{P}[X = x_i] = \frac{1}{n} \forall i = 1, \dots, n$$

**Bemerkung:**  $\mathbb{E}X = x_1 * \frac{1}{n} + x_2 * \frac{1}{n} + \dots + x_n * \frac{1}{n} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$  [arithmetisches Mittel]

**Beispiel:**

Sei  $X$  uniform verteilt auf  $\{1, 2, \dots, n\}$   $\mathbb{E}X = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} =$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)/2}{n} = \frac{n+1}{2}$$

[GRAFIK Treppe Einfügen]

$$= \frac{n^2}{n} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)$$

$$n = 1 : 1$$

$$n = 2 : 1 + 3 = 4$$

$$n = 3 : 1 + 3 + 5 = 9$$

... Vermutung:  $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

Proof by picture:

[GRAFIK proofByPicture Einfügen]

## 8.2 Binomialverteilung

Ein Bernoulli-Exp: Zwei Ausgänge  $\underbrace{\text{Erfolg (oder 1)}}_p$  und  $\underbrace{\text{Misserfolg (0)}}_{1-p}$

**Definition:**

ZV  $X$  heißt Bernoulli-verteilt, falls

$$\mathbb{P}[x = 1] = p, \mathbb{P}[x = 0] = 1 - p$$

Bez:  $x \sim \text{Bern}(p)$

$$\mathbb{E}X = 1 * p + 0 * (1 - p) = p$$

## 8 Diskrete Verteilungen

Nn betrachte n unabh. Bern-Exp. Grundmenge:  $\Omega = \{(0, 1)^n : a_i \in \{0, 1\}\}$

$$\mathbb{P}[(0, 0, 1, 0, 1, 1)] = (1-p) * (1-p) * p * (1-p) * p * p = p^3(1-p)^3$$

$$\mathbb{P}[(A_1, \dots, a_n)] = p^k(1-p)^{n-k}, \text{ wobei } K = a_1 + \dots + a_n (\text{Anzahl Erfolge})$$

Für  $p = \frac{1}{2} \Rightarrow$  LaPlace-Experiment

Für  $p \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$  kein LaPlace-Experiment

### Satz 11.1

Sei X die Anzahl der Erfolge in einem n-fachen Bernoulli-Experiment.

$$\text{Dann gilt: } \mathbb{P}[x = k] = \binom{n}{k} * p^k(1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

**Beispiel:**

$$n = 4, k = 2$$

$$\mathbb{P}[(1, 1, 0, 0)] = p^2 * (1-p)^2 \quad (1, 0, 1, 0)$$

$$\mathbb{P}[(0, 1, 1, 0)] = p^2(1-p)^2 \quad (1, 0, 0, 1)$$

$$(0, 0, 1, 1)$$

Alle 6 Ausgänge haben Wkeit  $p^2(1-p)^2$

**Definition:**

ZV X wie oben heißt binomialverteilt mit Param n und p

Bez:  $x \sim \text{Bin}(n, p)$

**Bemerkung:**  $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}[x = k] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \stackrel{\text{Bin. Formel}}{=} (p + 1 - p)^n = 1^n = 1$

### Satz 11.2

Sei  $X \sim \text{Bin}(n, p)$

Dann gilt  $\mathbb{E}X = n * p$

**Beweis:**

$$\text{Sei } x_i = \begin{cases} 1 & , \text{ falls im i-ten Experiment Erfolg eintritt} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\underbrace{x}_{\substack{\text{Anzahl d. Erfolge} \\ \text{in Exp. 1, ..., i}}} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\mathbb{E}x = \mathbb{E}[x_1 + \dots + x_n] = \overbrace{\mathbb{E}x_1}^p + \dots + \overbrace{\mathbb{E}x_n}^p = n * p$$

$$\text{Dann } \mathbb{E}x_i = 1 * p + 0 * (1-p) = p$$

□

**Beispiel:** Werfe faire Münze n Mal

$$\mathbb{P}[\text{die Münze zeigt k mal Kopf}] = \binom{n}{k} * \left(\frac{1}{2}\right)^k * \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

**Beispiel:** Werfe fairen Würfel n Mal

$$\mathbb{P}[k \text{ Sechsen}] = \binom{n}{k} * \left(\frac{1}{6}\right)^k * \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

## 8 Diskrete Verteilungen

**Beispiel:** Betrachte Urne mit 10 roten und 20 schwarzen Bällen.  
Wir ziehen 15 Bälle **mit** Zurücklegen.

Bestimme Wkeit, dass bei 8 Ziehungen roter Ball gezogen wurde

$n = 15, p = \frac{1}{3}$

Gesuchte Wkeit ist:  $\binom{15}{8} * (\frac{1}{3})^8 * (\frac{2}{3})^7$

## 9 Geometrische Verteilung

Betrachte unendl. Folge von unabh. Bernoulli-Exp. mit Erfolgswkeit  $p \in (0, 1]$   
 $\Omega = \{0, 1\}^\infty = \{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in \{0, 1\}\}$

Zeitpunkt des ersten Erfolges:  $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$T(a_1, a_2, \dots) = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n = 1\}$$

Z.b.  $T(\underbrace{0}_{a_1}, \underbrace{0}_{a_2}, \underbrace{0}_{a_3}, \underbrace{0}_{a_4}, \underbrace{1}_{a_5}, \dots) = 5$

Vert von T? Werte von T: 1, 2, 3, ...,  $\infty$

### Satz 11.3

$$\forall k \in \{1, 2, \dots\} : \mathbb{P}[T = k] = p(1 - p)^{k-1}$$

**Definition:** T heißt geometrisch Verteilt mit Parameter p. Bez:  $T \sim \text{Geo}(p)$

**Beweis:** Damit  $T = k$  ist, muss die Serie wie folgt aussehen:

$$\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1 \text{ Misserfolge}}, \underbrace{1}_{\text{Erfolg}}, \dots$$

Sei  $x_i$  das Ergebnis des i-ten Experiments.

$x_i$  ist ZV mit  $\mathbb{P}[x_i = 1] = p, \mathbb{P}[x_i = 0] = 1 - p$ .  $x_1, x_2$  sind unabh. ZV

$$\mathbb{P}[T = k] = \mathbb{P}[x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{k-1} = 0, x_k = 1] \underset{x_1, \dots, x_n \text{ unabh ZV}}{=}$$

$$\mathbb{P}[x_1 = 0] * \dots * \mathbb{P}[x_{k-1} = 0] * \mathbb{P}[x_k = 1]$$

$$= \underbrace{(1 - p) * \dots * (1 - p)}_{k-1} p = p(1 - p)^{k-1} \quad \square$$

**Beispiel:** Werfen eine fairen Münze bis zum ersten Mal Kopf.

$$T = \text{Anzahl der Würfe. } \mathbb{P}[T = k] \underset{p=\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2} * \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^k}, k = 1, 2, \dots$$

$$\textbf{Bemerkung: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

[GRAFIK GlasWasser Einfügen]

### Exkurs über die geometrische Reihe

**Aufgabe:** Berechne  $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$

Sei  $A = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$

Betrachte:  $qA = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}$

Abziehen:

$$A - qA = 1 - q^{n+1}$$

$$A(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

$$A = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \text{Für } q=1 : A = n + 1 \quad \square$$

**Aufgabe:** Berechne  $1 + q + q^2 + q^3 + \dots$

**Lösung:** Sei  $S = 1 + q + q^2 + \dots$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + q^2 + \dots + q^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \begin{cases} \frac{1}{1 - q} & , \text{ falls } |q| < 1 \\ +\infty & , \text{ falls } q > 1 \\ \text{existiert nicht} & , \text{ falls } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{Denn } \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } |q| < 1 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0 \\ 1 & , \text{ falls } q = 1 \\ +\infty & , \text{ falls } q > 1 \quad 2^n \rightarrow +\infty \\ \text{existiert nicht} & , \text{ falls } q \leq -1 \quad \text{divergiert} \end{cases}$$

