

Stochastik

Mitschrift

Vorlesung bei: Prof. Dr. Kabluchko

Datum: 31. Mai 2019
Sommersemester 2019

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

1	Zufallsexperimente	4
1.1	Produktexperimente	4
1.2	Boole'sche Algebra	6
1.3	De Morgan-Regeln	7
1.4	Wahrscheinlichkeiten	7
1.4.1	Empirisches Gesetz der großen Zahlen	8
2	Kombinatorik	9
2.1	Urnenmodelle	10
2.2	Binomialkoeffizient	12
2.3	Binomischer Lehrsatz	13
2.3.1	Pascal'sches Dreieck und Trigonometrie	14
2.4	Hypergeometrische Verteilung	14
2.5	Touren	15
2.6	Allgemeine hypergeometrische Verteilung	16
2.7	Multinomialkoeffizient	17
2.7.1	Multinomialverteilung mit Zurücklegen	18
3	Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie	20
3.1	Eigenschaften von \mathbb{P}	20
3.2	Ungleichungen für Wahrscheinlichkeiten	22
4	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeiten	23
4.1	Eigenschaften der bedingten Wahrscheinlichkeiten	24
4.2	Unabhängige Ereignisse	25
4.2.1	Eigenschaften der Unabhängigkeit	26
5	Satz von Bayes	29
5.1	Bayes-Formel	30
6	Zufallsvariablen	33
7	Harmonische Reihe	39
7.1	Harmonische Reihe	39
7.1.1	Satz 10.1	39
7.1.2	Satz 10.2, Euler, 1734	39
7.2	Alternierende harm.Reihe	40

Inhaltsverzeichnis

8 Diskrete Verteilungen	43
8.1 Uniforme Verteilungen	43
8.2 Binomialverteilung	43
9 Geometrische Verteilung	46
10 Poisson Verteilung	50
10.1 Exkurs über die Zahl e	50
10.2 Poisson Verteilung	51
10.2.1 Satz 11.6: Poisson-Grenzwertsatz	51
10.2.2 Satz 11.7	53
11 Varianz und Kovarianz	55
11.1 Satz 14.1	55
11.2 Satz 14.2	55
11.3 Satz 14.3	57
11.4 Schwaches Gesetz der großen Zahlen	58
11.4.1 GGZ - Kurzfassung	59
11.5 Satz 11.4: Markov-Ungleichung	59
11.6 Satz 14.5 Chebyshev-Ungl	59
11.6.1 Beweis des GGZ	60
11.7 Kovarianz	60
11.7.1 Satz 14.6	60
11.7.2 Satz 14.7	60
11.8 Satz 14.8	61
11.9 Dimensionsloses Maß für Zusammenhang zwischen zwei ZV x, y	62
11.9.1 Exkurs über die Cauchy-Schwarz-Ungleichung	62
11.9.2 Satz 14.9 Auch Cauchy-Schwarz	62
11.9.3 Satz 14.10	63
11.10 Schätzer für \mathbb{E} , Var , Cov	64
12 Geometrische Wahrscheinlichkeiten	65

1 Zufallsexperimente

Beispiele

Werfen einer Münze

Ausgänge: K, Z

Grundmenge $\Omega = \{K, Z\}$

Werfen eines Würfels

Ausgänge: 1...6

Grundmenge $\Omega = \{1, \dots, 6\}$

Zwei Münzen gleichzeitig werfen

$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$

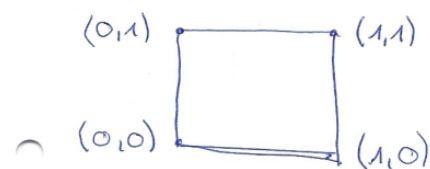
ZK heißt 1. Zeigt Zahl, zweite Kopf. KZ andersherum. Dies gilt wenn die Münzen **unterscheidbar** sind

n Münzen werfen

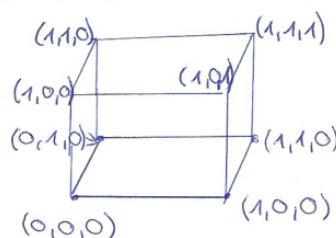
$\Omega = \{K, Z\}^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \{K, Z\} \forall i = 1, \dots, n\}$

$\#\Omega = 2^n$

- für $n=2$ (grafisch)



- für $n=3$



Frage: können wir $\Omega = \{0, \dots, n\}^n$ wählen?
 \rightarrow nein! - Unvollständige Beschreibung

Frage: Können wir $\Omega = \{0, \dots, n\}^{n=4}$ wählen?

1.1 Produktexperimente

Betrachte n Experimente mit Grundmengen E_1, \dots, E_n

Führe diese Experimente unabhängig voneinander aus.

Grundmenge des Gesamtexperiment ist

$\Omega = E_1 \times \dots \times E_n = \{(e_1, \dots, e_n) : e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n\}$

$\#\Omega = \#E_1 \cdot \dots \cdot \#E_n$

1 Zufallsexperimente

Beispiele

Münze und Würfel werfen $E_1 = \{K, Z\}$ $E_2 = \{1, \dots, 6\}$

$$\Omega = E_1 \times E_2 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|} \hline K1 & K2 & K3 & K4 & K5 & K6 \\ \hline Z1 & Z2 & Z3 & Z4 & Z5 & Z6 \\ \hline \end{array}$$

$$\Omega = 12$$

Definition: Ereignis

Ereignis = Teilmenge von Ω

Beispiel: 1 Würfel. $\Omega = \{1, \dots, 6\}$

Ereignisse: A = "Würfel zeigt gerade Zahl" = $\{2, 4, 6\}$

B = 'Primzahl gewürfelt' = $\{2, 3, 5\}$

Interpretation: Zufallsexperiment wird ausgeführt \Rightarrow

Wir erfahren den Ausgang $w \in \Omega$

Sei $A \subset \Omega$. Liegt $w \in A$, so sagen wir "A ist eingetreten".

$w \notin A \Rightarrow$ "A nicht eingetreten"

Beispiel: 2 Würfel. $\Omega = 1, \dots, 6^2$

A = "Augensumme = 10" = $\{(6, 4), (5, 5), (4, 6)\}$

Unmögliches Ereignis: \emptyset

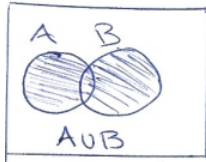
Sicheres Ereignis (tritt immer ein) = Ω

1.2 Boole'sche Algebra

Seien $A \subset \Omega$; $B \subset \Omega$

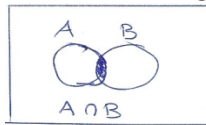
$$A \cup B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ oder } w \in B\}$$

= "mindestens ein Ereignis tritt ein."



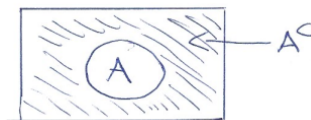
$$A \cap B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ und } w \in B\}$$

= "beide Ereignisse treten ein."



$$A^C = \{w \in \Omega : w \notin A\}$$

= "A tritt nicht ein"



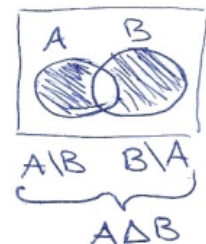
$$A \setminus B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ und } w \notin B\}$$

= "A tritt ein **und** B tritt nicht ein" = $A \cap B^C$

$$B \setminus A = B \cap A^C$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

= "**genau** ein Ereignis tritt ein"



Beispiel: 2 Würfel $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$

$$A = \text{"1. Würfel zeigt 6"} = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$$

$$B = \text{"2. Würfel zeigt 6"} = \{(1,6), (2,6), (3,6), (4,6), (5,6), (6,6)\}$$

$$A \cap B = \{(6,6)\}$$

$$A \cup B = \{(6,1), \dots, (6,6), (1,6), \dots, (5,6)\} \quad A \Delta B = \{(6,1), \dots, (6,5), \dots, (1,6), \dots, (5,6)\}$$

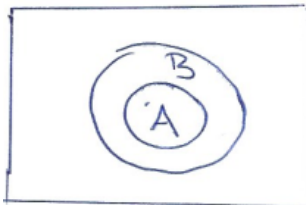
Definition: Disjunkt

Ergebnis A und B sind disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$
D.h. A und B können nicht gleichzeitig eintreten.



Beispiel: A und A^c ,
 $A \setminus B$,
 $A \Delta B$,
und $A \cap B$ sind disjunkt.

Definition: $A \subset B$, wenn $\forall w \in A \Rightarrow w \in B$
Wenn A eintritt, dann tritt auch B ein.



1.3 De Morgan-Regeln

$(A \cup B)^c =$ "Kein Ereignis tritt ein" = "A tritt nicht ein **und** B tritt nicht ein" = $A^c \cap B^c$

Regel: $(A \cup B)^c = A^c \cap B^c$

$(A \cap B)^c =$ "**mindestens** ein Ereignis tritt nicht ein." = "A tritt nicht ein **oder** B tritt nicht ein." = $A^c \cup B^c$

Regel: $(A \cup B)^c$

Allgemein:

$$(A_1 \cup A_2 \cup \dots)^c = A_1^c \cap A_2^c \cap \dots$$

$$(A_1 \cap A_2 \cap \dots)^c = A_1^c \cup A_2^c \cup \dots$$

1.4 Wahrscheinlichkeiten

Buffon:

4040 Würfe einer Münze. 2048 Kopf.

Pearson: 24000 Würfe, 12012 Kopf

Rechner: 100000 Würfe, 50106 Kopf. Häufigkeit: 0,50106

1.4.1 Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Betrachte Zufallsexperiment und Ereignis $A \subset \Omega$

Wiederhole das Experiment n Mal.

Zähle, wie oft A eingetreten ist: $kn(A)$

$$\frac{k_n(A)}{n} (\text{Häufigkeit}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A] (\text{Wkeit von } A)$$

Definition: Diskreter Wahrscheinlichkeitsraum ist ein Paar (Ω, p) , wobei Ω eine Menge ist und

$$p: \Omega \rightarrow [0, 1] \text{ mit } \sum_w p(w) = 1$$

Wahrscheinlichkeit eines Ausgangs $w \in \Omega$ ist $p(w)$

Wahrscheinlichkeit eines Ereignis $A \subset \Omega: \mathbb{P}[A] = \sum_{w \in A} p(w)$

Definition Ein Laplace-Experiment liegt vor, wenn

$$\#\Omega = n < \infty \text{ und } p(w) = \frac{1}{n} \forall w \in \Omega [\text{Ausgänge sind gleichwahrscheinlich}]$$

Dann gilt :

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Beispiel: 2 faire Würfel $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ $\#\Omega = 36$

$A = \text{"Augensumme} = 10" = \{(6,4), (5,5), (4,6)\}$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$B = \text{"Augensumme} = 11" = \{(6,5), (5,6)\} \rightarrow \mathbb{P} = \frac{1}{18}$



Beispiel: Nicht-Laplace-Experiment

$$\Omega = \{1, 2, 3\} \quad p(1) = \frac{1}{4} \quad p(2) = \frac{1}{4} \quad p(3) = \frac{1}{2}$$

oder $\Omega = \{1, 2, 3A, 3B\} \Rightarrow$ Laplace-Experiment, da

$$p(w) = \frac{1}{4} \forall w. \mathbb{P}[3] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

2 Kombinatorik

Beispiel: Geburtstagsproblem $K = 200$ Personen
 $A =$ "mindestens 2 Personen haben am gleichen Tag Geburtstag"
 $P[A] = ?$

Modell: $n = 365$ Tage im Jahr

Ausgänge: Liste der Länge K besteht aus Zahlen zwischen 1 und n

$$\Omega = \{1, \dots, n\}^K = \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in \{1, \dots, 365\} \forall i = 1, \dots, k\}$$

$a_i =$ Geburtstag der i -ten Person.

$$\#\Omega = \underbrace{n * n * \dots * n}_K = n^K = 365^{200}$$

$$P[A] = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Gegenereignis $A^C =$ "alle Geburtstage sind (paarweise) verschieden"

$$\#A^C = \underbrace{n}_{\text{Mögl. für Person 1}} * \underbrace{(n-1)}_{\text{Mögl. für Person 2}} * \underbrace{(n-2)}_{\text{Mögl. für 3. Person}} * \dots * \underbrace{(n-K+1)}_{\text{Mögl. für Person k}} = (n)_K \text{ mit } K \leq n$$

$$P[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#\Omega - \#A^C}{\#\Omega} = 1 - \frac{\#A^C}{\#\Omega} = 1 - \frac{n(n-1)\dots(n-K+1)}{n^K}$$

Beispiel:

$K = 23$ Personen: $P[A] = 0.507$

$K = 200$: $P[A] = 0.999999\dots 8 \approx 1$

2.1 Urnenmodelle

Urne mit Bällen $1, \dots, n$. Es wird k mal jeweils ein Ball zufällig gezogen. [*GRAFIK URNE]

Möglichkeiten:

- a) Mit/ohne Zurücklegen
- b) Nummern der Bälle mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Insgesamt 4 Modelle:

1. Mit Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

Ausgänge dieses Experiments sind Listen der Länge K bestehend aus Zahlen zwischen 1 und n .

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in \{1, \dots, n\} \forall i = 1, \dots, K\}$$

a_i = die Nummer des i -ten Ball

Beachte

- Es ist möglich, dass $a_i = a_j$ (mit Zurücklegen)
- $(5, 3, 7, \dots) \neq (3, 5, 7, \dots)$

Beispiel:

- Geburtstage von Personen. Bälle = Tage.
Jede Person zieht einen Ball zufällig.
- k -maliges Würfeln. 6 Bälle = 6 Seiten des Würfels

$$\#\Omega = \underbrace{n * n * \dots * n}_K = n^K$$

2. Ohne Zurücklegen und mit Berücksichtigung der Reihenfolge

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in \{1, \dots, n\}, \underbrace{a_i \neq a_j \forall i \neq j}_{\text{Paarweise verschiedene Elemente}}\}$$

$$\#\Omega = n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * (n - K + 1)$$

Beachte

- $(1, 3, \mathbf{2}, 4, 5, \mathbf{2}, \dots) \notin \Omega$
- $(5, 3, 7, \dots) \neq (3, 5, 7, \dots)$

Bemerkungen:

- Falls $k > n$: $\#\Omega = 0$
- Für $k = n$:
 $\#\Omega = n * (n - 1) * \dots * 1 = 1 * 2 * 3 * \dots * n = n!$
 Ausgänge sind Permutationen:
 $n = 3: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1)$

3. Ohne Zurücklegen und ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Ausgänge: Listen der Länge K aus verschiedenen Elementen.

Allerdings wird die Reihenfolge nicht berücksichtigt, d.h. $\{2,5,3\} = \{5,3,2\}$

Ausgänge sind K -elementige Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$.

$$\Omega = \{A : A \subset \{1, \dots, n\}, |A| = k\} \text{ oder}$$

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in \{1, \dots, n\}, \underbrace{a_1 < a_2 < \dots < a_k}_{\substack{\text{Reihenfolge wird} \\ \text{durch sortieren gelöscht}}}\}$$

$$\begin{aligned} \#\Omega &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-K+1)}{K!} && K \text{ Objekte aus } n \text{ Objekten auswählen} \\ &= \binom{n}{K} \end{aligned}$$

Beispiel: Lotto, 49 Kugeln. 6 Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen.

Wir tippen auf eine Kombination aus 6 Nummern

$$A = \text{"Man hat alle 6 geraten"} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

1. Lösung:

Ω = Menge aller 6-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, 49\}$.

Die Kugeln werden mit einem Griff gezogen.

$$\#\Omega = \binom{49}{6} \quad \#A = 1 \text{ [die Kombination, auf die wir tippen]}$$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{1}{\binom{49}{6}} \approx 7,15 \cdot 10^{-8}$$

2. Lösung:

Kugeln werden einzeln gezogen, Nummern werden notiert:

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_6) : a_i \in \{1, \dots, 49\}, a_i \neq a_j \forall i \neq j\}$$

$$\#\Omega = 49 \cdot 48 \cdot 47 \cdot \dots \cdot (49 - 6 + 1) \quad \#A = 6!$$

Wir tippen auf $\{1, \dots, 6\}$. wir gewinnen bei allen Permutationen von $1, \dots, 6$.

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{6!}{49 \cdot 48 \cdot \dots \cdot 44} = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

Beispiel:

Wie hoch ist die Chance, dass 2 mal in Folge die gleichen Zahlen gezogen werden?

Bis zum Zeitpunkt gab es $K = 3016$ Ziehungen.

Insgesamt gibt es $\binom{49}{6}$ Gewinnreihen.

