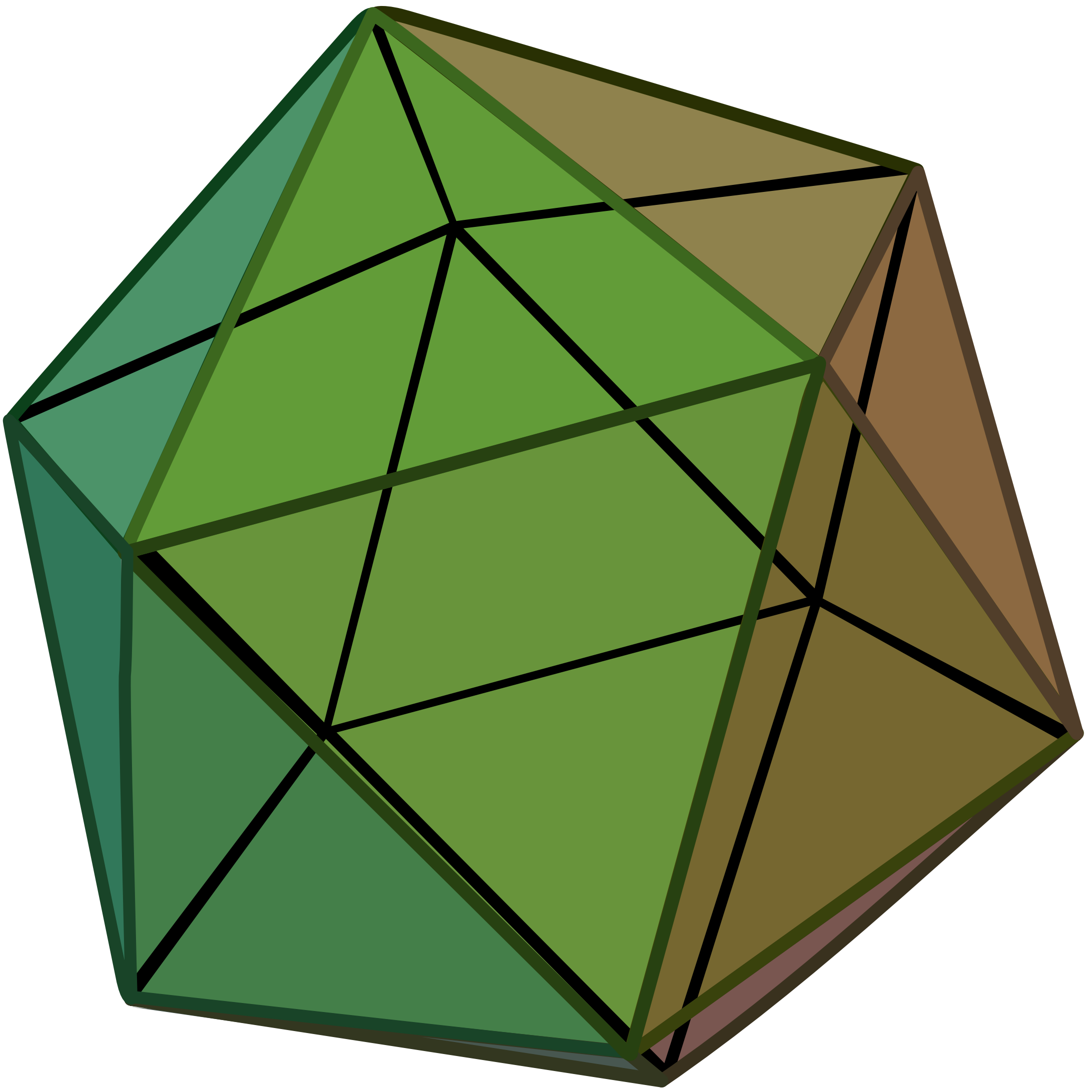

Simplex Solver

Цисык Р.О.

г. Барнаул, 2009

1 Примеры решения задач

1.1 Пример I

1.1.1 Постановка задачи

Задана ЗЛП с целевой функцией:

$$F(\vec{X}) = x_1 + x_2 \to max. \tag{1}$$

Система ограничений имеет следующий вид:

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 \leq 45 \\ 2x_1 + 7x_2 \leq 14 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \tag{2}$$

.