Für  $q = 1$ :  $S = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$

**Bemerkung:** Vorsicht mit der Reihe  $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$ . Sie divergiert.

### Geometrische Verteilung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[T = k] = \sum_{k=1}^{\infty} p \underbrace{(1 - p)^{k-1}}_q = p \underbrace{(1 + q + q^2 + \dots)}_{\text{gelöst}} = p * \frac{1}{1 - q} = \frac{p}{p} = 1$$

#### Satz 11.4

Sei  $T \sim \text{Geo}(p)$

$$\mathbb{E}T = \frac{1}{p}$$

**Bemerkung:**

$$p \downarrow 0 \Rightarrow \mathbb{E}T \rightarrow \infty$$

$$p = 1 \Rightarrow \mathbb{E}T = 1$$

**Beweis:**

$$\mathbb{E}T = \sum_{k=1}^{\infty} k * \mathbb{P}[T = k] = \sum_{k=1}^{\infty} k * p(1 - p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k * q^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 5q^4 + \dots \quad (\text{Entsteht durch Ableiten von } 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q})$$

## 9 Geometrische Verteilung

$$\begin{aligned}
 &= (1 + q + q^2 + q^3 + \dots)' = -\frac{1}{(1-q)^2} \\
 &= \left(\frac{1}{1-q}\right)' = -1 \frac{1}{(1-q)^2} * (1-q)' = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \\
 \mathbb{E}T &= p * \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} \quad \square
 \end{aligned}$$

**Beispiel:**

Werfe eine faire Münze, sie zum ersten mal Kopf zeigt. Wkeit, dass die Anzahl der Würfe gerade ist.

**Lösung:**  $T \sim \text{Geo}(\frac{1}{2})$

$$\mathbb{P}[T \in \{2, 4, 6, \dots\}] = \mathbb{P}[T = 2] + \mathbb{P}[T = 4] + \dots$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots \\
 &= \frac{1}{1 - 1/4} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

**Beispiel:** Würfeln mit einem fairen Würfel bis zu ersten 6. Erwartete Anzahl der Würfe?

$$\text{Lösung: Erfolg} = 6 \quad p = \frac{1}{6} \mathbb{E}T = \frac{1}{1/6} = 6$$

**Beispiel Sammler-Problem:**

Jede Packung enthält ein Bild. Es gibt n mögl. Bilder, alle gleichwahrscheinlich.

Erwartete Anzahl an Packungen, die man kaufen muss, um alle Bilder zu sammeln.

**Lösung:**

$$\text{Wartezeit: } S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n$$

$$\text{mit } T_1 = 1, T_2 \sim \text{Geo}\left(\frac{n-1}{n}\right), T_3 \sim \text{Geo}\left(\frac{n-2}{n}\right), \dots, T_n \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Hier ist  $T_i$  die Wartezeit auf ein noch nie gesehenes Bild nachdem i-1 Bilder gesammelt wurden.

$$T_i \sim \text{Geo}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}S_n &= \mathbb{E}[T_1 + \dots + T_n] = \mathbb{E}T_1 + \mathbb{E}T_2 + \dots + \mathbb{E}T_n \\
 &= \underbrace{\frac{1}{n}}_{\frac{n}{n}} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{1} \\
 &= n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1\right) = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \quad \square
 \end{aligned}$$

$$\text{Für } n \rightarrow \infty \quad \frac{\mathbb{E}S_n}{n \log n} \rightarrow 1$$



**Satz 11.5: Vergessenseigenschaft der Geo-Vert**

$$\mathbb{P}[T > n + k | T > n] = \mathbb{P}[T > k] \quad \forall n, k \in \mathbb{N}, T \sim \text{Geo}(p)$$

$$[\text{auch: } \mathbb{P}[T > n + k | T > n] = \mathbb{P}[T > k]$$

$$\textbf{Beweis: } \mathbb{P}[T > k] = \mathbb{P}[\text{Versuche } 1, 2, \dots, k \text{ sind Misserfolge}] = (1 - p)^k$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T > n + k | T > n] &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}[T > n + k, T > n]}{\mathbb{P}[T > n]} = \frac{\mathbb{P}[T > n + k]}{\mathbb{P}[T > n]} \\ &= \frac{(1 - p)^{1-k}}{(1 - p)^n} = (1 - p)^k \end{aligned}$$

# 10 Poisson Verteilung

## 10.1 Exkurs über die Zahl e

**Beispiel:** Preis steigt jeden Tag um 1 %

Am Anfang: 1 Euro

Preis nach 100 Tagen = ?

**Lösung:**

$$x \mapsto x + \frac{x}{100}$$

Tag 0	Tag 1	Tag 2	...	Tag 100
1	$1 + \frac{1}{100}$	$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^2$	...	$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2,7$

Betrachte  $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

n = 100: **2,704813...**

n = 10000: **2,7181459 ...**

...

**Definition:**  $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818...$

$$1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{Unbestimmtheit } 1^\infty$$

**Formel 1:**

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x \quad x = \text{konst}, n \rightarrow \infty$$

$$\textbf{Beispiel: } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^0 = 1$$

**Formel 2:**

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

**Beweis:**

1.  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$
2.  $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{x^k}{n^k}$

## 10 Poisson Verteilung

$$= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \underbrace{\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k}}_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} = \underbrace{\frac{1}{n}}_1 * \underbrace{\frac{n-1}{n}}_1 \cdots * \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

**Beispiel:**  $x = 1$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

## 10.2 Poisson Verteilung

Sehr viele Bern.-Exp:  $n \rightarrow \infty$

Sehr kleine Erfolgswahrscheinlichkeit:  $p = \frac{\lambda}{n}$   $\lambda = \text{const.}$   $\lambda > 0$

Die Anzahl der Erfolge ist ZV  $S_n \sim \text{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$   $\mathbb{E}S_n = n * \frac{\lambda}{n} = \lambda$

**Beispiel:** Wkeit, dass es keinen Erfolg gibt:  $\mathbb{P}[S_n = 0] = (1 - \frac{\lambda}{n}) * (1 - \frac{\lambda}{n}) * \dots * (1 - \frac{\lambda}{n}) = (1 - \frac{\lambda}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}$  [Formel 1]  $x = -\lambda$

$$\mathbb{P}[S_n = k] = \binom{n}{k} * p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} * \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}} * \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_1 * \lambda^k$$

Wkeit k Erfolge

$$* \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k! n^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} * 1 * \lambda^k * 1 * \frac{1}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Definition:** ZV  $X$  heißt Poissonverteilt mit Parameter  $\lambda > 0$ , falls

$$\mathbb{P}[x = k] = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

**Bemerkung:**

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[x = k] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} * e^{\lambda} = 1$$

### 10.2.1 Satz 11.6: Poisson-Grenzwertsatz

Sei  $S_n \sim \text{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$ ,  $\lambda > 0$  konstant.

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[S_n = k] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

## 10 Poisson Verteilung

**Beispiel:** 100 Personen      A = "mind. eine Person hat heute Geburtstag"  
 $P[A] = ?$

**Lösung 1 (Exakt):**  $n=100$ , Bern-Exp  
 Erfolge im Exp  $i \Leftrightarrow$  Person  $i$  hat heute Geburtstag  
 Erfolgswkkeit  $p = \frac{1}{365}$

$A^C$  "keine Person hat heute Geburtstag"  
 $P[A^C] = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = (1-p)^n$

$$P[A] = 1 - P[A^C] = 1 - (1-p)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^{100} = 0,2399$$

**Lösung 2 (Approximation):** Anzahl d. Personen die heute Geburtstag haben:  $S_n \sim \text{Bin}(\underbrace{100}_n, \underbrace{\frac{1}{365}}_p)$

$$P[A] = P[S_n \geq 1] = 1 - P[S_n = 0]$$

$$S_n \sim \text{Bin}(\underbrace{100}_n, \underbrace{\frac{1}{365}}_{\frac{\lambda}{n}}) \approx \text{Poi}(\underbrace{\frac{100}{365}}_{\lambda})$$

$$P[A] = 1 - P[S_n = 0] \approx 1 - P[\text{Poi}\left(\frac{100}{365}\right) = 0]$$

$$= 1 - e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-\frac{100}{365}} = 0,2396$$