A = "Bei mindestens 2 Ziehungen wurde die gleiche Reihe gezogen"

\approx Geburtstagsproblem

A^C = "Alle Ziehungen ergeben verschiedene Reihen"

$$\mathbb{P}[A] = 1 - \frac{n(n-1)\dots(n-K+1)}{n^K} = 0,278$$

\Rightarrow **Ferni-Dirar-Statistik**

4. Mit zurücklegen und ohne Reihenfolge

K Vögel setzen sich auf n Bäume

- Mehrfachbesetzungen möglich
- Vögel identisch

Wieviele Besetzungen sind möglich?

Lösung:

Insgesamt $\underbrace{K}_{\text{Vögel}} + \underbrace{n-1}_{\text{"Trennwände"}}$ Symbole, davon K Kreuze

$$\#\Omega = \binom{K+n-1}{K} = \binom{K+n-1}{n-1}$$

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

\Rightarrow Bose-Einstein-Statistik (für diese Vorlesung unwichtig)

2.2 Binomialkoeffizient

Definition: Der Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \text{Formel: } \binom{n}{k} &= \frac{n * (n-1) * \dots * (n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)! * k!} \end{aligned}$$

mit $k \in \{0, \dots, n\}$

Wieso teilen wir durch (k!)?

Weil jede k-elementige Teilmenge k!-mal gezählt wurde. (z.B. $\{3,5,9\}$ als $(3,5,9)$, $(3,9,5), \dots$)

Beispiel: 20 Schüler.

Es soll eine Fußballmannschaft gebildet werden.

Anzahl der Möglichkeiten ohne Berücksichtigung der Positionen: $\binom{20}{10}$

Beispiel: 52 Karten, davon 4 Asse. Wir ziehen 4 Karten ohne zurücklegen.

Wahrscheinlichkeit, dass alle 4 Asse sind = ?

$\Omega = 4\text{-elementige Teilmengen von } \{1, \dots, 52\}$

$$\#A=1 \quad P[A] = \frac{\#A}{\Omega} = \frac{1}{\binom{52}{4}} = 3,7 * 10^{-6}$$

Beispiel: 52 Karten, 4 werden gezogen.

$A = \text{"Alle sind Pik"}$ $P[A] = ?$ $\#A = \binom{13}{4}$

$$\#\Omega = \binom{52}{4} \quad P[A] = \frac{\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}} \approx 2,64 * 10^{-3}$$

Satz 3.1:

Wenn $0 \leq k \leq n-1$, dann gilt: $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$

Beweis: Wir wollen aus n Elementen k auswählen.

Hier gibt es zwei Fälle:

1. Wir haben das Element "n" ausgewählt.
Es verbleiben $n-1$ Elemente, von denen $k-1$ ausgewählt werden sollen.
 $\implies \binom{n-1}{k-1}$ Möglichkeiten
2. Wir haben das Element "n" nicht ausgewählt.
Es verbleiben $n-1$ Elemente, von denen k ausgewählt werden sollen.
 $\implies \binom{n-1}{k}$ Möglichkeiten

2.3 Binomischer Lehrsatz

$$\begin{aligned}(x+y)^0 &= 1 \\(x+y)^1 &= x+y \\(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\(x+y)^n &= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + y^n\end{aligned}$$

Satz 3.2.:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Beweis:

Beim Ausmultiplizieren zählen wir, wie oft der Term $x^k y^{n-k}$ entsteht.

Aus k Faktoren muss x als Beitrag aus-

gewählt werden, aus dem Rest y . $(x+y)^n = (x+y)(x+y) \cdot \dots \cdot (x+y)$

$\binom{n}{k}$ Möglichkeiten □

Bemerkung: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, d.h. jede (Spalte vom Pascal'schen Dreieck) liest sich von rechts genauso wie von links.

k Elemente auswählen $\Leftrightarrow n-k$ nicht auswählen.

Beobachtung: Zeilen summieren im Pascal'schen Dreieck: Zeilen summieren im Pascal'schen Dreieck: Summe ist 2^n

Satz 3.3: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Beweis:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n \quad \square$$

Übung: (ähnlich)

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$

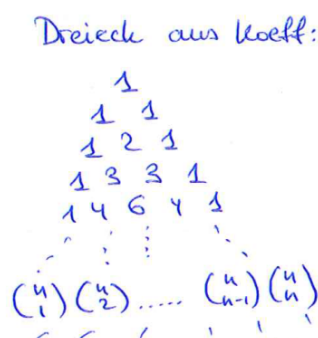


Abbildung 2.1: Pascalsches Dreieck

2.3.1 Pascal'sches Dreieck und Trigonometrie

Bekannt: $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$
 $\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$

Es gibt auch Formeln für $\sin(3x)$, $\cos(3x)$, ...

Allgemein:

$$\sin(nx) = \binom{n}{1} \cos^{n-1}(x) \sin x - \binom{n}{3} \cos^{n-1} x \sin^3 x + \binom{n}{5} \cos^{n-5} x \sin^5 x - \dots$$

$$\cos(nx) = \cos^n x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots$$

Beweis: Induktion (Übung YAAAY)

2.4 Hypergeometrische Verteilung

Teich mit n Fischen: n_1 Fische rot
 $n_1 + n_2 = n$ n_2 Fische gelb

Fischer fängt k Fische (ohne Zurücklegen) mit $k \leq n$

$A = "k_1 \text{ rote und } k_2 \text{ gelbe Fische gefangen.}"$ mit $k_1 + k_2 = k$

$P[A] = ?$

Lösung: $\Omega = \{T \subseteq \{1, \dots, n\}, \#T = k\}$ $\#\Omega = \binom{n}{k}$

Ereignis $A = "Aus n_1 \text{ roten Fischen } k_1 \text{ auswählen } \binom{n_1}{k_1} \text{ und aus } n_2 \text{ gelben Fischen } k_2 \text{ auswählen } \binom{n_2}{k_2}"$

Diese sind beliebig kombinierbar.

Insgesamt: $\#A = \binom{n_1}{k_1} * \binom{n_2}{k_2}$

$$P[A] = \frac{\binom{n_1}{k_1} * \binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}}$$

Beispiel: Lotto: 6 aus 49

Ereignis A = "Man hat genau 3 richtig"

$P[A] = ?$

Lösung:

$$\Omega = \{T \subseteq \{1, \dots, 49\}, |T| = 6\} \quad \#\Omega = \binom{49}{6}$$

Ohne Einschränkung tippen wir auf $\{1, \dots, 6\}$ damit A eintritt:

- Es müssen 3 Kugeln aus $\{1, \dots, 6\}$ gezogen werden: $\binom{6}{3}$ Möglichkeiten
- Es müssen 3 Kugeln aus $\{7, \dots, 49\}$ gezogen werden: $\binom{43}{3}$ Möglichkeiten

$$\#A = \binom{6}{3} * \binom{43}{3}$$

$$P[A] = \frac{\binom{6}{3} * \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \approx 0,0176$$

2.5 Touren

1. 5 Städte aus 12 Städten für eine Rundreise auswählen.

Touren = ?

Lösung: 12 Möglichkeiten für Startpunkt

11 Möglichkeiten für die nächste Stadt usw.

Insgesamt: $12 * 11 * 10 * 9 * 8$ Möglichkeiten

2. 12 Personen, Ausschuss aus 5 Personen, darunter 1 Vorsitzender

Möglichkeiten = ?

Lösung 1: $\underbrace{\binom{12}{5}}_{\text{Vorsitzenden auswählen}} * 5$

Lösung 2: $\underbrace{12}_{\text{Vorsitzender}} * \binom{11}{4}$

2.6 Allgemeine hypergeometrische Verteilung

Teich mit n Fischen und r möglichen Farben:

n_1 Fische haben Farbe 1, $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$

...

n_r Fische haben Farbe r

Fischer fängt K Fische

$A =$ "genau k_1 Fische mit Farbe 1 gefangen, ..., genau k_r Fische mit Farbe r gefangen" mit $k_1 + \dots + k_r = k$

$P[A] = ?$

Lösung: $\Omega = \{T \subset \{1, \dots, n\} : \#T = k\}$ $\#\Omega = \binom{n}{k}$

$$\#A = \binom{n_1}{k_1} * \binom{n_2}{k_2} * \dots * \binom{n_r}{k_r}$$

k_1 Fische mit Farbe 1 auswählen: $\binom{n_1}{k_1}$

k_r Fische mit Farbe r auswählen: $\binom{n_r}{k_r}$

$$P[A] = \frac{\binom{n_1}{k_1} * \dots * \binom{n_r}{k_r}}{\underbrace{\binom{n}{k_0}}_{\text{Allgemeine hypergeometrische Verteilung}}}$$

Beispiel: 52 Karten

Zufällig auf 2 Spieler verteilt. Jeder Spieler bekommt 26 Karten.

$A =$ "Spieler 1 bekommt genau 3 Asse, 2 Könige und 1 Dame"

$P[A] = ?$

$$\textbf{Lösung: } \#\Omega = \binom{52}{26} * \underbrace{\binom{26}{26}}_{=1}$$

$$\#A = \underbrace{\binom{4}{3}}_{3 \text{ A aus } 4} * \underbrace{\binom{4}{2}}_{2 \text{ K aus } 4} * \underbrace{\binom{4}{1}}_{1 \text{ D aus } 4} * \underbrace{\binom{40}{20}}_{\substack{\text{aus } 40 \text{ verbl.} \\ \text{Karten } 20 \text{ auswählen}}}$$

Beispiel: Zug mit 10 Waggons, jeweils 50 Plätze.

30 Personen suchen sich zufällig Plätze aus

$A =$ "in jedem Waggon genau 3 Personen"

Lösung: $\#\Omega = \binom{500}{30}$ [30 Plätze ausgewählt, die besetzt werden sollen]

$$\#A = \underbrace{\binom{50}{3} * \binom{50}{3} * \dots * \binom{50}{3}}_1 = \binom{50}{3}^{10}$$

$$P[A] = \frac{\binom{50}{3}^{10}}{\binom{500}{30}}$$

2.7 Multinomialkoeffizient

Beispiel: k verschiedene Gegenstände sollen auf r Fächer verteilt werden, s.d.:

Im 1. Fach k_1 Gegenstände landen, $k_1 + k_2 + \dots + k_r = k$

Im 2. Fach k_2 Gegenstände landen,

...

Im r . Fach k_r Gegenstände landen

Möglichkeiten = ?

Lösung:

Wähle k_1 Gegenstände für Fach 1: $\binom{k}{k_1}$

Wähle k_2 Gegenstände für Fach 2: $\binom{k-k_1}{k_2}$

Wähle k_3 Gegenstände für Fach 3: $\binom{k-k_1-k_2}{k_3}$

...

Wähle k_r Gegenstände für Fach r : $\binom{k-k_1-k_2-\dots-k_{r-1}}{k_r} = \binom{k_r}{k_r} = 1$

Insgesamt: $\binom{k}{k_1} * \binom{k-k_1}{k_2} * \binom{k-k_1-k_2}{k_3} * \dots * \binom{k-k_1-k_2-\dots-k_{r-1}}{k_r} =$

$$\frac{k!}{k_1! * k_2! * \dots * k_r!}$$

$$k! = 1 * 2 * \dots * k$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1 \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! * 0!} = \frac{1}{0!} = 1$$

Definition: Multinomialkoeffizient

$$\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_r} := \frac{k!}{k_1! * k_2! * \dots * k_r!}$$

Spezialfall: $r = 2$:

$$\binom{k}{k_1, k-k_1} = \frac{k!}{k_1! (k-k_1)!} = \binom{k}{k_1} = \binom{k}{k-k_1}$$

Multinomialformel:

$$\underbrace{(x + y + z + t)^n = (x + y + z + t) * (x + y + z + t) * \dots * (x + y + z + t)}_{n \text{ Mal}}$$

$$= \sum x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} t^{k_4} \quad k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{0, 1, \dots\}, k_1 + \dots + k_4 = n$$

Beispiel: Aus 33 Schülern sollen 3 Fußballmannschaften gebildet werden.

#Mögl = ?

Lösung: $\binom{33}{11, 11, 11} = \frac{33!}{11! 11! 11!}$ [falls Mannschaften unterscheidbar]

Wenn Mannschaften **nicht** unterscheidbar sind: $\binom{33}{11, 11, 11} / 3!$

Beispiel: Wie viele 16-stellige Zahlen kann man mit einem Ziffernvorrat von **3 Einsen**, **5 Dreien** und **8 Sechsen** schreiben?

1,1,1,3,3,3,3,3,6,6,6,6,6,6,6,6

Lösung: 16 Stellen $\square\square\square\dots\square$

3 Stellen auswählen, die mit Einsen besetzt werden. $\binom{16}{3}$

Es verbleiben 13 Stellen. 5 Stellen auswählen, die mit Dreien besetzt werden $\binom{13}{5}$

Es verbleiben 8 Stellen. Es bleibt nur eine Möglichkeit für die 8 Sechsen.

Insgesamt: $\binom{16}{3} * \binom{13}{5} * 1 = \binom{16}{3,5,8} = \frac{16!}{3!5!8!}$

Fächer: 1,3,6

Gegenstände: Stellen

2.7.1 Multinomialverteilung mit Zurücklegen

Beispiel: Fische mit $n = \underbrace{n_1}_{\text{Farbe 1}} + \dots, n_r$

Fischer fängt k Fische **mit Zurücklegen**

A = "genau k_1 Fische mit Farbe 1 gefangen,

...

genau k_r Fische mit Farbe r"

$P[A] = ?$

Lösung: $\Omega = \{1, \dots, n\}^k \quad \#\Omega = n^k$

Betrachte Ereignis:

- Zuerst weise jeder Ziehung eine Farbe zu, s.d. $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ Farbe i genau k_i Ziehungen zugeordnet wird.

Mögl.: $\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_r}$

- Bei gegebenen Farben ordnen wir nun jeder Ziehung einen Fisch zu.

A besteht aus $\binom{k}{k_1, \dots, k_r}$ "Kopien" von B, somit

$$\#A = \binom{k}{k_1, \dots, k_r} * n_1^{k_1} * \dots * n_r^{k_r}$$

B = "bei Ziehungen $1, \dots, k_n$ Farbe 1 gezogen,

bei Ziehungen $k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2$: Farbe 2,

...

bei Ziehungen $k_1 + \dots + k_r + 1, \dots, k$: Farbe r"

2 Kombinatorik

$$\#B = \underbrace{n_1 * \dots * n_1}_{k_1} * \underbrace{n_2 * \dots * n_2}_{k_2} * \dots * \underbrace{n_r * \dots * n_r}_{k_r} = n_1^{k_1} * \dots * n_r^{k_r}$$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \binom{k}{k_1, \dots, k_r} * \left(\frac{n_1}{n}\right)^{k_1} * \left(\frac{n_2}{n}\right)^{k_2} * \dots * \left(\frac{n_r}{n}\right)^{k_r} \quad \square$$

Beispiel: Eine faire Münze wird n mal geworfen.

$$\mathbb{P}[k \text{ Mal "Kopf"}] = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}, \text{ dann:}$$

$$\#\Omega = \{Z, K\}^n \quad \#\Omega = 2^n \quad \#A = \binom{n}{k} \quad \begin{array}{l} \text{[Auswahl von k Würfeln,} \\ \text{in denen Kopf geworfen wurde]} \end{array}$$

Zwei Aufgaben:

1. Rundreise. Kunde darf 5 aus 12 verschiedenen Städten auswählen.
Anzahl der Touren: $12*11*10*9*8$, nicht $\binom{12}{5}$ [Tour geordnet]
2. 12 Personen. Es soll ein Ausschuss aus 5 Personen gebildet werden, davon 1 Vorsitzender. Anzahl der Mögl: $\binom{12}{5} * 5$, oder $12 * \binom{11}{4}$

3 Axiome der Wahrscheinlichkeitstheorie

Ω = Menge aller Ausgänge eines Zufallsexperiments

Ereignisse := Teilmengen von Ω

$\mathcal{P}(\Omega)$ = Menge aller Ereignisse = Potenzmenge von Ω

$$\#\mathcal{P}(\Omega) = 2^{\#\Omega}$$

Wahrscheinlichkeit ist eine Funktion $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1], A \mapsto \mathbb{P}[A]$ mit

- $\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \dots] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + \dots$
 $\forall A_1, A_2, \dots \subset \Omega$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$
- $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

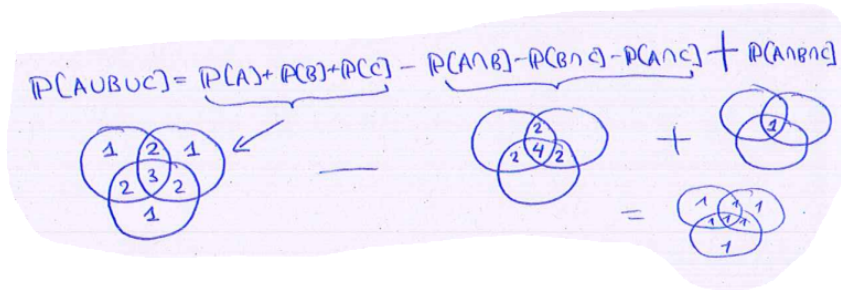
3.1 Eigenschaften von \mathbb{P}

1. $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$
2. $\forall A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset \ \forall i \neq j$
 $\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_n] = \mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_n]$
Spezialfall: Für $A, B \subset \Omega$ mit $A \cap B = \emptyset$
gilt $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$
3. $\forall A \in \mathcal{P}(\Omega) \quad \mathbb{P}[A^c] = 1 - \mathbb{P}[A]$
4. $\forall A, B \subset \Omega : \mathbb{P}[A \setminus B] = \mathbb{P}[A] - \underbrace{\mathbb{P}[A \cap B]}_{\text{Nicht } \mathbb{P}[B]}$
5. $A, B \subset \Omega$ (nicht disjunkt)
 $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$
6. Siebformel oder Einschluss-Ausschluss-Formel.

