Stochastik

Mitschrift

Vorlesung bei: Prof. Dr. Kabluchko

Datum: 10. Mai 2019
Sommersemester 2019

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

1 Harmonische Reihe

1.1 Harmonische Reihe

Definition: Harmonische Zahlen $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n}$
Harmonische Reihe: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = \lim\limits_{n\to\infty} H_n$

1.1.1 Satz 10.1

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots = +\infty \qquad H_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots$
d.h. ∀ A (egal wie groß) ∃ n = n(A) : $H_n \geq A$
Beweis:

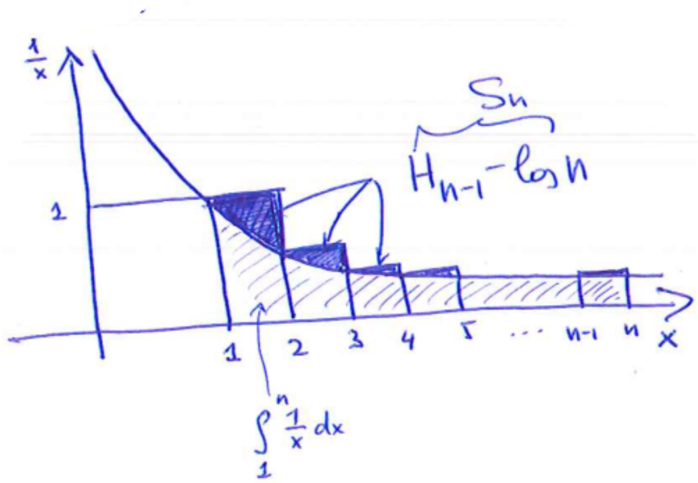
$$1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{3}+\ldots+\cancel{[illegible]} = 1+\tfrac{1}{2}+\underbrace{\overbrace{\left(\tfrac{1}{3}+\tfrac{1}{4}\right)}^{2\,\text{Terme}}}+\overbrace{\left(\tfrac{1}{5}+\ldots+\tfrac{1}{8}\right)}^{4\,\text{Terme}}+\overbrace{\left(\tfrac{1}{9}+\ldots+\tfrac{1}{16}\right)}^{8\,\text{Terme}}+\ldots$$
$$\geq 1+\tfrac{1}{2}+\left(\tfrac{1}{4}+\tfrac{1}{4}\right)+\left(\tfrac{1}{8}+\ldots+\tfrac{1}{8}\right)+\left(\tfrac{1}{16}+\ldots+\tfrac{1}{16}\right)+\ldots$$
$$= 1+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\tfrac{1}{2}+\ldots = \infty.$$

$H_2 \geq 1 + \frac{1}{2}, H_4 \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, H_8 \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$
$H_{2^l} \geq 1 + \frac{l}{2}$
$A = 7 * 10^6 \quad 1 + \frac{l}{2} \geq A \quad l \geq 2A - 2$
$H_{2^{1+10^6-2}} \geq 7 * 10^6$

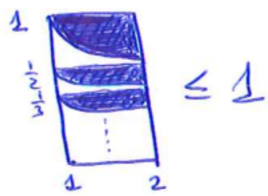
1.1.2 Satz 10.2, Euler, 1734

$\underbrace{\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{4} + \cdots + \dfrac{1}{n}}_{H_n \to \infty} - \underbrace{\log n}_{\to\infty}$ konvergiert für n → ∞ gegen eine Konstante.

Bemerkung: Die Konstante $\gamma := \underset{n\to\infty}{0}(H_n - \log n) = 0,57721\ldots$ heißt Euler-Mascheroni-Konstante
Beweis: $\int_1^n \dfrac{1}{x}dx =$ (log x) $\Big|_1^n$ 1 n = log n - $\underbrace{\text{log 1}}_{0}$ = log n



$H_{n-1} - \log\, n$ =Fläche S_n
$S_1 < S_2 < S_3 < \dots$



Außerdem: $S_n \leq 1\, \forall n \in \mathbb{N}$
D.h. $\exists$ lim S_n exisitert und ist $\leq$1 und ≥ 0

$H_n - \log\, n = \underbrace{H_{n-1} - \log\, n}_{\text{Konv. für n}\to\infty} + \underbrace{\frac{1}{n}}_{0}$, also konvertgiert $H_n - \log\, n$ gegen einem Limes, der zwischen 0 und 1 liegt. $\square$

