

Stochastik

Mitschrift

Vorlesung bei: Prof. Dr. Kabluchko

Datum: 17. Mai 2019

Sommersemester 2019

Westfälische Wilhelms-Universität Münster

Inhaltsverzeichnis

1	Zufallsexperimente	4
1.1	Produktexperimente	4
1.2	Boole'sche Algebra	6
1.3	De Morgan-Regeln	7
1.4	Wahrscheinlichkeiten	7
1.4.1	Empirisches Gesetz der großen Zahlen	8
2	Kombinatorik	9
2.1	Urnenmodelle	10
2.2	Binomialkoeffizient	12
2.3	Bin. Lehrsatz	13
2.3.1	Pascal'sche Dreieck und Trigonometrie	14
2.4	Hypergeometrische Verteilung	14
2.5	Touren	15
2.6	Allgemeine hypergeometrische Verteilung	15
2.7	Multinomialkoeff.	16
2.7.1	Multinomialverteilung mit Zurücklegen	18
3	Axiome der WTheorie	20
3.1	Eigenschaften von \mathbb{P}	20
3.2	Ungleichungen für Wkeiten	22
4	Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeiten	23
4.1	Eigenschaften der bedingten Wkeiten	24
4.2	Unabhängige Ereignisse	25
4.2.1	Eigenschaften von unabhängig	26
5	Satz von Bayes	28
5.1	Bayes-Formel	29
6	Zufallsvariablen (ZV)	32
7	Harmonische Reihe	38
7.1	Harmonische Reihe	38
7.1.1	Satz 10.1	38
7.1.2	Satz 10.2, Euler, 1734	38
7.2	Alternierende harm.Reihe	39

Inhaltsverzeichnis

8	Diskrete Verteilungen	42
8.1	Uniforme Verteilungen	42
8.2	Binomialverteilung	42
9	Geometrische Verteilung	45
10	Poisson Verteilung	49
10.1	Exkurs über die Zahl e	49
10.2	Poisson Verteilung	50
10.2.1	Satz 11.6: Poisson-Grenzwertsatz	50
10.2.2	Satz 11.7	52

1 Zufallsexperimente

Beispiele

Werfen eine Münze

Ausgänge: K, Z

Grundmenge $\Omega = \{K, Z\}$

Werfen eines Würfels

Ausgänge: 1...6

Grundmenge $\Omega = \{1, \dots, 6\}$

Zwei Münzen gleichzeitig werfen

$\Omega = \{KK, KZ, ZK, ZZ\}$

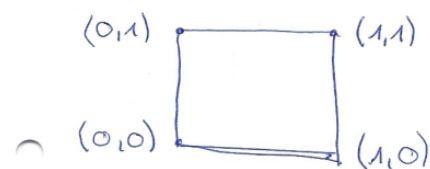
ZK heißt 1. Zeigt Zahl, zweite Kopf. KZ andersherum. Dies gilt wenn die Münzen **unterscheidbar** sind

n Münzen werfen

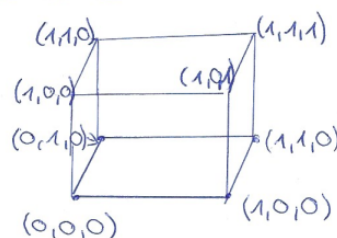
$\Omega = \{K, Z\}^n = \{(a_1, \dots, a_n) : a_i \in \{K, Z\} \forall i = 1, \dots, n\}$

$\#\Omega = 2^n$

- für $n=2$ (grafisch)



- für $n=3$



Frage: können wir $\Omega = \{0, \dots, n\}^n$ wählen?
↳ nein! - unvollständige Beschreibung

Frage: Können wir $\Omega = \{0, \dots, n\}^{n=4}$ wählen?

1.1 Produktexperimente

Betrachte n Experimente mit Grundmengen E_1, \dots, E_n

Führe diese Experimente unabhängig voneinander aus.

Grundmenge des Gesamtexp. ist

$\Omega = E_1 \times \dots \times E_n = \{(e_1, \dots, e_n) : e_1 \in E_1, \dots, e_n \in E_n\}$

$\#\Omega = \#E_1 \cdot \dots \cdot \#E_n$

1 Zufallsexperimente

Beispiele

Münze und Würfel werfen $E_1 = \{K, Z\}$ $E_2 = \{1, \dots, 6\}$

$$\Omega = E_1 \times E_2 =$$

K1	K2	K3	K4	K5	K6
Z1	Z2	Z3	Z4	Z5	Z6

$$\Omega = 12$$

Definition Ereignis

Ereignis = Teilmenge von Ω

Beispiel: 1 Würfel. $\Omega = \{1, \dots, 6\}$

Ereignisse: A = "Würfel zeigt gerade Zahl" = $\{2, 4, 6\}$

B = 'Primzahl gewürfelt' = $\{2, 3, 5\}$

Interpretation: Zufallsexp. wird ausgeführt \Rightarrow

Wir erfahren den Ausgang $w \in \Omega$

Sei $A \subset \Omega$. Liegt $w \in A$, so sagen wir "A ist eingetreten".

$w \notin A \Rightarrow$ "A nicht eingetreten"

Beispiel: 2 Würfel. $\Omega = 1, \dots, 6^2$

A = "Augensumme = 10" = $\{(6, 4), (5, 5), (4, 6)\}$

Unmögliches Ergebnis: \emptyset

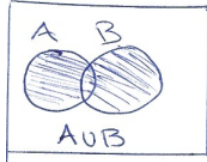
Sicheres Ergebnis (tritt immer ein) = Ω

1.2 Boole'sche Algebra

Seien $A \subset \Omega$; $B \subset \Omega$

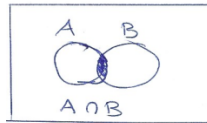
$$A \cup B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ oder } w \in B\}$$

= "mindestens ein Er. tritt ein."



$$A \cap B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ und } w \in B\}$$

= "beide Er. treten ein."



$$A^C = \{w \in \Omega : w \notin A\}$$

= "A tritt nicht ein"



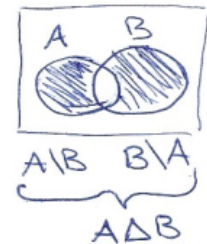
$$A \setminus B = \{w \in \Omega : w \in A \text{ und } w \notin B\}$$

= "A tritt ein **und** B tritt nicht ein" = $A \cap B^C$

$$B \setminus A = B \cap A^C$$

$$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$$

= "**genau** ein Er. tritt ein"



Bsp. 2 Würfel $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$

$A = \text{"1. Würfel zeigt 6"} = \{(6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6)\}$

$B = \text{"2. Würfel zeigt 6"} = \text{Das gleiche, nur vertauscht}$

$$A \cap B = \{(6,6)\}$$

$$A \cup B = \{(6,1), \dots, (6,6), (1,6), \dots, (5,6)\} \quad A \Delta B = \{(6,1), \dots, (6,5), \dots, (1,6), \dots, (5,6)\}$$

Definition Disjunkt

Er. A und B sind disjunkt, wenn $A \cap B = \emptyset$

D.h. A und B können nicht gleichzeitig eintreten.



Bsp.: A und A^c ,

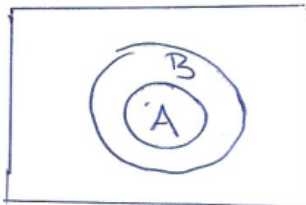
$A \setminus B$,

$A \Delta B$,

und $A \cap B$ sind disjunkt.

Def.: $A \subset B$, wenn $\forall w \in A \Rightarrow w \in B$

Wenn A eintritt, dann tritt auch B ein.



1.3 De Morgan-Regeln

$(A \cup B)^C =$ "Kein Er. tritt ein" = "A tritt nicht ein **und** B tritt nicht ein" = $A^C \cap B^C$

Regel: $(A \cup B)^C = A^C \cap B^C$

$(A \cap B)^C =$ "mindestens ein Er. tritt nicht ein." = "A tritt nicht ein **oder** B tritt nicht ein." = $A^C \cup B^C$

Regel: $(A \cup B)^C$

Allgemein:

$(A_1 \cup A_2 \cup \dots)^C = A_1^C \cap A_2^C \cap \dots$

$(A_1 \cap A_2 \cap \dots)^C = A_1^C \cup A_2^C \cup \dots$

1.4 Wahrscheinlichkeiten

Buffon:

4040 Würfe einer Münze. 2048 Kopf.

Pearson: 24000 Würfe, 12012 Kopf

Rechner: 100000 Würfe, 50106 Kopf. Häufigkeit: 0,50106

1.4.1 Empirisches Gesetz der großen Zahlen

Betrachte Zufallsexp. und Er. $A \subset \Omega$

Wiederhole das Exp. n Mal.

Zähle, wie oft A eingetreten ist: $k_n(A)$

$$\frac{k_n(A)}{n} (\text{Häufigkeit}) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A] (\text{Wkeit von } A)$$

Def. Diskr. WRaum ist ein Paar (Ω, p) , wobei Ω eine Menge ist und

$$: \Omega \rightarrow [0, 1] \text{ mit } \sum_w p(w) = 1$$

Wkeit eines Ausgangs $w \in \Omega$ ist $p(w)$

Wkeit eines Er. $A \subset \Omega : \mathbb{P}[A] = \sum_{w \in A} p(w)$

Def. Ein Laplace-Exp. liegt vor, wenn

$$\#\Omega = n < \infty \text{ und } p(w) = \frac{1}{n} \forall w \in \Omega [\text{Ausgänge sind gleichwahrscheinlich}]$$

Dann gilt :

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{n} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Bsp.: 2 faire Würfel $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ $\#\Omega = 36$

$A = \text{"Augensumme} = 10" = \{(6,4), (5,5), (4,6)\}$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$$

$B = \text{"Augensumme} = 11" = \{(6,5), (5,6)\} \rightarrow \mathbb{P} = \frac{1}{18}$



Bsp.: Nicht-Laplace-Exp.

$\Omega = \{1, 2, 3\}$ $p(1) = \frac{1}{4}$ $p(2) = \frac{1}{4}$ $p(3) = \frac{1}{2}$

oder $\Omega = \{1, 2, 3A, 3B\} \Rightarrow$ Laplace Experiment, da

$$p(w) = \frac{1}{4} \forall w. \mathbb{P}[3] = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$$

2 Kombinatorik

Bsp. Geburtstagsproblem $K = 200$ Personen
 $A =$ "mind. 2 Personen haben am gleichen Tag Geburtstag"
 $\mathbb{P}[A] = ?$

Modell: $n = 365$ Tage im Jahr

Ausgänge: Liste der Länge K besteht aus Zahlen zwischen 1 und n

$$\Omega = \{1, \dots, n\}^K = \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in \{1, \dots, 365\} \forall i = 1, \dots, k\}$$

$a_i =$ Geburtstag der i -ten Person.

$$\#\Omega = \underbrace{n * n * \dots * n}_K = n^K = 365^{200} \quad A = \text{"mind..."} \quad \mathbb{P} = \frac{\#A}{\#\Omega}$$

Gegenereignis $A^C =$ "alle Geburtstage sind (paarweise) verschieden"

$$\#A^C = \underbrace{n}_{\text{Mögl. für Person 1}} * \underbrace{(n-1)}_{\text{Mögl. für Person 2}} * \underbrace{(n-2)}_{\text{Mögl. für 3. Person}} * \dots * \underbrace{(n-K+1)}_{\text{Mögl. für K-te Person}} =$$

$$(n)_K$$

$$K \leq n$$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{\#\Omega - \#A^C}{\#\Omega} = 1 - \frac{\#A^C}{\#\Omega} = 1 - \frac{n(n-1)\dots(n-K+1)}{n^K}$$

Bsp.:

$K = 23$ Personen: $\mathbb{P}[A] = 0.507$

$K = 200$: $\mathbb{P}[A] = 0.999999\dots 8 \approx 1$

2.1 Urnenmodelle

Urne mit Bällen $1, \dots, n$. Es wird k mal jeweils ein Ball zufällig gezogen. [*GRAFIK URNE]

Möglichkeiten:

- Mit/Ohne Zurücklegen
- Nummern der Bälle mit/ohne Berücksichtigung der Reihenfolge

Insgesamt 4 Modelle

1. Ziehen mit Zurücklegen und mit Ber. der Reihenfolge

Ausgänge dieses Exp. sind Listen der Länge K bestehend aus Zahlen zwischen 1 und n .

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in \{1, \dots, n\} \forall i = 1, \dots, K\}$$

a_i = die Nummer des i -ten Ball

Beachte

- Es ist möglich, dass $a_i = a_j$ (mit Zurücklegen)
- $(5, 3, 7, \dots) \neq (3, 5, 7, \dots)$

Bsp:

- Geburtstage von Personen. Bälle = Tage.
Jede Person zieht einen Ball zufällig.
- k -maliges Würfeln. 6 Bälle = 6 Seiten des Würfels

$$\#\Omega = \underbrace{n * n * \dots * n}_K = n^K$$

2. Ziehen ohne Zurücklegen und mit Ber. der Reihenfolge

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in \{1, \dots, n\}, \underbrace{a_i \neq a_j \forall i \neq j}_{\text{Paarweise verschiedene Elemente}}\}$$

$$\#\Omega = n * (n - 1) * (n - 2) * \dots * (n - K + 1)$$

Beachte

- $(1, 3, \mathbf{2}, 4, 5, \mathbf{2}, \dots) \notin \Omega$
- $(5, 3, 7, \dots) \neq (3, 5, 7, \dots)$

Bemerkungen:

- Falls $k > n$: $\#\Omega = 0$
- Für $k = n$:
 $\#\Omega = n * (n - 1) * \dots * 1 = 1 * 2 * 3 * \dots * n = n!$
 Ausgänge sind Permutationen:
 $n = 3: (1, 2, 3), (1, 3, 2), (2, 1, 3), (2, 3, 1)$

2 Kombinatorik

3. Ziehen ohne Zurücklegen und ohne Ber. der Reihenfolge

Ausgänge: Listen der Länge K aus verschiedenen Elementen.