Für 3 Ereignisse A, B, C $\subset \Omega$

$$\mathbb{P}[A \cup B \cup C] =$$

$$\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[B \cap C] - \mathbb{P}[C \cap A] + \mathbb{P}[A \cap B \cap C]$$



Für 4 Ereignisse A, B, C, D

$$\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] + \mathbb{P}[D] - (\mathbb{P}[A \cap B] + \mathbb{P}[A \cap C] + \dots + \mathbb{P}[C \cap B]) \\ + (\mathbb{P}[A \cap B \cap C] + \mathbb{P}[B \cap C \cap D] + \dots) - \mathbb{P}[A \cap B \cap C \cap D]$$

Für n Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_n :

$$\mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^n A_k] = \sum_{i=1}^n \mathbb{P}[A_i] - \sum_{1 \leq i < j \leq n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j] + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} \mathbb{P}[A_i \cap A_j \cap A_k] - \dots \\ + (-1)^{n+1} \mathbb{P}[A_1 \cap \dots \cap A_n]$$

Beispiel:

n Briefe werden zufällig in n adressierte Briefumschläge gesteckt.

Ereignis A = "mind. 1 Brief wird in den richtigen Umschlag gesteckt"

$$\mathbb{P}[A] = ?$$

Lösung:

Briefe 1,2,3,4,5,6

$$\Omega = \{ \underbrace{(a_1, \dots, a_n)}_{\substack{a_i \text{ gibt an, in welchen} \\ \text{Umschlag Brief i gesteckt wird}}} : a_i \in \{1, \dots, n\} a_i \neq a_j \forall i \neq j \}$$

$$\#\Omega = n * (n - 1) * \dots + 1 = n! \quad \#A = ?$$

$$A = \{(a_1, \dots, a_n) \in \Omega : \exists k \text{ mit } A_k = k\}$$

$$A = A_1 \cup \dots \cup A_n \text{ mit}$$

A_k = "Brief k wird in Umschlag k gesteckt"

$$\mathbb{P}[A_k] = \frac{\#A_k}{\#\Omega} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

A_1, \dots, A_n nicht disjunkt.

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = \frac{\#(A_1 \cap A_2)}{n!} = \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = \frac{\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{n!} = \frac{(n-3)!}{n!}$$

$$\text{Allgemein: } \mathbb{P}[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_l}] = \frac{(n-l)!}{n!}$$

Siebformel: $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_n] = n * \frac{1}{n} - \binom{n}{2} * \frac{(n-2)!}{n!} + \frac{(n-3)!}{n!} - \dots$

$$= \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} * \frac{(n-l)!}{n!} * (-1)^{l+1} = \sum_{l=1}^n \frac{(-1)^{l+1}}{l!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

Für $n \rightarrow \infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A] = 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots$

$$= 1 - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \right) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.632$$

3.2 Ungleichungen für Wahrscheinlichkeiten

$$\mathbb{P}[\Omega] = 1$$

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \dots] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + \dots$$

falls $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$

7.:

$$\forall A \subset B \subset \Omega \Rightarrow \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$$

Beweis: $B = A \cup (B \setminus A)$ (disjunkt)

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A] + \underbrace{\mathbb{P}[B \setminus A]}_{\geq 0} \geq \mathbb{P}[A] \quad \square$$

8.:

$$\forall A, B \subset \Omega : \mathbb{P}[A \cup B] \leq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$$

Allgemeiner: $\forall A_1, \dots, A_n \subset \Omega : \mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_n] \leq \mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_n]$

9.: Noch allgemeiner:

$$\forall A_1, A_2, \dots \subset \Omega : \mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_k]$$

Beweis:

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$

$$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$$

...

Dann gilt:

$$\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}_{\text{Nicht disj.}} = \underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k}_{\text{disj.!!!}}$$

$$\mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k] = \mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k] \stackrel{\text{Axiom}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[B_k] \underset{B_k \subset A_k}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_k] \quad \square$$

4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeiten

Beispiel: 2 faire Würfel

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^2 \quad \#\Omega = 36$$

Ereignis A = "Erster Würfel zeigt eine 6"

Ereignis B = "Augensumme = 10"

Jemand teilt uns mit: B ist eingetreten.

$$A = \{(6, 1), (6, 2), \dots, (6, 6)\} \quad \#A = 6$$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6} \quad B = \{ \underbrace{(6, 4)}_{A \text{ tritt ein}}, (5, 5), (4, 6) \}$$

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{1}{3}$$

Definition:

Seien $A, B \subset \Omega$.

Die bedingte Wahrscheinlichkeit von A gegeben B ist definiert als:

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

Annahme: $\mathbb{P}[B] \neq 0$

Beispiel:

Fairer Würfel wird 10x geworfen.

Uns wird mitgeteilt, dass mindestens eine 6 gewürfelt wurde.

Bedingte Wkeit, dass der erste Wurf eine 6 war = ?

Lösung:

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_{10}) : a_i \in \{1, \dots, 6\}\} \quad \#\Omega = \overbrace{6 * 6 * \dots * 6}^{10} = 6^{10}$$

B = "mindestens eine 6 gewürfelt"

$$B^C = \text{"keine 6 gewürfelt"} = \{(a_1, \dots, a_{10}) : a_i \in \{1, 2, \dots, 5\}\}$$

$$\#B = 6^{10} - 5^{10} \quad \#B^C = 5^{10}$$

$$\mathbb{P}[B] = \frac{6^{10} - 5^{10}}{6^{10}}$$

4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeiten

$A = \text{"der erste Wurf ist eine 6"} = \{(6, a_2, \dots, a_{10}) : a_i \in \{1, \dots, 6\}\}$

$$\#A = 1 * \underbrace{6 * 6 * \dots * 6}_{9\text{-mal}} = 6^9$$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{6^9}{6^{10}} = \frac{1}{6}$$

$$A \cap B = A$$

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{6^9}{6^{10} - 5^{10}} = 0,19$$

$$\mathbb{P}[A|B] = 0,19$$

$$\mathbb{P}[A] = 0,16$$

$$\text{Alternativ: } \mathbb{P}[A|B] = \frac{\#(A \cap B)}{\#B}$$

4.1 Eigenschaften der bedingten Wahrscheinlichkeiten

$$1. \mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \leq 1 \text{ (und } \geq 0)$$

$$2. \mathbb{P}[\Omega|B] = \frac{\mathbb{P}[\Omega \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[B]} = 1$$

$$\mathbb{P}[\emptyset|B] = 0$$

3. Falls A_1, A_2, \dots disj. sind, gilt:

$$\mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) | B\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\mathbb{P}[(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

$$= \frac{\mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap B)]}{\mathbb{P}[B]}$$

$$\stackrel{A_1 \cap B, A_2 \cap B, \dots \text{disj.}}{=} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_k \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}[A_k \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_k|B] \quad \square$$

$$4. \mathbb{P}[A^C|B] = 1 - \mathbb{P}[A|B]$$

5. Multiplikationsregel:

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = \mathbb{P}[A_1] * \mathbb{P}[A_2|A_1]$$

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = \mathbb{P}[A_1] * \mathbb{P}[A_2|A_1] * \mathbb{P}[A_3|(A_1 \cap A_2)]$$

4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeiten

Beispiel:

Sterbewahrscheinlichkeiten q_0, q_1, \dots

q_n = Wahrscheinlichkeit, als eine n-jährige Person, das Alter n+1 nicht zu erreichen.

$$q_0 = 0,0046$$

Wkeit, dass eine Person ≥ 50 alt wird

$$q_1 = 0,0004$$

$$q_2 = 0,0002$$

Lösung:

A_n := "Person hat das Alter von n Jahren erreicht"

$$\mathbb{P}[A_{50}] = ?$$

Gegeben sind $q_n = \mathbb{P}[A_{n+1}^C | A_n]$ $1 - q_n = \mathbb{P}[A_{n+1} | A_n]$

$$\mathbb{P}[A_{50}] = \mathbb{P}[A_1] * \mathbb{P}[A_2 | A_1] * \mathbb{P}[A_3 | (A_1 \cap A_2)] * \mathbb{P}[A_4 | \underbrace{(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}_{A_3}] * \dots *$$

$$\mathbb{P}[A_{50} | \underbrace{(A_1 \cap \dots \cap A_{49})}_{A_{49}}]$$

$$= (1 - q_0) * (1 - q_1) * \dots * (1 - q_{49})$$

$$\mathbb{P}[\text{Person lebt genau 50 Jahre}] = (1 - q_0) * (1 - q_1) * \dots * (1 - q_{49}) * q_{50} \quad \square$$

4.2 Unabhängige Ereignisse

Zwei Formeln:

1. $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$, falls $A \cap B = \emptyset$
2. $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B]$, falls A und B unabhängig

Bemerkung: Disjunkt und unabhängig sind verschiedene Begriffe.

Seien A, B disjunkt (d.h. $A \cap B = \emptyset$)

$$\Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}[A \cap B]}_{\emptyset} = 0 \neq \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B]$$

\Rightarrow A und B abh. (Falls $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] \neq 0$)

Definition:

Ereignisse A,B,C heißen

- paarweise unabhängig, wenn $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B]$, $\mathbb{P}[A \cap C] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[C]$, $\mathbb{P}[B \cap C] = \mathbb{P}[B] * \mathbb{P}[C]$
- unabhängig, wenn zusätzlich: $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B] * \mathbb{P}[C]$

unabhängig \Rightarrow paarweise unabhängig

Beispiel:

3 Ereignisse, die paarweise unabhängig, aber nicht unabhängig sind.

3 Würfel: x_1, x_2, x_3 seien die 3 Augenzahlen

$$A = \{x_1 = x_2\} \quad B = \{x_2 = x_3\} \quad C = \{x_3 = x_1\}$$

$$\Omega = \{1, \dots, 6\}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \{1, \dots, 6\}\} \quad \#\Omega = 6^3$$

$$A = \{(a, a, c) : a, c \in \{1, \dots, 6\}\}$$

$$B = \{(a, b, b) : a, b \in \{1, \dots, 6\}\}$$

$$C = \{(a, b, a) : a, b \in \{1, \dots, 6\}\}$$

$$\#A = 6^2 \quad \#B = 6^2 \quad \#C = 6^2$$

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[C] = \frac{6^2}{6^3} = \frac{1}{6}$$

Behauptung: Seien A, B, C paarweise unabhängig. Wir zeigen: $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B]$

$$A \cap B = \{x_1 = x_2, x_2 = x_3\} = \{x_1 = x_2 = x_3\} = \{(a, a, a) : a \in \{1, \dots, 6\}\}$$

$$\#(A \cap B) = 6$$

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B] \Rightarrow A \text{ und } B \text{ unabh}$$

Behauptung: Seien A, B, C abhängig.

$$A \cap B \cap C = \{x_1 = x_2, x_2 = x_3, x_3 = x_1\} = \{x_1 = x_2 = x_3\} \quad \#(A \cap B \cap C) = 6$$

$$\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} \neq \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B] * \mathbb{P}[C] \Rightarrow A, B, C \text{ abhängig}$$

4.2.1 Eigenschaften der Unabhängigkeit

Seien A, B unabhängige Ereignisse. Dann sind

- A und B^C unabhängig
- A^C und B unabhängig
- A^C und B^C unabhängig

Beweis: Wir zeigen A und B^C sind unabhängig

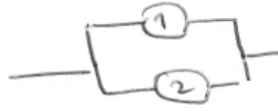
$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A \cap B^C] &= \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[A \cap B] \stackrel{A, B \text{ unabh}}{=} \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B] \\ &= \mathbb{P}[A] * (1 - \mathbb{P}[B]) = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B^C] \Rightarrow A, B^C \text{ unabhängig} \quad \square \end{aligned}$$

Weitere **Behauptungen:** Seien A, B, C unabhängig. Dann sind:

- $A, B \cup C$ unabhängig
- $A, B \cap C$ unabhängig
- $A, B \Delta C$ unabhängig

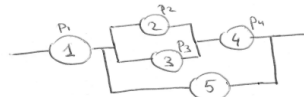
4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeiten

Beispiel: Zuverlässigkeit: System besteht aus n Komponenten $1, \dots, n$
 Wahrscheinlichkeit, dass Komponente i ausfällt ist $\mathbb{P}[A_i] = p_i$



a) Parallelschaltung

$$\mathbb{P}[\text{Ausfall des Systems}] = \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = p_1 p_2$$



b) Reihenschaltung

$$\mathbb{P}[\text{Ausfall des Systems}] = \mathbb{P}[\underbrace{A_1 \cup A_2}_{\text{nicht disj., unabh.}}] = 1 - \mathbb{P}[(A_1 \cup A_1)^C] \stackrel{\text{de Morgan}}{=} 1 - \mathbb{P}[A_1^C \cap A_2^C]$$

$$\begin{aligned} & 1 - \mathbb{P}[\underbrace{A_1^C \cap A_2^C}_{\text{unabh.}}] \\ &= 1 - \mathbb{P}[A_1^C] * \mathbb{P}[A_2^C] \\ &= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2 \end{aligned}$$

$$\mathbb{P}[\text{Ausfall}] = ?$$

Ereignis, dass das System ausfällt:

$$A = \text{Ausfall des Systems} = A_1 \cup (A_5 \cap (A_4 \cup (A_2 \cap A_3)))$$

$$\mathbb{P}[A] = ?$$

$$\mathbb{P}[2 \text{ und } 3 \text{ fällt aus}] = p_2 p_3$$

$$\mathbb{P}[2, 3, 4 \text{ fällt aus}] = p_2 p_3 + p_4 - p_2 p_3 p_4$$

$$\mathbb{P}[2, 3, 4, 5 \text{ fällt aus}] = (p_2 p_3 + p_4 - p_2 p_3 p_4) p_5$$

$$\mathbb{P}[A] = p_1 + p_{\text{Rest}} - p_1 p_{\text{Rest}} = \dots \quad (\text{Prof sagt trivial})$$

□

Definition: n Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_n sind

- paarweise unabhängig, wenn $\mathbb{P}[A_i \cap A_j] = \mathbb{P}[A_i] * \mathbb{P}[A_j] \forall i \neq j$
- unabhängig, wenn: $\forall m \in \{2, \dots, n\} \forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$

$$\mathbb{P}[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}] = \mathbb{P}[A_{i_1}] * \dots * \mathbb{P}[A_{i_m}]$$

(D.h. Produktformel gilt für alle Teilfamilien)

4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeiten

Behauptung: Blockungslemma

Beispiel: Seien A, B, C, D, E, F, G unabhängige Ereignisse.

$$(A \Delta C) \cap E^C \cup C, B^C \cap F, D \cup G \quad \text{unabhängig}$$

Aber: $A \Delta C$ und $B \cup C$ sind im Allgemeinen abhängig

Bemerkungen:

Ω und A sind immer unabhängig.

$$\mathbb{P}[\Omega \cap A] = \mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[\Omega] * \mathbb{P}[A]$$

\emptyset und A sind immer unabhängig

$$\mathbb{P}[\emptyset \cap A] = \mathbb{P}[\emptyset] = 0 = \mathbb{P}[\emptyset] * \mathbb{P}[A]$$

5 Satz von Bayes

Satz: Formel der totalen Wahrscheinlichkeit

Sei $\Omega = B_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} B_n$ disjunkte Zerlegung von Ω , d.h. $B_i \cap B_j = \emptyset \forall i \neq j$ und $\Omega = B_1 \cup \dots \cup B_n$

Sei $P[B_i] \neq 0 \forall i$

Sei $A \subset \Omega$ ein weiteres Ereignis. Dann gilt:

$$P[A] = P[B_1] * P[A|B_1] + P[B_2] * P[A|B_2] + \dots$$

Beweis: $P[A] = P[A \cap B_1] + P[A \cap B_2] + \dots = P[B_1] * P[A|B_1] + P[B_2] * P[A|B_2] + \dots$ □

Beispiel:

1% der Population ist krank, Rest ist gesund

Schnelltest: Bei einer kranken Person mit Wahrscheinlichkeit 90% positiv.