Необходимо:

1) Решить исходную ЗЛП симплекс-методом;
2) Решить исходную ЗЛП графически;
3) Из последней симплекс-таблицы найти решение исходной и двойственной задач;
4) Построить двойственную ЗЛП;
5) Решить двойственную ЗЛП методом искусственного базиса;
6) Решить двойственную ЗЛП графически;
7) Из последней симплекс-таблицы найти решение исходной и двойственной задач;
8) Сравнить результаты.

1.1.2 Решение исходной ЗЛП симплекс-методом

Введем балансовые переменные и приведем к каноническому виду. Для нахождения максимума, умножим целевую функцию на -1.

$$-F(\vec{X}) = -(-x_1 - x_2) \to max$$

$$\begin{cases} 20x_1 + 10x_2 + x_3 = 45 \\ 2x_1 + 7x_2 + x_4 = 14 \\ x_i, s_i \geq 0 \end{cases} \tag{3}$$

Составим таблицу и решим задачу симплекс-методом.

i	Базис	C_i	B	$C_1=-1$	$C_2=-1$	$C_3=0$	$C_4=0$	Θ_i
1	P_3	0	45	20	10	1	0	2,25
2	P_4	0	14	2	7	0	1	7
$m+1$			0	1	1	0	0	

i	Базис	C_i	B	$C_1=-1$	$C_2=-1$	$C_3=0$	$C_4=0$	Θ_i
1	P_1	-1	2,25	1	0,5	0,05	0	4,5
2	P_4	0	9,5	0	6	$-0{,}1$	1	1,583
$m+1$			$-2{,}25$	0	0,5	$-0{,}05$	0	

i	Базис	C_i	B	$C_1=-1$	$C_2=-1$	$C_3=0$	$C_4=0$	Θ_i
1	P_1	-1	1,458	1	0	0,05833	$-0{,}08333$	4,5
2	P_2	-1	1,583	0	1	$-0{,}01667$	0,1667	1,583
$m+1$			$-3{,}042$	0	0	$-0{,}04167$	$-0{,}08333$	
$m+1$			3,042	0	0	0,04167	0,08333	

Получен оптимальный план: $X^{\text{опт}} = (1{,}458; 1{,}583)$, и оптимальное значение целевой функции $F^{\text{опт}} = 3{,}04$.

1.1.3 Решение исходной ЗЛП графическим методом

1.1.4 Решение исходной и двойственной ЗЛП из симплекс-таблицы

Для исходной ЗЛП был получен оптимальный план и оптимальное решение:

$$X^{\text{опт}} = (1{,}458; 1{,}583),\ F^{\text{опт}} = 3{,}04.$$

Тогда оптимальный план и значение двойственной симметричной ЗЛП:

$$Y^{\text{опт}} = (0{,}042; 0{,}083),\ Z^{\text{опт}} = 3{,}04.$$

1.1.5 Построение двойственной ЗЛП

Построим двойственную симметричную ЗЛП:

$$Z(\vec{Y}) = 45y_1 + 14y_2 \to min, \tag{4}$$

$$\begin{cases} 20y_1 + 2y_2 \geq 1, \\ 10y_1 + 7y_2 \geq 1, \\ y_1, y_2 \geq 0. \end{cases} \tag{5}$$