Allerdings wird die Reihenfolge nicht berücksichtigt, d.h. $\{2,5,3\} = \{5,3,2\}$

Ausgänge sind K-elementige Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$.

$\Omega = \{A : A \subset \{1, \dots, n\}, |A| = k\}$ oder

$\Omega = \{(a_1, \dots, a_k) : a_i \in \{1, \dots, n\}, \underbrace{a_1 < a_2 < \dots < a_k}_{\text{Reihenfolge wird durch sortieren gelöscht}}\}$

$$\begin{aligned} \#\Omega &= \frac{n*(n-1)*\dots*(n-K+1)}{K!} && K \text{ Objekte aus } n \text{ Objekten auswählen} \\ &= \binom{n}{K} \end{aligned}$$

Bsp.: Lotto, 49 Kugeln. 6 Kugeln werden ohne Zurücklegen gezogen.

Wir tippen auf eine Kombination aus 6 Nummern

A = "Man hat alle 6 geraten" $P[A] = \frac{1}{\binom{49}{6}}$

1. Lösung:

Ω = Menge aller 6-elem. Teilmengen von $\{1, \dots, 49\}$.

Die Kugeln werden mit einem Griff gezogen.

$$\begin{aligned} \#\Omega &= \binom{49}{6} && \#A = \{1[\text{die Kombination, auf die wir tippen}]\} \\ P[A] &= \frac{1}{\binom{49}{6}} \approx 7,15 * 10^{-8} \end{aligned}$$

2. Lösung:

Kugeln werden einzeln gezogen, Nummern werden notiert:

$\Omega = \{(a_1, \dots, a_6) : a_i \in \{1, \dots, 49\}, a_i \neq a_j \forall i \neq j\}$

$$\#\Omega = 49 * 48 * 47 * \dots * (49 - 6 + 1) \quad \#A = 6!$$

Wir tippen auf $\{1, \dots, 6\}$. wir gewinnen bei allen Permutationen von 1, ..., 6.

$$P[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \frac{6!}{49*48*\dots*44} = \frac{1}{\binom{49}{6}}$$

Bsp.:

Wie hoch ist die Chance, dass 2 mal in Folge die gleichen Zahlen gezogen werden?

Bis zum Zeitpunkt gab es K = 3016 Ziehungen.

Insgesamt gibt es $\binom{49}{6}$ Gewinnreihen.

A = "Bei mind. 2 Ziehungen wurde die gleiche Reihe gezogen"

≈ Geburtstagsproblem

A^C = "Alle Ziehungen ergeben versch. Reihen"

$$P[A] = 1 - \frac{n(n-1)\dots(n-K+1)}{n^K} = 0,278$$

⇒ **Ferni-Dirar-Statistik**

4. Ziehen mit zurücklegen und ohne Reihenfolge

K Vögel setzen sich auf n Bäume

- Mehrfachbesetzungen möglich
- Vögel identisch

Wieviele Besetzungen sind möglich?

Lösung:

Insgesamt $\underbrace{K}_{\text{Vögel}} + \underbrace{n-1}_{\text{"Trennwände"}}$ Symbole, davon K Kreuze

$$\#\Omega = \binom{K+n-1}{K} = \binom{K+n-1}{n-1}$$

$$\binom{a}{b} = \binom{a}{a-b}$$

\Rightarrow Bose-Einstein-Statistik, für VL unwichtig

2.2 Binomialkoeffizient

Def.: Binomialkoeffizient $\binom{n}{k}$ ist die Anzahl der k-elementigen Teilmengen von $\{1, \dots, n\}$

$$\begin{aligned} \text{Formel: } \binom{n}{k} &= \frac{n * (n-1) * \dots * (n-k+1)}{k!} \\ &= \frac{n!}{(n-k)! * k!} \end{aligned}$$

$$k \in \{0, \dots, n\}$$

Wieso teilen wir durch (k!)?

Weil jede k-elem. Teilmenge k!-mal gezählt wurde. Z.B. $\{3, 5, 9\}$ als $(3, 5, 9)$, $(3, 9, 5)$, ...

Bsp.: 20 Schüler.

Es soll eine Fußballmannschaft gebildet werden.

Anz. der Mögl. ohne Berücksichtigung der Positionen: $\binom{20}{10}$

Bsp.: 52 Karten, davon 4 Asse. Wir ziehen 4 Karten ohne zurücklegen. Wkeit, dass alle 4 Asse sind

$\Omega = 4$ -elem. Teilmengen von $\{1, \dots, 52\}$

$$\#A=1 \quad \mathbb{P}[A] = \frac{\#A}{\Omega} = \frac{1}{\binom{52}{4}} = 3,7 * 10^{-6}$$

Bsp.: 52 Karten, 4 werden gezogen.

A = "Alle sind Pik" $\mathbb{P}[A] = ?$ $\#A = \binom{13}{4}$

$$\#\Omega = \binom{52}{4} \quad \mathbb{P}[A] = \frac{\binom{13}{4}}{\binom{52}{4}} \approx 2,64 * 10^{-3}$$

Satz 3.1:

Wenn $0 \leq k \leq n-1$

$$= \binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$

Bew.: Wir wollen aus n Elem. k auswählen.

2 Fälle:

1. Wir haben das Element "n" ausgewählt.
Es verbleiben $n-1$ Elem., von denen $k-1$ ausgewählt werden sollen. $\binom{n-1}{k-1}$
Mögl.
2. Wir haben das Elem. "n" nicht ausgewählt.
Es verbleiben $n-1$ Elem., von denen k ausgewählt werden sollen $\binom{n-1}{k}$
Mögl.

2.3 Bin. Lehrsatz

$$\begin{aligned}(x+y)^0 &= 1 \\(x+y)^1 &= x+y \\(x+y)^2 &= x^2 + 2xy + y^2 \\(x+y)^3 &= x^3 + 3x^2y + 3xy^2 + y^3 \\(x+y)^n &= x^n + \binom{n}{1}x^{n-1}y + \binom{n}{2}x^{n-2}y^2 + \dots + y^n\end{aligned}$$

Satz 3.2.:

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Bew.:

Beim Ausmultiplizieren zählen wir, wie oft der Term $x^k y^{n-k}$ entsteht.

Aus k Faktoren muss x als Beitrag aus-

gewählt werden, aus dem Rest y . $(x+y)^n = (x+y)(x+y) \cdot \dots \cdot (x+y)$

$\binom{n}{k}$ Mögl. □

Bem.: $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$, d.h. jede (Spalte vom Pascal'schen Dreieck) liest sich von rechts genauso wie von links.

k Elem. auswählen $\Leftrightarrow n-k$ nicht auswählen.

Beobachtung: Zeilen summieren im Pascal'schen Dreieck: Zeilen summieren im Pascal'schen Dreieck: Summe ist 2^n

Satz 3.3: $\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} = 2^n$

Bew.:

$$\sum_{k=0}^n \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = (1+1)^n = 2^n \quad \square$$

Übung: Ähnlich:

$$\binom{n}{0} + \binom{n}{2} + \binom{n}{4} + \dots = \binom{n}{1} + \binom{n}{3} + \binom{n}{5} + \dots$$

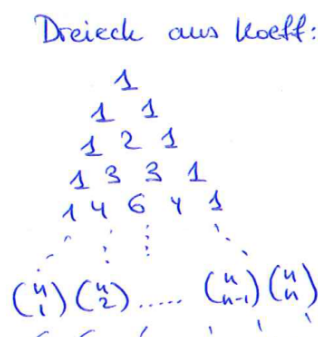


Abbildung 2.1: Pascalsche Dreieck

2.3.1 Pasal'sche Dreieck und Trigonometrie

Bekannt: $\sin(2x) = 2 \sin x \cos x$

$$\cos(2x) = \cos^2 x - \sin^2 x$$

Es gibt auch Formeln für $\sin(3x), \cos(3x), \dots$

Allgemein:

$$\sin(nx) = \binom{n}{1} \cos^{n-1}(x) \sin x - \binom{n}{3} \cos^{n-1} x \sin^3 x + \binom{n}{5} \cos^{n-5} x \sin^5 x - \dots$$

$$\cos(nx) = \cos^n x - \binom{n}{2} \cos^{n-2} x \sin^2 x + \binom{n}{4} \cos^{n-4} x \sin^4 x - \dots$$

Bew.: Induktion (Übung YAAAY)

2.4 Hypergeometrische Verteilung

Teich mit n Fischen: n_1 Fische rot

$n_1 + n_2 = n$ n_2 Fische gelb

Fischer fängt k Fische (Ohne Zurücklegen).

$$k \leq n$$

A = " k_1 rote und k_2 gelbe Fische gefangen."

$$k_1 + k_2 = k$$

$$P[A] = ?$$

Lösung: $\Omega = \{T \subseteq \{1, \dots, n\}, \#T = k\}$ $\# = \binom{n}{k}$

A: Aus n_1 roten Fischen k_1 ausw. $\binom{n_1}{k_1}$

Aus n_2 gelben Fischen k_2 ausw. $\binom{n_2}{k_2}$

Diese sind beliebig kombinierbar.

Insgesamt: $\#A = \binom{n_1}{k_1} * \binom{n_2}{k_2}$

$$P[A] = \frac{\binom{n_1}{k_1} * \binom{n_2}{k_2}}{\binom{n}{k}}$$

Bsp.: Lotto: 6 aus 49

$$P[\underbrace{\text{"Man hat genau 3 richtig"}}_{=A}]$$

Lösung:

$$\Omega = \{T \subseteq \{1, \dots, 49\}, |T| = 6\} \quad \#\Omega = \binom{49}{6}$$

Ohne Einschränkung tippen wir auf $\{1, \dots, 6\}$ damit A eintritt:

- Es müssen 3 Kugeln aus $\{1, \dots, 6\}$ gezogen werden: $\binom{6}{3}$ Mögl.
- Es müssen 3 Kugeln aus $\{7, \dots, 49\}$ gezogen werden $\binom{43}{3}$ Mögl.

$$\#A = \binom{6}{3} * \binom{43}{3}$$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\binom{6}{3} * \binom{43}{3}}{\binom{49}{6}} \approx 0,0176$$

2.5 Touren

1. 5 Städte aus 12 Städten für eine Rundreise auswählen.
Touren = ?

Lösung: 12 Möglichkeiten für Startpunkt

11 Möglichkeiten für die nächste Stadt usw.

Insgesamt: $12 * 11 * 10 * 9 * 8$ Möglichkeiten

2. 12 Personen, Ausschuss aus 5 Personen, darunter 1 Vorsitzender
Möglichkeiten = ?

Lösung 1: $\underbrace{\binom{12}{5}}_{\text{Vorsitzenden auswählen}} * 5$

Lösung 2: $\underbrace{12}_{\text{Vorsitzender}} * \binom{11}{4}$

2.6 Allgemeine hypergeometrische Verteilung

Teich mit n Fischen

r mögl. Farben

n_1 Fische haben Farbe 1, $n_1 + n_2 + \dots + n_r = n$

... n_r Fische haben Farbe r

Fischer fängt K Fische

A = "genau k_1 Fische mit Farbe 1 gefangen, genau k_2 Fische ..., genau k_r Fische"

$$k_1 + \dots + k_r = k$$

$$\mathbb{P}[A] = ?$$

2 Kombinatorik

Lösung: $\Omega = \{T \subset \{1, \dots, n\} : \#T = k\}$ $\#\Omega = \binom{n}{k}$
 $\#A = \binom{n_1}{k_1} * \binom{n_2}{k_2} * \dots * \binom{n_r}{k_r}$

k_1 Fische mit Farbe 1 auswählen: $\binom{n_1}{k_1}$

k_r Fische mit Farbe r auswählen: $\binom{n_r}{k_r}$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\binom{n_1}{k_1} * \dots * \binom{n_r}{k_r}}{\underbrace{\binom{n}{k_0}}_{\text{Allgemeine hypergeometrische Verteilung}}}$$

Beispiel: 52 Karten

Zufällig auf 2 Spieler verteilt. Jeder Spieler bekommt 26 Karten

A = "Spieler 1 bekommt genau 3 Asse, 2 Könige und 1 Dame"

$\mathbb{P}[A] = ?$

Lösung: $\#\Omega = \binom{52}{26} * \underbrace{\binom{26}{26}}_{=1}$

$$\#A = \underbrace{\binom{4}{3}}_{3 \text{ A aus } 4} * \underbrace{\binom{4}{2}}_{2 \text{ K aus } 4} * \underbrace{\binom{4}{1}}_{1 \text{ D aus } 4} * \underbrace{\binom{40}{20}}_{\substack{\text{aus } 40 \text{ verbl.} \\ \text{Karten } 20 \text{ auswählen}}}$$

Beispiel: Zug mit 10 Waggon, jeweils 50 Plätze.