Bei einer gesunden Person mit Wahrscheinlichkeit 20% positiv

$A = \text{"Test ist Positiv"}$ $P[A] = 0,001 * 0,9 + 0,99 * 0,2 = 0,207$

Lösung mit der Formel

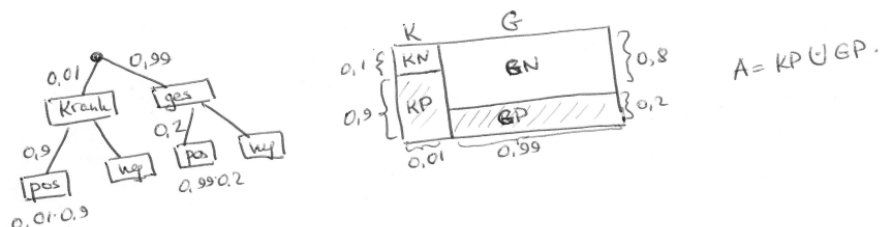
$B_1 = \text{"Person krank"}$ $B_2 = \text{"Person gesund"}$

$P[B_1] = 0,01 \Rightarrow P[B_2] = 0,99$

$P[A|B_1] = 0,9$ [nicht $P[A \cap B_1]$] $P[A|B_2] = 0,2$

$P[A] = P[B_1] * P[A|B_1] + P[B_2] * P[A|B_2]$

$= 0,01 * 0,9 + 0,99 * 0,2$



5.1 Bayes-Formel

Satz 2.2:

Seien $A, B \subset \Omega$ zwei Ereignisse mit $\mathbb{P}[A] \neq 0, \mathbb{P}[B] \neq 0$. Dann gilt:

$$\mathbb{P}[B|A] = \frac{\mathbb{P}[A|B] * \mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A]}$$

Beweis: Linke Seite = $\mathbb{P}[B|A] = \frac{\mathbb{P}[B \cap A]}{\mathbb{P}[A]}$

Rechte Seite = $\frac{\mathbb{P}[A|B] * \mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[A]} = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[A]} \quad \square$

Beispiel 1: (Population Personen: krank und gesund)

1% der Population ist krank.

Schnelltest: Bei einer Kranken Person mit Wahrscheinlichkeit 90% positiv.

Bei einer gesunden Person mit Wahrscheinlichkeit 20% positiv

Eine gesunde Person wurde positiv getestet.

Wahrscheinlichkeit, dass diese Person krank ist?

Lösung 1:

Ω = Population

B_1 = "Person ist krank"

$B_2 = B_1^C$ = "Person ist gesund"

A = "Person wurde positiv getestet"

Aufgabenstellung: $\mathbb{P}[B_1] = 0,01 \Rightarrow \mathbb{P}[B_2] = 1 - 0,01 = 0,99$

1. $\mathbb{P}[A|B_1] = 0,9$

2. $\mathbb{P}[A|B_2] = 0,2$

$\mathbb{P}[B_1|A] = ?$

Bayes-Formel: $\mathbb{P}[B_1|A] \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{\mathbb{P}[A|B_1] * \mathbb{P}[B_1]}{\mathbb{P}[A]} \stackrel{\text{totale Wkeit}}{=}$

$$\frac{\mathbb{P}[A|B_1] * \mathbb{P}[B_1]}{\mathbb{P}[A|B_1] * \mathbb{P}[B_1] + \mathbb{P}[A|B_2] * \mathbb{P}[B_2]} = \frac{0,9 * 0,01}{0,9 * 0,01 + 0,2 * 0,99} = 0,043$$

$\mathbb{P}[B_2|A] = 1 - \mathbb{P}[B_1|A] = 1 - 0,043$

Lösung 2:

$\mathbb{P}[A] = 0,01 * 0,9 + 0,99 * 0,2 = 0,207$

$\mathbb{P}[\text{krank}|\text{positiv getestet}] = \frac{0,01 * 0,9}{0,01 * 0,9 + 0,99 * 0,2} = 0,043$

5 Satz von Bayes

Lösung 3:

Laplace-Experiment mit $\Omega = \{KP, KN, GP, GN\}$

$$P(KP) = 0,9 \cdot 0,01$$

$$P(GP) = 0,2 \cdot 0,99$$

$$P(KN) = 0,1 \cdot 0,01$$

$$P(GN) = 0,8 \cdot 0,99$$

$$A = \text{"Person positiv"} = \{KP, GP\}$$

$$B_1 = \text{"Person krank"} = \{KP, KN\}$$

$$P[B_1|A] = \frac{P[B_1 \cap A]}{P[A]} = \frac{P(KP)}{P(KP) + P(GP)} = \dots$$

Beispiel 2: (2 Jungen Problem)

Im Nachbarhaus: Familie mit 2 Kindern.

Sie beobachten: Im Garten spielt ein Junge.

Wkeit, dass das andere Kind auch ein Junge ist = ?
d.h. beide sind Jungen

Lösung:

Grundmenge: $\Omega = \{MM1, MM2, MJ1, MJ2, JM1, JM2, JJ1, JJ2\}$

MM1 = Beides Mädchen, erste Kind im Garten

$$B = \text{"Im Garten spielt ein Junge"} = \{MJ2, JM1, JJ1, JJ2\}$$

$$A = \text{"Beide Kinder sind Jungen"} = \{JJ1, JJ2\} \quad A \cap B = \{JJ1, JJ2\}$$

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{2/8}{4/8} = 0.5$$

Beispiel 3: (Ziegenproblem)

3 Türen Hinter einer Tür \rightarrow Auto
 Hinter den beiden anderen \rightarrow Ziegen

Sie zeigen auf Tür 1. (Tür 1 bleibt aber geschlossen)

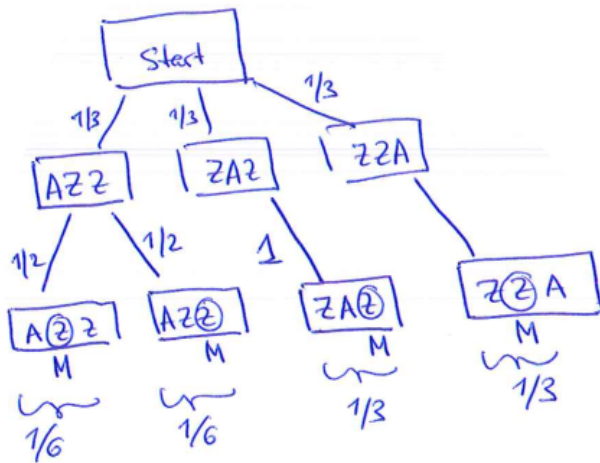
Moderator öffnet eine der beiden anderen Türen \rightarrow Ziege.

Sie dürfen bei Tür 1 bleiben oder wechseln. Was ist besser?

Aufgabenstellung ist unvollständig. Wir machen die Annahme: Moderator weiß, wo das Auto steht und will das Auto nicht zeigen.

5 Satz von Bayes

Lösung:



$$\Omega = \{AZZ, AZZ, ZAZ, ZZA\}$$

Dick geschrieben: Vom Moderator gewählt

$$p(AZZ) = \frac{1}{3} * \frac{1}{2}$$

$$p(AZZ) = \frac{1}{3} * \frac{1}{2}$$

$$p(ZAZ) = \frac{1}{3} * 1$$

$$p(ZZA) = \frac{1}{3} * 1$$

$$P[\text{Auto hinter Tür 1}] = p(AZZ) + p(AZZ) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P[\text{Türwechsel führt zum Erfolg}] = p(ZAZ) + p(ZZA) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Also wechseln!

6 Zufallsvariablen

Definition:

Eine ZV ist eine Funktion $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Beispiel:

2 Würfel. $\Omega = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \{1, \dots, 6\}\}$

Erste Augenzahl: $X_1(a_1, a_2) = a_1$

Zweite Augenzahl $X_2(a_1, a_2) = a_2$

Augensumme: $X(a_1, a_2) = a_1 + a_2 \quad x = x_1 + x_2$

Größe Augenzahl: $y(a_1, a_2) = \max(a_1, a_2)$

In dieser Vorlesung sei Ω immer endlich

Definition:

Eine Verteilung einer ZV X ist die Angabe der Werte und der Wahrscheinlichkeiten dieser Werte.

Zähldichte von $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist $P_x : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$P_x(t) = \underbrace{\mathbb{P}[x = t]}_{\text{Er.}} = \mathbb{P}[\underbrace{\{w \in \Omega : X(w) = t\}}_{x^{-1}(t)}]$$

Beispiel: 2 Würfel. $x(a_1, a_2) = a_1 + a_2$ Augensumme

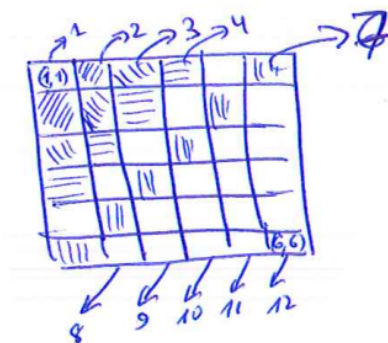
t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}[x = t]$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$\{x=2\} = \{(1,1)\}$

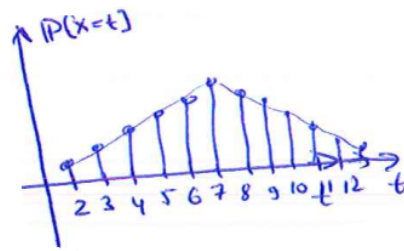
$\{x=3\} = \{(1,2), (2,1)\}$

$\{x=4\} = \{(1,3), (3,1), (2,2)\}$

...

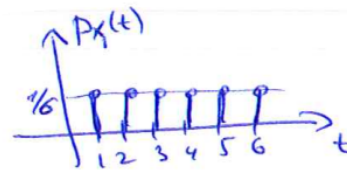


$$P_x(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{36} & , t \in \{2, \dots, 7\} \\ \frac{13-t}{36} & , t \in \{7, \dots, 12\} \\ 0, t \notin \{2, \dots, 12\} \end{cases}$$



Für die erste Augenzahl $x_1(a_1, a_2) = a_1$

t	1	2	3	4	5	6
$P[=]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$



Eigenschaften der Zähldichte:

1. $P_x(t) \in [0, 1]$
2. $\sum_{t \in \mathbb{R}} P_x(t) = 1$

Beispiel: Sei $A \subset \Omega$

Indikatorvariable von A:

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

Grafik und Tabelle indikatorvariable

Definition: Sei X ZV mit Verteilung

Werte	y_1	y_2	y_3	...
Wahrscheinlichkeiten	P_1	P_2	P_3	...

$$P[x = y_i] = p_i$$

$$\text{Erwartungswert von X ist } EX = \sum_i \underbrace{y_i}_{\text{Werte}} \underbrace{P_i}_{\text{Wkeiten}}$$

Beispiel: 1 Würfel, x_1 Augenzahl

$$EX_1 = 1 * \frac{1}{6} + 2 * \frac{1}{6} + \dots + 6 * \frac{1}{6} = 3,5$$

EX ist **nicht** der wahrscheinlichste Wert: $P[X = 3, 5] = 0$

Bemerkung:

Betrachte $n = 10^6$ Würfe. Augenzahlen: X_1, X_2, \dots, X_n

Dann gilt $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \approx 3.5$

Satz 9.1 [alternative Formel für EX]

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$EX = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \underbrace{P[\{\omega\}]}_{p(\omega)}$$

6 Zufallsvariablen

Beweis: Seien y_1, \dots, y_m Werte von X

$$A_1 = \{X = y_1\}, \dots, A_m = \{X = y_m\}$$

$$A_i = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = y_i\}$$

$\Omega = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_m$ ist disjunkte Zerlegung

$$\mathbb{E}X \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_i y_i * p_i = \sum_i y_i \mathbb{P}[A_i]$$

$$\sum_i y_i \sum_{\omega \in A_i} p(\omega) \stackrel{w \in A_i}{=} \sum_i \sum_{\omega \in A_i} X(\omega) p(\omega)$$

$$\Rightarrow X(\omega) = y_i$$

Satz 9.2. Seien $x, y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ Zufallsvariablen

Dann gilt: $\mathbb{E}[x + y] = \mathbb{E}X + \mathbb{E}y$

Beweis:

$$\mathbb{E}[x + y] \stackrel{9.1}{=} \sum_{\omega \in \Omega} (x + y)(\omega) * p(\omega) =$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + y(\omega))p(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) * p(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} y(\omega) * p(\omega) \stackrel{9.1}{=} \mathbb{E}X + \mathbb{E}y \quad \square$$

Bemerkung: Allgemein: Für ZV $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_n$

Bemerkung: Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, \mathbb{E}[a * X] = a * \mathbb{E}X$

Beispiel: n Würfel. Augenzahlen: X_1, \dots, X_n Augensumme: $S = X_1 + \dots + X_n$

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}X_1 + \dots + \underbrace{\mathbb{E}X_n}_{=3,5} = n * 3,5$$

Beispiel: Lotto 6 aus 49. (ohne Zurücklegen) Tippe auf $\{1, \dots, 6\}$

Sei S die Anzahl der richtig geratenen Zahlen.

Werte von S : $0, 1, \dots, 6$

$$\mathbb{P}[S = k] = \frac{\binom{6}{k} * \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}, \text{ für } k \in \{0, \dots, 6\}$$

$S = X_1 + \dots + X_6$, wobei

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Ball } i \text{ gezogen wurde} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}S \stackrel{9.2}{=} \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_6$$

Bemerkung:

$$\mathbb{E}1_A = \frac{0}{1 - \mathbb{P}[A]} \Big| \frac{1}{\mathbb{P}[A]} = \mathbb{P}[A]$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_i &= \mathbb{P}[\text{Ball } i \text{ wurde gezogen}] \\ &= \frac{\binom{48}{5}}{\binom{49}{6}} = \frac{\left(\frac{48 * 47 * 46 * 45 * 44}{5!}\right)}{\left(\frac{48 * 47 * 46 * 45 * 44}{6!}\right)} = \frac{6!/5!}{49} = \frac{6}{49} \quad \forall i \in \{1, \dots, 6\} \end{aligned}$$

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_6 = 6 * \frac{6}{49} = \frac{36}{49}$$

Definition:

Seien $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ZV

Sie heißen unabhängig, falls:

$$\begin{aligned} \forall y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R} : \quad & \mathbb{P}[X_1 = y_1, X_2 = y_2, \dots, X_n = y_n] \\ &= \mathbb{P}[X_1 = y_1] * \dots * \mathbb{P}[X_n = y_n] \end{aligned}$$

Bemerkung: Sind X_1, \dots, X_n unabhängig, dann gilt sogar:

$$\begin{aligned} \forall A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R} : \quad & \mathbb{P}[X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n] \\ &= \mathbb{P}[X_1 \in A_1] * \dots * \mathbb{P}[X_n \in A_n] \end{aligned}$$

Satz 9.3:

Seien $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ **unabhängige** Zufallsvariablen

Dann gilt: $\mathbb{E}[X * Y] = \mathbb{E}X * \mathbb{E}Y$

2 Eigenschaften:

1. $\mathbb{E}[x + y] = \mathbb{E}x + \mathbb{E}y \quad \forall x, y$
2. $\mathbb{E}[x * y] = \mathbb{E}x * \mathbb{E}y \quad \forall \text{unabh. } x, y$

Beweis:

Notation:

$$\text{Werte von X: } \begin{array}{|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & \dots \\ \hline p_1 & p_2 & \dots \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbb{P}[X = x_i] = p_i$$

$$\text{Werte von Y: } \begin{array}{|c|c|c|} \hline y_1 & y_2 & \dots \\ \hline q_1 & q_2 & \dots \\ \hline \end{array}$$

$$\mathbb{P}[Y = y_j] = p_j$$

6 Zufallsvariablen

Betrachte Ereignisse: $A_{ij} = \{X = x_i, Y = y_j\}$
 $= \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j\}$