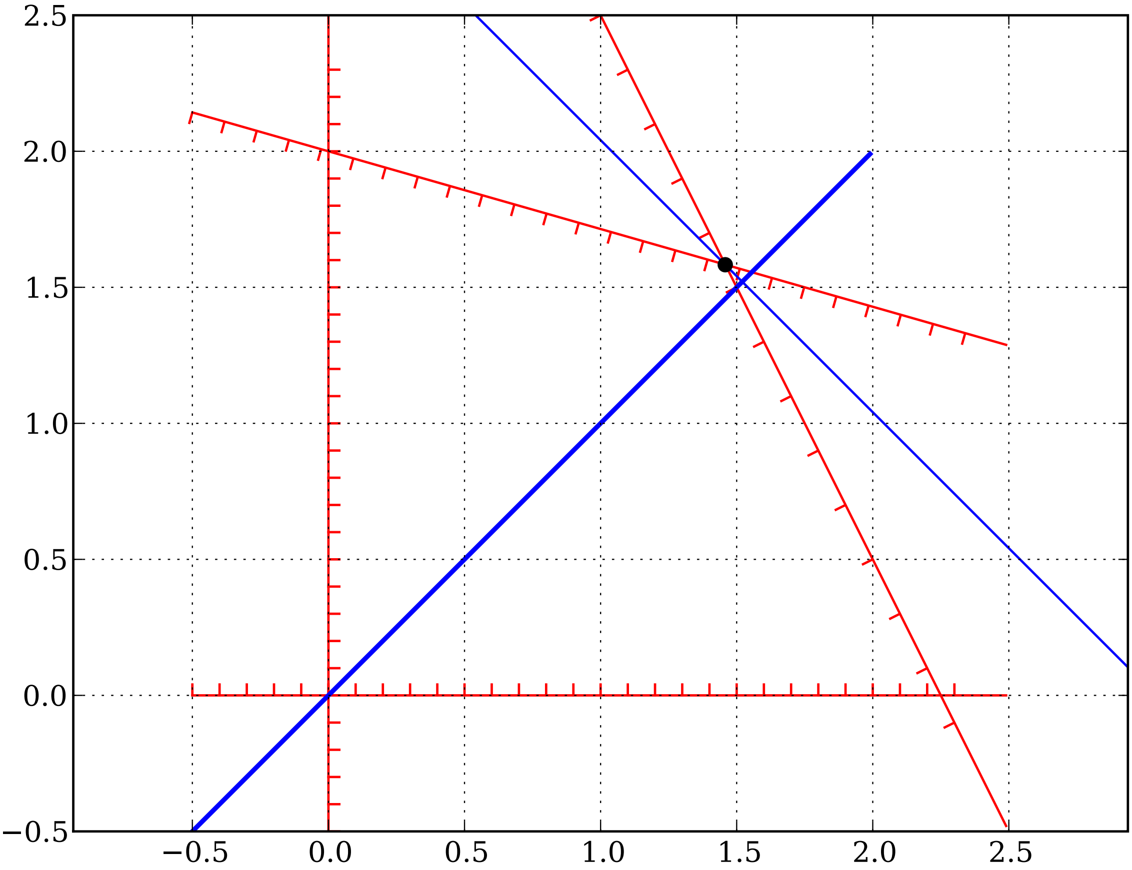

Рисунок 1 — Решение графическим методом

1.1.6 Решение двойственной ЗЛП методом искусственного базиса

Введем искусственные переменные и приведем к каноническому виду.

$$Z(\vec{Y}) = 45y_1 + 14y_2 + Wy_5 + Wy_6 \rightarrow min \qquad (6)$$

$$\begin{cases} 20y_1 + 2y_2 - y_3 + s_5 = 1 \\ 10y_1 + 7y_2 - y_4 + s_6 = 1 \\ y_i, s_i \geq 0 \end{cases} \qquad (7)$$

i	Базис	B_i	C	$B_1 = 45$	$B_2 = 14$	$B_3 = 0$	$B_4 = 0$	$B_5 = W$	$B_6 = W$	Θ_i
1	P_5	W	1	20	2	-1	0	1	0	0,05
2	P_6	W	1	10	7	0	-1	0	1	0,1
$m+1$			0	-45	-14	0	0	0	0	
$m+2$			$2W$	$30W$	$9W$	$-1W$	$-1W$	$0W$	$0W$	

i	Базис	B_i	C	$B_1 = 45$	$B_2 = 14$	$B_3 = 0$	$B_4 = 0$	$B_5 = W$	$B_6 = W$	Θ_i
1	P_1	45	0,05	1	0,1	−0,05	0	0,05	0	0,5
2	P_6	W	0,5	0	6	0,5	−1	−0,5	1	0,08333
$m+1$			2,25	0	−9,5	−2,25	0	2,25	0	
$m+2$			$0{,}5W$	$0W$	$6W$	$0{,}5W$	$-1W$	$-1{,}5W$	$0W$	

i	Базис	B_i	C	$B_1 = 45$	$B_2 = 14$	$B_3 = 0$	$B_4 = 0$	$B_5 = W$	$B_6 = W$	Θ_i
1	P_1	45	0,04167	1	0	−0,05833	0,01667	0,05833	−0,01667	
2	P_2	14	0,08333	0	1	0,08333	−0,1667	−0,08333	0,1667	
			3,042	0	0	−1,458	−1,583	1,458	1,583	
			$0W$	$0W$	$0W$	$0W$	$0W$	$-1W$	$-1W$	

Получен оптимальный план: $Y^{\text{опт}} = (0{,}0417; 0{,}0833)$, и оптимальное значение целевой функции $Z^{\text{опт}} = 3{,}04$.