30 Personen suchen sich zufällig Plätze aus

A = "in jedem Waggon genau 3 Personen"

Lösung: $\#\Omega = \binom{500}{30}$ [30 Plätze ausgewählt, die besetzt werden sollen]

$$\#A = \underbrace{\binom{50}{3} * \binom{50}{3} * \dots * \binom{50}{3}}_1 0 = \binom{50}{3}^{10}$$

$$\mathbb{P}[A] = \frac{\binom{50}{3}^{10}}{\binom{500}{30}}$$

2.7 Multinomialkoeff.

Beispiel: k verschiedene Gegenstände sollen auf r Fächer verteilt werden, s.d.:

Im 1. Fach k_1 Gegenstände landen, $k_1 + k_2 + \dots + k_r = k$

Im 2. Fach k_2 Gegenstände landen,

...

Im r. Fach k_r Gegenstände landen

Möglichkeiten = ?

2 Kombinatorik

Lösung:

Wähle k_1 Gegenstände für Fach 1: $\binom{k}{k_1}$

Wähle k_2 Gegenstände für Fach 2: $\binom{k-k_1}{k_2}$

Wähle k_3 Gegenstände für Fach 3: $\binom{k-k_1-k_2}{k_3}$

...

Wähle k_r Gegenstände für Fach r: $\binom{k-k_1-k_2-\dots-k_{r-1}}{k_r} = \binom{k_r}{k_r} = 1$

Insgesamt: $\binom{k}{k_1} * \binom{k-k_1}{k_2} * \binom{k-k_1-k_2}{k_3} * \dots * \binom{k-k_1-k_2-\dots-k_{r-1}}{k_r} =$
 $\frac{k!}{k_1! * k_2! * \dots * k_r!}$

$$k! = 1 * 2 * \dots * k$$

$$1! = 1$$

$$0! = 1 \quad \binom{n}{n} = \frac{n!}{n! * 0!} = \frac{1}{0!} = 1$$

Definition: Multinomialkoeff.

$$\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_r} = \frac{k!}{k_1! * k_2! * \dots * k_r!}$$

Spezifalfall: r = 2

$$\binom{k}{k_1, k-k_1} = \frac{k!}{k_1! (k-k_1)!} = \binom{k}{k_1} = \binom{k}{k-k_1}$$

Multinomialformel:

$$\underbrace{(x + y + z + t)^n = (x + y + z + t) * (x + y + z + t) * \dots * (x + y + z + t)}_{n \text{ Mal}}$$

$$= \sum x^{k_1} y^{k_2} z^{k_3} t^{k_4} \quad k_1, k_2, k_3, k_4 \in \{0, 1, \dots\}, k_1 + \dots + k_4 = n$$

Beispiel: Aus 33 Schülern sollen 3 Fußballmannschaften gebildet werden.

#Mögl = ?

Lösung: $\binom{33}{11, 11, 11} = \frac{33!}{11! 11! 11!}$ [falls Mannschaften unterscheidbar]

Wenn Mannschaften **nicht** unterscheidbar sind:

$$\binom{33}{11, 11, 11} / 3!$$

Beispiel: Wie viele 16-stellige Zahlen kann man mit einem Ziffernvorrat von **3 Einsen**, **5 Dreien** und **8 Sechsen** schreiben?

$$1, 1, 1, 3, 3, 3, 3, 3, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6, 6$$

Lösung: 16 Stellen $\square \square \square \dots \square$

3 Stellen auswählen, die mit Einsen besetzt werden. $\binom{16}{3}$

Es verbleiben 13 Stellen. 5 Stellen auswählen, die mit Dreien besetzt werden $\binom{13}{5}$

Es verbleiben 8 Stellen. Es bleibt nur eine Möglichkeit für die 8 Sechsen.

Insgesamt: $\binom{16}{3} * \binom{13}{5} * 1 = \binom{16}{3,5,8} = \frac{16!}{3!5!8!}$

Fächer: 1,3,6

Gegenstände: Stellen

2.7.1 Multinomialverteilung mit Zurücklegen

Bsp.: Fische mit $n = \underbrace{n_1}_{\text{Farbe 1}} + \dots, n_r$

Fischer fängt k Fische **mit Zurücklegen**

A="genau k_1 Fische mit Farbe 1 gefangen,

...

genau k_r Fische mit Farbe r

$P[A] = ?$

Lösung: $\Omega = \{1, \dots, n\}^k \quad \#\Omega = n^k$

Betrachte Ereignis:

- Zuerst weise jeder Ziehung eine Farbe zu, s.d. $\forall i \in \{1, \dots, r\}$ Farbe i genau k_i Ziehungen zugeordnet wird.

Mögl.: $\binom{k}{k_1, k_2, \dots, k_r}$

- Bei gegebenen Farben ordnen wir nun jeder Ziehung einen Fisch zu.

A besteht aus $\binom{k}{k_1, \dots, k_r}$ "Kopien" von B, somit

$$\#A = \binom{k}{k_1, \dots, k_r} * n_1^{k_1} * \dots * n_r^{k_r}$$

B=" bei Ziehungen $1, \dots, k_n$ Farbe 1 gezogen,

bei Ziehungen $k_1 + 1, \dots, k_1 + k_2$: Farbe 2,

...

bei Ziehungen $k_1 + \dots + k_r + 1, \dots, k$: Farbe r"

$$\#B = \underbrace{n_1 * \dots * n_1}_{k_1} * \underbrace{n_2 * \dots * n_2}_{k_2} * \dots * \underbrace{n_r * \dots * n_r}_{k_r} = n_1^{k_1} * \dots * n_r^{k_r}$$

$$P[A] = \frac{\#A}{\#\Omega} = \binom{k}{k_1, \dots, k_r} * \left(\frac{n_1}{n}\right)^{k_1} * \left(\frac{n_2}{n}\right)^{k_2} * \dots * \left(\frac{n_r}{n}\right)^{k_r}$$

□

Beispiel: Eine faire Münze wird n mal geworfen.

$P[k \text{ Mal "Kopf"}] = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$, dann:

$$\#\Omega = \{Z, K\}^n \quad \#\Omega = 2^n \quad \#A = \binom{n}{k} \quad \begin{array}{l} \text{[Auswahl von k Würfeln,} \\ \text{in denen Kopf geworfen wurde]} \end{array}$$

2 Kombinatorik

Zwei Aufgaben:

1. Rundreise. Kunde darf 5 aus 12 verschiedenen Städten auswählen.
Anzahl der Touren: $12 \cdot 11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8$, nicht $\binom{12}{5}$ [Tour geordnet]
2. 12 Personen. Es soll ein Ausschuss aus 5 Personen gebildet werden, davon 1 Vorsitzender. Anzahl der Mögl: $\binom{12}{5} \cdot 5$, oder $12 \cdot \binom{11}{4}$

3 Axiome der WTheorie

Ω = Menge aller Ausgänge eines Zufallsexp.

Ereignisse = Teilmengen von Ω $A \subset \Omega$

$\mathcal{P}(\Omega)$ = Menge aller Ereignisse = Potenzmenge von Ω $\#\mathcal{P}(\Omega) = 2^{\#\Omega}$

Wahrscheinlichkeit ist eine Fkt. $\mathbb{P} : \mathcal{P}(\Omega) \rightarrow [0, 1]$

$A \rightarrow \mathbb{P}[A]$ mit

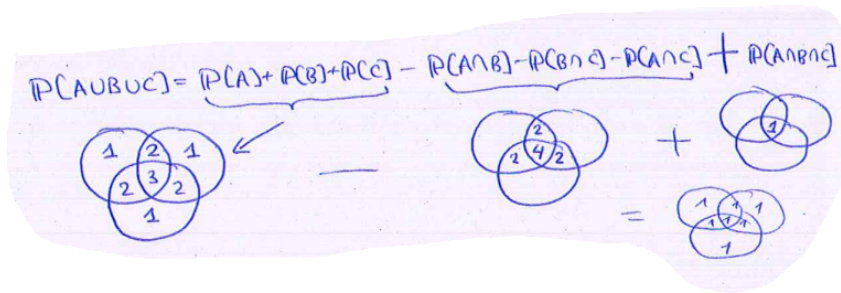
- **A₁** $\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \dots] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + \dots$
 $\forall A_1, A_2, \dots \subset \Omega$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset$
 $\forall i \neq j$
- $\mathbb{P}[\Omega] = 1$

3.1 Eigenschaften von \mathbb{P}

1. $\mathbb{P}[\emptyset] = 0$
2. $\forall A_1, \dots, A_n \subset \Omega$ mit $A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i \neq j$
 $\mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_n] = \mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_n]$
Spezialfall: Für $A, B \subset \Omega$ mit $A \cap B = \emptyset$
gilt $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$
3. $\forall A \in \Omega \quad \mathbb{P}[A^C] = 1 - \mathbb{P}[A]$
4. $\forall A, B \subset \Omega : \mathbb{P}[A \setminus B] = \mathbb{P}[A] - \underbrace{\mathbb{P}[A \cap B]}_{\text{Nicht } \mathbb{P}[B]}$
5. $A, B \subset \Omega$ (nicht disjunkt)
 $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] - \mathbb{P}[A \cap B]$
6. Siebformel oder Einschluss-Ausschluss-Formel.

Für 3 Ereignisse $A, B, C \subset \Omega$ $\mathbb{P}[A \cup B \cup C] =$
 $\mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B] + \mathbb{P}[C] - \mathbb{P}[A \cap B] - \mathbb{P}[B \cap C] - \mathbb{P}[C \cap A] + \mathbb{P}[A \cap B \cap C]$

3 Axiome der WTheorie



Für 4 Ereignisse A, B, C, D

$$P[A] + P[B] + P[C] + P[D] - (P[A \cap B] + P[A \cap C] + \dots + P[C \cap D]) \\ + (P[A \cap B \cap C] + P[B \cap C \cap D] + \dots) - P[A \cap B \cap C \cap D]$$

Für n Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_n :

$$P[\bigcup_{k=1}^n A_k] = \sum_{i=1}^n P[A_i] - \sum_{1 \leq i < j \leq n} P[A_i \cap A_j] + \sum_{1 \leq i < j < k \leq n} P[A_i \cap A_j \cap A_k] - \dots \\ + (-1)^{n+1} P[A_1 \cap \dots \cap A_n]$$

Bsp.:

n Briefe werden zufällig in n adressierte Briefumschläge gesteckt.

A = "mind. 1 Brief wird in den richtigen Umschlag gesteckt"

$P[A] = ?$

Lösung.:

Briefe 1, 2, 3, 4, 5, 6

$$\Omega = \{ \underbrace{(a_1, \dots, a_i)}_{\substack{a_i \text{ gibt an, in welchen} \\ \text{Umschlag Brief i gesteckt wird}}} : a_i \in \{1, \dots, n\} a_i \neq a_j \forall i \neq j \}$$

$$\#\Omega = n * (n-1) * \dots + 1 = n! \quad \#A = ?$$

$$A = \{(a_1, \dots, a_n) \in \Omega : \exists k \text{ mit } A_k = k\}$$

$A = A_1 \cup \dots \cup A_n$ mit

$A_k = \text{"Brief k wird in Umschlag k gesteckt"}$

$$P[A_k] = \frac{\#A_k}{\#\Omega} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}$$

A_1, \dots, A_n nicht disjunkt.

$$P[A_1 \cap A_2] = \frac{\#(A_1 \cap A_2)}{n!} = \frac{(n-2)!}{n!}$$

$$P[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = \frac{\#(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}{n!} = \frac{(n-3)!}{n!}$$

$$\text{Allgemein: } P[A_{i1} \cap A_{i2} \cap \dots \cap A_{il}] = \frac{(n-l)!}{n!}$$

$$\text{Siebformel: } P[A] = P[A_1 \cup \dots \cup A_n] = n * \frac{1}{n} - \binom{n}{2} * \frac{(n-2)!}{n!} + \frac{(n-3)!}{n!} - \dots$$

$$= \sum_{l=1}^n \binom{n}{l} * \frac{(n-l)!}{n!} * (-1)^{l+1} = \sum_{l=1}^n \frac{(-1)^{l+1}}{l!}$$

$$= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n!}$$

$$\begin{aligned} \text{Für } n \rightarrow \infty \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[A] &= 1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} - \frac{1}{4!} + \dots \\ &= 1 - \left(\frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \dots \right) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0.632 \end{aligned}$$

3.2 Ungleichungen für Wkeiten

$$\mathbb{P}[\Omega] = 1$$

$$\mathbb{P}[A_1 \cup A_2 \cup \dots] = \mathbb{P}[A_1] + \mathbb{P}[A_2] + \dots$$

$$\text{falls } A_i \cap A_j = \emptyset \quad \forall i + j$$

7.:

$$\forall A \subset B \subset \Omega \Rightarrow \mathbb{P}[A] \leq \mathbb{P}[B]$$

Bew.: $B = A \cup (B \setminus A)$ (disjunkt)

$$\mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[A] + \underbrace{\mathbb{P}[B \setminus A]}_{\geq 0} \geq \mathbb{P}[A] \quad \square$$

8.:

$$\forall A, B \subset \Omega : \mathbb{P}[A \cup B] \leq \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$$

$$\textbf{Allgemeiner: } \forall A_1, \dots, A_n \subset \Omega : \mathbb{P}[A_1 \cup \dots \cup A_n] \leq \mathbb{P}[A_1] + \dots + \mathbb{P}[A_n]$$

9. Noch allgemeiner:

$$\forall A_1, A_2, \dots \subset \Omega : \mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k] \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_k]$$

Bew.:

$$B_1 = A_1$$

$$B_2 = A_2 \setminus A_1$$

$$B_3 = A_3 \setminus (A_1 \cup A_2)$$

...