A_{11}	A_{21}	A_{31}	A_{41}	$\{Y=y_1\}$	
A_{12}	A_{22}	A_{23}	...		$\{Y=y_2\}$
...		$\{Y=y_3\}$

$\Omega = \dot{\bigcup}_{i,j} A_{ij}$, d.h. A_{ij} bilden disjunkte Zerlegung von Ω

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x * y] &\stackrel{9.1}{=} \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) * X(\omega) * Y(\omega) = \\ &= \sum_{i,j} \sum_{\omega \in A_{ij}} (p(\omega) * X(\omega) Y(\omega) x_i y_j) = \\ &= \sum_{i,j} (x_i y_j \sum_{\omega \in A_{ij}} p(\omega)) = \sum_{i,j} x_i y_j \mathbb{P}[A_{ij}] \\ \mathbb{P}[A_{ij}] &= \mathbb{P}[X = x_i, Y = y_j] \stackrel{x,y \text{ unabh. ZV}}{=} \mathbb{P}[X = x_i] * \mathbb{P}[Y = y_j] = p_i * q_j \\ &= \sum_{i,j} x_i y_j p_i q_j = \sum_{i,j} (x_i p_i) (y_j q_j) \\ &= (\sum_i x_i p_i) (\sum_j y_j q_j) = \mathbb{E}X * \mathbb{E}Y \quad \square \end{aligned}$$

Beispiel: (zur Unabhängigkeit von Zufallsvariablen)

Betrachte n faire Würfel

X_i ist die Augenzahl, die der i -te Würfel zeigt

$\Omega = \{(a_1, \dots, a_n)\}$ def $X_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$

Behauptung 1: Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n sind unabhängig

Beweis 1:

Z.z. $\mathbb{P}[X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n] = \mathbb{P}[X_1 = x_1] * \dots * \mathbb{P}[X_n = x_n]$

$$\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = \begin{cases} (x_1, \dots, x_n), & \text{falls } \forall i : x_i \in \{1, \dots, 6\} \\ \emptyset, & \text{falls } \exists i : x_i \notin \{1, \dots, 6\} \end{cases}$$

$$LS = \begin{cases} \frac{1}{6^n}, & \text{falls } \forall i : x_i \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

RS: $\mathbb{P}[X_1 = x_1] = ?$

$$\{X_1 = x_1\} = \begin{cases} \{(x_1, a_2, \dots, a_n) : a_2, \dots, a_n \in \{1, \dots, 6\}\}, & \text{falls } x_1 \in \{1, \dots, 6\} \\ \emptyset, & \text{falls } \exists i : x_i \notin \{1, \dots, 6\} \end{cases}$$

6 Zufallsvariablen

$$\#\{X_1 = x_i\} = \begin{cases} 6^{n-1}, & \text{falls } x_1 \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[X_1 = x_1] = \begin{cases} \frac{6^{n-1}}{6^n}, & \text{falls } x_1 \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{RS} = \begin{cases} \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \dots * \frac{1}{6} = \frac{1}{6^n}, & \text{falls } \forall A_i : x_i \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \exists i : x_i \notin \{1, \dots, 6\} \end{cases}$$

LS = RS $\Rightarrow X_1, \dots, X_n$ unabh. ZV.

Behauptung 2: Sei $S = X_1 + \dots + X_n$ die Augensumme.

Dann sind X_1 und S abhängige Zufallsvariablen

Beweis: Z.z. $\exists a, b$ mit $\mathbb{P}[X_1 = a, S = b] \neq \mathbb{P}[X_1 = a] * \mathbb{P}[S = b]$

Wir zeigen das für $a=1, b=6*n$

$$\text{LS: } \mathbb{P}[\underbrace{X_1 = 1, S = 6n}_{\text{Treten nicht gleichzeitig ein}}] = 0$$

$$\text{RS: } \mathbb{P}[X_1 = 1] = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}[S = 6n] = \frac{1}{6^n}$$

$$\text{RS} = \frac{1}{6} * \frac{1}{6^n} \neq 0$$

LS \neq RS $\Rightarrow X_1, S$ abh.

□

7 Harmonische Reihe

7.1 Harmonische Reihe

Definition: Harmonische Zahlen $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$
 Harmonische Reihe: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n$

7.1.1 Satz 10.1

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = +\infty \quad H_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

d.h. $\forall A$ (egal wie groß) $\exists n = n(A) : H_n \geq A$

Beweis:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{2 \text{ Terme}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ Terme}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ Terme}} + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{2 \text{ Terme}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ Terme}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ Terme}} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty \end{aligned}$$

$$H_2 \geq 1 + \frac{1}{2}, H_4 \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, H_8 \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$H_{2^l} \geq 1 + \frac{l}{2}$$

$$A = 7 * 10^6 \quad 1 + \frac{l}{2} \geq A \quad l \geq 2A - 2$$

$$H_{2^{1+10^6-2}} \geq 7 * 10^6$$

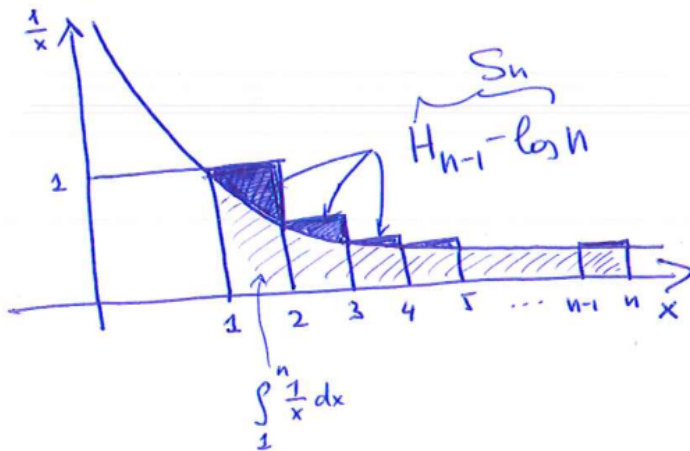
7.1.2 Satz 10.2, Euler, 1734

$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}}_{H_n \rightarrow \infty} - \underbrace{\log n}_{\rightarrow \infty}$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen eine Konstante.

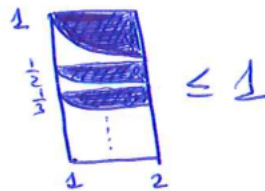
Bemerkung: Die Konstante $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \log n) = 0,57721 \dots$ heißt Euler-Mascheroni-Konstante

Beweis: $\int_1^n \frac{1}{x} dx = (\log x) \Big|_1^n = \log n - \underbrace{\log 1}_0 = \log n$

7 Harmonische Reihe



$H_{n-1} - \log n = \text{Fläche } S_n$
 $S_1 < S_2 < S_3 < \dots$



Außerdem: $S_n \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$
 D.h. $\exists \lim S_n$ existiert und ist ≤ 1 und ≥ 0

$H_n - \log n = \underbrace{H_{n-1} - \log n}_{\text{Konv. für } n \rightarrow \infty} + \underbrace{\frac{1}{n}}_0$, also konvergiert $H_n - \log n$ gegen einem

Limes, der zwischen 0 und 1 liegt. □

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + \underbrace{\varepsilon_n}_{\text{Fehler der Appr.}}$, wobei $\varepsilon_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$

7.2 Alternierende harm.Reihe

Alternierende harm. Reihe: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$

Beweis:

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n}$$

$$S_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = H_{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= H_{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = H_{2n} - H_n =$$

$$= (\log 2n + \gamma + \varepsilon_{2n}) - (\log n + \gamma + \varepsilon_n)$$

Kor.

$$= \log 2n - \log n + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n$$

$$= \log 2 + \underbrace{\varepsilon_{2n}}_0 - \underbrace{\varepsilon_n}_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \log 2$$

7 Harmonische Reihe

Aufgabe: Schnecke und Auto

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$$

[GRAFIK schneckeUndAuto Einfügen]

Zeige: Schnecke überholt das Auto in endlicher Zeit

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}} \dots = \frac{3}{2} \log 2$$

Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$

Beispiel: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ ist konvergent aber nicht absolut konvergent.

Satz: In einer absolut konvergenten Reihe kann man die Terme umordnen, ohne dass sich die Summe ändert.

Riemann'scher Umordnungssatz: $\forall a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Umordnung der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$, die gegen a konvergiert.

Beweis: Sei $a \geq 0$

Ungerade Terme: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$ $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots = \infty$

Gerade Terme: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \infty$

Nehme ungerade Terme bis die Summe $\geq a$ wird:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n_1} \geq a$$

Ziehe gerade Terme abm bis die Summe $\leq a$ wird

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{m_1} \leq a$$

Addiere ungerade Terme bis die Summe wieder $\geq a$ wird

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{m_1} + \frac{1}{n_1+2} + \frac{1}{n_1+4} + \dots + \frac{1}{n_2} \geq a$$

usw. □

Bemerkung Über EWert von ZV mit abzählbar ∞ -vielen Werten

Betrachte ZV X: Werte:

x_1	x_2	x_3	\dots
p_1	p_2	p_3	\dots

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i?$$

Problem: Keine "kanonische" Reihenfolge der Werte x_i Wenn $\sum_{i=1}^{\infty}$ nicht absolut konv. \Rightarrow kann sich das Ergebnis durch Umordnung ändern

Definition: Sei X ZV wie oben Def.

$$S_+ = \sum_{i: x_i \geq 0} x_i p_i, \quad S_- = \sum_{i: x_i < 0} |x_i| p_i$$

7 Harmonische Reihe

$$\mathbf{F\ddot{a}lle:} \begin{cases} EX \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = S_+ - S_-, & \text{falls } S_+ < \infty, s_- < \infty \\ EX \stackrel{\text{def}}{=} +\infty, & \text{falls } S_+ = \infty, s_- < \infty \\ EX \stackrel{\text{def}}{=} -\infty, & \text{falls } S_+ < \infty, S_- = \infty \\ EX \text{ nicht definiert,} & \text{falls } S_+ = \infty, S_- = \infty \end{cases}$$

8 Diskrete Verteilungen

8.1 Uniforme Verteilungen

Definition:

ZV X heißt uniform, falls verteilt auf der Menge $\{x_1, \dots, x_n\}$ ($x_i \in \mathbb{R}$), falls:

$$\mathbb{P}[X = x_i] = \frac{1}{n} \forall i = 1, \dots, n$$

Bemerkung: $\mathbb{E}X = x_1 * \frac{1}{n} + x_2 * \frac{1}{n} + \dots + x_n * \frac{1}{n} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ [arithmetisches Mittel]

Beispiel:

Sei X uniform verteilt auf $\{1, 2, \dots, n\}$ $\mathbb{E}X = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} =$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)/2}{n} = \frac{n+1}{2}$$

[GRAFIK Treppe Einfügen]

$$= \frac{n^2}{n} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)$$

$$n = 1 : 1$$

$$n = 2 : 1 + 3 = 4$$

$$n = 3 : 1 + 3 + 5 = 9$$

... Vermutung: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

Proof by picture:

[GRAFIK proofByPicture Einfügen]

8.2 Binomialverteilung

Ein Bernoulli-Exp: Zwei Ausgänge $\underbrace{\text{Erfolg (oder 1)}}_p$ und $\underbrace{\text{Misserfolg (0)}}_{1-p}$

Definition:

ZV X heißt Bernoulli-verteilt, falls

$$\mathbb{P}[x = 1] = p, \mathbb{P}[x = 0] = 1 - p$$

Bez: $x \sim \text{Bern}(p)$

$$\mathbb{E}X = 1 * p + 0 * (1 - p) = p$$

8 Diskrete Verteilungen

Nn betrachte n unabh. Bern-Exp. Grundmenge: $\Omega = \{(0, 1)^n : a_i \in \{0, 1\}\}$

$$\mathbb{P}[(0, 0, 1, 0, 1, 1)] = (1-p) * (1-p) * p * (1-p) * p * p = p^3(1-p)^3$$

$$\mathbb{P}[(A_1, \dots, a_n)] = p^k(1-p)^{n-k}, \text{ wobei } K = a_1 + \dots + a_n (\text{Anzahl Erfolge})$$

Für $p = \frac{1}{2} \Rightarrow$ LaPlace-Experiment

Für $p \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$ kein LaPlace-Experiment

Satz 11.1

Sei X die Anzahl der Erfolge in einem n-fachen Bernoulli-Experiment.

$$\text{Dann gilt: } \mathbb{P}[x = k] = \binom{n}{k} * p^k(1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Beispiel:

$$n = 4, k = 2$$

$$\mathbb{P}[(1, 1, 0, 0)] = p^2 * (1-p)^2 \quad (1, 0, 1, 0)$$

$$\mathbb{P}[(0, 1, 1, 0)] = p^2(1-p)^2 \quad (1, 0, 0, 1)$$

$$(0, 0, 1, 1)$$

Alle 6 Ausgänge haben Wkeit $p^2(1-p)^2$

Definition:

ZV X wie oben heißt binomialverteilt mit Param n und p

Bez: $x \sim \text{Bin}(n, p)$

Bemerkung: $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}[x = k] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \stackrel{\text{Bin. Formel}}{=} (p + 1 - p)^n = 1^n = 1$

Satz 11.2

Sei $X \sim \text{Bin}(n, p)$

Dann gilt $\mathbb{E}X = n * p$

Beweis:

$$\text{Sei } x_i = \begin{cases} 1 & , \text{ falls im i-ten Experiment Erfolg eintritt} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\underbrace{x}_{\substack{\text{Anzahl d. Erfolge} \\ \text{in Exp. 1, ..., i}}} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\mathbb{E}x = \mathbb{E}[x_1 + \dots + x_n] = \overbrace{\mathbb{E}x_1}^p + \dots + \overbrace{\mathbb{E}x_n}^p = n * p$$

$$\text{Dann } \mathbb{E}x_i = 1 * p + 0 * (1-p) = p$$

□

Beispiel: Werfe faire Münze n Mal

$$\mathbb{P}[\text{die Münze zeigt k mal Kopf}] = \binom{n}{k} * \left(\frac{1}{2}\right)^k * \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

Beispiel: Werfe fairen Würfel n Mal

$$\mathbb{P}[k \text{ Sechsen}] = \binom{n}{k} * \left(\frac{1}{6}\right)^k * \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

8 Diskrete Verteilungen

Beispiel: Betrachte Urne mit 10 roten und 20 schwarzen Bällen.
Wir ziehen 15 Bälle **mit** Zurücklegen.

Bestimme Wkeit, dass bei 8 Ziehungen roter Ball gezogen wurde

$n = 15$, $p = \frac{1}{3}$

Gesuchte Wkeit ist: $\binom{15}{8} * (\frac{1}{3})^8 * (\frac{2}{3})^7$

9 Geometrische Verteilung

Betrachte unendl. Folge von unabh. Bernoulli-Exp. mit Erfolgswkeit $p \in (0, 1]$
 $\Omega = \{0, 1\}^\infty = \{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in \{0, 1\}\}$

Zeitpunkt des ersten Erfolges: $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$T(a_1, a_2, \dots) = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n = 1\}$$

Z.b. $T(\underbrace{0}_{a_1}, \underbrace{0}_{a_2}, \underbrace{0}_{a_3}, \underbrace{0}_{a_4}, \underbrace{1}_{a_5}, \dots) = 5$

Vert von T? Werte von T: 1, 2, 3, ..., ∞

Satz 11.3

$$\forall k \in \{1, 2, \dots\} : \mathbb{P}[T = k] = p(1 - p)^{k-1}$$

Definition: T heißt geometrisch Verteilt mit Parameter p. Bez: $T \sim \text{Geo}(p)$

Beweis: Damit $T = k$ ist, muss die Serie wie folgt aussehen:

$$\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1 \text{ Misserfolge}}, \underbrace{1}_{\text{Erfolg}}, \dots$$

Sei x_i das Ergebnis des i-ten Experiments.

x_i ist ZV mit $\mathbb{P}[x_i = 1] = p, \mathbb{P}[x_i = 0] = 1 - p$. x_1, x_2 sind unabh. ZV

$$\mathbb{P}[T = k] = \mathbb{P}[x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{k-1} = 0, x_k = 1] \underset{x_1, \dots, x_n \text{ unabh ZV}}{=}$$

$$\mathbb{P}[x_i = 0] * \dots * \mathbb{P}[x_{k-1} = 0] * \mathbb{P}[x_k = 1]$$

$$= \underbrace{(1 - p) * \dots * (1 - p)}_{k-1} p = p(1 - p)^{k-1} \quad \square$$

Beispiel: Werfen eine fairen Münze bis zum ersten Mal Kopf.

$$T = \text{Anzahl der Würfe. } \mathbb{P}[T = k] \underset{p=\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2} * \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^k}, k = 1, 2, \dots$$

$$\textbf{Bemerkung: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

[GRAFIK GlasWasser Einfügen]

Exkurs über die geometrische Reihe

Aufgabe: Berechne $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$

Sei $A = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$

Betrachte: $qA = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}$

Abziehen:

$$A - qA = 1 - q^{n+1}$$

$$A(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

$$A = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \text{Für } q=1 : A = n + 1 \quad \square$$

Aufgabe: Berechne $1 + q + q^2 + q^3 + \dots$

Lösung: Sei $S = 1 + q + q^2 + \dots$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + q^2 + \dots + q^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \begin{cases} \frac{1}{1 - q} & , \text{ falls } |q| < 1 \\ +\infty & , \text{ falls } q > 1 \\ \text{existiert nicht} & , \text{ falls } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{Denn } \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } |q| < 1 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0 \\ 1 & , \text{ falls } q = 1 \\ +\infty & , \text{ falls } q > 1 \quad 2^n \rightarrow +\infty \\ \text{existiert nicht} & , \text{ falls } q \leq -1 \quad \text{divergiert} \end{cases}$$

Für $q = 1$: $S = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$

Bemerkung: Vorsicht mit der Reihe $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$. Sie divergiert.