**Beispiel:** 96 % Prozent der Fluggäste erscheinen. 75 Flugkarten für 73 Plätze verkauft.

$P[\underbrace{\text{alle Fluggäste bekommen Platz}}_A] = ?$

**Lösung 1 (Exakt)** Die Anzahl der Gäste, die erscheinen: ZV  $T_n \sim \text{Bin}(75, 0,96)$

$$\begin{aligned} P[A] &= P[T_n \leq 73] = 1 - P[T_n \geq 74] = 1 - P[T_n = 74] - P[T_n = 75] \\ &= 1 - \binom{75}{74} p^{74} (1-p)^1 - \binom{75}{75} p^{75} (1-p)^0 \\ &\stackrel{p=0,96}{=} 1 - 75 * 0,96^{74} * 0,04 - 0,96^{75} = 0,8069 \dots \end{aligned}$$

**Lösung 2 (Approx):**  $T_n \sim \text{Bin}(\underbrace{75}_n, \underbrace{0,96}_{\frac{\lambda}{n}}) \approx \text{Poi}(75 * 0,96)$

Falsch, da 0,96 nicht klein ist

Betrachte Gäste, die nicht erschienen sind: Anzahl:

$$S_n \sim \text{Bin}(\underbrace{75}_{\text{gro\ss}}, \underbrace{0,04}_{\text{klein}}) \approx \text{Poi}(\underbrace{75 * 0,04}_{\lambda})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A] &= \mathbb{P}[S_n \geq 2] = 1 - \mathbb{P}[S_n = 0] - \mathbb{P}[S_n = 1] \approx 1 - e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} - e^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{1!} \\ &= 1 - e^{-75*0,04} - e^{-75*0,04} * 75 * 0,04 = 0,8008 \end{aligned}$$

### 10.2.2 Satz 11.7

Sei  $x \sim \text{Poi}(\lambda)$  ( $\lambda > 0$ ). Dann gilt  $\mathbb{E}x = \lambda$

**Beweis:**

$$\begin{aligned} \mathbb{E}x &= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}[x = k] = \sum_{k=0}^{\infty} k * e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \stackrel{l=k-1}{=} e^{-\lambda} \lambda \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

**Faltungsformel:** Seien  $x, y$  unabh. ZV mit Werten in  $\{0, 1, 2, \dots\}$   
 Vert von  $x, y$  seien gegeben  
 Vert von  $x+y$  ?

**Lösung** Werte von  $x+y$  sind in  $\{0, 1, \dots\}$

$$\begin{aligned} \text{Für } n \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad \mathbb{P}[x + y = n] &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}[x = k, y = n - k] \stackrel{x, y \text{ unabh}}{=} \\ &\sum_{k=0}^n \mathbb{P}[x = k] * \mathbb{P}[y = n - k] \\ x = k \in \{1, 2, \dots\} \quad y = n - k \end{aligned}$$

**Beispiel:**  $x \sim \text{Bin}(m_1, p)$   $y \sim \text{Bin}(m_2, p)$ , unabh. ZV

**Behauptung:**  $x + y \sim \text{Bin}(m_1 + m_2, p)$

**Lösung 1:** Stochastische Lösung

$x$  ist die Anzahl d. Erf. in  $m_1$  Ber-Exp. mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$

$y$  ist die Anzahl d. Erf. in  $m_2$  Ber-Exp. mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$

Insgesamt gibt es  $m_1 + m_2$  Bern-Exp. mit Erfolgswahrscheinlichkeit  $p$ .

$x+y$  ist die Anzahl d. Erfolge in  $m_1 + m_2$  Experimenten  $\Rightarrow x + y \sim \text{Bin}(m_1 + m_2, p)$

**Lösung 2:**

$$\mathbb{P}[x = k] = \binom{m_1}{k} p^k (1-p)^{m_1-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m_1, \dots$$

$$\mathbb{P}[y = k] = \binom{m_2}{k} p^k (1-p)^{m_2-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m_2, \dots$$

$x+y$  nimmt Wert in  $\{0, 1, 2, \dots\}$  an

$$\mathbb{P}[x + y = n] = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}[x = k, y = n - k] = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}[x = k] * \mathbb{P}[y = n - k]$$

$$(\{x + y = n\} = \{x = 0, y = n\} \dot{\cup} \{x = 1, y = n - 1\} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \{x = n, y = 0\})$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{m_1}{k} p^k (1-p)^{m_1-k} * \binom{m_2}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{m_2-(n-k)}$$

$$= p^n (1-p)^{m_1+m_2-n} \sum_{k=0}^n \binom{m_1}{k} \binom{m_2}{n-k}$$

$$\stackrel{\text{Vandermonde-ID}}{=} \binom{m_1+m_2}{n} p^n (1-p)^{m_1+m_2-n} \Rightarrow x+y \sim \text{Bin}(m_1+m_2, p)$$

### Beweis der Vandermonde-Identität

$\binom{m_1+m_2}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{m_1}{k} \binom{m_2}{n-k}$  Zähle die Möglichkeiten aus  $m_1 + m_2$  Objekten  $n$  Objekte auszuwählen

1. Methode  $\binom{m_1+m_2}{n}$  Möglichkeiten
2. Wähle zuerst  $k$  Objekte aus  $m_1$  Objekten:  $\binom{m_1}{k}$  Möglichkeiten  
Aus den restlichen  $m_2$  Objekten müssen wir  $n-k$  auswählen:  $\binom{m_2}{n-k}$  Möglichkeiten

Insgesamt:  $\binom{m_1}{k} \binom{m_2}{n-k}$  Möglichkeiten

$k$  kann Werte  $0, \dots, n$  annehmen:

Insgesamt  $\sum_{k=0}^n \binom{m_1}{k} \binom{m_2}{n-k}$

**Beispiel:** Seien  $x \sim \text{Poi}(\lambda), y \sim \text{Poi}(\mu)$  unabh. ZV

Dann gilt:  $x+y \sim \text{Poi}(\lambda+\mu)$  (Übung)

# 11 Varianz und Kovarianz

**Definition:** Sei  $X$  eine ZV. Varianz von  $X$ :  $\text{Var } X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$

**Beispiel:** Sei  $X$  uniform verteilt auf  $\{-a, a\}$

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{2} * a + \frac{1}{2}(-a) = 0$$

$$\text{Var } X = \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] = a^2$$

**Definition:** Standardabweichung von  $X$ :  $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var } X}$

Wenn  $X$  konstant ist, so ist die Varianz  $= 0$

## 11.1 Satz 14.1

$$\text{Var } X = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$$

**Kor.**  $\mathbb{E}[X^2] \geq (\mathbb{E}X)^2$

**Beweis:**  $\text{Var } X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[\underbrace{X^2}_A - \underbrace{2X * \mathbb{E}X}_B + \underbrace{(\mathbb{E}X)^2}_C]$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2X\mathbb{E}X] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}X)^2]$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}X * \mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}X)^2 \text{ da } C \text{ konstant}$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$$

## 11.2 Satz 14.2

Sei  $X$  ZV,  $a, b, \in \mathbb{R}$

Dann gilt

$$1. \text{Var}(aX+b) = \text{Var}(aX) = a^2 \text{Var } X$$

$$2. \sigma(aX+b) = \sigma(aX) = |a|\sigma(X) \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

**Beweis 1:**

$$\text{Var}(aX+b) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[(aX + b - \mathbb{E}[aX + b])^2]$$

$$= \mathbb{E}[(aX + b - a\mathbb{E}X - )^2] = \mathbb{E}[a^2(x - \mathbb{E}X)^2]$$

$$= a^2 \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = a^2 \text{Var } X$$

**Beweis 2:**

$$\sigma(aX + b) = \sqrt{\text{Var}(aX + b)} = \sqrt{a^2 \text{Var } X} = \underbrace{\sqrt{a^2}}_{|a|} \underbrace{\sqrt{\text{Var } X}}_{\sigma(X)}$$

**Beispiel:** Sei  $x$  uniform verteilt auf  $\{1, 2, \dots, n\}$

$$\text{D.h. } \mathbb{P}[x = k] = \frac{1}{n} \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