Dann gilt:

$$\underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k}_{\text{Nicht disj.}} = \underbrace{\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k}_{\text{disj.!!!}}$$

$$\mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k] = \mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k] \stackrel{\text{Axiom}}{=} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[B_k] \underset{B_k \subset A_k}{\leq} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_k] \quad \square$$

4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeiten

Bsp.: 2 faire Würfel $\Omega = \{1, \dots, 6\}^2$ $\#\Omega = 36$

A = "Erster Würfel zeigt eine 6" B = "Augensumme = 10"

Jemand teilt uns mit: B ist eingetreten.

$A = \{(6, 1), (6, 2), \dots, (6, 6)\}$ $\#A = 6$ $P[A] = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$ $B = \{ \underbrace{(6, 4)}_{A \text{ tritt ein}}, (5, 5), (4, 6) \}$

$$P[A|B] = \frac{1}{3}$$

Definition:

Seien $A, B \subset \Omega$. Bedingte Wkeit von A gegeben B ist:

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]}$$

Annahme: $P[B] \neq 0$

Bsp.:

Fairer Würfel wird 10x geworfen.

Uns wird mitgeteilt, dass mindestens eine 6 gewürfelt wurde.

Bedingte Wkeit, dass der erste Wurf eine 6 war = ?

Lösung:

$$\Omega = \{(a_1, \dots, a_{10}) : a_i \in \{1, \dots, 6\}\} \quad \#\Omega = \overbrace{6 * 6 * \dots * 6}^{10} = 6^{10}$$

B = "mind. eine 6 gewürfelt" $B^C = \text{"keine 6 gewürfelt"} =$

$$\{(a_1, \dots, a_{10}) : a_i \in \{1, 2, \dots, 5\}\} \quad \#B^C = 5^{10}$$

$$\#B = 6^{10} - 5^{10}$$

$$P[B] = \frac{6^{10} - 5^{10}}{6^{10}}$$

A = "der erste Wurf ist eine 6"

$$A = \{(6, a_2, \dots, a_{10}) : a_i \in \{1, \dots, 6\}\}$$

$$\#A = \underbrace{1 * 6 * 6 * \dots * 6}_9 = 6^9$$

$$P[A] = \frac{6^9}{6^{10}} = \frac{1}{6}$$

$$A \cap B = A$$

$$P[A \cap B] = P[A] = \frac{1}{6}$$

$$\mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{6^9}{6^{10} - 5^{10}} = 0,19$$

$$\mathbb{P}[A|B] = 0,19$$

$$\mathbb{P}[A] = 0,16$$

$$\text{Alternativ: } \mathbb{P}[A|B] = \frac{\#(A \cap B)}{\#B}$$

4.1 Eigenschaften der bedingten Wkeiten

$$1. \mathbb{P}[A|B] = \frac{\mathbb{P}[A \cap B]}{\mathbb{P}[B]} \leq 1 \text{ (und } \geq 0)$$

$$2. \mathbb{P}[\Omega|B] = \frac{\mathbb{P}[\Omega \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \frac{\mathbb{P}[B]}{\mathbb{P}[B]} = 1$$

$$\mathbb{P}[\emptyset|B] = 0$$

3. Falls A_1, A_2, \dots disj. sind, gilt:

$$\mathbb{P}\left[\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) | B\right] = \sum_{k=1}^{\infty} \stackrel{\text{Def.}}{=} \frac{\mathbb{P}[(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \cap B]}{\mathbb{P}[B]}$$

$$= \frac{\mathbb{P}[\bigcup_{k=1}^{\infty} (A_k \cap B)]}{\mathbb{P}[B]}$$

$$\stackrel{A \cap B, A_2 \cap B, \dots \text{disj.}}{=} \frac{\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_k \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mathbb{P}[A_k \cap B]}{\mathbb{P}[B]} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[A_k|B] \quad \square$$

$$4. \mathbb{P}[A^C|B] = 1 - \mathbb{P}[A|B]$$

5. Multiplikationsregel:

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = \mathbb{P}[A_1] * \mathbb{P}[A_2|A_1]$$

$$\mathbb{P}[A_1 \cap A_2 \cap A_3] = \mathbb{P}[A_1] * \mathbb{P}[A_2|A_1] * \mathbb{P}[A_3|(A_1 \cap A_2)]$$

Sterbewahrscheinlichkeiten q_0, q_1, \dots

q_n = Wahrscheinlichkeit, als eine n-jährige Person, dass Alter n+1 nicht zu erreichen.

$$q_0 = 0,0046$$

Wkeit, dass eine Person ≥ 50 alt wird

$$q_1 = 0,0004$$

$$q_2 = 0,0002$$

Lösung: Def.: A_n = "Person hat das Alter von n Jahren erreicht"

$$\mathbb{P}[A_{50}] = ?$$

$$\text{Gegeben sind } q_n = \mathbb{P}[A_{n+1}^C|A_n] \quad 1 - q_n = \mathbb{P}[A_{n+1}|A_n]$$

$$\mathbb{P}[A_{50}] = \mathbb{P}[A_1] * \mathbb{P}[A_2|A_1] * \mathbb{P}[A_3|(A_1 \cap A_2)] * \mathbb{P}[A_4| \underbrace{(A_1 \cap A_2 \cap A_3)}_{A_3}] * \dots *$$

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}[A_{50} | \underbrace{(A_1 \cap \dots \cap A_{49})}_{A_{49}}] \\ &= (1 - q_0) * (1 - q_1) * \dots * (1 - q_{49}) \\ & \mathbb{P}[\text{Person lebt genau 50 Jahre}] = (1 - q_0) * (1 - q_1) * \dots * (1 - q_{49}) * q_{50} \quad \square \end{aligned}$$

4.2 Unabhängige Ereignisse

Zwei Formeln:

1. $\mathbb{P}[A \cup B] = \mathbb{P}[A] + \mathbb{P}[B]$, falls $A \cap B = \emptyset$
2. $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B]$, falls A und B unabh.

Bem.: Disjunkt und unabh sind verschiedene Begriffe.

Seien A, B disj, d.g. $A \cap B = \emptyset \Rightarrow \underbrace{\mathbb{P}[A \cap B]}_{\emptyset} = 0 \neq \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B]$

\Rightarrow A und B abh. (Falls $\mathbb{P}[A], \mathbb{P}[B] \neq 0$)

Definition

Ereignisse A,B,C heißen

- paarweise unabh, wenn $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B]$, $\mathbb{P}[A \cap C] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[C]$, $\mathbb{P}[B \cap C] = \mathbb{P}[B] * \mathbb{P}[C]$
- unabh, wenn zusätzlich: $\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B] * \mathbb{P}[C]$ unabh \Rightarrow paarweise unabh

Bsp.: 3 Ereignisse, die paarweise unabh, aber nicht unabh.

3 Würfel: x_1, x_2, x_3 seien die 3 Augenzahlen

$A = \{x_1 = x_2\}$ $B = \{x_2 = x_3\}$ $C = \{x_3 = x_1\}$

$\Omega = \{1, \dots, 6\}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \{1, \dots, 6\}\}$ $\#\Omega = 6^3$

$A = \{(a, a, c) : a, c \in \{1, \dots, 6\}\}$ $C = \{(a, b, a) : a, b \in \{1, \dots, 6\}\}$

$B = \{(a, b, b) : a, b \in \{1, \dots, 6\}\}$

$\#A = 6^2$ $\#B = 6^2$ $\#C = 6^2$

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B] = \mathbb{P}[C] = \frac{6^2}{6^3} = \frac{1}{6}$$

Beh.: A, B, C sind paarweise unabh. Wir zeigen: $\mathbb{P}[A \cap B] = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B]$

$A \cap B = \{x_1 = x_2, x_2 = x_3\} = \{x_1 = x_2 = x_3\} = \{(a, a, a) : a \in \{1, \dots, 6\}\}$

$\#(A \cap B) = 6$

$$\mathbb{P}[A \cap B] = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} = \frac{1}{6} * \frac{1}{6} = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B] \Rightarrow A \text{ und } B \text{ unabh}$$

Beh.: A,B,C sind abh.

$A \cap B \cap C = \{x_1 = x_2, x_2 = x_3, x_3 = x_1\} = \{x_1 = x_2 = x_3\} = \{(a, a, a) : a \in \{1, \dots, 6\}\}$ $\#(A \cap B \cap C) = 6$

$$\mathbb{P}[A \cap B \cap C] = \frac{6}{6^3} = \frac{1}{6^2} \neq \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B] * \mathbb{P}[C] \Rightarrow A, B, C \text{ abh.}$$

4.2.1 Eigenschaften von unabhängig

Seien A,B unabhängige Ereignisse. Dann sind

- A und B^C unabh
- A^C und B unabh
- A^C und B^C unabh

Bew.: Wir zeigen A und B^C sind unabh

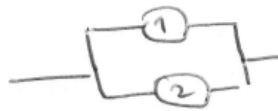
$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A \cap B^C] &= \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[A \cap B] \stackrel{A, B \text{ unabh}}{=} \mathbb{P}[A] - \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B] \\ &= \mathbb{P}[A] * (1 - \mathbb{P}[B]) = \mathbb{P}[A] * \mathbb{P}[B^C] \Rightarrow A, B^C \text{ unabh} \quad \square \end{aligned}$$

Weitere **Beh.:** Seien A,B,C unabh. Dann sind:

- A, $B \cup C$ unabh
- A, $B \cap C$ unabh
- A, $B \Delta C$ unabh

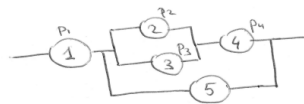
Bsp.: Zuverlässigkeit: System besteht aus **n** Komp. 1,...,n

Wkeit, dass Komp **i** ausfällt ist $\mathbb{P}[A_i] = p_i$



a) Parallelschaltung

$$\mathbb{P}[\text{Ausfall des Systems}] = \mathbb{P}[A_1 \cap A_2] = p_1 p_2$$



b) Reihenschaltung

$$\mathbb{P}[\text{Ausfall des Systems}] = \mathbb{P}[\underbrace{A_1 \cup A_2}_{\text{nicht disj, unabh}}] = 1 - \mathbb{P}[(A_1 \cup A_2)^C] \stackrel{\text{de Morgan}}{=} 1 - \mathbb{P}[A_1^C \cap A_2^C]$$

$$1 - \mathbb{P}[\underbrace{A_1^C \cap A_2^C}_{\text{unabh}}]$$

$$= 1 - \mathbb{P}[A_1^C] * \mathbb{P}[A_2^C]$$

$$= 1 - (1 - p_1)(1 - p_2) = p_1 + p_2 - p_1 p_2$$

$$\mathbb{P}[\text{Ausfall}] = ?$$

4 Bedingte Wahrscheinlichkeiten und Unabhängigkeiten

Ereignis, dass das System ausfällt:

$$A = \text{Ausfall des Systems} = A_1 \cup (A_5 \cap (A_4 \cup (A_2 \cap A_3)))$$

$$\mathbb{P}[A] = ?$$

$$\mathbb{P}[2 \text{ und } 3 \text{ fällt aus}] = p_2 p_3$$

$$\mathbb{P}[2, 3, 4 \text{ fällt aus}] = p_2 p_3 + p_4 - p_2 p_3 p_4$$

$$\mathbb{P}[2, 3, 4, 5 \text{ fällt aus}] = (p_2 p_3 + p_4 - p_2 p_3 p_4) p_5$$

$$\mathbb{P}[A] = p_1 + p_{\text{Rest}} - p_1 p_{\text{Rest}} = \dots \text{ Prof sagt trivial}$$

□

Def.: n Ereignisse A_1, A_2, \dots, A_n sind

- paarweise unabh., wenn $\mathbb{P}[A_i \cap A_j] = \mathbb{P}[A_i] * \mathbb{P}[A_j] \forall i \neq j$
- unabh., wenn: $\forall m \in \{2, \dots, n\} \forall 1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_m \leq n$

$$\mathbb{P}[A_{i_1} \cap A_{i_2} \cap \dots \cap A_{i_m}] = \mathbb{P}[A_{i_1}] * \dots * \mathbb{P}[A_{i_m}]$$

(D.h. Produktformel gilt für alle Teilfamilien)

Beh.: Blockungslemma

Bsp.: Seien A, B, C, D, E, F, G unabh. Er.

$$(A \Delta C) \cap E^C \cup C, B^C \cap F, D \cup G \quad \text{unabh}$$

Aber: $A \Delta C$ und $B \cup C$ sind im Allgemeinen abgh.