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = \log\, n + \gamma + \underbrace{\varepsilon_n}_{\text{Fehler der Appr.}}$, wobei $\varepsilon_n \to 0$ für $n \to \infty$

1.2 Alternierende harm.Reihe

Alternierende harm. Reihe: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = log2$

Beweis:
$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n}$
$S_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$
$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = H_{2n} - 2(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n})$
$= H_{2n} - (1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}) = H_{2n} - H_n =$
$\underset{\text{Kor.}}{=} (\log\, 2n + \gamma + \varepsilon_{2n}) - (\log\, n + \gamma + \varepsilon_n)$
$= \log\, 2n - \log\, n + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n$
$= \log\, 2 + \underbrace{\varepsilon_{2n}}_{0} - \underbrace{\varepsilon_n}_{0} \underset{n\to\infty}{\to} log2$

Aufgabe: Schnecke und Auto
$1 + \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{3} + \dots = \infty$
[GRAFIK schneckeUndAuto Einfügen]
Zeige: Schnecke überholt das Auto in endlicher Zeit
$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$
$\underbrace{1 + \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{2}} + \underbrace{\dfrac{1}{5} + \dfrac{1}{7} - \dfrac{1}{4}} + \underbrace{\dfrac{1}{9} + \dfrac{1}{11} - \dfrac{1}{6}} \dots = \frac{3}{2} \log 2$

Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$
Beispiel:$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ ist konvergent aber nicht absolut konvergent.

Satz: In einer absolut konvergenten Reihe kann man die Terme umordnen, ohne dass sich die Summe ändert.
Riemann'scher Umordnungssatz: $\forall a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Umordnung der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$, die gegen a konvergiert.

Beweis: Sei $a \geq 0$
Ungerade Terme: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots \quad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots = \infty$

Gerade Terme: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots \quad \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \infty$

Nehme ungerade Terme bis die Summe $\geq$ a wird:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n_1} \geq a$$

Ziehe gerade Terme abm bis die Summe $\leq$ a wird

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{m_1} \leq a$$

Addiere ungerade Terme bis die Summe wieder $\geq$ a wird

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{m_1} + \frac{1}{n_1+2} + \frac{1}{n_1+4} + \dots + \frac{1}{n_2} \geq a$$

usw. $\square$

Bemerkung Über EWert von ZV mit abzählbar ∞-vielen Werten

Betrachte ZV X: Werte:

x_1	x_2	x_3	$\dots$
p_1	p_2	p_3	$\dots$

$\mathbb{E}X = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i$?
Problem: Keine "kanonische" Reihenfolge der Werte x_i Wenn $\sum_{i=1}^{\infty}$ nicht **absolut** konv. $\Rightarrow$kann sich das Ergebnis durch Umordnung ändern

Definition: Sei X ZV wie oben Def.

$$S_+ = \sum_{i: x_i \geq 0} x_i p_i, \quad S_= \sum_{i: x_i < 0} |x_i| p_i$$

$$\textbf{Fälle}: \begin{cases} \mathbb{E}X \overset{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = S_+ - S_-, & \text{falls } S_+ < \infty, s_- < \infty \\ \mathbb{E}X \overset{\text{def}}{=} +\infty, & \text{falls } S_+ = \infty, s_- < \infty \\ \mathbb{E}X \overset{\text{def}}{=} -\infty, & \text{falls } S_+ < \infty, S_- = \infty \\ \mathbb{E}X \text{nicht definiert }, & \text{falls } S_+ = \infty, S_- = \infty \end{cases}$$

2 Diskrete Verteilungen

2.1 Uniforme Verteilungen

Definition:
ZV X heißt uniform, falls verteilt auf der Menge $\{x_1, \ldots x_n\}$ $(x_i \in \mathbb{R})$, falls:

$$\mathbb{P}[X = x_i] = \frac{1}{n} \forall i = 1, \ldots, n$$

Bemerkung: $\mathbb{E}X = x_1 * \frac{1}{n} + x_2 \frac{1}{n} + \cdots + x_n * \frac{1}{n} = \frac{x_1 + \cdots + x_n}{n}$ [arithmetisches Mittel]