$\text{Var } X = ?$

**Lösung:**  $\text{Var } X = \mathbb{E}[x^2] - (\mathbb{E}[x])^2$

$$\mathbb{E}x = \frac{n+1}{2}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x^2] &= \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}[x = k] = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Var } x = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \dots = \frac{n^2 - 1}{12}$$

**Exkurs über die Teleskopmethode**  $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = ? \quad \sum_{k=1}^n k^2 = ?$

Methode: Finde Funktion  $F$  mit  $k^2 = F(k) - F(k-1)$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = F(1) - F(0) + F(2) - F(1) + F(3) - F(2) + \dots + F(n) - F(n-1)$$

$$= F(n) - F(0)$$

$$k^2 = F(k) - F(k-1) \leftarrow \text{Ziel}$$

$$F(k) = \frac{k^3}{3} + ak^2 + bk + c \quad a, b, c \text{ unbekannt}$$

$$F(k) - F(k-1) = \frac{k^3}{3} + ak^2 + bk + c - \frac{(k-1)^3}{3} - a(k-1)^2 - b(k-1) - c$$

$$= (k^2 - k + \frac{1}{3} + a(2k-1) + b)$$

$$= k^2 + k * (2a - 1) + (b + \frac{1}{3} - a) \text{ soll gleich } k^2 \text{ sein.}$$

$$2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b + \frac{1}{3} - a = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{6}$$

$$F(k) = \frac{k^3}{3} = \frac{k^2}{2} + \frac{1}{6}k + c$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = F(n) - F(0) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + c - c = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

**Beispiel:** Sei  $X \sim \text{Poi}(\lambda)$

Dann gilt  $\mathbb{E}X = \text{Var } X = \lambda$

**Beweis:**  $\mathbb{E}X = \lambda$  ist bekannt:  $\mathbb{E}[X^2] = ?$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}[x = k] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = ?$$



$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\mathbb{P}[x=k] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
 &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{1*2*\dots*(k-1)k} = e^{-\lambda} * \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
 &= e^{-\lambda} * \lambda^2 * \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\
 &= e^{-\lambda} \lambda^2 * \mathbb{E}x = \lambda^2 + \lambda \\
 \text{Var } x &= \mathbb{E}[x^2] - (\mathbb{E}x)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \quad \square \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} = e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2 \\
 \mathbb{E}[x^2] &= \mathbb{E}[\lambda(x-1)]
 \end{aligned}$$

### 11.3 Satz 14.3

Für anabh. ZV  $x, y$  gilt:

$$\text{Var}[x+y] = \text{Var } x + \text{Var } y$$

**Beweis:**

$$\text{Definition: } x' := x - \mathbb{E}x \quad \mathbb{E}x' = \mathbb{E}[x - \mathbb{E}x] = \mathbb{E}x - \mathbb{E}x = 0$$

$$y' := y - \mathbb{E}y \quad \mathbb{E}y' = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[x+y] &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[(x+y - \mathbb{E}[x+y])^2] = \mathbb{E}[(x' + y')^2] \\
 &= \mathbb{E}[x'^2 + y'^2 + 2x'y'] = \mathbb{E}[x'^2] + \mathbb{E}[y'^2] + 2\mathbb{E}[x'y']
 \end{aligned}$$

$$\text{denn } \underbrace{\mathbb{E}[x'y']}_{\text{unabh.}} = \mathbb{E}[x'] * \mathbb{E}[y'] = 0 * 0 \quad \square$$

**Bemerkung:** Für  $n$  unabh. ZV  $x_1, \dots, x_n$  gilt  $\text{Var}[x_1 + \dots, x_n] = \text{Var } x_1 + \dots + \text{Var } x_n$

**Beispiel:** Sei  $x \sim \text{Bin}(n, p)$   $\text{Var } x = ?$

**Lösung:**  $x = x_1 + \dots + x_n$ , wobei  $x_i = \begin{cases} 1 & \text{, falls das } i\text{-te Exp. Erfolg ist} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

$x_1, \dots, x_n$  sind unabh

$x_i \sim \text{Bern}(p)$ , d.h.  $\mathbb{P}[x_i = 1] = p, \mathbb{P}[x_i = 0] = 1 - p$

$$\mathbb{E}x_i = p$$

$$\text{Var}x_i = \mathbb{E}[\underbrace{x_i^2}_{x_i}] - (\mathbb{E}[x_i])^2$$

$$= \mathbb{E}x_i - (\mathbb{E}x_i)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

denn  $x_i \in \{0, 1\}, x_i^2 = x_i$

**Also:** Für  $x \sim \text{Bin}(n, p)$  gilt  $\mathbb{E}x = np, \text{Var}x = np(1 - p)$

**Bemerkung:**

- $p = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{Var}x = 0$
- $p=1 \Rightarrow x = n \Rightarrow \text{Var}x = 0$
- $\text{Var} x \rightarrow \max$ , wenn  $p = \frac{1}{2}$

**Beispiel:**  $n$  Würfe mit einem fairen Würfel.  $S =$  Augensumme  
 $\text{Var} S = ?$

**Lösung:**

$S = x_1 + \dots, x_n$ , wobei  $x_i$  die Augenzahl im  $i$ -ten Wurf ist.

$x_1, \dots, x_n$  sind unabh. ZV.

$x_i$  ist uniform verteilt auf  $\{1, \dots, 6\}$

$\mathbb{E}x_i = 3,5 \quad \mathbb{E}S = n * 3,5$

$$\text{Var} x_i = \frac{6^2 - 1}{12} = \frac{35}{12} \quad \text{Var}S = \text{Var}x_1 + \dots + \text{Var}x_n = n * \frac{35}{12}$$

## 11.4 Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Seien  $x_1, x_2, \dots$  unabh. identisch verteilte ZV (alle  $x_i$  haben die gleiche Verteilung) mit  $\mathbb{E}x_i = \mu, \mathbb{E}[x_i^2] < \infty$

Sei  $S_n = x_1 + \dots + x_n$

Dann gilt  $\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right] = 0$

$$\left| \frac{S_n}{n} \right| > \varepsilon \Leftrightarrow |s_n - n\mu| > n\varepsilon \Leftrightarrow S_n \notin [n\mu - n\varepsilon, n\mu + n\varepsilon]$$

**Bemerkung:**

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} [s_n \notin [n(\mu - \varepsilon), n(\mu + \varepsilon)]] = 0$$

Gegenereignis:

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[S_n \in [n(\mu - \varepsilon), n(\mu + \varepsilon)]] = 1$$

**Beispiel:** Faire Münze  $n$ -mal werfen.  $S_n = x_1 + \dots + x_n =$  Anzahl von Kopf

$$x_i \sim \text{Bern}(\frac{1}{2}), \quad \mu = \mathbb{E}x_i = \frac{1}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \left( \frac{1}{2} - \varepsilon \right) n \leq S_n \leq \left( \frac{1}{2} + \varepsilon \right) n \right] = 1$$

$$\text{Z.B.: } \varepsilon = 0,01 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} [0,49n \leq S_n \leq 0,51n] = 1$$

[GRAFIK SCHWACHES GESETZT N=1000 Einfügen]

**Beispiel:** Werfen eines fairen Würfels.  $S_n =$  Augensumme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} [3,49n \leq S_n \leq 3,51n]$$

### 11.4.1 GGZ - Kurzfassung

$x_1, x_2, \dots$  unabh. id. vert.

$$\mathbb{E}x_i = \mu$$

$$S_n = x_1, \dots, x_n$$

Dann gilt  $\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[ \left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right] = 0$

$\frac{S_n}{n}$  konvergiert gegen  $\mu$  stochastisch

Vorbereitung zum Beweis des GGZ

## 11.5 Satz 11.4: Markov-Ungleichung

Sei  $x \geq 0$  ZV. Dann gilt für  $\forall a > 0$ :

$$\mathbb{P}[x \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}x}{a}$$

**Beweis:**

Es gilt:  $x \geq a * \mathbb{1}_{\{x \geq a\}}$  (\*)

[GRAFIK GGZ KURVEN Einfügen]