Bem: Ω und A sind immer unabh. $\mathbb{P}[\Omega \cap A] = \mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[\overbrace{\Omega}^1] * \mathbb{P}[A]$
 \emptyset und A sind immer unabh $\mathbb{P}[\emptyset \cap A] = \mathbb{P}[\emptyset] = 0 = \mathbb{P}[\emptyset] * \mathbb{P}[A]$

5 Satz von Bayes

Satz: Formel der totalen Wkeit

Sei $\Omega = B_1 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} B_n$ disj. Zerlegung von Ω , d.h. $B_i \cap B_j = \emptyset \forall i \neq j$ und $\Omega = B_1 \cup \dots \cup B_n$

Sei $\mathbb{P}[B_i] \neq 0 \forall i$

Sei $A \subset \Omega$ ein weiteres Er. Dann gilt:

$$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B_1] * \mathbb{P}[A|B_1] + \mathbb{P}[B_2] * \mathbb{P}[A|B_2] + \dots$$

Beweis: $\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[A \cap B_1] + \mathbb{P}[A \cap B_2] + \dots = \mathbb{P}[B_1] * \mathbb{P}[A|B_1] + \mathbb{P}[B_2] * \mathbb{P}[A|B_2] + \dots$ \square

Beispiel: Population Personen: krank und gesund

1% der Population ist krank.

Schnelltest: Bei einer Kranken Person mit Wkeit 90% positiv.

Bei einer gesunden Person mit Wkeit 20% positiv

$A = \text{"Test ist Positiv"}$ $\mathbb{P}[A] = 0,001 * 0,9 + 0,99 * 0,2 = 0,207$

Lösung mit der Formel

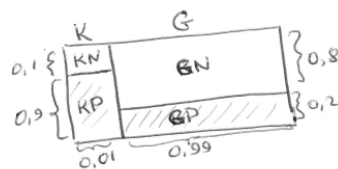
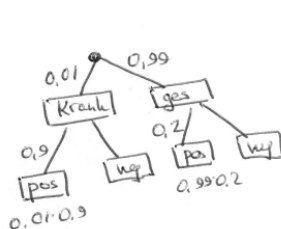
$B_1 = \text{"Person krank"}$ $B_2 = \text{"Person gesund"}$

$\mathbb{P}[B_1] = 0,01 \Rightarrow \mathbb{P}[B_2] = 0,99$

$\mathbb{P}[A|B_1] = 0,9$ [nicht $\mathbb{P}[A \cap B_1]$] $\mathbb{P}[A|B_2] = 0,2$

$\mathbb{P}[A] = \mathbb{P}[B_1] * \mathbb{P}[A|B_1] + \mathbb{P}[B_2] * \mathbb{P}[A|B_2]$

$= 0,01 * 0,9 + 0,99 * 0,2$



$$A = KP \cup GP$$

5.1 Bayes-Formel

Satz 2.2:

Seien $A, B \subset \Omega$ zwei Er. mit $P[A] \neq 0, P[B] \neq 0$ Dann gilt:

$$P[B|A] = \frac{P[A|B] * P[B]}{P[A]}$$

Beweis: Linke Seite = $P[B|A] = \frac{P[B \cap A]}{P[A]}$

Rechte Seite = $\frac{P[A|B] * P[B]}{P[A]} = \frac{P[A \cap B]}{P[A]} \quad \square$

Beispiel 1: Population Personen: krank und gesund

1% der Population ist krank.

Schnelltest: Bei einer Kranken Person mit Wkeit 90% positiv.

Bei einer gesunden Person mit Wkeit 20% positiv

Eine gesunde Person wurde positiv getestet. Wkeit, dass diese Person krank ist.

Lösung 1:

Ω = Population B_1 = "Person ist krank"
 $B_2 = B_1^C$ = "Person ist gesund"

A = "Person wurde positiv getestet"

Aufgabenstellung: $P[B_1] = 0,01 \Rightarrow P[B_2] = 1 - 0,01 = 0,99$

1. $P[A|B_1] = 0,9$

2. $P[A|B_2] = 0,2$

$P[B_1|A] = ?$

Bayes-Formel: $P[B_1|A] \stackrel{\text{Bayes}}{=} \frac{P[A|B_1] * P[B_1]}{P[A]} \stackrel{\text{totale Wkeit}}{=}$

$$\frac{P[A|B_1] * P[B_1]}{P[A|B_1] * P[B_1] + P[A|B_2] * P[B_2]} = \frac{0,9 * 0,01}{0,9 * 0,01 + 0,2 * 0,99} = 0,043$$

$P[B_2|A] = 1 - P[B_1|A] = 1 - 0,043$

Lösung 2:

$P[A] = 0,01 * 0,9 + 0,99 * 0,2 = 0,207$

$P[\text{krank}|\text{pos. get.}] = \frac{0,01 * 0,9}{0,01 * 0,9 + 0,99 * 0,2} = 0,043$

Lösung 3:

Grundmenge: $\Omega = \{KP, KN, GP, GN\}$ Laplace-Exp.

5 Satz von Bayes

$$P(KP) = 0,9 \cdot 0,01$$

$$P(GP) = 0,02 \cdot 0,99$$

$$P(KN) = 0,1 \cdot 0,01$$

$$P(GN) = 0,8 \cdot 0,99$$

$$A = \text{"Person positiv"} = \{KP, GP\}$$

$$B_1 = \text{"Person krank"} = \{KP, KN\}$$

$$P[B_1|A] = \frac{P[B_1 \cap A]}{P[A]} = \frac{P(KP)}{P(KP) + P(GP)} = \dots$$

Beispiel 2: 2 Jungen Problem

Im Nachbarhaus: Familie mit 2 Kindern.

Sie beobachten: Im Garten spielt ein Junge.

Wkeit, dass das andere Kind auch ein Junge ist = ?
d.h. beide sind Jungen

Lösung:

Grundmenge: $\Omega = \{MM1, MM2, MJ1, MJ2, JM1, JM2, JJ1, JJ2\}$

MM1 = Beides Mädchen, erste Kind im Garten

B = "Im Garten spielt ein Junge" = $\{MJ2, JM1, JJ1, JJ2\}$

A = "Beide Kinder sind Jungen" = $\{JJ1, JJ2\}$ $A \cap B = \{JJ1, JJ2\}$

$$P[A|B] = \frac{P[A \cap B]}{P[B]} = \frac{2/8}{4/8} = 0.5$$

Beispiel 3: Ziegenproblem

3 Türen Hinter einer Tür → Auto
 Hinter den beiden anderen → Ziegen

Sie zeigen auf Tür 1. (Tür 1 bleibt aber geschlossen)

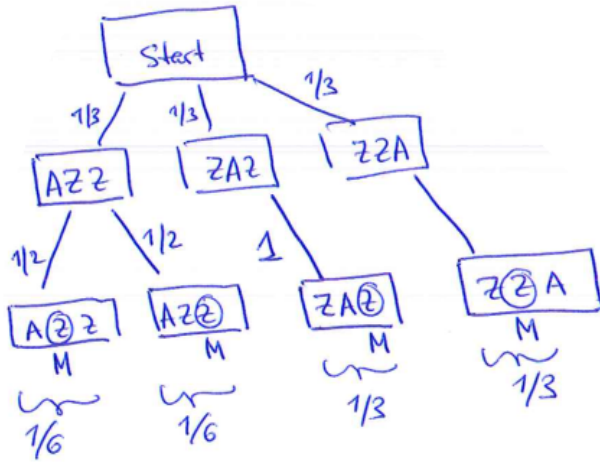
Moderator öffnet eine der beiden anderen Türen → Ziege.

Sie dürfen bei Tür 1 bleiben oder wechseln. Was ist besser?

Aufgabenstellung ist unvollständig. Wir machen die Annahme: Moderator weiß, wo das Auto steht und will das Auto nicht zeigen.

5 Satz von Bayes

Lösung:



$$\Omega = \{AZZ, AZZ, ZAZ, ZZA\}$$

Dick geschrieben: Vom Moderator gewählt

$$p(AZZ) = \frac{1}{3} * \frac{1}{2}$$

$$p(AZZ) = \frac{1}{3} * \frac{1}{2}$$

$$p(ZAZ) = \frac{1}{3} * 1$$

$$p(ZZA) = \frac{1}{3} * 1$$

$$P[\text{Auto hinter Tür 1}] = p(AZZ) + p(AZZ) = \frac{1}{6} + \frac{1}{6} = \frac{1}{3}$$

$$P[\text{Türwechsel führt zum Erfolg}] = p(ZAZ) + p(ZZA) = \frac{1}{3} + \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$$

Also wechseln!

6 Zufallsvariablen (ZV)

Laut Oli sehr wichtig!

Definition:

Eine ZV ist eine Funktion $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

Beispiel:

2 Würfel. $\Omega = \{(a_1, a_2) : a_1, a_2 \in \{1, \dots, 6\}\}$

Erste Augenzahl: $X_1(a_1, a_2) = a_1$

Zweite Augenzahl $X_2(a_1, a_2) = a_2$

Augensumme: $X(a_1, a_2) = a_1 + a_2 \quad x = x_1 + x_2$

Größe Augenzahl: $y(a_1, a_2) = \max(a_1, a_2)$

In dieser Vorlesung sei Ω immer endlich

Definition:

Eine Verteilung einer ZV X ist die Angabe der Werte und der Wkeiten dieser Werte.

Zähldichte von $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ist $P_x : \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$

$$P_x(t) = \underbrace{\mathbb{P}[x = t]}_{\text{Er.}} = \mathbb{P}[\underbrace{\{w \in \Omega : X(w) = t\}}_{x^{-1}(t)}]$$

Beispiel: 2 Würfel.

$x(a_1, a_2) = a_1 + a_2$ Augensumme

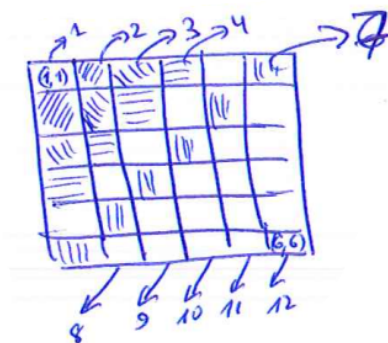
t	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
$\mathbb{P}[x = t]$	$\frac{1}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{6}{36}$	$\frac{5}{36}$	$\frac{4}{36}$	$\frac{3}{36}$	$\frac{2}{36}$	$\frac{1}{36}$

$\{x=2\} = \{(1,1)\}$

$\{x=3\} = \{(1,2), (2,1)\}$

$\{x=4\} = \{(1,3), (3,1), (2,2)\}$

...



6 Zufallsvariablen (ZV)

$$P_x(t) = \begin{cases} \frac{t-1}{36} & , t \in \{2, \dots, 7\} \\ \frac{13-t}{36} & , t \in \{7, \dots, 12\} \\ 0, t \notin \{2, \dots, 12\} \end{cases}$$

Für die erste Augenzahl $x_1(a_1, a_2) = a_1$

t	1	2	3	4	5	6
$P[=]$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{6}$

Eigenschaften der Zähl-dichte:

1. $P_x(t) \in [0, 1]$
2. $\sum_{t \in \mathbb{R}} P_x(t) = 1$

Beispiel: Sei $A \subset \Omega$

Indikatorvariable von A:

$$\mathbb{1}_A(\omega) = \begin{cases} 1, & \omega \in A \\ 0, & \omega \notin A \end{cases}$$

Grafik und Tabelle indikatorvariable

Definition: Sei X ZV mit Verteilung

Werte	y_1	y_2	y_3	...
Wkeiten	P_1	P_2	P_3	...

$$\mathbb{P}[x = y_i] = p_i$$

Erwartungswert von X ist $\mathbb{E}X = \sum_i \underbrace{y_i}_{\text{Werte}} \underbrace{P_i}_{\text{Wkeiten}}$

Beispiel: 1 Würfel, x_1 Augenzahl

$$\mathbb{E}X_1 = 1 * \frac{1}{6} + 2 * \frac{1}{6} + \dots + 6 * \frac{1}{6} = 3,5$$

$\mathbb{E}X$ ist **nicht** der wahrscheinlichste Wert: $\mathbb{P}[X = 3, 5] = 0$

Bemerkung:

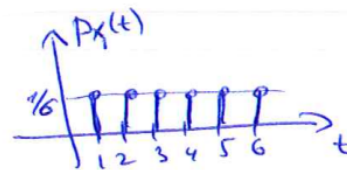
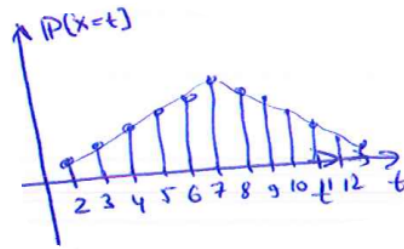
Betrachte $n = 10^6$ Würfe. Augenzahlen: X_1, X_2, \dots, X_n

Dann gilt $\frac{X_1 + \dots + X_n}{n} \approx 3.5$

Satz 9.1 [alternative Formel für $\mathbb{E}X$]

Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\mathbb{E}X = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) \underbrace{\mathbb{P}[\{\omega\}]}_{p(\omega)}$$



6 Zufallsvariablen (ZV)

Beweis: Seien y_1, \dots, y_m Werte von X

$$A_1 = \{X = y_1\}, \dots, A_m = \{X = y_m\}$$

$$A_i = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = y_i\}$$

$\Omega = A_1 \dot{\cup} A_2 \dot{\cup} \dots \dot{\cup} A_m$ ist disj. Zerlegung

$$\mathbb{E}X \stackrel{\text{Def}}{=} \sum_i y_i * p_i = \sum_i y_i \mathbb{P}[A_i]$$

$$\sum_i y_i \sum_{\omega \in A_i} p(\omega) \stackrel{w \in A_i}{=} \sum_i \sum_{\omega \in A_i} X(\omega) p(\omega) \\ \Rightarrow X(\omega) = y_i$$

Satz 9.2. Seien $x, y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ZV

Dann gilt $\mathbb{E}[x + y] = \mathbb{E}X + \mathbb{E}y$

Beweis:

$$\mathbb{E}[x + y] \stackrel{9.1}{=} \sum_{\omega \in \Omega} (x + y)(\omega) * p(\omega) =$$

$$= \sum_{\omega \in \Omega} (X(\omega) + y(\omega)) p(\omega) = \sum_{\omega \in \Omega} X(\omega) * p(\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} y(\omega) * p(\omega) \stackrel{9.1}{=} \\ \mathbb{E}X + \mathbb{E}y \quad \square$$

Bem. Allgemein: Für ZV $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R} : \mathbb{E}[X_1 + \dots + X_n] = \\ \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_n$

Bem. Sei $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}, \mathbb{E}[a * X] = a * \mathbb{E}X$

Beispiel: n Würfel. Augenzahlen: X_1, \dots, X_n Augensumme: $S = X_1 + \dots + X_n$

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}X_1 + \dots + \underbrace{\mathbb{E}X_n}_{=3,5} = n * 3,5$$

Beispiel: Lotto 6 aus 49. (ohne Zurücklegen) Tippe auf $\{1, \dots, 6\}$

Sei S die Anzahl der richtig geratenen Zahlen.