Geometrische Verteilung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[T = k] = \sum_{k=1}^{\infty} p \underbrace{(1 - p)^{k-1}}_q = p \underbrace{(1 + q + q^2 + \dots)}_{\text{gelöst}} = p * \frac{1}{1 - q} = \frac{p}{p} = 1$$

Satz 11.4

Sei $T \sim \text{Geo}(p)$

$$\mathbb{E}T = \frac{1}{p}$$

Bemerkung:

$$p \downarrow 0 \Rightarrow \mathbb{E}T \rightarrow \infty$$

$$p = 1 \Rightarrow \mathbb{E}T = 1$$

Beweis:

$$\mathbb{E}T = \sum_{k=1}^{\infty} k * \mathbb{P}[T = k] = \sum_{k=1}^{\infty} k * p(1 - p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k * q^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 5q^4 + \dots \quad (\text{Entsteht durch Ableiten von } 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q})$$

9 Geometrische Verteilung

$$\begin{aligned}
 &= (1 + q + q^2 + q^3 + \dots)' = -\frac{1}{(1-q)^2} \\
 &= \left(\frac{1}{1-q}\right)' = -1 \frac{1}{(1-q)^2} * (1-q)' = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \\
 \mathbb{E}T &= p * \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} \quad \square
 \end{aligned}$$

Beispiel:

Werfe eine faire Münze, sie zum ersten mal Kopf zeigt. Wkeit, dass die Anzahl der Würfe gerade ist.

Lösung: $T \sim \text{Geo}(\frac{1}{2})$

$$\mathbb{P}[T \in \{2, 4, 6, \dots\}] = \mathbb{P}[T = 2] + \mathbb{P}[T = 4] + \dots$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots \\
 &= \frac{1}{1 - 1/4} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}
 \end{aligned}$$

Beispiel: Würfeln mit einem fairen Würfel bis zu ersten 6. Erwartete Anzahl der Würfe?

$$\text{Lösung: Erfolg} = 6 \quad p = \frac{1}{6} \mathbb{E}T = \frac{1}{1/6} = 6$$

Beispiel Sammler-Problem:

Jede Packung enthält ein Bild. Es gibt n mögl. Bilder, alle gleichwahrscheinlich.

Erwartete Anzahl an Packungen, die man kaufen muss, um alle Bilder zu sammeln.

Lösung:

$$\text{Wartezeit: } S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n$$

$$\text{mit } T_1 = 1, T_2 \sim \text{Geo}\left(\frac{n-1}{n}\right), T_3 \sim \text{Geo}\left(\frac{n-2}{n}\right), \dots, T_n \sim \text{Geo}\left(\frac{1}{n}\right)$$

Hier ist T_i die Wartezeit auf ein noch nie gesehenes Bild nachdem i-1 Bilder gesammelt wurden.

$$T_i \sim \text{Geo}\left(\frac{n-i+1}{n}\right)$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}S_n &= \mathbb{E}[T_1 + \dots + T_n] = \mathbb{E}T_1 + \mathbb{E}T_2 + \dots + \mathbb{E}T_n \\
 &= \underbrace{\frac{1}{n}}_{\frac{n}{n}} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{1} \\
 &= n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1\right) = n\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \quad \square
 \end{aligned}$$

$$\text{Für } n \rightarrow \infty \quad \frac{\mathbb{E}S_n}{n \log n} \rightarrow 1$$

Satz 11.5: Vergessenseigenschaft der Geo-Vert

$$\mathbb{P}[T > n + k | T > n] = \mathbb{P}[T > k] \quad \forall n, k \in \mathbb{N}, T \sim \text{Geo}(p)$$

$$[\text{auch: } \mathbb{P}[T > n + k | T > n] = \mathbb{P}[T > k]$$

$$\textbf{Beweis: } \mathbb{P}[T > k] = \mathbb{P}[\text{Versuche } 1, 2, \dots, k \text{ sind Misserfolge}] = (1 - p)^k$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T > n + k | T > n] &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}[T > n + k, T > n]}{\mathbb{P}[T > n]} = \frac{\mathbb{P}[T > n + k]}{\mathbb{P}[T > n]} \\ &= \frac{(1 - p)^{1-k}}{(1 - p)^n} = (1 - p)^k \end{aligned}$$

10 Poisson Verteilung

10.1 Exkurs über die Zahl e

Beispiel: Preis steigt jeden Tag um 1 %

Am Anfang: 1 Euro

Preis nach 100 Tagen = ?

Lösung:

$$x \mapsto x + \frac{x}{100}$$

Tag 0	Tag 1	Tag 2	...	Tag 100
1	$1 + \frac{1}{100}$	$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^2$...	$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2,7$

Betrachte $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

n = 100: **2,704813...**

n = 10000: **2,7181459 ...**

...

Definition: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818...$

$$1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1 \quad \text{Unbestimmtheit } 1^\infty$$

Formel 1:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x \quad x = \text{konst}, n \rightarrow \infty$$

$$\textbf{Beispiel: } \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^0 = 1$$

Formel 2:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Beweis:

1. $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$
2. $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k!} \cdot \frac{x^k}{n^k}$

10 Poisson Verteilung

$$= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \underbrace{\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k}}_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} = \underbrace{\frac{1}{n}}_1 * \underbrace{\frac{n-1}{n}}_1 \cdots * \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Beispiel: $x = 1$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

10.2 Poisson Verteilung

Sehr viele Bern.-Exp: $n \rightarrow \infty$

Sehr kleine Erfolgswahrscheinlichkeit: $p = \frac{\lambda}{n}$ $\lambda = \text{const.}$ $\lambda > 0$

Die Anzahl der Erfolge ist ZV $S_n \sim \text{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$ $\mathbb{E}S_n = n * \frac{\lambda}{n} = \lambda$

Beispiel: Wkeit, dass es keinen Erfolg gibt: $\mathbb{P}[S_n = 0] = (1 - \frac{\lambda}{n}) * (1 - \frac{\lambda}{n}) * \dots * (1 - \frac{\lambda}{n}) = (1 - \frac{\lambda}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}$ [Formel 1] $x = -\lambda$

$$\mathbb{P}[S_n = k] = \binom{n}{k} * p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} * \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}} * \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_1 * \lambda^k$$

Wkeit k Erfolge

$$* \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k! n^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} * 1 * \lambda^k * 1 * \frac{1}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Definition: ZV X heißt Poissonverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, falls

$$\mathbb{P}[x = k] = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Bemerkung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[x = k] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} * e^{\lambda} = 1$$

10.2.1 Satz 11.6: Poisson-Grenzwertsatz

Sei $S_n \sim \text{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$, $\lambda > 0$ konstant.

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[S_n = k] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

10 Poisson Verteilung

Beispiel: 100 Personen A = "mind. eine Person hat heute Geburtstag"
 $P[A] = ?$

Lösung 1 (Exakt): $n=100$, Bern-Exp
 Erfolge im Exp $i \Leftrightarrow$ Person i hat heute Geburtstag
 Erfolgswkkeit $p = \frac{1}{365}$

A^C "keine Person hat heute Geburtstag"
 $P[A^C] = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = (1-p)^n$

$$P[A] = 1 - P[A^C] = 1 - (1-p)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^{100} = 0,2399$$

Lösung 2 (Approximation): Anzahl d. Personen die heute Geburtstag haben: $S_n \sim \text{Bin}(\underbrace{100}_n, \underbrace{\frac{1}{365}}_p)$

$$P[A] = P[S_n \geq 1] = 1 - P[S_n = 0]$$

$$S_n \sim \text{Bin}(\underbrace{100}_n, \underbrace{\frac{1}{365}}_{\frac{\lambda}{n}}) \approx \text{Poi}(\underbrace{\frac{100}{365}}_{\lambda})$$

$$P[A] = 1 - P[S_n = 0] \approx 1 - P[\text{Poi}\left(\frac{100}{365}\right) = 0]$$

$$= 1 - e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-\frac{100}{365}} = 0,2396$$

Beispiel: 96 % Prozent der Fluggäste erscheinen. 75 Flugkarten für 73 Plätze verkauft.

$P[\underbrace{\text{alle Fluggäste bekommen Platz}}_A] = ?$

Lösung 1 (Exakt) Die Anzahl der Gäste, die erscheinen: ZV $T_n \sim \text{Bin}(75, 0,96)$

$$\begin{aligned} P[A] &= P[T_n \leq 73] = 1 - P[T_n \geq 74] = 1 - P[T_n = 74] - P[T_n = 75] \\ &= 1 - \binom{75}{74} p^{74} (1-p)^1 - \binom{75}{75} p^{75} (1-p)^0 \\ &\stackrel{p=0,96}{=} 1 - 75 * 0,96^{74} * 0,04 - 0,96^{75} = 0,8069 \dots \end{aligned}$$

Lösung 2 (Approx): $T_n \sim \text{Bin}(\underbrace{75}_n, \underbrace{0,96}_{\frac{\lambda}{n}}) \approx \text{Poi}(75 * 0,96)$

Falsch, da 0,96 nicht klein ist

Betrachte Gäste, die nicht erschienen sind: Anzahl:

$$S_n \sim \text{Bin}(\underbrace{75}_{\text{gro\ss}}, \underbrace{0,04}_{\text{klein}}) \approx \text{Poi}(\underbrace{75 * 0,04}_{\lambda})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A] &= \mathbb{P}[S_n \geq 2] = 1 - \mathbb{P}[S_n = 0] - \mathbb{P}[S_n = 1] \approx 1 - e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} - e^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{1!} \\ &= 1 - e^{-75*0,04} - e^{-75*0,04} * 75 * 0,04 = 0,8008 \end{aligned}$$

10.2.2 Satz 11.7

Sei $x \sim \text{Poi}(\lambda)$ ($\lambda > 0$). Dann gilt $\mathbb{E}x = \lambda$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}x &= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}[x = k] = \sum_{k=0}^{\infty} k * e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \stackrel{l=k-1}{=} e^{-\lambda} \lambda \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

Faltungsformel: Seien x, y unabh. ZV mit Werten in $\{0, 1, 2, \dots\}$
 Vert von x, y seien gegeben
 Vert von $x+y$?

Lösung Werte von $x+y$ sind in $\{0, 1, \dots\}$

$$\begin{aligned} \text{Für } n \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad \mathbb{P}[x + y = n] &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}[x = k, y = n - k] \stackrel{x, y \text{ unabh}}{=} \\ &\sum_{k=0}^n \mathbb{P}[x = k] * \mathbb{P}[y = n - k] \\ x = k \in \{1, 2, \dots\} \quad y = n - k \end{aligned}$$

Beispiel: $x \sim \text{Bin}(m_1, p)$ $y \sim \text{Bin}(m_2, p)$, unabh. ZV

Behauptung: $x + y \sim \text{Bin}(m_1 + m_2, p)$

Lösung 1: Stochastische Lösung

x ist die Anzahl d. Erf. in m_1 Ber-Exp. mit Erfolgswahrscheinlichkeit p

y ist die Anzahl d. Erf. in m_2 Ber-Exp. mit Erfolgswahrscheinlichkeit p

Insgesamt gibt es $m_1 + m_2$ Bern-Exp. mit Erfolgswahrscheinlichkeit p .

$x+y$ ist die Anzahl d. Erfolge in $m_1 + m_2$ Experimenten $\Rightarrow x + y \sim \text{Bin}(m_1 + m_2, p)$

Lösung 2:

$$\mathbb{P}[x = k] = \binom{m_1}{k} p^k (1-p)^{m_1-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m_1, \dots$$

$$\mathbb{P}[y = k] = \binom{m_2}{k} p^k (1-p)^{m_2-k}, \quad k = 0, 1, \dots, m_2, \dots$$

$x+y$ nimmt Wert in $\{0, 1, 2, \dots\}$ an

$$\mathbb{P}[x + y = n] = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}[x = k, y = n - k] = \sum_{k=0}^n \mathbb{P}[x = k] * \mathbb{P}[y = n - k]$$

$$(\{x + y = n\} = \{x = 0, y = n\} \dot{\cup} \{x = 1, y = n - 1\} \dot{\cup} \dots \dot{\cup} \{x = n, y = 0\})$$

$$= \sum_{k=0}^n \binom{m_1}{k} p^k (1-p)^{m_1-k} * \binom{m_2}{n-k} p^{n-k} (1-p)^{m_2-(n-k)}$$

$$= p^n (1-p)^{m_1+m_2-n} \sum_{k=0}^n \binom{m_1}{k} \binom{m_2}{n-k}$$

$$\stackrel{\text{Vandermonde-ID}}{=} \binom{m_1+m_2}{n} p^n (1-p)^{m_1+m_2-n} \Rightarrow x+y \sim \text{Bin}(m_1+m_2, p)$$

Beweis der Vandermonde-Identität

$\binom{m_1+m_2}{n} = \sum_{k=0}^n \binom{m_1}{k} \binom{m_2}{n-k}$ Zähle die Möglichkeiten aus $m_1 + m_2$ Objekten n Objekte auszuwählen

1. Methode $\binom{m_1+m_2}{n}$ Möglichkeiten
2. Wähle zuerst k Objekte aus m_1 Objekten: $\binom{m_1}{k}$ Möglichkeiten
Aus den restlichen m_2 Objekten müssen wir $n-k$ auswählen: $\binom{m_2}{n-k}$ Möglichkeiten

Insgesamt: $\binom{m_1}{k} \binom{m_2}{n-k}$ Möglichkeiten

k kann Werte $0, \dots, n$ annehmen:

Insgesamt $\sum_{k=0}^n \binom{m_1}{k} \binom{m_2}{n-k}$

Beispiel: Seien $x \sim \text{Poi}(\lambda), y \sim \text{Poi}(\mu)$ unabh. ZV

Dann gilt: $x+y \sim \text{Poi}(\lambda+\mu)$ (Übung)

11 Varianz und Kovarianz

Definition: Sei X eine ZV. Varianz von X : $\text{Var } X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2]$

Beispiel: Sei X uniform verteilt auf $\{-a, a\}$

$$\mathbb{E}X = \frac{1}{2} * a + \frac{1}{2}(-a) = 0$$

$$\text{Var } X = \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[X^2] = a^2$$

Definition: Standardabweichung von X : $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var } X}$

Wenn X konstant ist, so ist die Varianz $= 0$

11.1 Satz 14.1

$$\text{Var } X = \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$$

Kor. $\mathbb{E}[X^2] \geq (\mathbb{E}X)^2$

Beweis: $\text{Var } X = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = \mathbb{E}[\underbrace{X^2}_A - \underbrace{2X * \mathbb{E}X}_B + \underbrace{(\mathbb{E}X)^2}_C]$

$$= \mathbb{E}[X^2] - \mathbb{E}[2X\mathbb{E}X] + \mathbb{E}[(\mathbb{E}X)^2]$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - 2\mathbb{E}X * \mathbb{E}[X] + (\mathbb{E}X)^2 \text{ da } C \text{ konstant}$$

$$= \mathbb{E}[X^2] - (\mathbb{E}X)^2$$

11.2 Satz 14.2

Sei X ZV, $a, b, \in \mathbb{R}$

Dann gilt

$$1. \text{Var}(aX+b) = \text{Var}(aX) = a^2 \text{Var } X$$

$$2. \sigma(aX+b) = \sigma(aX) = |a| \sigma(X) \quad \sqrt{a^2} = |a|$$

Beweis 1:

$$\text{Var}(aX+b) \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[(aX + b - \mathbb{E}[aX + b])^2]$$

$$= \mathbb{E}[(aX + b - a\mathbb{E}X -)^2] = \mathbb{E}[a^2(x - \mathbb{E}X)^2]$$

$$= a^2 \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}X)^2] = a^2 \text{Var } X$$