**Beweis von (\*):**

Fall 1:  $x \geq a \Rightarrow$  Linke Seite  $\geq a$ , RS =  $a\checkmark$

Fall 2:  $x < a \Rightarrow$  LS  $\geq 0$ , RS =  $0\checkmark$

Wende auf (\*) den  $\mathbb{E}$  an:

$$\mathbb{E}x \geq \mathbb{E} [a \mathbb{1}_{\{x \geq a\}}] = a \mathbb{E} \mathbb{1}_{\{x \geq a\}} = a \mathbb{P}[x \geq a]$$

Teile durch  $a$

□

## 11.6 Satz 14.5 Chebyshev-Ungl

Sei  $X$  ZV. Dann gilt  $\forall a > 0$ :

$$\mathbb{P} [|x - \mathbb{E}x| \geq a] \leq \frac{\text{Var}x}{a^2}$$

**Beweis:**

$$\mathbb{P} [|x - \mathbb{E}x| \geq a] = \mathbb{P} [|x - \mathbb{E}x|^2 \geq a^2]$$

$$\mathbb{P} \left[ \underbrace{(x - \mathbb{E}x)^2}_{y \geq 0} \geq a^2 \right] \leq_{\text{Markov-ungl für } y} \frac{\mathbb{E}y}{a^2} = \frac{\text{Var}x}{a^2}$$

### 11.6.1 Beweis des GGZ

$$\begin{aligned}
 S_n &= x_1, \dots, x_n \\
 \mathbb{E} \left[ \frac{x_1, \dots, x_n}{n} \right] &= \frac{\mathbb{E}x_1 + \dots + \mathbb{E}x_n}{n} = \mu \\
 \text{Var} \left[ \frac{x_1, \dots, x_n}{n} \right] &= \frac{\text{Var} [x_1, \dots, x_n]}{n^2} \stackrel{\text{unabh}}{=} \frac{\text{Var} x_1 + \dots + \text{Var} x_n}{n^2} = \\
 &\frac{1}{n} \text{Var} x_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\
 \mathbb{P} \left[ \left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right] &= \mathbb{P} [|Z_n - \mathbb{E}Z_n| \geq \varepsilon] \stackrel{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{\text{Var} Z_n}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n} \text{Var} x_1}{\varepsilon^2} \\
 &= \underbrace{\frac{\text{Var} x_1}{\varepsilon^2}}_{\text{const}} * \underbrace{\frac{1}{n}}_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

□

## 11.7 Kovarianz

**Definition:**

Seien  $x, y$  ZV.

Kovarianz von  $x$  und  $y$  ist  $\text{Cov}(x, y) = \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}x)(y - \mathbb{E}y)]$

**Beispiel:**  $\text{Cov}(x, x) = \text{Var} x \geq 0$

### 11.7.1 Satz 14.6

$$\text{Cov}(x, y) = \mathbb{E}[xy] - (\mathbb{E}x) * (\mathbb{E}y)$$

$$\text{Beweis: } \text{Cov}(x, y) = \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}x)(y - \mathbb{E}y)]$$

$$= \mathbb{E}[xy - (\mathbb{E}x)y - x\mathbb{E}y + \mathbb{E}x * \mathbb{E}y]$$

$$= \mathbb{E}[xy] - \underbrace{\mathbb{E}[(\mathbb{E}x) * y]}_{\text{const}} - \underbrace{\mathbb{E}[x * \mathbb{E}y]}_{\text{const}} + \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}x * \mathbb{E}y]}_{\text{const}}$$

$$= \mathbb{E}[xy] - \mathbb{E}x * \mathbb{E}y - \mathbb{E}y * \mathbb{E}x + \mathbb{E}x * \mathbb{E}y$$

$$= \mathbb{E}[xy] - \mathbb{E}[x]\mathbb{E}[y]$$

□

### 11.7.2 Satz 14.7

$$x, y \text{ sind unabh} \Rightarrow \text{Cov}(x, y) = 0$$

**Beweis:**  $x, y$  unabh  $\Rightarrow$

$$\text{Cov}(x, y) = \mathbb{E}[xy] - (\mathbb{E}x)(\mathbb{E}y) = \mathbb{E}x * \mathbb{E}y - \mathbb{E}x * \mathbb{E}y = 0$$

□

**Bemerkung:**  $\Leftarrow$  gilt nicht:

**Beispiel:** von ZV, die unkorreliert abhängig sind. Seien  $x, y$  ZV mit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[x = 1, y = 0] &= \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}[x = -1, y = 0] &= \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}[x = 0, y = 1] &= \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}[x = 0, y = -1] &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

1. Beh. x,y sind abh.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[x = 1] &= \frac{1}{4} = \mathbb{P}[x = -1] \\ \mathbb{P}[x = 0] &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}[y = 1] &= \frac{1}{4} = \mathbb{P}[y = -1] \\ \mathbb{P}[y = 0] &= \frac{1}{2} \mathbb{P}[x = 1, y = 0] = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}[x = 1] * \mathbb{P}[y = 0] &= \frac{1}{4} * \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} \\ \Rightarrow x,y \text{ abh}\end{aligned}$$

2. **Behauptung:**  $\text{Cov}(x,y) = 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}x &= 1 * \frac{1}{4} + (-1) * \frac{1}{4} + 0 * \frac{1}{2} = 0 \\ \mathbb{E}y &= 0 \\ \mathbb{E}[xy] &= 0, \text{ denn } x,y \text{ ist immer } 0 \\ \text{Cor}(x,y) &= \mathbb{E}[xy] - \mathbb{E}x * \mathbb{E}y = 0\end{aligned}$$

**Bemerkung:**

$$\exists[xy] = \sum_{a,b} ab \mathbb{P}[x = a, y = b]$$

## 11.8 Satz 14.8

$$\text{Var}[x + y] = \text{Var } x + \text{Var } y + 2 \text{Cov}(x,y)$$

Spezialfall: Sind x,y unkorreliert (z.B. unabhängig)  
 $\text{Cov}(x,y)=0$

$$\Rightarrow \text{Var}[x + y] = \text{Var } X + \text{Var } y$$

**Beweis:**

Definition:  $x' = X - \mathbb{E}X$ ,  $y' = y - \mathbb{E}y$

$$\begin{aligned}\text{Var}[x + y] &= \mathbb{E}[(x' + y')^2] = \mathbb{E}[x'^2 + 2x'y' + y'^2] \\ &= \mathbb{E}[x'^2] + 2\mathbb{E}[x'y'] + \mathbb{E}[y'^2] = \text{Var } x + 2\text{Cov}(x, y) + \text{Var } y \quad \square\end{aligned}$$

**Beispiel:** x = Größe einer Wohnung in m<sup>2</sup>, y = Preis in Euro

$\text{Cov}(x,y)$  hat Einheiten m<sup>2</sup> - Eur

$$\text{Cov}(ax+b, cy+d) = \text{Cov}(ax, cy) = \mathbb{E}[acxy] - \mathbb{E}[ax] \mathbb{E}[cy] = ac \text{Cov}(x,y)$$

## 11.9 Dimensionsloses Maß für Zusammenhang zwischen zwei ZV x, y

**Definition:** Korrelationskoeff. von x und y ist:

$$\mathcal{P}(x, y) = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{\text{Var } x} \sqrt{\text{Var } y}} \quad (x, y \neq 0)$$

**Bemerkung:** Wann ist  $\text{Var } x = 0$ ?

$$\mathbb{E} \left[ \underbrace{(x - \mathbb{E}x)^2}_{\geq 0} \right] = 0, \quad (x - \mathbb{E}x)^2 = 0 \text{ mit Wkeit } 1, \quad x = \mathbb{E}x \text{ mit Wkeit } 1$$

**Bemerkung:**  $\mathcal{P}(x, y)$  ist dimensionslos  $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(ax + b, cy + d) &= \frac{\text{Cov}(ax + b, cy + d)}{\sqrt{\text{Var}(ax + b)} \sqrt{\text{Var}(cy + d)}} \\ &= \frac{ac \text{Cov}(x, y)}{\sqrt{a^2 \text{Var } x} \sqrt{c^2 \text{Var } y}} = \mathcal{P}(x, y) \end{aligned}$$