Werte von S : $0, 1, \dots, 6$

$$\mathbb{P}[S = k] = \frac{\binom{6}{k} * \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}}, \text{ für } k \in \{0, \dots, 6\}$$

$S = X_1 + \dots + X_6$, wobei

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{falls Ball } i \text{ gezogen wurde} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{E}S \stackrel{9.2}{=} \mathbb{E}X_1 + \dots + \mathbb{E}X_6$$

Bemerkung: $\mathbb{E}1_A =$

$$\frac{0}{1 - \mathbb{P}[A]} \mid \frac{1}{\mathbb{P}[A]} = \mathbb{P}[A]$$

$\mathbb{E}X_i = \mathbb{P}[\text{Ball } i \text{ wurde gezogen}]$

$$= \frac{\binom{48}{5}}{\binom{49}{6}}$$

6 Zufallsvariablen (ZV)

$$= \frac{\left(\frac{48 * 47 * 46 * 45 * 44}{5!} \right)}{\left(\frac{48 * 47 * 46 * 45 * 44}{6!} \right)} = \frac{6!/5!}{49} = \frac{6}{49} \quad \forall i \in \{1, \dots, 6\}$$

$$\mathbb{E}S = \mathbb{E}X_1 + \dots \mathbb{E}X_6 = 6 * \frac{6}{49} = \frac{36}{49}$$

Definition:

Seien $X_1, \dots, X_n : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ ZV

Sie heißen unabhängig, falls:

$$\begin{aligned} \forall y_1, \dots, y_n \in \mathbb{R} : \quad & \mathbb{P}[X_1 = y_1, X_2 = y_2, \dots, X_n = y_n] \\ &= \mathbb{P}[X_1 = y_1] * \dots * \mathbb{P}[X_n = y_n] \end{aligned}$$

Bemerkung: Sind X_1, \dots, X_n unabh., dann gilt sogar:

$$\begin{aligned} \forall A_1, \dots, A_n \subset \mathbb{R} : \quad & \mathbb{P}[X_1 \in A_1, \dots, X_n \in A_n] \\ &= \mathbb{P}[X_1 \in A_1] * \dots * \mathbb{P}[X_n \in A_n] \end{aligned}$$

Satz 9.3:

Seien $X, Y : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ **unabh.** ZV

Dann gilt $\mathbb{E}[X * Y] = \mathbb{E}X * \mathbb{E}Y$

2 Eigenschaften:

1. $\mathbb{E}[x + y] = \mathbb{E}x + \mathbb{E}y \quad \forall x, y$
2. $\mathbb{E}[x * y] = \mathbb{E}x * \mathbb{E}y \quad \forall \text{unabh. } x, y$

Beweis:

Notation:

Werte von X: $\begin{array}{|c|c|c|} \hline x_1 & x_2 & \dots \\ \hline p_1 & p_2 & \dots \\ \hline \end{array}$

$$\mathbb{P}[X = x_i] = p_i$$

Werte von Y: $\begin{array}{|c|c|c|} \hline y_1 & y_2 & \dots \\ \hline q_1 & q_2 & \dots \\ \hline \end{array}$

$$\mathbb{P}[Y = y_j] = p_j$$

Betrachte Er.: $A_{ij} = \{X = x_i, Y = y_j\} = \{\omega \in \Omega : X(\omega) = x_i, Y(\omega) = y_j\}$

A_{11}	A_{21}	A_{31}	A_{41}
A_{12}	A_{22}	A_{23}	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots
\dots	\dots	\dots	\dots

$\Omega = \bigcup_{i,j} A_{ij}$, d.h. A_{ij} bilden disj. Zerlegung von Ω

6 Zufallsvariablen (ZV)

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}[x * y] &\stackrel{9.1}{=} \sum_{\omega \in \Omega} p(\omega) * X(\omega) * Y(\omega) = \\
 &\sum_{i,j} \sum_{\omega \in A_{ij}} (p(\omega) * X(\omega) Y(\omega) x_i y_j) = \\
 &= \sum_{i,j} (x_i y_j \sum_{\omega \in A_{ij}} p(\omega)) = \sum_{i,j} x_i y_j \mathbb{P}[A_{ij}] \\
 \mathbb{P}[A_{ij}] &= \mathbb{P}[X = x_i, Y = y_j] \stackrel{x,y \text{ unabh. ZV}}{=} \mathbb{P}[X = x_i] * \mathbb{P}[Y = y_j] = p_i * q_j \\
 &= \sum_{i,j} x_i y_j p_i q_j = \sum_{i,j} (x_i p_i) (y_j q_j) \\
 &= (\sum_i x_i p_i) (\sum_j y_j q_j) = \mathbb{E}X * \mathbb{E}Y \quad \square
 \end{aligned}$$

Beispiel: (zu Unabh. von ZV)

n faire Würfel. X_i Aufenzahl die der i -te Würfel zeigt

$\Omega = \{(a_1, \dots, a_n)\}$ def $X_i(a_1, \dots, a_n) = a_i$

Behauptung 1: Zufallsvariablen X_1, \dots, X_n sind unabh.

Beweis 1:

Z.z. $\mathbb{P}[X_i = x_1, \dots, X_n = x_n] = \mathbb{P}[X_i = x_i] * \dots * \mathbb{P}[X_n = x_n]$

Lösung:

$$\{X_1 = x_1, \dots, X_n = x_n\} = \begin{cases} (x_1, \dots, x_n), & \text{falls } \forall i : x_i \in \{1, \dots, 6\} \\ \emptyset, & \text{falls } \exists i : x_i \notin \{1, \dots, 6\} \end{cases}$$

$$\text{LS} = \begin{cases} \frac{1}{6^n}, & \text{falls } \forall i : x_i \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

RS: $\mathbb{P}[X_1 = x_1] = ?$

$$\{X_1 = x_1\} = \begin{cases} \{(x_1, a_2, \dots, a_n) : a_2, \dots, a_n \in \{1, \dots, 6\}\}, & \text{falls } x_1 \in \{1, \dots, 6\} \\ \emptyset, & \text{falls } \exists i : x_i \notin \{1, \dots, 6\} \end{cases}$$

$$\#\{X_1 = x_1\} = \begin{cases} 6^{n-1}, & \text{falls } x_1 \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\mathbb{P}[X_1 = x_1] = \begin{cases} \frac{6^{n-1}}{6^n}, & \text{falls } x_1 \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

$$\text{RS} = \begin{cases} \frac{1}{6} * \frac{1}{6} * \dots * \frac{1}{6} = \frac{1}{6^n}, & \text{falls } \forall A_i : x_i \in \{1, \dots, 6\} \\ 0, & \exists i : x_i \notin \{1, \dots, 6\} \end{cases}$$

LS = RS $\Rightarrow X_1, \dots, X_n$ unabh. ZV.

6 Zufallsvariablen (ZV)

Behauptung 2: Sei $S = X_1 + \dots + X_n$ die Augensumme.
Dann sind X_1 und S abh. ZV

Beweis: Z.z. $\exists a, b$ mit $\mathbb{P}[X_1 = a, S = b] \neq \mathbb{P}[X_1 = a] * \mathbb{P}[S = b]$

Wir zeigen das für $a=1, b=6*n$

LS: $\mathbb{P}[\underbrace{X_1 = 1, S = 6n}_{\text{Treten nicht gleichzeitig ein}}] = 0$

RS: $\mathbb{P}[X_1 = 1] = \frac{1}{6}$

$\mathbb{P}[S = 6n] = \frac{1}{6^n}$

$\text{RS} = \frac{1}{6} * \frac{1}{6^n} \neq 0$

$\text{LS} \neq \text{RS} \Rightarrow X_1, S \text{ abh.}$

□

7 Harmonische Reihe

7.1 Harmonische Reihe

Definition: Harmonische Zahlen $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}$
 Harmonische Reihe: $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} H_n$

7.1.1 Satz 10.1

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots = +\infty \quad H_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

d.h. $\forall A$ (egal wie groß) $\exists n = n(A) : H_n \geq A$

Beweis:

$$\begin{aligned} 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right)}_{2 \text{ Terme}} + \underbrace{\left(\frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ Terme}} + \underbrace{\left(\frac{1}{9} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ Terme}} + \dots \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \underbrace{\left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right)}_{2 \text{ Terme}} + \underbrace{\left(\frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{8}\right)}_{4 \text{ Terme}} + \underbrace{\left(\frac{1}{16} + \dots + \frac{1}{16}\right)}_{8 \text{ Terme}} + \dots \\ &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \dots = \infty \end{aligned}$$

$$H_2 \geq 1 + \frac{1}{2}, H_4 \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}, H_8 \geq 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

$$H_{2^l} \geq 1 + \frac{l}{2}$$

$$A = 7 * 10^6 \quad 1 + \frac{l}{2} \geq A \quad l \geq 2A - 2$$

$$H_{2^{1+10^6-2}} \geq 7 * 10^6$$

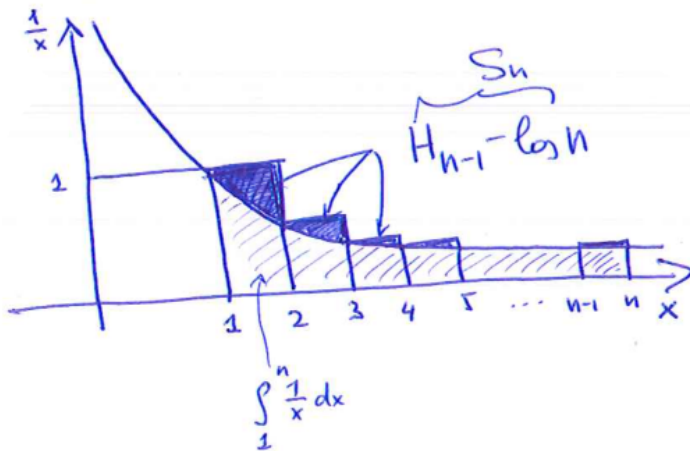
7.1.2 Satz 10.2, Euler, 1734

$\underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n}}_{H_n \rightarrow \infty} - \underbrace{\log n}_{\rightarrow \infty}$ konvergiert für $n \rightarrow \infty$ gegen eine Konstante.

