9. При снятии показаний измерительного прибора десятые доли деления шкалы прибора оцениваются «на глаз» наблюдателем. Количества цифр 0, 1, 2, ..., 9, записанных наблюдателем в качестве десятых долей при 100 независимых измерениях, равны 5, 8, 6, 12, 14, 18, 11, 6, 13, 7 соответственно.

a) Проверить гипотезу о согласии данных с законом равномерного распределения с помощью критерия χ^2 и с помощью критерия Колмогорова (распределение критерия определить бутстрапом). Сравнить результаты.

b) Проверить гипотезу о согласии данных с законом нормального распределения с помощью критерия χ^2 (оценки неизвестных параметров определить численно, максимизируя функцию правдоподобия, построенную по группированной выборке) и с помощью критерия Колмогорова (распределение критерия определить бутстрапом). Сравнить результаты.

c) Проверить гипотезу о согласии данных с законом нормального распределения с помощью критерия χ^2 (оценки неизвестных параметров распределения определить методом моментов). Распределение критерия найти бутстрапом. Сравнить найденное распределение с распределениями $\chi^2(k-1)$ и $\chi^2(k-3)$.

	$(-\infty;0{,}5]$	$(0{,}5;1{,}5]$						$[7{,}5;8{,}5)$	$[8{,}5;+\infty)$
	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
m_i	5	8	6	12	14	18	11	6	13	7

$n=100;\ \alpha=0{,}05$

a) $H_0: \xi \sim R(0,9)\ ;\ H_1: \overline{H_0}$

$p=\frac{1}{10}$

$$\tilde{\Delta}=\sum_{i=1}^{10}\Delta_i=\sum_{i=0}^{9}\frac{(100\cdot\frac{1}{10}-m_i)^2}{10}=\sum_{i=0}^{9}\frac{(10-m_i)^2}{10}=\ldots=16{,}4$$

$\Delta \rightsquigarrow \chi^2(10-1)=\chi^2(9)$ по теореме

$$\text{p-value}=P(\Delta\geq\tilde{\Delta}\,|\,H_0)=\int_{16{,}4}^{\infty}p_{\chi^2(9)}\,dx=0{,}0589\,8>\alpha$$

$\Rightarrow$ нет оснований отвергнуть H_0

Критерий Колмогорова

$$\tilde{\Delta}=\sqrt{n}\max|\tilde{F}(x)-F(x)|\rightsquigarrow K(x)$$

$$K(x) = P(\tilde{\Delta} < x) = 1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2x^2} (0, +\infty)$$

$$\tilde{\Delta} = \sqrt{n} \max_{i=1\dots n} \left(\max\left(|\tilde{F}(x_i - 0) - F(x_i)|, |\tilde{F}(x_i + 0) - F(x_i)|\right)\right)$$

см. hw1t9 ipynb

$\tilde{\Delta} \approx 1{,}43$

$$p\text{-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = 1 - P(\tilde{\Delta} < x) =$$

$$= 1 - \left(1 + 2\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k e^{-2k^2x^2}\right) \approx 0{,}03 < 0{,}05$$

$\Rightarrow$ отвергаем H_0

b) $H_0: \xi \sim N(\mu, \sigma^2)$ - сложная

$$N(\mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$$

$$L(\mu, \sigma^2) = \prod_{i=1}^{n} p(x_i, \mu, \sigma) \to \max \Rightarrow \begin{cases} \mu = 4{,}77 \\ \sigma = 2{,}7 \end{cases}$$

см hw1t9.ipynb

$$\tilde{\Delta} = \sum_{i=1}^{m} \frac{(m_i - np_i)^2}{np_i} = 9{,}8$$

$$\Delta \sim \chi^2(m - 1 - \underset{(\mu, \sigma)}{s}) = \chi^2(10 - 1 - 2) = \chi^2(7)$$

$$p\text{-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} | H_0) = \int_{9{,}8}^{\infty} p_{\chi^2(7)} dx = 0{,}11 > \alpha$$

Нет оснований отвергнуть H_0

Критерий Колмогорова + bootstrap

hw1t9.ipynb

$N = 10'000$, $\Delta = 0{,}6$; $k = 952$; $p\text{-value} = 0{,}9048 > \alpha$

меняются

$\Rightarrow$ Нет оснований отвергнуть H_0

c) $\alpha_k = M[x^k] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^k p(x, \vec{\Theta}) dx$

$$\tilde{\alpha}_k = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x^k$$

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_1 = \alpha_1(\vec{\Theta}) \\ \vdots \\ \tilde{\alpha}_m = \alpha_m(\vec{\Theta}) \end{cases} \to \vec{\Theta} = f(\tilde{\alpha}_1 \ldots \tilde{\alpha}_m)$$

T.к. $\xi \sim N(\mu, \sigma^2)$, $\dim \vec{\Theta} = 2$

$$\alpha_1 = M[x] = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} x N_p(\mu, \sigma^2) dx =$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sqrt{2\sigma^2}\, t + \mu}{\sqrt{\pi}} e^{-t^2} dt =$$

$$= \frac{\mu}{\sqrt{\pi}} \underbrace{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} dt}_{\pi} + \frac{\sqrt{2\sigma^2}}{\sqrt{\pi}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} t e^{-t^2} dt = \mu$$

$$\alpha_1 = \tilde{\alpha}_1 = \mu = \bar{x}$$

$$\alpha_2 = M[x^2] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} x^2 e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx = \ldots = \sigma^2 + \mu^2 = \tilde{\alpha}_2 = \overline{x^2}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \tilde{\mu} = \bar{x} \\ \tilde{\sigma} = \sqrt{\overline{x^2} + (\bar{x})^2} \end{cases} \qquad \bar{x} = \sum_{i=0}^{9} \frac{m_i \cdot i}{100} \qquad \begin{cases} m_i \equiv Xn[i] \\ x_i = i \end{cases}$$

$$\Rightarrow \sqrt{\overline{x^2} + (\bar{x})^2} = \sqrt{\frac{\sum (x_i - \bar{x})^2 m_i}{100}}$$

см hw1t9.ipynb