### 11.9.1 Exkurs über die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Vektoren  $x = (x_1, \dots, x_n)$   
 $y = (y_1, \dots, y_n)$

Skalarprodukt  $= \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$

Längen von x und y:

$$\begin{aligned} |x| \sqrt{\langle x, x \rangle} &= \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2} \\ |y| \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2} \end{aligned}$$

$$\langle x, y \rangle = |x| |y| \cos \mathcal{P}$$

$$|\langle x, y \rangle| = |x| |y| \underbrace{\cos \mathcal{P}}_{\leq 1}$$

$$\text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung } \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

### 11.9.2 Satz 14.9 Auch Cauchy-Schwarz

Für zwei ZV x und y gilt  $|\mathbb{E}[xy]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[x^2]} \sqrt{\mathbb{E}[y^2]}$

**Beweis:**

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \mathbb{E} \left[ \underbrace{(ux + y)^2}_{\geq 0} \right] \geq 0$$

$$\mathbb{E}[u^2 x^2 + 2uxy + y^2] \geq 0$$

$$\underbrace{u^2 \mathbb{E}[x^2] + 2u \mathbb{E}[xy] + \mathbb{E}[y^2]}_{\text{quadratische Funktion von u}} \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

[GRAFIK PARABEL CAUCHY-S Einfügen]

$$\text{D.h. } \mathcal{D} \leq 0 \Rightarrow (2\mathbb{E}[xy])^2 - 4\mathbb{E}[x^2] \mathbb{E}[y^2] \leq 0$$

$$(\mathbb{E}[xy])^2 \leq \mathbb{E}[x^2] * \mathbb{E}[y^2] \quad \square$$

**Korollar:**

$$|\mathcal{P}(x, y)| \leq 1 \quad \text{Bew.: } |\mathcal{P}(x, y)| = \frac{|\text{Cov}(x, y)|}{\sqrt{\text{Var } x} \sqrt{\text{Var } y}} = \frac{|\mathbb{E}[x'y']|}{\sqrt{\mathbb{E}[x'^2]} \sqrt{\mathbb{E}[y'^2]}} \underbrace{\leq}_{\text{C-S-Ungl.}} 1$$

**Analogie:**

Vektoren	ZV
$x = (x_1, \dots, x_n)$	x
$y = (y_1, \dots, y_n)$	y
$\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$	$\text{Cov}(x, y) = \mathbb{E}[x'y']$
$ x ^2 = \langle x, x \rangle$	$\text{Cov}(x, x) = \text{Var } x$
0 Nullvektor	Konstante ZV (Var = 0)
$x \perp y$ , d.h. $\langle x, y \rangle = 0$	$\text{Cov}(x, y) = 0$ , d.h. x und y sind unkorreliert
$ x + y ^2 =  x ^2 +  y ^2$ , falls $x \perp y$	$\text{Var}(x+y) = \text{Var } x + \text{Var } y$ , falls x,y unkorreliert.

**Wann werden die Werte  $\pm$  angenommen**

$$|\mathcal{P}(x, y)| \leq 1$$

**Beispiel:**

- $\mathcal{P}(x, x) = \frac{\text{Cov}(x, x)}{\sqrt{\text{Var } x} \sqrt{\text{Var } x}} = 1$ , Allgemeiner  $\mathcal{P}(x, ax + b) = 1 (a > 0)$
- $\mathcal{P}(x, -x) = -1$  Allgemeiner:  $\mathcal{P}(x, , ax + b) = -1 (a < 0)$

### 11.9.3 Satz 14.10

1. Aus  $\mathcal{P}(x, y) = 1 \Rightarrow \exists a > 0, b \in \mathbb{R}$  mit  $y = ax + b$
2. Aus  $\mathcal{P}(x, y) = -1 \Rightarrow \exists a < 0, b \in \mathbb{R}$ , mit  $y = ax + b$

**Beweis 1:**

$$\text{Sei } \mathcal{P}(x, y) = 1 \text{ Betrachte } Z = y - x * \frac{\sqrt{\text{Var } y}}{\sqrt{\text{Var } x}}$$

$$\begin{aligned} \text{Var } Z &= \text{Var} \left[ y - x \frac{\sqrt{\text{Var } y}}{\sqrt{\text{Var } x}} \right] = \text{Var } y + \text{Var} \left[ x \frac{\sqrt{\text{Var } y}}{\sqrt{\text{Var } x}} \right] - 2\text{Cov}(y, x) * \frac{\sqrt{\text{Var } y}}{\sqrt{\text{Var } x}} \\ &= \text{Var } y + \frac{\text{Var } x}{\text{Var } y} * \text{Var } x - 2\mathcal{P}(x, y) \sqrt{\text{Var } x} \sqrt{\text{Var } y} * \frac{\sqrt{\text{Var } y}}{\sqrt{\text{Var } x}} \\ &= 2\text{Var } y - 2 * 1 * \text{Var } y = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Var } Z = 0, \text{ also ist } Z = \text{const} \Rightarrow y - x \underbrace{\frac{\sqrt{\text{Var } y}}{\sqrt{\text{Var } x}}}_{a>0} = \underbrace{\text{const}}_b \quad \square$$

**Bemerkung:**

Weitere Eigenschaften von Cov.

- $\text{Cov}(x, y) = \text{Cov}(y, x)$
- $\text{Cov}(x_1 + x_2, y) = \text{Cov}(x_1, y) + \text{Cov}(x_2, y)$
- $\text{Cov}(ax, y) = a \text{Cov}(x, y)$

## 11.10 Schätzer für $\mathbb{E}$ , $\text{Var}$ , $\text{Cov}$

Beobachten  $x_1, \dots, x_n$  (unabhängige ZV mit derselben Verteilung wie eine ZV  $x$ )

1. Schätze für  $\mu = \mathbb{E}x$  Schätzer für  $\mu$  :  $\hat{\mu} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$   
 $\hat{\mu}$  ist erwartungstreu, nämlich

$$\mathbb{E}\hat{\mu} = \mu, \text{ denn } \mathbb{E}\hat{\mu} = \mathbb{E}\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n}(\mu + \mu + \dots + \mu) = \mu$$

2. Schätzer  $\sigma^2 = \text{Var } x$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 \text{ (Bessel-Korr: } n-1 \text{ statt } n)$$

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2$$

3. Seien  $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$   $n$  Paare von unabh. Beobachtungen

Schätzer für  $\mathcal{P} = \text{Cov}(x, y)$  :

$$\hat{\mathcal{P}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left( x_i - \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right) \left( y_i - \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \right)$$



# 12 Geometrische Wahrscheinlichkeiten

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume:  $\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$  oder  $\Omega = \{w_1, w_2, \dots\}$

$$\mathbb{P}[\omega_i] = p_i$$

1.  $p_i \geq 0 \forall i$
2.  $\sum_{i=1}^{n, \infty} p_i = 1$

**Nicht diskretes ZExp:**

[GRAFIK Glücksrad Einfügen]

**Glücksrad:** Winkel  $\varphi \in [0, 2\pi)$

Ausgang:  $\frac{\varphi}{2\pi} \in [0, 1), \quad \Omega = [0, 1)$

Für  $\forall \omega \in [0, 1) \quad \mathbb{P}[\omega] = 0, \mathbb{P}[\Omega] = 1$

**Definition:**

[GRAFIK Fläche Einfügen]

Sei  $Q$  ein Gebiet. Zufälliger Punkt  $Z$  heißt uniform verteilt in  $Q$ , wenn  $\forall A \subset Q :$

$$\mathbb{P}[Z \in A] = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}$$

$\lambda$  = Volumen in dim 3, Fläche in dim 2, Länge in dim 1

[GRAFIK NichtUniform Einfügen]

## Beispiel

Zwei Freunde wollen sich zwischen 10 und 11 Uhr treffen. Jeder kommt rein zufällig  
uniform

zwischen 10 und 11 Uhr an.

Jeder wartet 20 Minuten und geht anschließend.