1.1.7 Решение двойственной ЗЛП графическим методом

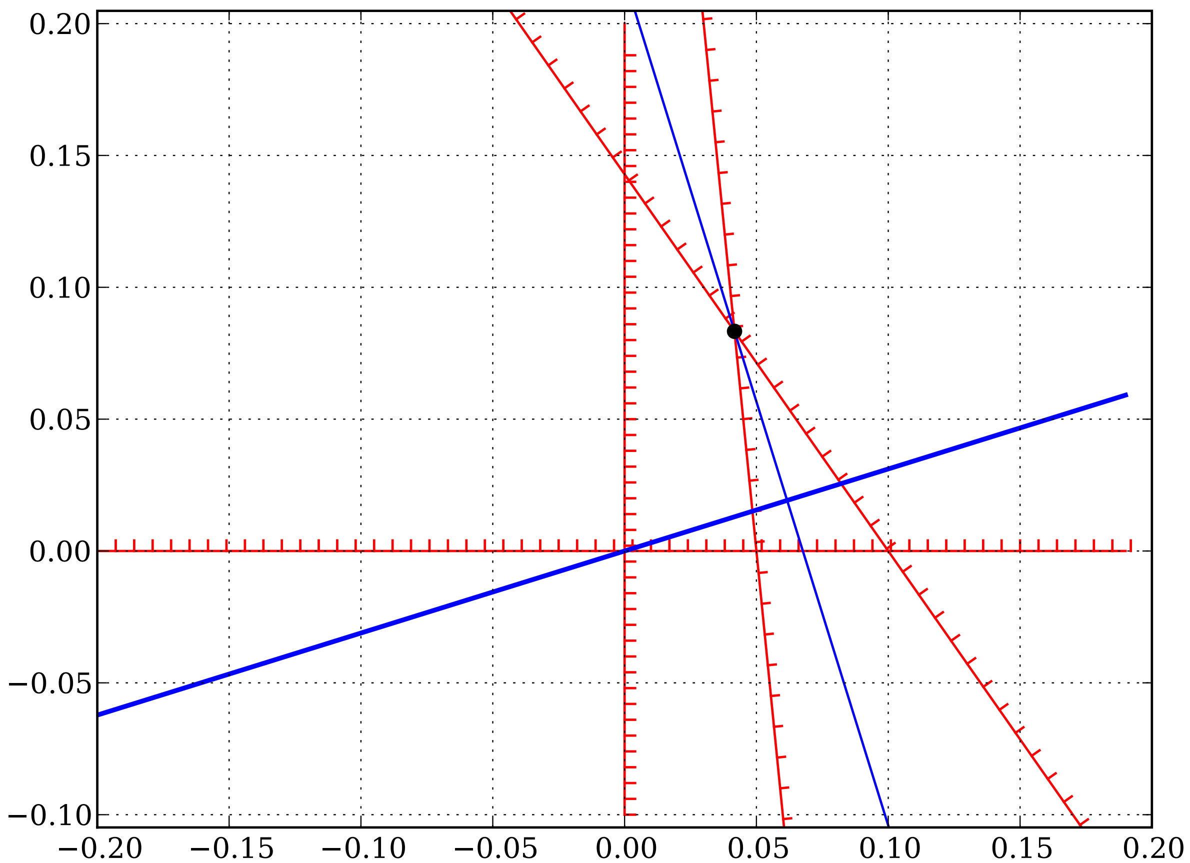

Рисунок 2 — Решение графическим методом

1.1.8 Решение исходной и двойственной ЗЛП из симплекс-таблицы

Для двойственной ЗЛП был получен оптимальный план и оптимальное решение:

$$Y^{\text{опт}} = (0{,}042; 0{,}084),\ Z^{\text{опт}} = 3{,}04.$$

Тогда оптимальный план и значение исходной ЗЛП:

$$X^{\text{опт}} = (1{,}458; 1{,}583),\ F^{\text{опт}} = 3{,}04.$$

1.1.9 Сравнение результатов

Из результатов видно, что $maxF = minZ$ в независимости от порядка и способа вычисления, что подтверждает правильность выполнения основной теоремы двойственности в данном примере.