Beispiel:
Sei X uniform verteilt auf {1,2,...,n} $\mathbb{E}X = \frac{1 + 2 + \cdots + n}{n} =$
1+2+...+ n = $\frac{n(n+1)/2}{n} = \frac{n+1}{2}$
[GRAFIK Treppe Einfügen]
$= \frac{n^2}{n} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$
$1 + 3 + 5 + 7 + \cdots + (2n - 1)$
$n = 1 : 1$
$n = 2 : 1 + 3 = 4$
$n = 3 : 1 + 3 + 5 = 9$
... Vermutung: $1 + 3 + 5 + \ldots (2n - 1) = n^2$
Proof by picture:
[GRAFIK proofByPicture Einfügen]

2.2 Binomialverteilung

Ein Bernoulli-Exp: Zwei Ausgänge $\underbrace{\text{Erfolg}}_{p}$ (oder 1) und $\underbrace{\text{Misserfolg}}_{1-p}$ (0)

Definition:
ZV X heißt Bernoulli-verteilt, falls

$$\mathbb{P}[x = 1] = p, \mathbb{P}[x = 0] = 1 - p$$

Bez: $x^\sim$ Bern(p)
$\mathbb{E}X = 1 * p + 0 * (1 - p) = p$

Nn betrachte n unabh. Bern-Exp. Grundmenge: $\Omega = \{(0,1)^n : a_i \in \{0,1\}\}$
$\mathbb{P}[(0,0,1,0,1,1)] = (1-p) * (1-p) * p * (1-p) * p * p = p^3(1-p)^3$
$\mathbb{P}[(A_1, \dots, a_n)] = p^k(1-p)^{a-k}$, wobei K $= a_1, + \dots, +a_n$(Anzahl Erfolge)

Für $p = \frac{1}{2} \Rightarrow$ LaPlace-Experiment
Für $p \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$ kein LaPlace-Experiment

Satz 11.1

Sei X die Anzahl der Erfolge in einem n-fachen Bernoulli-Experiment.
Dann gilt: $\mathbb{P}[x = k] = \binom{n}{k} * p^k(1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$

Beispiel:
$n = 4, k = 2$

$\mathbb{P}[(1,1,0,0)] = p^2 * (1-p)^2$ (1,0,1,0)
$\mathbb{P}[(0,1,1,0) = p^2(1-p)^2$ (1,0,0,1)
(0,0,1,1)

Alle 6 Ausgänge haben Wkeit $p^2(1-p)^2$

Definition:
ZV X wie oben heißt binomialverteilt mit Param n und p
Bez: x~Bin(n,p)

Bemerkung: $\sum_{k=0}^{n} \mathbb{P}[x = k] = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \overset{Bin.Formel}{=} (p+1-p)^n = 1^n = 1$

Satz 11.2

Sei X~Bin(n,p)
Dann gilt $\mathbb{E}X = n * p$

Beweis:

Sei $x_i = \begin{cases} 1 & \text{, falls im i-ten Experiment Erfolg eintritt} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

$$\underbrace{x}_{\substack{\text{Anzahl d. Erfolge} \\ \text{in Exp. 1,...,i}}} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$\mathbb{E}x = \mathbb{E}[x_1 + \dots + x_n] = \overbrace{\mathbb{E}x_1}^{p} + \dots + \overbrace{\mathbb{E}x_n}^{p} = n * p$
Dann $\mathbb{E}x_i = 1 * p + 0 * (1-p) = p$ $\square$

Beispiel: Werfe faire Münze n Mal

$\mathbb{P}[\text{die Münze zeigt k mal Kopf}] = \binom{n}{k} * (\frac{1}{2}^k) * (\frac{1}{2}^{n-k}) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$

Beispiel: Werfe fairen Würfel n Mal
$\mathbb{P}[\text{k Sechsen}] = \binom{n}{k} * (\frac{1}{6})^k * (\frac{5}{6})^{n-k}$

Beispiel: Betrachte Urne mit 10 roten und 20 schwarzen Bällen.
Wir ziehen 15 Bälle **mit** Zurücklegen.
Bestimme Wkeit, dass bei 8 Ziehungen roter Ball gezogen wurde
n = 15, p = $\frac{1}{3}$
Gesuchte Wkeit ist: $\binom{15}{8} * (\frac{1}{3})^8 * (\frac{2}{3}^7)$