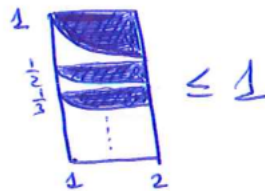
Bemerkung: Die Konstante $\gamma := \lim_{n \rightarrow \infty} (H_n - \log n) = 0,57721 \dots$ heißt Euler-Mascheroni-Konstante

Beweis: $\int_1^n \frac{1}{x} dx = (\log x) \Big|_1^n = \log n - \underbrace{\log 1}_0 = \log n$

7 Harmonische Reihe



$H_{n-1} - \log n = \text{Fläche } S_n$
 $S_1 < S_2 < S_3 < \dots$



Außerdem: $S_n \leq 1 \forall n \in \mathbb{N}$
 D.h. $\exists \lim S_n$ existiert und ist ≤ 1 und ≥ 0

$H_n - \log n = \underbrace{H_{n-1} - \log n}_{\text{Konv. für } n \rightarrow \infty} + \underbrace{\frac{1}{n}}_0$, also konvergiert $H_n - \log n$ gegen einem

Limes, der zwischen 0 und 1 liegt. □

$\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{n} = \log n + \gamma + \underbrace{\varepsilon_n}_{\text{Fehler der Appr.}}$, wobei $\varepsilon_n \rightarrow 0$ für $n \rightarrow \infty$

7.2 Alternierende harm.Reihe

Alternierende harm. Reihe: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$

Beweis:

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n}$$

$$S_{2n+1} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} + \frac{1}{2n+1}$$

$$S_{2n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots - \frac{1}{2n} = H_{2n} - 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2n}\right)$$

$$= H_{2n} - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) = H_{2n} - H_n =$$

$$= (\log 2n + \gamma + \varepsilon_{2n}) - (\log n + \gamma + \varepsilon_n)$$

Kor.

$$= \log 2n - \log n + \varepsilon_{2n} - \varepsilon_n$$

$$= \log 2 + \underbrace{\varepsilon_{2n}}_0 - \underbrace{\varepsilon_n}_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \log 2$$

7 Harmonische Reihe

Aufgabe: Schnecke und Auto

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots = \infty$$

[GRAFIK schneckeUndAuto Einfügen]

Zeige: Schnecke überholt das Auto in endlicher Zeit

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \log 2$$

$$\underbrace{1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2}} + \underbrace{\frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4}} + \underbrace{\frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6}} \dots = \frac{3}{2} \log 2$$

Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}$ heißt absolut konvergent, wenn $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < \infty$

Beispiel: $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ ist konvergent aber nicht absolut konvergent.

Satz: In einer absolut konvergenten Reihe kann man die Terme umordnen, ohne dass sich die Summe ändert.

Riemann'scher Umordnungssatz: $\forall a \in \mathbb{R}$ gibt es eine Umordnung der Reihe $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$, die gegen a konvergiert.

Beweis: Sei $a \geq 0$

Ungerade Terme: $1, \frac{1}{3}, \frac{1}{5}, \dots$ $1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} \dots = \infty$

Gerade Terme: $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \dots$ $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots = \infty$

Nehme ungerade Terme bis die Summe $\geq a$ wird:

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n_1} \geq a$$

Ziehe gerade Terme abm bis die Summe $\leq a$ wird

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{m_1} \leq a$$

Addiere ungerade Terme bis die Summe wieder $\geq a$ wird

$$1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{n_1} - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \dots - \frac{1}{m_1} + \frac{1}{n_1+2} + \frac{1}{n_1+4} + \dots + \frac{1}{n_2} \geq a$$

usw. □

Bemerkung Über EWert von ZV mit abzählbar ∞ -vielen Werten

Betrachte ZV X: Werte:

x_1	x_2	x_3	\dots
p_1	p_2	p_3	\dots

$$EX = \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i?$$

Problem: Keine "kanonische" Reihenfolge der Werte x_i Wenn $\sum_{i=1}^{\infty}$ nicht absolut konv. \Rightarrow kann sich das Ergebnis durch Umordnung ändern

Definition: Sei X ZV wie oben Def.

$$S_+ = \sum_{i: x_i \geq 0} x_i p_i, \quad S_- = \sum_{i: x_i < 0} |x_i| p_i$$

7 Harmonische Reihe

$$\mathbf{F\ddot{a}lle:} \left\{ \begin{array}{ll} EX \stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i=1}^{\infty} x_i p_i = S_+ - S_-, & \text{falls } S_+ < \infty, s_- < \infty \\ EX \stackrel{\text{def}}{=} +\infty, & \text{falls } S_+ = \infty, s_- < \infty \\ EX \stackrel{\text{def}}{=} -\infty, & \text{falls } S_+ < \infty, S_- = \infty \\ EX \text{ nicht definiert,} & \text{falls } S_+ = \infty, S_- = \infty \end{array} \right.$$

8 Diskrete Verteilungen

8.1 Uniforme Verteilungen

Definition:

ZV X heißt uniform, falls verteilt auf der Menge $\{x_1, \dots, x_n\}$ ($x_i \in \mathbb{R}$), falls:

$$\mathbb{P}[X = x_i] = \frac{1}{n} \forall i = 1, \dots, n$$

Bemerkung: $\mathbb{E}X = x_1 * \frac{1}{n} + x_2 * \frac{1}{n} + \dots + x_n * \frac{1}{n} = \frac{x_1 + \dots + x_n}{n}$ [arithmetisches Mittel]

Beispiel:

Sei X uniform verteilt auf $\{1, 2, \dots, n\}$ $\mathbb{E}X = \frac{1 + 2 + \dots + n}{n} =$

$$1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)/2}{n} = \frac{n+1}{2}$$

[GRAFIK Treppe Einfügen]

$$= \frac{n^2}{n} + \frac{n}{2} = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$1 + 3 + 5 + 7 + \dots + (2n-1)$$

$$n = 1 : 1$$

$$n = 2 : 1 + 3 = 4$$

$$n = 3 : 1 + 3 + 5 = 9$$

... Vermutung: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n-1) = n^2$

Proof by picture:

[GRAFIK proofByPicture Einfügen]

8.2 Binomialverteilung

Ein Bernoulli-Exp: Zwei Ausgänge $\underbrace{\text{Erfolg (oder 1)}}_p$ und $\underbrace{\text{Misserfolg (0)}}_{1-p}$

Definition:

ZV X heißt Bernoulli-verteilt, falls

$$\mathbb{P}[x = 1] = p, \mathbb{P}[x = 0] = 1 - p$$

Bez: $x \sim \text{Bern}(p)$

$$\mathbb{E}X = 1 * p + 0 * (1 - p) = p$$

8 Diskrete Verteilungen

Nn betrachte n unabh. Bern-Exp. Grundmenge: $\Omega = \{(0, 1)^n : a_i \in \{0, 1\}\}$

$$\mathbb{P}[(0, 0, 1, 0, 1, 1)] = (1-p) * (1-p) * p * (1-p) * p * p = p^3(1-p)^3$$

$$\mathbb{P}[(A_1, \dots, a_n)] = p^k(1-p)^{n-k}, \text{ wobei } K = a_1 + \dots + a_n (\text{Anzahl Erfolge})$$

Für $p = \frac{1}{2} \Rightarrow$ LaPlace-Experiment

Für $p \neq \frac{1}{2} \Rightarrow$ kein LaPlace-Experiment

Satz 11.1

Sei X die Anzahl der Erfolge in einem n-fachen Bernoulli-Experiment.

$$\text{Dann gilt: } \mathbb{P}[x = k] = \binom{n}{k} * p^k(1-p)^{n-k} \quad k = 0, 1, \dots, n$$

Beispiel:

$$n = 4, k = 2$$

$$\mathbb{P}[(1, 1, 0, 0)] = p^2 * (1-p)^2 \quad (1, 0, 1, 0)$$

$$\mathbb{P}[(0, 1, 1, 0)] = p^2(1-p)^2 \quad (1, 0, 0, 1)$$

$$(0, 0, 1, 1)$$

Alle 6 Ausgänge haben Wkeit $p^2(1-p)^2$

Definition:

ZV X wie oben heißt binomialverteilt mit Param n und p

Bez: $x \sim \text{Bin}(n, p)$

Bemerkung: $\sum_{k=0}^n \mathbb{P}[x = k] = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \stackrel{\text{Bin. Formel}}{=} (p + 1 - p)^n = 1^n = 1$

Satz 11.2

Sei $X \sim \text{Bin}(n, p)$

Dann gilt $\mathbb{E}X = n * p$

Beweis:

$$\text{Sei } x_i = \begin{cases} 1 & , \text{ falls im i-ten Experiment Erfolg eintritt} \\ 0 & , \text{ sonst} \end{cases}$$

$$\underbrace{x}_{\substack{\text{Anzahl d. Erfolge} \\ \text{in Exp. 1, ..., i}}} = x_1 + x_2 + \dots + x_n$$

$$\mathbb{E}x = \mathbb{E}[x_1 + \dots + x_n] = \overbrace{\mathbb{E}x_1}^p + \dots + \overbrace{\mathbb{E}x_n}^p = n * p$$

$$\text{Dann } \mathbb{E}x_i = 1 * p + 0 * (1-p) = p$$

□

Beispiel: Werfe faire Münze n Mal

$$\mathbb{P}[\text{die Münze zeigt k mal Kopf}] = \binom{n}{k} * \left(\frac{1}{2}\right)^k * \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$$

Beispiel: Werfe fairen Würfel n Mal

$$\mathbb{P}[k \text{ Sechsen}] = \binom{n}{k} * \left(\frac{1}{6}\right)^k * \left(\frac{5}{6}\right)^{n-k}$$

8 Diskrete Verteilungen

Beispiel: Betrachte Urne mit 10 roten und 20 schwarzen Bällen.
Wir ziehen 15 Bälle **mit** Zurücklegen.

Bestimme Wkeit, dass bei 8 Ziehungen roter Ball gezogen wurde

$$n = 15, p = \frac{1}{3}$$

Gesuchte Wkeit ist: $\binom{15}{8} * \left(\frac{1}{3}\right)^8 * \left(\frac{2}{3}\right)^7$

9 Geometrische Verteilung

Betrachte unendl. Folge von unabh. Bernoulli-Exp. mit Erfolgswkeit $p \in (0, 1]$
 $\Omega = \{0, 1\}^\infty = \{(a_1, a_2, \dots) : a_i \in \{0, 1\}\}$

Zeitpunkt des ersten Erfolges: $T : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

$$T(a_1, a_2, \dots) = \min\{n \in \mathbb{N} : a_n = 1\}$$

Z.b. $T(\underbrace{0}_{a_1}, \underbrace{0}_{a_2}, \underbrace{0}_{a_3}, \underbrace{0}_{a_4}, \underbrace{1}_{a_5}, \dots) = 5$

Vert von T? Werte von T: 1, 2, 3, ..., ∞

Satz 11.3

$$\forall k \in \{1, 2, \dots\} : \mathbb{P}[T = k] = p(1 - p)^{k-1}$$

Definition: T heißt geometrisch Verteilt mit Parameter p. Bez: $T \sim \text{Geo}(p)$

Beweis: Damit $T = k$ ist, muss die Serie wie folgt aussehen:

$$\underbrace{0, 0, \dots, 0}_{k-1 \text{ Misserfolge}}, \underbrace{1}_{\text{Erfolg}}, \dots$$

Sei x_i das Ergebnis des i-ten Experiments.

x_i ist ZV mit $\mathbb{P}[x_i = 1] = p, \mathbb{P}[x_i = 0] = 1 - p$. x_1, x_2 sind unabh. ZV

$$\mathbb{P}[T = k] = \mathbb{P}[x_1 = 0, x_2 = 0, \dots, x_{k-1} = 0, x_k = 1] \underset{x_1, \dots, x_n \text{ unabh ZV}}{=}$$

$$\mathbb{P}[x_1 = 0] * \dots * \mathbb{P}[x_{k-1} = 0] * \mathbb{P}[x_k = 1]$$

$$= \underbrace{(1 - p) * \dots * (1 - p)}_{k-1} p = p(1 - p)^{k-1} \quad \square$$

Beispiel: Werfen eine fairen Münze bis zum ersten Mal Kopf.

$$T = \text{Anzahl der Würfe. } \mathbb{P}[T = k] \underset{p=\frac{1}{2}}{=} \frac{1}{2} * \frac{1}{2^{k-1}} = \frac{1}{2^k}, k = 1, 2, \dots$$

$$\textbf{Bemerkung: } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots = 1$$

[GRAFIK GlasWasser Einfügen]

Exkurs über die geometrische Reihe

Aufgabe: Berechne $1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$

Sei $A = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n$

Betrachte: $qA = 1 + q + q^2 + q^3 + \dots + q^n + q^{n+1}$

Abziehen:

$$A - qA = 1 - q^{n+1}$$

$$A(1 - q) = 1 - q^{n+1}$$

$$A = \frac{1 - q^{n+1}}{1 - q} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} \quad \text{Für } q \neq 1 : A = n + 1 \quad \square$$

Aufgabe: Berechne $1 + q + q^2 + q^3 + \dots$

Lösung: Sei $S = 1 + q + q^2 + \dots$

$$S = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 + q + q^2 + \dots + q^n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} = \begin{cases} \frac{1}{1 - q} & , \text{ falls } |q| < 1 \\ +\infty & , \text{ falls } q > 1 \\ \text{existiert nicht} & , \text{ falls } q \leq -1 \end{cases}$$

$$\text{Denn } \lim_{n \rightarrow \infty} q^{n+1} = \begin{cases} 0 & , \text{ falls } |q| < 1 \quad \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0 \\ 1 & , \text{ falls } q = 1 \\ +\infty & , \text{ falls } q > 1 \quad 2^n \rightarrow +\infty \\ \text{existiert nicht} & , \text{ falls } q \leq -1 \quad \text{divergiert} \end{cases}$$

Für $q = 1$: $S = 1 + 1 + 1 + \dots = \infty$

Bemerkung: Vorsicht mit der Reihe $S = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$. Sie divergiert.