$A = \text{"Freunde treffen sich"}$   $\mathbb{P}[A] = ?$

[GRAFIK Timeline Einfügen]

Sie treffen sich, falls  $|x - y| < \frac{1}{3}$  (20 Minuten =  $\frac{1}{3}$  Stunde)

**Lösung:**

Ankunftszeit des 1. Freundes:  $10+x \quad 0 \leq x \leq 1$

Ankunftszeit des 2. Freundes:  $10+y$   $0 \leq y \leq 1$

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} = [0, 1]^2$$

$$\mathbb{P}[B] = \frac{\lambda(B)}{\lambda(\Omega)} = \lambda(B), \forall B \subset [0, 1]^2$$

$$A = \{(x, y) : |x - y| < \frac{1}{3}\}$$

[GRAFIK Graph x-y Einfügen]

$$\mathbb{P}[A] = \lambda(A) = 1 - \lambda(A^C) = 1 - \underbrace{2}_{2 \text{ Dreiecke}} * \frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

### Beispiel: Buffon'sches Nadelproblem

Liniiertes Papier mit unendlich vielen parallelen Geraden mit Abstand 1.

Man lässt eine Nadel der Länge  $l < 1$  auf das Papier fallen.

A="Nadel kreuzt eine Gerade"

$$\mathbb{P}[A] = \frac{2l}{\pi}$$

#### Bemerkung:

Methode zur Berechnung von  $\pi$ : Man lässt N (sehr viele) Nadeln fallen

Sei k die Anzahl der Nadeln, welche eine Linie kreuzen.

$$\text{GGZ: } \frac{k}{N} \approx \frac{2l}{\pi}, \quad \pi \approx \frac{2Nl}{k}$$

#### Beweis:

[GRAFIK nadeln phi Einfügen]  $y$  uniform verteilt auf  $[0, 1]$   
 $\varphi$  uniform verteilt auf  $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$

$$\Omega = [0, 1] \times [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] = \{(y, \varphi) : 0 \leq y \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2}\}$$

$$\mathbb{P}[B] = \frac{\lambda(B)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\lambda(B)}{\pi}, \forall B \subset \Omega$$

[GRAFIK  $\pi / 2$  graph Einfügen]

$$\text{Nadel kreuzt die untere Gerade} \Leftrightarrow [\text{GRAFIK Schnitt Einfügen}] \Leftrightarrow \frac{l}{2} > s = \frac{y}{\cos \varphi} \Leftrightarrow \frac{l}{2} \cos \varphi > y$$

$$\text{Nadel kreuzt die obere Gerade} \Leftrightarrow \frac{l}{2} > \frac{1-y}{\cos \varphi} \Leftrightarrow \frac{l}{2} \cos \varphi > 1 - y$$

$$\lambda(A) = 2 * \lambda(A_1) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \cos \varphi d\varphi = l \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = l \sin \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\lambda(A)}{\pi} = \frac{2l}{\pi}$$

□

#### Lösung 2:

Für eine Nadel der Länge  $l > 0$  ( $l > 1$  ist möglich) sei  $f(l)$  die erwartete Anzahl der Kreuzungen

## 12 Geometrische Wahrscheinlichkeiten

Falls  $l < 1$ : Die Anzahl der Kreuzungen ist 0 oder 1 (Bernoulli-ZV)  
 Wahrscheinlichkeit, dass eine Gerade gekreuzt wird, ist  $f(l)$  Ei-  
 genschaft von  $f(l)$ :

$$[\text{GRAFIK } f(x+y) \text{ Einfügen}] \quad f(x+y) = f(x) f(y) \quad \forall x, y > 0 \quad (1)$$

$$\text{Außerdem ist } f \text{ monoton steigend.} \quad (2)$$

**Behauptung:** Aus (1) und (2) folgt, dass  $f(x) = ax \quad a \in \mathbb{R}$

Beweis:

$$\begin{aligned} x = y = 1 & \quad f(2) = f(1) + f(1) \\ & \quad f(2) = 2f(1) \\ x = 2, y = 1 & \quad f(3) = f(2) + f(1) = 3f(1) \end{aligned}$$

Analog:  $f(4) = 4f(1), \dots, f(n) = nf(1) \quad f(1) \stackrel{\text{def}}{=} a \quad f(n) = n * a$

Betrachte rationale Zahl  $\frac{n}{m}, n, m \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{f\left(\frac{n}{m}\right) + f\left(\frac{n}{m}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{m}\right)}_m = f(n)$$

$$\begin{aligned} mf\left(\frac{n}{m}\right) &= f(n) \\ f\left(\frac{n}{m}\right) &= \frac{f(n)}{m} = \frac{nf(1)}{m} = \frac{n}{m} \underbrace{f(1)}_a \end{aligned}$$

D.h.  $\forall$  rationale Zahlen  $q > 0$ :  $f(q) = qf(1)$

Sei  $x > 0$  eine irrationale Zahl.  $\exists$  rationale Zahlen  $q_1 < q_2 < \dots \quad p_1 > p_2 > \dots$   
 mit  $q_n \uparrow x$  und  $p_n \downarrow x$

$f(p_n) = p_n f(1), f(q_n) = q_n f(1)$  (oben gezeigt).

Falls  $f \uparrow$ :  $q_n < x < p_n$

$$f \uparrow: f(q_n) \leq f(x) \leq f(p_n)$$

$$q_n f(1) \leq f(x) \leq p_n f(1) \quad \forall n$$

$$n \rightarrow \infty: x f(1) \leq f(x) \leq x f(1)$$

$$f(x) = x f(1) \quad \forall x > 0$$

□

**Fortsetzung Buffon-Problem:**  $f(l) = al$

Betrachte polygonale Nadeln: [GRAFIK polygonale Einfügen]

Erwartete Anzahl der Kreuzungen ist:

$$f(l_1) + f(l_2) + \dots + f(l_n) = al_1 + \dots + al_n = na(l_1 + \dots + l_n)$$

Krumme Nadel der Länge  $l$ : [GRAFIK KrummeNadel Einfügen]

Erwartete Anzahl der Kreuzungen:  $a_l$

$a$  ist immer noch unbekannt

## 12 Geometrische Wahrscheinlichkeiten

Betrachte Kreis mit Radius  $\frac{1}{2}$ .

Es gibt immer 2 Kreuzungen  $\rightarrow al = 2$

$$l = 2\pi * \frac{1}{2} = \pi$$

$$a = \frac{2}{\pi}$$

Für eine Nadel der Länge  $l$ :  $\frac{2}{\pi}l$  Kreuzungen (im Erwartungswert)

□

### Beispiel: Bertrand'sches Paradoxon

Kreis mit Radius 1. Wähle zufällige Sehne.  $L$  sei die Länge der Sehne

$$\mathbb{P}[L > \frac{\sqrt{3}}{2}]$$

[GRAFIK Dreiecke Einfügen]

# 13 Stetige ZV: Verteilungsfunktion und Dichte

**Definition:** Sei  $X$  eine ZV. Die Verteilungsfunktion von  $x$  ist

$$F(t) = F_x(t) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{P}[x \leq t], \quad t \in \mathbb{R}$$

**Beispiel:** Sei  $x$  uniform verteilt auf  $\{1, \dots, 6\}$   $F_x(t) = ?$

[GRAFIK Verteilungsfunktion Einfügen]

$$F_x(1) = \mathbb{P}[x \leq 1] = \mathbb{P}[x = 1] = \frac{1}{6}$$

$$F_x(1,6) = \mathbb{P}[x \leq 1,6] = \mathbb{P}[x = 1] = \frac{1}{6}$$

$$F_x(2) = \mathbb{P}[x \leq 2] = \mathbb{P}[x = 2] = \frac{2}{6}$$

...

$$\text{Verteilungsfunktion: } F_x(t) = \begin{cases} 0, & \text{falls } t \leq 1 \\ \frac{1}{6}, & \text{falls } t \in [1, 2) \\ \frac{2}{6}, & \text{falls } t \in [2, 3) \\ \vdots \\ \frac{5}{6}, & \text{falls } t \in [5, 6) \\ 1, & \text{falls } t \geq 6 \end{cases}$$

Sei allgemeiner  $x$  eine diskrete ZV mit Werten  $x_1 < x_2 < \dots$  und Wkeiten  $p_i = \mathbb{P}[x = x_i]$

[GRAFIK diskrete Verteilung Einfügen]

**Definition:** [vereinfacht] ZV  $x$  heißt stetig, wenn Verteilungsfunktion stetig ist, d.h.  $\forall t \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[x = t] = 0$

**Beispiel:** Sei  $x$  uniform verteilt auf  $[0, 1]$ , D.h.  $\forall B \subset [0, 1] \quad \mathbb{P}[x \in B] = \frac{\lambda(B)}{1}$   
Verteilungsfunktion auf  $x$ ?