1.2 Пример II

1.2.1 Постановка задачи

Задана ЗЛП в каноническом виде:

$$F(\vec{X}) = 2x_1 - 5x_2 - x_3 + x_4 \to max, \tag{8}$$

$$\begin{cases} x_1 + 3x_2 - x_3 + x_4 = 1 \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 = 2 \\ x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0 \end{cases} \tag{9}$$

.

Необходимо:

1) Решить исходную ЗЛП методом искусственного базиса;
2) Решить исходную ЗЛП графически;

1.2.2 Решение исходной ЗЛП методом искусственного базиса

Введем искусственные переменные и приведем к каноническому виду. Для нахождения максимума, умножим целевую функцию на -1. Заметим, что вектор во втором столбце уже является единичным после деления строки на 3.

$$-F(\vec{X}) = -(-2x_1 + 5x_2 + x_3 - x_4 + Wx_5) \to max$$

$$\begin{cases} \frac{1}{3}x_1 + x_2 - \frac{1}{3}x_3 + \frac{1}{3}x_4 = \frac{1}{3} \\ 2x_1 + 3x_3 - x_4 + s_5 = 2 \\ x_i, s_i \geq 0 \end{cases} \tag{10}$$

i	Базис	C_i	B	$C_1 = -2$	$C_2 = 5$	$C_3 = 1$	$C_4 = -1$	$C_5 = W$	Θ_i
1	P_2	5	0,3333	0,3333	1	$-0,3333$	0,3333	0	–
2	P_5	W	2	2	0	3	-1	1	0,6667
$m+1$			1,667	3,667	0	$-2,667$	2,667	0	
$m+2$			$2W$	$2W$	$0W$	$3W$	$-1W$	$0W$	

i	Базис	C_i	B	$C_1 = -2$	$C_2 = 5$	$C_3 = 1$	$C_4 = -1$	$C_5 = W$	Θ_i
1	P_2	5	0,5556	0,5556	1	0	0,2222	0,1111	1
2	P_3	1	0,6667	0,6667	0	1	$-0,3333$	0,3333	1
$m+1$			3,444	5,444	0	0	1,778	0,8889	
$m+2$			$0W$	$0W$	$0W$	$0W$	$0W$	$-1W$	

i	Базис	C_i	B	$C_1 = -2$	$C_2 = 5$	$C_3 = 1$	$C_4 = -1$	$C_5 = W$	Θ_i
1	P_1	-2	1	1	1,8	0	0,4	0,2	1
2	P_3	1	0	0	$-1{,}2$	1	$-0{,}6$	0,2	1
$m+1$			-2	0	$-9{,}8$	0	$-0{,}4$	$-0{,}2$	
$m+2$			$0W$	$0W$	$0W$	$0W$	$0W$	$-1W$	

Получен оптимальный план: $X^{\text{опт}} = (1; 0; 0; 0; 0)$, и оптимальное значение целевой функции $F^{\text{опт}} = 2$.