Beweis 2:

$$\sigma(aX + b) = \sqrt{\text{Var}(aX + b)} = \sqrt{a^2 \text{Var } X} = \underbrace{\sqrt{a^2}}_{|a|} \underbrace{\sqrt{\text{Var } X}}_{\sigma(X)}$$

Beispiel: Sei x uniform verteilt auf $\{1, 2, \dots, n\}$

$$\text{D.h. } \mathbb{P}[x = k] = \frac{1}{n} \quad \forall k = 1, 2, \dots, n$$

$\text{Var } X = ?$

Lösung: $\text{Var } X = \mathbb{E}[x^2] - (\mathbb{E}[x])^2$

$$\mathbb{E}x = \frac{n+1}{2}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[x^2] &= \sum_{k=1}^n k^2 \mathbb{P}[x = k] = \frac{1^2 + 2^2 + \dots + n^2}{n} \\ &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} \end{aligned}$$

$$\text{Var } x = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2 = \dots = \frac{n^2 - 1}{12}$$

Exkurs über die Teleskopmethode $1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = ? \quad \sum_{k=1}^n k^2 = ?$

Methode: Finde Funktion F mit $k^2 = F(k) - F(k-1)$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = F(1) - F(0) + F(2) - F(1) + F(3) - F(2) + \dots + F(n) - F(n-1)$$

$$= F(n) - F(0)$$

$$k^2 = F(k) - F(k-1) \leftarrow \text{Ziel}$$

$$F(k) = \frac{k^3}{3} + ak^2 + bk + c \quad a, b, c \text{ unbekannt}$$

$$F(k) - F(k-1) = \frac{k^3}{3} + ak^2 + bk + c - \frac{(k-1)^3}{3} - a(k-1)^2 - b(k-1) - c$$

$$= (k^2 - k + \frac{1}{3} + a(2k-1) + b)$$

$$= k^2 + k * (2a - 1) + (b + \frac{1}{3} - a) \text{ soll gleich } k^2 \text{ sein.}$$

$$2a - 1 = 0 \Rightarrow a = \frac{1}{2}$$

$$b + \frac{1}{3} - a = 0 \Rightarrow b = \frac{1}{6}$$

$$F(k) = \frac{k^3}{3} = \frac{k^2}{2} + \frac{1}{6}k + c$$

$$1^2 + 2^2 + \dots + n^2 = F(n) - F(0) = \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} + \frac{n}{6} + c - c = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Beispiel: Sei $X \sim \text{Poi}(\lambda)$

Dann gilt $\mathbb{E}X = \text{Var } X = \lambda$

Beweis: $\mathbb{E}X = \lambda$ ist bekannt: $\mathbb{E}[X^2] = ?$

$$\mathbb{E}[X^2] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 \mathbb{P}[x = k] = \sum_{k=0}^{\infty} k^2 e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = ?$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[X(X-1)] &= \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)\mathbb{P}[x=k] = \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\
 &= \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1)e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{1*2*\dots*(k-1)k} = e^{-\lambda} * \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\
 &= e^{-\lambda} * \lambda^2 * \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!} \\
 &= e^{-\lambda} \lambda^2 * \mathbb{E}x = \lambda^2 + \lambda \\
 \text{Var } x &= \mathbb{E}[x^2] - (\mathbb{E}x)^2 = \lambda^2 + \lambda - \lambda^2 = \lambda \quad \square \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} = e^{-\lambda} \lambda^2 e^{\lambda} = \lambda^2 \\
 \mathbb{E}[x^2] &= \mathbb{E}[\lambda(x-1)]
 \end{aligned}$$

11.3 Satz 14.3

Für anabh. ZV x, y gilt:

$$\text{Var}[x+y] = \text{Var } x + \text{Var } y$$

Beweis:

$$\text{Definition: } x' := x - \mathbb{E}x \quad \mathbb{E}x' = \mathbb{E}[x - \mathbb{E}x] = \mathbb{E}x - \mathbb{E}x = 0$$

$$y' := y - \mathbb{E}y \quad \mathbb{E}y' = 0$$

$$\begin{aligned}
 \text{Var}[x+y] &\stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[(x+y - \mathbb{E}[x+y])^2] = \mathbb{E}[(x' + y')^2] \\
 &= \mathbb{E}[x'^2 + y'^2 + 2x'y'] = \mathbb{E}[x'^2] + \mathbb{E}[y'^2] + 2\mathbb{E}[x'y']
 \end{aligned}$$

$$\text{denn } \underbrace{\mathbb{E}[x'y']}_{\text{unabh.}} = \mathbb{E}[x'] * \mathbb{E}[y'] = 0 * 0 \quad \square$$

Bemerkung: Für n unabh. ZV x_1, \dots, x_n gilt $\text{Var}[x_1 + \dots, x_n] = \text{Var } x_1 + \dots + \text{Var } x_n$

Beispiel: Sei $x \sim \text{Bin}(n, p)$ $\text{Var } x = ?$

Lösung: $x = x_1 + \dots + x_n$, wobei $x_i = \begin{cases} 1 & \text{, falls das } i\text{-te Exp. Erfolg ist} \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

x_1, \dots, x_n sind unabh

$x_i \sim \text{Bern}(p)$, d.h. $\mathbb{P}[x_i = 1] = p, \mathbb{P}[x_i = 0] = 1 - p$

$$\mathbb{E}x_i = p$$

$$\text{Var}x_i = \mathbb{E}[\underbrace{x_i^2}_{x_i}] - (\mathbb{E}[x_i])^2$$

$$= \mathbb{E}x_i - (\mathbb{E}x_i)^2 = p - p^2 = p(1 - p)$$

denn $x_i \in \{0, 1\}, x_i^2 = x_i$

Also: Für $x \sim \text{Bin}(n, p)$ gilt $\mathbb{E}x = np, \text{Var}x = np(1 - p)$

Bemerkung:

- $p = 0 \Rightarrow x = 0 \Rightarrow \text{Var}x = 0$
- $p=1 \Rightarrow x = n \Rightarrow \text{Var}x = 0$
- $\text{Var} x \rightarrow \max$, wenn $p = \frac{1}{2}$

Beispiel: n Würfe mit einem fairen Würfel. $S =$ Augensumme
 $\text{Var} S = ?$

Lösung:

$S = x_1 + \dots, x_n$, wobei x_i die Augenzahl im i -ten Wurf ist.

x_1, \dots, x_n sind unabh. ZV.

x_i ist uniform verteilt auf $\{1, \dots, 6\}$

$\mathbb{E}x_i = 3,5 \quad \mathbb{E}S = n * 3,5$

$$\text{Var} x_i = \frac{6^2 - 1}{12} = \frac{35}{12} \quad \text{Var}S = \text{Var}x_1 + \dots + \text{Var}x_n = n * \frac{35}{12}$$

11.4 Schwaches Gesetz der großen Zahlen

Seien x_1, x_2, \dots unabh. identisch verteilte ZV (alle x_i haben die gleiche Verteilung) mit $\mathbb{E}x_i = \mu, \mathbb{E}[x_i^2] < \infty$

Sei $S_n = x_1 + \dots + x_n$

Dann gilt $\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right] = 0$

$$\left| \frac{S_n}{n} \right| > \varepsilon \Leftrightarrow |s_n - n\mu| > n\varepsilon \Leftrightarrow S_n \notin [n\mu - n\varepsilon, n\mu + n\varepsilon]$$

Bemerkung:

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} [s_n \notin [n(\mu - \varepsilon), n(\mu + \varepsilon)]] = 0$$

Gegenereignis:

$$\forall \varepsilon > 0 \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[S_n \in [n(\mu - \varepsilon), n(\mu + \varepsilon)]] = 1$$

Beispiel: Faire Münze n -mal werfen. $S_n = x_1 + \dots + x_n =$ Anzahl von Kopf

$$x_i \sim \text{Bern}(\frac{1}{2}), \quad \mu = \mathbb{E}x_i = \frac{1}{2}$$

$$\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left(\frac{1}{2} - \varepsilon \right) n \leq S_n \leq \left(\frac{1}{2} + \varepsilon \right) n \right] = 1$$

$$\text{Z.B.: } \varepsilon = 0,01 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} [0,49n \leq S_n \leq 0,51n] = 1$$

[GRAFIK SCHWACHES GESETZT N=1000 Einfügen]

Beispiel: Werfen eines fairen Würfels. $S_n =$ Augensumme

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} [3,49n \leq S_n \leq 3,51n]$$

11.4.1 GGZ - Kurzfassung

x_1, x_2, \dots unabh. id. vert.

$$\mathbb{E}x_i = \mu$$

$$S_n = x_1, \dots, x_n$$

Dann gilt $\forall \varepsilon > 0 : \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| > \varepsilon \right] = 0$

$\frac{S_n}{n}$ konvergiert gegen μ stochastisch

Vorbereitung zum Beweis des GGZ

11.5 Satz 11.4: Markov-Ungleichung

Sei $x \geq 0$ ZV. Dann gilt für $\forall a > 0$:

$$\mathbb{P}[x \geq a] \leq \frac{\mathbb{E}x}{a}$$

Beweis:

Es gilt: $x \geq a * \mathbb{1}_{\{x \geq a\}}$ (*)

[GRAFIK GGZ KURVEN Einfügen]

Beweis von (*):

Fall 1: $x \geq a \Rightarrow$ Linke Seite $\geq a$, RS = $a\checkmark$

Fall 2: $x < a \Rightarrow$ LS ≥ 0 , RS = $0\checkmark$

Wende auf (*) den \mathbb{E} an:

$$\mathbb{E}x \geq \mathbb{E} [a \mathbb{1}_{\{x \geq a\}}] = a \mathbb{E} \mathbb{1}_{\{x \geq a\}} = a \mathbb{P}[x \geq a]$$

Teile durch a

□

11.6 Satz 14.5 Chebyshev-Ungl

Sei X ZV. Dann gilt $\forall a > 0$:

$$\mathbb{P} [|x - \mathbb{E}x| \geq a] \leq \frac{\text{Var}x}{a^2}$$

Beweis:

$$\mathbb{P} [|x - \mathbb{E}x| \geq a] = \mathbb{P} [|x - \mathbb{E}x|^2 \geq a^2]$$

$$\mathbb{P} \left[\underbrace{(x - \mathbb{E}x)^2}_{y \geq 0} \geq a^2 \right] \stackrel{\text{Markov-ungl für } y}{\leq} \frac{\mathbb{E}y}{a^2} = \frac{\text{Var}x}{a^2}$$

11.6.1 Beweis des GGZ

$$\begin{aligned}
 S_n &= x_1, \dots, x_n \\
 \mathbb{E} \left[\frac{x_1, \dots, x_n}{n} \right] &= \frac{\mathbb{E}x_1 + \dots + \mathbb{E}x_n}{n} = \mu \\
 \text{Var} \left[\frac{x_1, \dots, x_n}{n} \right] &= \frac{\text{Var} [x_1, \dots, x_n]}{n^2} \stackrel{\text{unabh}}{=} \frac{\text{Var} x_1 + \dots + \text{Var} x_n}{n^2} = \\
 &\frac{1}{n} \text{Var} x_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0 \\
 \mathbb{P} \left[\left| \frac{S_n}{n} - \mu \right| \geq \varepsilon \right] &= \mathbb{P} [|Z_n - \mathbb{E}Z_n| \geq \varepsilon] \stackrel{\text{Chebyshev}}{\leq} \frac{\text{Var} Z_n}{\varepsilon^2} = \frac{\frac{1}{n} \text{Var} x_1}{\varepsilon^2} \\
 &= \underbrace{\frac{\text{Var} x_1}{\varepsilon^2}}_{\text{const}} * \underbrace{\frac{1}{n}}_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0
 \end{aligned}$$

□

11.7 Kovarianz

Definition:

Seien x, y ZV.

Kovarianz von x und y ist $\text{Cov}(x, y) = \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}x)(y - \mathbb{E}y)]$

Beispiel: $\text{Cov}(x, x) = \text{Var} x \geq 0$

11.7.1 Satz 14.6

$$\text{Cov}(x, y) = \mathbb{E}[xy] - (\mathbb{E}x) * (\mathbb{E}y)$$

$$\text{Beweis: } \text{Cov}(x, y) = \mathbb{E}[(x - \mathbb{E}x)(y - \mathbb{E}y)]$$

$$= \mathbb{E}[xy - (\mathbb{E}x)y - x\mathbb{E}y + \mathbb{E}x * \mathbb{E}y]$$

$$= \mathbb{E}[xy] - \underbrace{\mathbb{E}[(\mathbb{E}x) * y]}_{\text{const}} - \underbrace{\mathbb{E}[x * \mathbb{E}y]}_{\text{const}} + \underbrace{\mathbb{E}[\mathbb{E}x * \mathbb{E}y]}_{\text{const}}$$

$$= \mathbb{E}[xy] - \mathbb{E}x * \mathbb{E}y - \mathbb{E}y * \mathbb{E}x + \mathbb{E}x * \mathbb{E}y$$

$$= \mathbb{E}[xy] - \mathbb{E}[x]\mathbb{E}[y]$$

□

11.7.2 Satz 14.7

$$x, y \text{ sind unabh} \Rightarrow \text{Cov}(x, y) = 0$$

Beweis: x, y unabh \Rightarrow

$$\text{Cov}(x, y) = \mathbb{E}[xy] - (\mathbb{E}x)(\mathbb{E}y) = \mathbb{E}x * \mathbb{E}y - \mathbb{E}x * \mathbb{E}y = 0$$

□

Bemerkung: \Leftarrow gilt nicht:

Beispiel: von ZV, die unkorreliert abhängig sind. Seien x, y ZV mit

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[x = 1, y = 0] &= \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}[x = -1, y = 0] &= \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}[x = 0, y = 1] &= \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}[x = 0, y = -1] &= \frac{1}{4}\end{aligned}$$

1. Beh. x, y sind abh.

$$\begin{aligned}\mathbb{P}[x = 1] &= \frac{1}{4} = \mathbb{P}[x = -1] \\ \mathbb{P}[x = 0] &= \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \\ \mathbb{P}[y = 1] &= \frac{1}{4} = \mathbb{P}[y = -1] \\ \mathbb{P}[y = 0] &= \frac{1}{2} \mathbb{P}[x = 1, y = 0] = \frac{1}{4} \\ \mathbb{P}[x = 1] * \mathbb{P}[y = 0] &= \frac{1}{4} * \frac{1}{2} \neq \frac{1}{4} \\ \Rightarrow x, y &\text{ abh}\end{aligned}$$

2. **Behauptung:** $\text{Cov}(x, y) = 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}x &= 1 * \frac{1}{4} + (-1) * \frac{1}{4} + 0 * \frac{1}{2} = 0 \\ \mathbb{E}y &= 0 \\ \mathbb{E}[xy] &= 0, \text{ denn } x, y \text{ ist immer } 0 \\ \text{Cor}(x, y) &= \mathbb{E}[xy] - \mathbb{E}x * \mathbb{E}y = 0\end{aligned}$$

Bemerkung:

$$\exists[xy] = \sum_{a,b} ab \mathbb{P}[x = a, y = b]$$

11.8 Satz 14.8

$$\text{Var}[x + y] = \text{Var } x + \text{Var } y + 2 \text{Cov}(x, y)$$

Spezialfall: Sind x, y unkorreliert (z.B. unabhängig)
 $\text{Cov}(x, y) = 0$

$$\Rightarrow \text{Var}[x + y] = \text{Var } X + \text{Var } y$$

Beweis:

Definition: $x' = X - \mathbb{E}X$, $y' = y - \mathbb{E}y$

$$\begin{aligned}\text{Var}[x + y] &= \mathbb{E}[(x' + y')^2] = \mathbb{E}[x'^2 + 2x'y' + y'^2] \\ &= \mathbb{E}[x'^2] + 2\mathbb{E}[x'y'] + \mathbb{E}[y'^2] = \text{Var } x + 2\text{Cov}(x, y) + \text{Var } y \quad \square\end{aligned}$$

Beispiel: x = Größe einer Wohnung in m^2 , y = Preis in Euro

$\text{Cov}(x, y)$ hat Einheiten $\text{m}^2 - \text{Eur}$

$$\text{Cov}(ax + b, cy + d) = \text{Cov}(ax, cy) = \mathbb{E}[acxy] - \mathbb{E}[ax] \mathbb{E}[cy] = ac \text{Cov}(x, y)$$