Geometrische Verteilung

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{P}[T = k] = \sum_{k=1}^{\infty} p \underbrace{(1 - p)^{k-1}}_q = p \underbrace{(1 + q + q^2 + \dots)}_{\text{gelöst}} = p * \frac{1}{1 - q} = \frac{p}{p} = 1$$

Satz 11.4

Sei $T \sim \text{Geo}(p)$

$$\mathbb{E}T = \frac{1}{p}$$

Bemerkung:

$$p \downarrow 0 \Rightarrow \mathbb{E}T \rightarrow \infty$$

$$p = 1 \Rightarrow \mathbb{E}T = 1$$

Beweis:

$$\mathbb{E}T = \sum_{k=1}^{\infty} k * \mathbb{P}[T = k] = \sum_{k=1}^{\infty} k * p(1 - p)^{k-1} = p \sum_{k=1}^{\infty} k * q^{k-1}$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} kq^{k-1} = 1 + 2q + 3q^2 + 4q^3 + 5q^4 + \dots \quad (\text{Entsteht durch Ableiten von } 1 + q + q^2 + \dots = \frac{1}{1 - q})$$

9 Geometrische Verteilung

$$\begin{aligned}
 &= (1 + q + q^2 + q^3 + \dots)' = -\frac{1}{(1-q)^2} \\
 &= \left(\frac{1}{1-q}\right)' = -1 \frac{1}{(1-q)^2} * (1-q)' = \frac{1}{(1-q)^2} \quad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \\
 \mathbb{E}T &= p * \frac{1}{(1-q)^2} = \frac{p}{p^2} = \frac{1}{p} \quad \square
 \end{aligned}$$

Beispiel:

Werfe eine faire Münze, sie zum ersten mal Kopf zeigt. Wkeit, dass die Anzahl der Würfe gerade ist.

Lösung: $T \sim \text{Geo}(\frac{1}{2})$

$$\mathbb{P}[T \in \{2, 4, 6, \dots\}] = \mathbb{P}[T = 2] + \mathbb{P}[T = 4] + \dots$$

$$= \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{2^6} + \dots$$

$$= \frac{1}{1 - 1/4} - 1 = \frac{4}{3} - 1 = \frac{1}{3}$$

Beispiel: Würfeln mit einem fairen Würfel bis zu ersten 6. Erwartete Anzahl der Würfe?

Lösung: Erfolg = 6 $p = \frac{1}{6} \mathbb{E}T = \frac{1}{1/6} = 6$

Beispiel Sammler-Problem:

Jede Packung enthält ein Bild. Es gibt n mögl. Bilder, alle gleichwahrscheinlich.

Erwartete Anzahl an Packungen, die man kaufen muss, um alle Bilder zu sammeln.

Lösung:

[GRAFIK Sammlung Einfügen]

Wartezeit: $S_n = T_1 + T_2 + T_3 + \dots + T_n$

mit $T_1 = 1, T_2 \sim \text{Geo}(\frac{n-1}{n}), T_3 \sim \text{Geo}(\frac{n-2}{n}), \dots, T_n \sim \text{Geo}(\frac{1}{n})$

Hier ist T_i die Wartezeit auf ein noch nie gesehenes Bild nachdem i-1 Bilder gesammelt wurden.

$$T_i \sim \text{Geo}(\frac{n-i+1}{n})$$

$$\begin{aligned}
 \mathbb{E}S_n &= \mathbb{E}[T_1 + \dots + T_n] = \mathbb{E}T_1 + \mathbb{E}T_2 + \dots + \mathbb{E}T_n \\
 &= \underbrace{\frac{1}{n}}_{\frac{n}{n}} + \frac{n}{n-1} + \frac{n}{n-2} + \dots + \frac{n}{1} \\
 &= n\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{n-1} + \dots + 1\right) = N\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}\right) \quad \square
 \end{aligned}$$

Für $n \rightarrow \infty \quad \frac{\mathbb{E}S_n}{n \log n} \rightarrow 1$

Satz 11.5: Vergessenseigenschaft der Geo-Vert

$$\mathbb{P}[T > n + k | T > n] = \mathbb{P}[T > k] \quad \forall n, k \in \mathbb{N}, T \sim \text{Geo}(p)$$

$$[\text{auch: } \mathbb{P}[T > n + k | T > n] = \mathbb{P}[T > k]$$

Beweis: $\mathbb{P}[T > k] = \mathbb{P}[\text{Versuche } 1, 2, \dots, k \text{ sind Misserfolge}] = (1 - p)^k$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[T > n + k | T > n] &\stackrel{\text{def}}{=} \frac{\mathbb{P}[T > n + k, T > n]}{\mathbb{P}[T > n]} = \frac{\mathbb{P}[T > n + k]}{\mathbb{P}[T > n]} \\ &= \frac{(1 - p)^{1-k}}{(1 - p)^n} = (1 - p)^k \end{aligned}$$

10 Poisson Verteilung

10.1 Exkurs über die Zahl e

Beispiel: Preis steigt jeden Tag um 1 %

Am Anfang: 1 Euro

Preis nach 100 Tagen = ?

Lösung:

$$x \mapsto x + \frac{x}{100}$$

Tag 0	Tag 1	Tag 2	...	Tag 100
1	$1 + \frac{1}{100}$	$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^2$...	$\left(1 + \frac{1}{100}\right)^{100} \approx 2,7$

Betrachte $a_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$

n = 100: **2,704813...**

n = 10000: **2,7181459 ...**

...

Definition: $e = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = 2,7182818 \dots$

$1 + \frac{1}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$ Unbestimmtheit 1^∞

Formel 1:

$$\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \left(\left(1 + \frac{x}{n}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x = \left(\left(1 + \frac{1}{\frac{n}{x}}\right)^{\frac{n}{x}}\right)^x \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^x \quad x = \text{konst}, n \rightarrow \infty$$

Beispiel: $\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n = \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2 \cdot \frac{1}{n}} = \left(\left(1 + \frac{1}{n^2}\right)^{n^2}\right)^{\frac{1}{n}} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^0 = 1$

Formel 2:

$$e^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots$$

Beweis:

1. $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n \rightarrow e^x$
2. $\left(1 + \frac{x}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} \left(\frac{x}{n}\right)^k = \sum_{k=0}^n \frac{n!}{k!(n-k)!} \frac{x^k}{n^k} = \sum_{k=0}^n \frac{n(n-1) \dots (n-k+1)}{k!} \frac{x^k}{n^k}$

10 Poisson Verteilung

$$= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} \underbrace{\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k}}_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$$

$$\frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{n^k} = \underbrace{\frac{1}{n}}_1 * \underbrace{\frac{n-1}{n}}_1 \cdots * \underbrace{\frac{n-k+1}{n}}_1 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 1$$

Beispiel: $x = 1$

$$e = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots$$

10.2 Poisson Verteilung

Sehr viele Bern.-Exp: $n \rightarrow \infty$

Sehr kleine Erfolgswahrscheinlichkeit: $p = \frac{\lambda}{n}$ $\lambda = \text{const.}$ $\lambda > 0$

Die Anzahl der Erfolge ist ZV $S_n \sim \text{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$ $\mathbb{E}S_n = n * \frac{\lambda}{n} = \lambda$

Beispiel: Wkeit, dass es keinen Erfolg gibt: $\mathbb{P}[S_n = 0] = (1 - \frac{\lambda}{n}) * (1 - \frac{\lambda}{n}) * \dots * (1 - \frac{\lambda}{n}) = (1 - \frac{\lambda}{n})^n \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda}$ [Formel 1] $x = -\lambda$

$$\mathbb{P}[S_n = k] = \binom{n}{k} * p^k (1-p)^{n-k} = \binom{n}{k} * \left(\frac{\lambda}{n}\right)^k \left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{n-k} = \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^n}_{e^{-\lambda}} * \underbrace{\left(1 - \frac{\lambda}{n}\right)^{-k}}_1 * \lambda^k$$

Wkeit k Erfolge

$$* \frac{n(n-1) \cdots (n-k+1)}{k! n^k} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{-\lambda} * 1 * \lambda^k * 1 * \frac{1}{k!}$$

$$= e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Definition: ZV X heißt Poissonverteilt mit Parameter $\lambda > 0$, falls

$$\mathbb{P}[x = k] = e^{-\lambda} * \frac{\lambda^k}{k!}, \quad k = 0, 1, 2, \dots$$

Bemerkung:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}[x = k] = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} * e^{\lambda} = 1$$

10.2.1 Satz 11.6: Poisson-Grenzwertsatz

Sei $S_n \sim \text{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$, $\lambda > 0$ konstant.

Dann gilt

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}[S_n = k] = \frac{e^{-\lambda} \lambda^k}{k!} \quad \forall k = 0, 1, 2, \dots$$

10 Poisson Verteilung

Beispiel: 100 Personen A = "mind. eine Person hat heute Geburtstag"
 $P[A] = ?$

Lösung 1 (Exakt): $n=100$, Bern-Exp
 Erfolge im Exp $i \Leftrightarrow$ Person i hat heute Geburtstag
 Erfolgswkkeit $p = \frac{1}{365}$

A^C "keine Person hat heute Geburtstag"
 $P[A^C] = \binom{n}{0} p^0 (1-p)^n = (1-p)^n$

$$P[A] = 1 - P[A^C] = 1 - (1-p)^n = 1 - \left(1 - \frac{1}{365}\right)^{100} = 0,2399$$

Lösung 2 (Approximation): Anzahl d. Personen die heute Geburtstag haben: $S_n \sim \text{Bin}(\underbrace{100}_n, \underbrace{\frac{1}{365}}_p)$

$$P[A] = P[S_n \geq 1] = 1 - P[S_n = 0]$$

$$S_n \sim \text{Bin}(\underbrace{100}_n, \underbrace{\frac{1}{365}}_{\frac{\lambda}{n}}) \approx \text{Poi}(\underbrace{\frac{100}{365}}_{\lambda})$$

$$P[A] = 1 - P[S_n = 0] \approx 1 - P[\text{Poi}\left(\frac{100}{365}\right) = 0]$$

$$= 1 - e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} = 1 - e^{-\lambda} = 1 - e^{-\frac{100}{365}} = 0,2396$$

Beispiel: 96 % Prozent der Fluggäste erscheinen. 75 Flugkarten für 73 Plätze verkauft.

$P[\underbrace{\text{alle Fluggäste bekommen Platz}}_A] = ?$

Lösung 1 (Exakt) Die Anzahl der Gäste, die erscheinen: ZV $T_n \sim \text{Bin}(75, 0,96)$

$$\begin{aligned} P[A] &= P[T_n \leq 73] = 1 - P[T_n \geq 74] = 1 - P[T_n = 74] - P[T_n = 75] \\ &= 1 - \binom{75}{74} p^{74} (1-p)^1 - \binom{75}{75} p^{75} (1-p)^0 \\ &\stackrel{p=0,96}{=} 1 - 75 * 0,96^{74} * 0,04 - 0,96^{75} = 0,8069 \dots \end{aligned}$$

Lösung 2 (Approx): $T_n \sim \text{Bin}(\underbrace{75}_n, \underbrace{0,96}_{\frac{\lambda}{n}}) \approx \text{Poi}(75 * 0,96)$

Falsch, da 0,96 nicht klein ist

Betrachte Gäste, die nicht erschienen sind: Anzahl:

10 Poisson Verteilung

$$S_n \sim \text{Bin}(\underbrace{75}_{\text{gro\ss}}, \underbrace{0,04}_{\text{klein}}) \approx \text{Poi}(\underbrace{75 * 0,04}_{\lambda})$$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[A] &= \mathbb{P}[S_n \geq 2] = 1 - \mathbb{P}[S_n = 0] - \mathbb{P}[S_n = 1] \approx 1 - e^{-\lambda} \frac{\lambda^0}{0!} - e^{-\lambda} \frac{\lambda^1}{1!} \\ &= 1 - e^{-75*0,04} - e^{-75*0,04} * 75 * 0,04 = 0,8008 \end{aligned}$$

10.2.2 Satz 11.7

Sei $x \sim \text{Poi}(\lambda)$ ($\lambda > 0$). Dann gilt $\mathbb{E}x = \lambda$

Beweis:

$$\begin{aligned} \mathbb{E}x &= \sum_{k=0}^{\infty} k \mathbb{P}[x = k] = \sum_{k=0}^{\infty} k * e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k}{(k-1)!} \\ &= e^{-\lambda} \lambda \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} \stackrel{l=k-1}{=} e^{-\lambda} \lambda \sum_{l=0}^{\infty} \frac{\lambda^l}{l!} = e^{-\lambda} \lambda e^{\lambda} = \lambda \end{aligned}$$

Faltungsformel: Seien x, y unabh. ZV mit Werten in $\{0, 1, 2, \dots\}$
 Vert von x, y seien gegeben
 Vert von $x+y$?

Lösung Werte von $x+y$ sind in $\{0, 1, \dots\}$

$$\begin{aligned} \text{Für } n \in \{0, 1, 2, \dots\} \quad \mathbb{P}[x + y = n] &= \sum_{k=0}^n \mathbb{P}[x = k, y = n - k] \stackrel{x, y \text{ unabh.}}{=} \\ &\sum_{k=0}^n \mathbb{P}[x = k] * \mathbb{P}[y = n - k] \\ x = k \in \{1, 2, \dots\} \quad y = n - k \end{aligned}$$

Beispiel: $x \sim \text{Bin}(m_1, p)$ $y \sim \text{Bin}(m_2, p)$, unabh.
 $x + y \sim \text{Bin}(m_1 + m_2, p)$