1.2.3 Решение исходной ЗЛП графическим методом

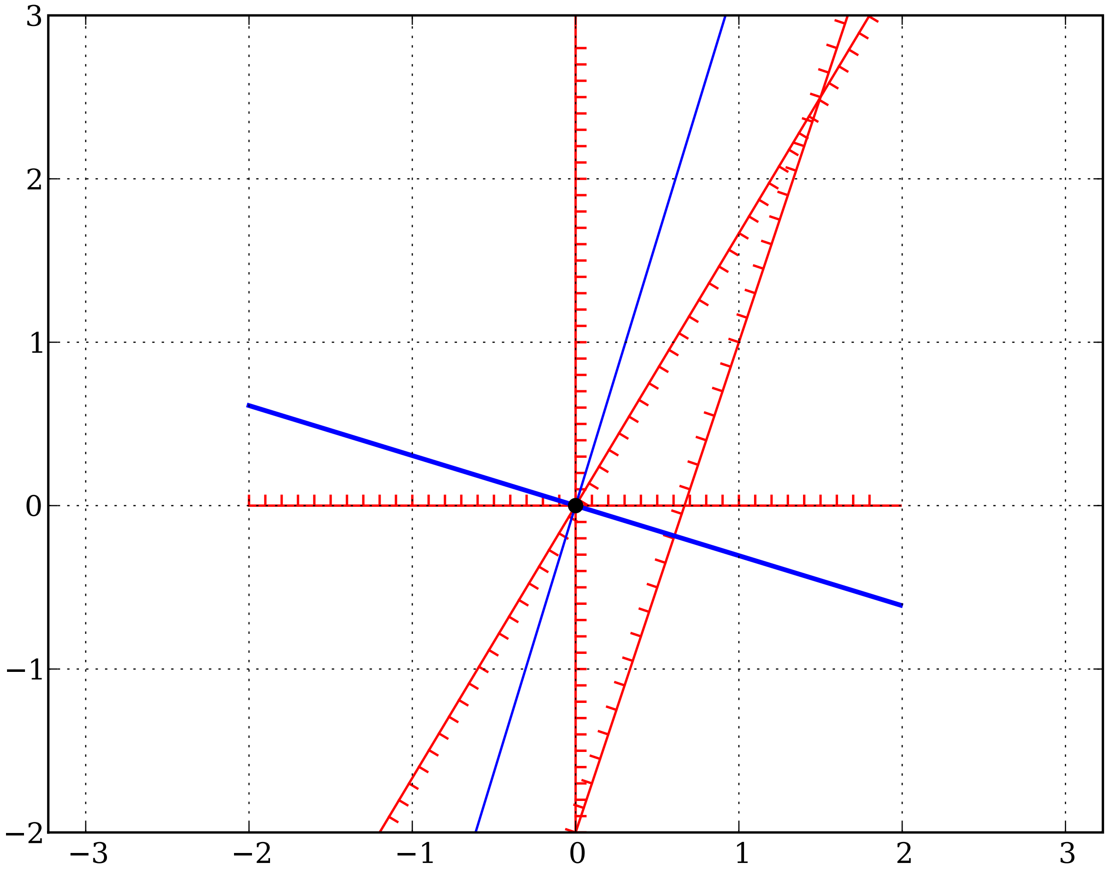

Рисунок 3 — Решение графическим методом

1.3 Пример III

1.3.1 Постановка задачи

Задана ЗЛП:

$$F(\vec{X}) = 3x_1 + 3x_2 \to max, \tag{11}$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 \leq 4 \\ 3x_1 + 2x_2 \leq 6 \\ x_1 + 2x_2 \geq 2 \\ x_1, x_2 \geq 0 \end{cases} \tag{12}$$

.

Необходимо:

1) Привести исходную ЗЛП к каноническому виду и решить методом искусственного базиса;
2) Решить исходную ЗЛП графически;

1.3.2 Решение исходной ЗЛП методом искусственного базиса

Введем искусственные переменные и приведем к каноническому виду. Для нахождения максимума, умножим целевую функцию на -1.

$$-F(\vec{X}) = -(-3x_1 - 3x_2 + Wx_6) \to max$$

$$\begin{cases} x_1 - 4x_2 + x_3 = 4 \\ 3x_1 + 2x_2 + x_4 = 6 \\ x_1 + 2x_2 - x_5 + s_6 = 2 \\ x_i, s_i \geq 0 \end{cases} \tag{13}$$

i	Базис	C_i	B	$C_1 = -3$	$C_2 = -3$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$C_6 = W$	Θ_i
1	P_3	0	4	1	-4	1	0	0	0	–
2	P_4	0	6	3	2	0	1	0	0	3
3	P_6	W	2	1	2	0	0	-1	1	1
$m+1$			0	3	3	0	0	0	0	
$m+2$			$2W$	$1W$	$2W$	$0W$	$0W$	$-1W$	$0W$	

i	Базис	C_i	B	$C_1=-3$	$C_2=-3$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=0$	$C_6=W$	Θ_i
1	P_3	0	8	3	0	1	0	-2	2	2,667
2	P_4	0	4	2	0	0	1	1	-1	2
3	P_2	-3	1	0,5	1	0	0	$-0{,}5$	0,5	2
$m+1$			-3	1,5	0	0	0	1,5	$-1{,}5$	
$m+2$			$0W$	$0W$	$0W$	$0W$	$0W$	$0W$	$-1W$	