11.9 Dimensionsloses Maß für Zusammenhang zwischen zwei ZV x, y

Definition: Korrelationskoeff. von x und y ist:

$$\mathcal{P}(x, y) = \frac{\text{Cov}(x, y)}{\sqrt{\text{Var } x} \sqrt{\text{Var } y}} \quad (x, y \neq 0)$$

Bemerkung: Wann ist $\text{Var } x = 0$?

$$\mathbb{E} \left[\underbrace{(x - \mathbb{E}x)^2}_{\geq 0} \right] = 0, \quad (x - \mathbb{E}x)^2 = 0 \text{ mit Wkeit } 1, \quad x = \mathbb{E}x \text{ mit Wkeit } 1$$

Bemerkung: $\mathcal{P}(x, y)$ ist dimensionslos $\forall a, b, c, d \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(ax + b, cy + d) &= \frac{\text{Cov}(ax + b, cy + d)}{\sqrt{\text{Var}(ax + b)} \sqrt{\text{Var}(cy + d)}} \\ &= \frac{ac \text{Cov}(x, y)}{\sqrt{a^2 \text{Var } x} \sqrt{c^2 \text{Var } y}} = \mathcal{P}(x, y) \end{aligned}$$

11.9.1 Exkurs über die Cauchy-Schwarz-Ungleichung

Vektoren $x = (x_1, \dots, x_n)$	Skalarprodukt $= \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$
$y = (y_1, \dots, y_n)$	Längen von x und y:
	$ x \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$
	$ y \sqrt{y_1^2 + \dots + y_n^2}$

$$\langle x, y \rangle = |x| |y| \cos \mathcal{P}$$

$$|\langle x, y \rangle| = |x| * |y| * \underbrace{|\cos \mathcal{P}|}_{\leq 1} |x| |y|$$

$$\text{Cauchy-Schwarz-Ungleichung } \left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n x_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n y_i^2}$$

11.9.2 Satz 14.9 Auch Cauchy-Schwarz

Für zwei ZV x und y gilt $|\mathbb{E}[xy]| \leq \sqrt{\mathbb{E}[x^2]} \sqrt{\mathbb{E}[y^2]}$

Beweis:

$$\forall u \in \mathbb{R} \quad \mathbb{E} \left[\underbrace{(ux + y)^2}_{\geq 0} \right] \geq 0$$

$$\mathbb{E}[u^2 x^2 + 2uxy + y^2] \geq 0$$

$$\underbrace{u^2 \mathbb{E}[x^2] + 2u \mathbb{E}[xy] + \mathbb{E}[y^2]}_{\text{quadratische Funktion von u}} \geq 0 \quad \forall u \in \mathbb{R}$$

[GRAFIK PARABEL CAUCHY-S Einfügen]

$$\text{D.h. } \mathcal{D} \leq 0 \Rightarrow (2\mathbb{E}[xy])^2 - 4\mathbb{E}[x^2] \mathbb{E}[y^2] \leq 0$$

$$(\mathbb{E}[xy])^2 \leq \mathbb{E}[x^2] * \mathbb{E}[y^2] \quad \square$$

Korollar:

$$|\mathcal{P}(x, y)| \leq 1 \quad \text{Bew.: } |\mathcal{P}(x, y)| = \frac{|\text{Cov}(x, y)|}{\sqrt{\text{Var } x} \sqrt{\text{Var } y}} = \frac{|\mathbb{E}[x'y']|}{\sqrt{\mathbb{E}[x'^2]} \sqrt{\mathbb{E}[y'^2]}} \underbrace{\leq}_{\text{C-S-Ungl.}} 1$$

Analogie:

Vektoren	ZV
$x = (x_1, \dots, x_n)$	x
$y = (y_1, \dots, y_n)$	y
$\langle x, y \rangle = \sum x_i y_i$	$\text{Cov}(x, y) = \mathbb{E}[x'y']$
$ x ^2 = \langle x, x \rangle$	$\text{Cov}(x, x) = \text{Var } x$
0 Nullvektor	Konstante ZV (Var = 0)
$x \perp y$, d.h. $\langle x, y \rangle = 0$	$\text{Cov}(x, y) = 0$, d.h. x und y sind unkorreliert
$ x + y ^2 = x ^2 + y ^2$, falls $x \perp y$	$\text{Var}(x+y) = \text{Var } x + \text{Var } y$, falls x,y unkorreliert.

Wann werden die Werte \pm angenommen

$$|\mathcal{P}(x, y)| \leq 1$$

Beispiel:

- $\mathcal{P}(x, x) = \frac{\text{Cov}(x, x)}{\sqrt{\text{Var } x} \sqrt{\text{Var } x}} = 1$, Allgemeiner $\mathcal{P}(x, ax + b) = 1 (a > 0)$
- $\mathcal{P}(x, -x) = -1$ Allgemeiner: $\mathcal{P}(x, , ax + b) = -1 (a < 0)$

11.9.3 Satz 14.10

1. Aus $\mathcal{P}(x, y) = 1 \Rightarrow \exists a > 0, b \in \mathbb{R}$ mit $y = ax + b$
2. Aus $\mathcal{P}(x, y) = -1 \Rightarrow \exists a < 0, b \in \mathbb{R}$, mit $y = ax + b$

Beweis 1:

$$\text{Sei } \mathcal{P}(x, y) = 1 \text{ Betrachte } Z = y - x * \frac{\sqrt{\text{Var } y}}{\sqrt{\text{Var } x}}$$

$$\begin{aligned} \text{Var } Z &= \text{Var} \left[y - x \frac{\sqrt{\text{Var } y}}{\sqrt{\text{Var } x}} \right] = \text{Var } y + \text{Var} \left[x \frac{\sqrt{\text{Var } y}}{\sqrt{\text{Var } x}} \right] - 2\text{Cov}(y, x) * \frac{\sqrt{\text{Var } y}}{\sqrt{\text{Var } x}} \\ &= \text{Var } y + \frac{\text{Var } x}{\text{Var } y} * \text{Var } x - 2\mathcal{P}(x, y) \sqrt{\text{Var } x} \sqrt{\text{Var } y} * \frac{\sqrt{\text{Var } y}}{\sqrt{\text{Var } x}} \\ &= 2\text{Var } y - 2 * 1 * \text{Var } y = 0 \end{aligned}$$

$$\text{Var } Z = 0, \text{ also ist } Z = \text{const} \Rightarrow y - x \underbrace{\frac{\sqrt{\text{Var } y}}{\sqrt{\text{Var } x}}}_{a>0} = \underbrace{\text{const}}_b \quad \square$$

Bemerkung:

Weitere Eigenschaften von Cov.

- $\text{Cov}(x, y) = \text{Cov}(y, x)$
- $\text{Cov}(x_1 + x_2, y) = \text{Cov}(x_1, y) + \text{Cov}(x_2, y)$
- $\text{Cov}(ax, y) = a \text{Cov}(x, y)$

11.10 Schätzer für \mathbb{E} , Var , Cov

Beobachten x_1, \dots, x_n (unabhängige ZV mit derselben Verteilung wie eine ZV x)

1. Schätze für $\mu = \mathbb{E}x$ Schätzer für μ : $\hat{\mu} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$
 $\hat{\mu}$ ist erwartungstreu, nämlich

$$\mathbb{E}\hat{\mu} = \mu, \text{ denn } \mathbb{E}\hat{\mu} = \mathbb{E}\frac{x_1 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n}(\mu + \mu + \dots + \mu) = \mu$$

2. Schätzer $\sigma^2 = \text{Var } x$

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \hat{\mu})^2 \text{ (Bessel-Korr: } n-1 \text{ statt } n)$$

$$\mathbb{E}[\hat{\sigma}^2] = \sigma^2$$

3. Seien $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ n Paare von unabh. Beobachtungen

Schätzer für $\mathcal{P} = \text{Cov}(x, y)$:

$$\hat{\mathcal{P}} = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n \left(x_i - \frac{x_1 + \dots + x_n}{n} \right) \left(y_i - \frac{y_1 + \dots + y_n}{n} \right)$$

12 Geometrische Wahrscheinlichkeiten

Diskrete Wahrscheinlichkeitsräume: $\Omega = \{w_1, \dots, w_n\}$ oder $\Omega = \{w_1, w_2, \dots\}$

$$\mathbb{P}[\omega_i] = p_i$$

1. $p_i \geq 0 \forall i$
2. $\sum_{i=1}^{n, \infty} p_i = 1$

Nicht diskretes ZExp:

[GRAFIK Glücksrad Einfügen]

Glücksrad: Winkel $\varphi \in [0, 2\pi)$

Ausgang: $\frac{\varphi}{2\pi} \in [0, 1), \quad \Omega = [0, 1)$

Für $\forall \omega \in [0, 1) \quad \mathbb{P}[\omega] = 0, \mathbb{P}[\Omega] = 1$

Definition:

[GRAFIK Fläche Einfügen]

Sei Q ein Gebiet. Zufälliger Punkt Z heißt uniform verteilt in Q , wenn $\forall A \subset Q$:

$$\mathbb{P}[Z \in A] = \frac{\lambda(A)}{\lambda(\Omega)}$$

λ = Volumen in dim 3, Fläche in dim 2, Länge in dim 1

[GRAFIK NichtUniform Einfügen]

Beispiel

Zwei Freunde wollen sich zwischen 10 und 11 Uhr treffen. Jeder kommt rein zufällig
uniform

zwischen 10 und 11 Uhr an.

Jeder wartet 20 Minuten und geht anschließend.

$A = \text{"Freunde treffen sich"}$ $\mathbb{P}[A] = ?$

[GRAFIK Timeline Einfügen]

Sie treffen sich, falls $|x - y| < \frac{1}{3}$ (20 Minuten = $\frac{1}{3}$ Stunde)

Lösung:

Ankunftszeit des 1. Freundes: $10+x \quad 0 \leq x \leq 1$

Ankunftszeit des 2. Freundes: $10+y$ $0 \leq y \leq 1$

$$\Omega = \{(x, y) : 0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1\} = [0, 1]^2$$

$$\mathbb{P}[B] = \frac{\lambda(B)}{\lambda(\Omega)} = \lambda(B), \forall B \subset [0, 1]^2$$

$$A = \{(x, y) : |x - y| < \frac{1}{3}\}$$

[GRAFIK Graph x-y Einfügen]

$$\mathbb{P}[A] = \lambda(A) = 1 - \lambda(A^C) = 1 - \underbrace{2}_{2 \text{ Dreiecke}} * \frac{1}{2} * \frac{2}{3} * \frac{2}{3} = 1 - \frac{4}{9} = \frac{5}{9}$$

Beispiel: Buffon'sches Nadelproblem

Liniiertes Papier mit unendlich vielen parallelen Geraden mit Abstand 1.

Man lässt eine Nadel der Länge $l < 1$ auf das Papier fallen.

A="Nadel kreuzt eine Gerade"

$$\mathbb{P}[A] = \frac{2l}{\pi}$$

Bemerkung:

Methode zur Berechnung von π : Man lässt N (sehr viele) Nadeln fallen

Sei k die Anzahl der Nadeln, welche eine Linie kreuzen.

$$\text{GGZ: } \frac{k}{N} \approx \frac{2l}{\pi}, \quad \pi \approx \frac{2Nl}{k}$$

Beweis:

[GRAFIK nadeln phi Einfügen] y uniform verteilt auf $[0, 1]$
 φ uniform verteilt auf $[-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}]$

$$\Omega = [0, 1] \times [-\frac{\pi}{2}, +\frac{\pi}{2}] = \{(y, \varphi) : 0 \leq y \leq 1, -\frac{\pi}{2} \leq \varphi \leq +\frac{\pi}{2}\}$$

$$\mathbb{P}[B] = \frac{\lambda(B)}{\lambda(\Omega)} = \frac{\lambda(B)}{\pi}, \forall B \subset \Omega$$

[GRAFIK $\pi / 2$ graph Einfügen]

$$\text{Nadel kreuzt die untere Gerade} \Leftrightarrow [\text{GRAFIK Schnitt Einfügen}] \Leftrightarrow \frac{l}{2} > s = \frac{y}{\cos \varphi} \Leftrightarrow \frac{l}{2} \cos \varphi > y$$

$$\text{Nadel kreuzt die obere Gerade} \Leftrightarrow \frac{l}{2} > \frac{1-y}{\cos \varphi} \Leftrightarrow \frac{l}{2} \cos \varphi > 1 - y$$

$$\lambda(A) = 2 * \lambda(A_1) = 2 \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{l}{2} \cos \varphi d\varphi = l \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \cos \varphi d\varphi = l \sin \varphi \Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\lambda(A)}{\pi} = \frac{2l}{\pi}$$

□

Lösung 2:

Für eine Nadel der Länge $l > 0$ ($l > 1$ ist möglich) sei $f(l)$ die erwartete Anzahl der Kreuzungen

12 Geometrische Wahrscheinlichkeiten

Falls $l < 1$: Die Anzahl der Kreuzungen ist 0 oder 1 (Bernoulli-ZV)
 Wahrscheinlichkeit, dass eine Gerade gekreuzt wird, ist $f(l)$ Ei-
 genschaft von $f(l)$:

$$[\text{GRAFIK } f(x+y) \text{ Einfügen}] \quad f(x+y) = f(x) f(y) \quad \forall x, y > 0 \quad (1)$$

$$\text{Außerdem ist } f \text{ monoton steigend.} \quad (2)$$

Behauptung: Aus (1) und (2) folgt, dass $f(x) = ax \quad a \in \mathbb{R}$

Beweis:

$$\begin{aligned} x = y = 1 & \quad f(2) = f(1) + f(1) \\ & \quad f(2) = 2f(1) \\ x = 2, y = 1 & \quad f(3) = f(2) + f(1) = 3f(1) \end{aligned}$$

Analog: $f(4) = 4f(1), \dots, f(n) = nf(1) \quad f(1) \stackrel{\text{def}}{=} a \quad f(n) = n * a$

Betrachte rationale Zahl $\frac{n}{m}, n, m \in \mathbb{N}$

$$\underbrace{f\left(\frac{n}{m}\right) + f\left(\frac{n}{m}\right) + \dots + f\left(\frac{n}{m}\right)}_m = f(n)$$

$$\begin{aligned} mf\left(\frac{n}{m}\right) &= f(n) \\ f\left(\frac{n}{m}\right) &= \frac{f(n)}{m} = \frac{nf(1)}{m} = \frac{n}{m} \underbrace{f(1)}_a \end{aligned}$$

D.h. \forall rationale Zahlen $q > 0$: $f(q) = qf(1)$

Sei $x > 0$ eine irrationale Zahl. \exists rationale Zahlen $q_1 < q_2 < \dots \quad p_1 > p_2 > \dots$
 mit $q_n \uparrow x$ und $p_n \downarrow x$

$f(p_n) = p_n f(1), f(q_n) = q_n f(1)$ (oben gezeigt).

Falls $f \uparrow$: $q_n < x < p_n$

$$f \uparrow: f(q_n) \leq f(x) \leq f(p_n)$$

$$q_n f(1) \leq f(x) \leq p_n f(1) \quad \forall n$$

$$n \rightarrow \infty: x f(1) \leq f(x) \leq x f(1)$$

$$f(x) = x f(1) \quad \forall x > 0$$

□

Fortsetzung Buffon-Problem: $f(l) = al$

Betrachte polygonale Nadeln: [GRAFIK polygonale Einfügen]

Erwartete Anzahl der Kreuzungen ist:

$$f(l_1) + f(l_2) + \dots + f(l_n) = al_1 + \dots + al_n = na(l_1 + \dots + l_n)$$

Krumme Nadel der Länge l : [GRAFIK KrummeNadel Einfügen]

Erwartete Anzahl der Kreuzungen: a_l

a ist immer noch unbekannt

12 Geometrische Wahrscheinlichkeiten

Betrachte Kreis mit Radius $\frac{1}{2}$.

Es gibt immer 2 Kreuzungen $\rightarrow al = 2$

$$l = 2\pi * \frac{1}{2} = \pi$$

$$a = \frac{2}{\pi}$$

Für eine Nadel der Länge l : $\frac{2}{\pi}l$ Kreuzungen (im Erwartungswert)

□

Beispiel: Bertrand'sches Paradoxon

Kreis mit Radius 1. Wähle zufällige Sehne. L sei die Länge der Sehne

$$\mathbb{P}[L > \frac{\sqrt{3}}{2}]$$

[GRAFIK Dreiecke Einfügen]