**Lösung:**  $\mathbb{P}[x \leq t] = ?$

**Fall 1:**  $t < 0 \Rightarrow \mathbb{P}[x \leq t] = 0$

**Fall 2:**  $t > 1 \Rightarrow \mathbb{P}[x \leq t] = 1$

**Fall 3:** Sei  $t \in [0, 1] : \quad \mathbb{P}[x \leq t] = \mathbb{P}[x \in [0, t]] = t$

Also:

$$F_x(t) = \begin{cases} 0, & \text{wenn } t \leq 0 \\ t, & \text{wenn } t \in [0, 1] \\ 1, & \text{wenn } t \geq 1 \end{cases}$$

**Beispiel:**

Sei  $Z$  uniform verteilt auf dem Kreis  $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

Sei  $R$  der Abstand von  $Z$  zum Mittelpunkt. [GRAFIK Kreis mit Punkt in der Mitte Einfügen]

Verteilungsfunktion von  $R$

**Lösung:**  $R$  nimmt Werte zwischen 0 und 1 an.

Grundmenge  $\Omega = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 1\}$

$$\mathbb{P} : \quad \mathbb{P}[B] = \frac{\lambda(B)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\lambda(B)}{\pi}$$

$$ZV: \underbrace{X(x, y)}_{\in \Omega} = x \quad \underbrace{y(x, y)}_{\in \Omega} = y \quad R(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$$

$$F_R(t) = \mathbb{P}[R \leq t]$$

$$\text{Fall 1: } t < 0 \Rightarrow F_R(t) = 0$$

$$\text{Fall 2: } t > 1 \Rightarrow F_R(t) = 1$$

$$\text{Fall 3: } t \in [0, 1] \Rightarrow \mathbb{P}[R \leq t] = \frac{\pi t^2}{\pi} = t^2$$

[GRAFIK Kreis 2 Einfügen]

## 13.1 Dichte einer ZV

Erzeuge unabhängige  $N$  Realisierungen einer ZV  $X$ .  $N$  ist sehr groß

Für jede Realisierung lege ein Sandkörnchen mit Masse  $\frac{1}{N}$  auf die x-Achse

Höhe des Haufens ist die Dichte von  $X$

[GRAFIK Sandkörner Einfügen]

### Eigenschaften der Dichte

$$1. \quad f(t) \geq 0$$

$$2. \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(t) dt = 1$$

**Definition:** ZV  $X$  hat Dichte  $f$ , falls

$$\forall a < b : \mathbb{P}[a < X < b] = \int_a^b f(t) dt$$

**Wichtige Bemerkung:**  $\forall u \in \mathbb{R} : \mathbb{P}[x = u] = 0$

$f(t)$  ist nicht  $\mathbb{P}[x = t]$

$$\mathbb{P}[t < x < t + \underbrace{dt}_{\approx 0}] = \int_t^{t+dt} f(s) ds \underbrace{\approx}_{dt \approx 0} f(t) * dt$$

$$f(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}[t < x < t + dt]}{dt}$$

[GRAFIK Dichte Einfügen]

ZV  $X$  hat Dichte  $f$ , falls  $\forall a < b \mathbb{P}[a < X < b] = \int_a^b f(t)dt$

$$f(t) = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{\mathbb{P}[t < X < t + dt]}{dt}$$

### 13.1.1 Zusammenhang zwischen Dichte und Verteilungsfunktion

$$F(t) = \mathbb{P}[x \leq t] = \mathbb{P}[-\infty \leq x \leq t] = \int_{-\infty}^t f(s)ds$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{t}) = \int_{-\infty}^{\mathbf{t}} \mathbf{f}(\mathbf{s})d\mathbf{s} \quad \mathbf{f}(\mathbf{t}) = \mathbf{F}'(\mathbf{t})$$

**Beispiel:** Sei  $X$  uniform verteilt auf dem  $[0, 1]$   
Bestimme Dichte von  $X$  und  $X^2$

$$\textbf{Lösung: } f_x(t) = F'_x(t) \quad F_x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ t, & t \in [0, 1] \\ 1, & t \geq 1 \end{cases}$$

$$f_x(t) = \begin{cases} 0, & t \leq 0 \\ 1, & t \in (0, 1) \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

$f_x(1), f_x(0)$  nicht definiert [GRAFIK Grafiken  $F_x$  und  $f_x$  Einfügen]

$$f_{x^2}(t) = F'_{x^2}(t)$$

[GRAFIK realisierungen Einfügen]

Zuerst bestimme  $F_{x^2}(t) = \mathbb{P}[x^2 \leq t]$

Fall 1:  $t < 0 \Rightarrow F_{x^2}(t) = 0$

Fall 2:  $t > 1 \Rightarrow F_{x^2}(t) = 1$

Fall 3:  $t \in [0, 1] \Rightarrow F_{x^2}(t) = \mathbb{P}[x^2 \leq t] \stackrel{x \geq 0}{=} \mathbb{P}[x \leq \underbrace{\sqrt{t}}_{\in [0,1]}] = \sqrt{t}$   
x uniform

Dichte von  $X^2$ :

$$f_{x^2} = F'_{x^2}(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ \sqrt{t}' = \frac{1}{2\sqrt{t}}, & t \in (0, 1) \\ 0, & t > 1 \end{cases}$$

[GRAFIK Graphen Einfügen]

**Beispiel:** Sei  $x$  und  $y$  zwei unabhängige auf  $[0, 1]$  uniform verteilte Zufallszahlen

Verteilungsfunktion und Dichte von  $Z = x+y$ ?

### 13 Stetige ZV: Verteilungsfunktion und Dichte

**Bemerkung:** Werte von  $Z$  liegen zwischen 0 und 2

**Lösung:** Modell:  $\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1\}$   
[GRAFIK Einheitsquadrat Einfügen]

$$\mathbb{P} : \quad \mathbb{P}[B] = \frac{\lambda(B)}{1} \quad \forall B \subset \Omega$$

ZV  $Z(x,y) = x+y$

Zuerst bestimmen wir die Verteilung  $F_Z(t) = \mathbb{P}[Z \leq t]$

Fall 1:  $t < 0 \Rightarrow F_Z(t) = 0$

Fall 2:  $t > 2 \Rightarrow F_Z(t) = 1$

Fall 3:  $t \in [0, 2] \quad \{Z \leq t\} = \{(x, y) \in \Omega : x + y \leq t\}$

Fall 3a:  $t \in [0, 1] \Rightarrow \{Z \leq t\}$  ist Dreieck :

[GRAFIK Dreieck Einfügen]

$$F_Z(t) = \mathbb{P}[Z \leq t] = \frac{t^2}{2}$$

Fall 3b:  $t \in [1, 2] \Rightarrow \{z \leq t\}$  ist Komplement eines Dreiecks

[GRAFIK dreieckKomplement Einfügen]

$$F_Z(t) = \mathbb{P}[Z \leq t] = 1 - \frac{(2-t)^2}{2}$$

**Dichte von  $Z$ :**

$$f_Z(t) = F'_Z(t) = \begin{cases} 0, & t < 0 \\ t, & t \in (0, 1) \\ 2-t, & t \in (1, 2) \\ 0, & t > 2 \end{cases}$$

[GRAFIK dichte Einfügen]

**Bemerkung:**  $\int_{-\infty}^{\infty} f_Z(t) dt = \int_0^2 f_Z(t) dt = 1$