i	Базис	C_i	B	$C_1=-3$	$C_2=-3$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=0$	$C_6=W$	Θ_i
1	P_3	0	2	0	0	1	$-1{,}5$	$-3{,}5$	3,5	–
2	P_1	-3	2	1	0	0	0,5	0,5	$-0{,}5$	4
3	P_2	-3	0	0	1	0	$-0{,}25$	$-0{,}75$	0,75	–
$m+1$			-6	0	0	0	$-0{,}75$	0,75	$-0{,}75$	
$m+2$			$0W$	$0W$	$0W$	$0W$	$0W$	$0W$	$-1W$	

i	Базис	C_i	B	$C_1=-3$	$C_2=-3$	$C_3=0$	$C_4=0$	$C_5=0$	$C_6=W$	Θ_i
1	P_3	0	16	7	0	1	2	0	0	–
2	P_5	0	4	2	0	0	1	1	-1	4
3	P_2	-3	3	1,5	1	0	0,5	0	0	–
$m+1$			-9	$-1{,}5$	0	0	$-1{,}5$	0	0	
$m+1$			9	1,5	0	0	1,5	0	0	
$m+2$			$0W$	$0W$	$0W$	$0W$	$0W$	$0W$	$-1W$	

Получен оптимальный план: $X^{\text{опт}} = (0;3)$, и оптимальное значение целевой функции $F^{\text{опт}} = 9$.

1.3.3 Решение исходной ЗЛП графическим методом

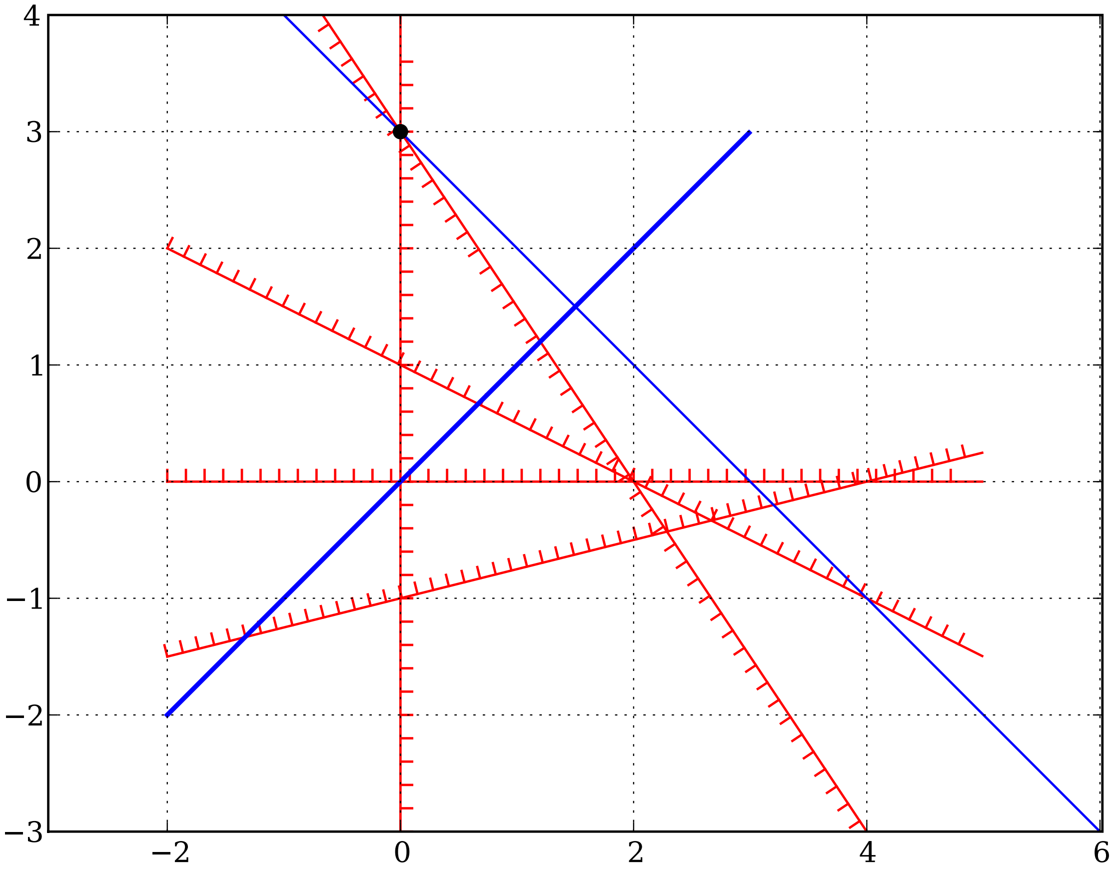

Рисунок 4 — Решение графическим методом

1.4 Пример IV

1.4.1 Постановка задачи

Задана ЗЛП:

$$F(\vec{X}) = x_1 + 4x_2 \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 \leq 17 \\ 10x_1 + 3x_2 \leq 15 \\ x_i \geq 0 \end{cases} \tag{14}$$

Необходимо:

1) Привести исходную ЗЛП к каноническому виду и решить методом искусственного базиса;
2) Найти целочисленное решение, используя алгоритм Гомори.

1.4.2 Решение исходной ЗЛП методом искусственного базиса

Введем искусственные переменные и приведем к каноническому виду. Для нахождения максимума, умножим целевую функцию на -1.

$$-F(\vec{X}) = -(-x_1 - 4x_2) \to max$$

$$\begin{cases} 2x_1 + 4x_2 + x_3 = 17 \\ 10x_1 + 3x_2 + x_4 = 15 \\ x_i, s_i \geq 0 \end{cases} \tag{15}$$

i	Базис	C_i	B	$C_1 = -1$	$C_2 = -4$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	Θ_i
1	P_3	0	17	2	4	1	0	4,25
2	P_4	0	15	10	3	0	1	5
$m+1$			0	1	4	0	0	

i	Базис	C_i	B	$C_1 = -1$	$C_2 = -4$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	Θ_i
1	P_2	-4	4,25	0,5	1	0,25	0	4,25
2	P_4	0	2,25	8,5	0	$-0{,}75$	1	5
$m+1$			-17	0	0	-1	0	

Получен оптимальный план: $X^{\text{опт}} = (0; 4{,}25)$, и оптимальное значение целевой функции $F^{\text{опт}} = 17$.

1.4.3 Нахождение целочисленных решений

Компонент P_2 полученного плана не является целочисленным. Применим алгоритм Гомори. Первое отсечение:

$$-0{,}5x_1 - 0{,}25x_3 + U_1 = -0{,}25. \quad (16)$$

i	Базис	C_i	B	$C_1 = -1$	$C_2 = -4$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	Θ_i
1	P_2	-4	4,25	0,5	1	0,25	0	0	–
2	P_4	0	2,25	8,5	0	$-0{,}75$	1	0	–
3	P_5	0	$-0{,}25$	$-0{,}5$	0	$-0{,}25$	0	1	–
$m+1$			-17	0	0	0	0	0	

i	Базис	C_i	B	$C_1 = -1$	$C_2 = -4$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	Θ_i
1	P_2	-4	4	0	1	0	0	1	–
2	P_4	0	-2	0	0	-5	1	17	–
3	P_1	-1	0,5	1	0	0,5	0	-2	–
$m+1$			-17	0	0	0	0	0	

Второе отсечение:

$$-0{,}5x_3 + U_2 = -0{,}5. \quad (17)$$

i	Базис	C_i	B	$C_1 = -1$	$C_2 = -4$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	Θ_i
1	P_2	-4	4	0	1	0	0	1	0	–
2	P_4	0	-2	0	0	-5	1	17	0	–
3	P_1	-1	0,5	1	0	0,5	0	-2	0	–
4	P_6	0	$-0{,}5$	0	0	$-0{,}5$	0	0	1	–
$m+1$			-17	0	0	0	0	0	0	

i	Базис	C_i	B	$C_1 = -1$	$C_2 = -4$	$C_3 = 0$	$C_4 = 0$	$C_5 = 0$	$C_6 = 0$	Θ_i
1	P_2	-4	4	0	1	0	0	1	0	–
2	P_4	0	3	0	0	0	1	17	-10	–
3	P_1	-1	0	1	0	0	0	-2	1	–
4	P_3	0	1	0	0	1	0	0	-2	–
$m+1$			-17	0	0	0	0	0	0	

Получен оптимальный план: $X^{\text{опт}} = (0; 4)$, и оптимальное значение целевой функции $F^{\text{опт}} = 16$.