3. Случайная величина имеет экспоненциальное распределение $p(x) = \begin{cases} e^{-x/\theta}/\theta, & x \geq 0 \\ 0, & x < 0 \end{cases}, \theta > 0$. По выборке объема $n = 3$ найдены оценки параметра $\theta : \tilde{\theta}_1 = \bar{x}$, $\tilde{\theta}_2 = \dfrac{x_{\min} + x_{\max}}{2}$, $\tilde{\theta}_3 = x_{(2)}$ (второй член вариационного ряда).

a) Проверить оценки на несмещенность. Исправить эти оценки, если необходимо. Какая из исправленных оценок более эффективна?

b) Исследовать эти оценки на эффективность с помощью неравенства Крамера–Рао.

По условию имеем $\xi \sim p(x)$

a) 1. Несмещенность

$$\tilde{\Theta}_1 = \bar{X}$$

$$M[\tilde{\Theta}_1] = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} M[\xi] = \int_0^\infty \frac{x}{\Theta} e^{-\frac{x}{\Theta}} dx = \Theta \int_0^\infty t e^{-t} dt = \Theta$$

$\Rightarrow \tilde{\Theta}_1$ несмещённая

$$\tilde{\Theta}_2 = \frac{X_{min} + X_{max}}{2}$$

$$M[\tilde{\Theta}_2] = \frac{1}{2}(M X_{min} + M X_{max}) = \frac{1}{2}\left(\int_0^\infty 3x \frac{e^{-x/\Theta}}{\Theta} e^{-\frac{x}{\Theta}(3-1)} dx + \right.$$

$$\left. + \int_0^\infty 3x (1 - e^{-\frac{x}{\Theta}})^{3-1} \frac{e^{-\frac{x}{\Theta}}}{\Theta} dx\right) = \frac{3}{2\Theta}\left(\frac{\Theta^2}{9} + \Theta^2\left(1 - 2\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right)\right) = \frac{13}{12}\Theta$$

$\Rightarrow \tilde{\Theta}_2$ смещенная

Возьмем $\tilde{\Theta}_2' = \frac{12}{13}\tilde{\Theta}_2$

$$\tilde{\Theta}_3 = X_{(2)}$$

$$M[\tilde{\Theta}_3] = \int_0^\infty 3x C_2^1 (1 - e^{-\frac{x}{\Theta}}) e^{-\frac{x}{\Theta}} \frac{e^{-\frac{x}{\Theta}}}{\Theta} dx = \frac{6}{\Theta}\left(\frac{\Theta^2}{4} - \frac{\Theta^2}{9}\right) = \frac{5}{6}\Theta$$

$\Rightarrow \tilde{\Theta}_3$ смещенная; Возьмем $\tilde{\Theta}_3' = \frac{6}{5}\tilde{\Theta}_3$

2. Эффективность.

Найдем дисперсии.

$$D[\tilde{\Theta}_1] = \frac{1}{3}D[\xi] = \frac{1}{3}\left(\int_0^\infty x^2 \frac{1}{\Theta} e^{-x/\Theta}dx - M[\xi]\right) = \underline{\frac{1}{3}\Theta^2}$$

$$D[\tilde{\Theta}_2'] = \left(\frac{6}{13}\right)^2 \left(DX_{min} + DX_{max} + 2cov(X_{min}, X_{max})\right)$$

- $$DX_{min} = MX^2_{min} - M^2X_{min} = \frac{2\Theta^2}{9} - \frac{\Theta^2}{9} = \frac{1}{9}\Theta^2$$

- $$DX_{max} = MX^2_{max} - M^2X_{max} = 6\Theta^2\left(1 - 2\frac{1}{2^3} + \frac{1}{3^3}\right) - 9\Theta^2\left(1 - 2\frac{1}{4} + \frac{1}{9}\right)^2 = \frac{49}{36}\Theta^2$$

- $$cov(X_{min}, X_{max}) = \iint\limits_{x<y} xyp(x,y)dxdy - \frac{11}{18}\Theta^2 =$$

$$= \int_0^\infty dy \int_0^y \frac{6}{\Theta^2} xy\left(e^{-\frac{2x+y}{\Theta}} - e^{-\frac{x+2y}{\Theta}}\right)dx - \frac{11}{18}\Theta^2 =$$

$$= \int_0^\infty \frac{3}{2\Theta}\left(2y^2 e^{-\frac{3y}{\Theta}} + \Theta y\left(3e^{-\frac{3y}{\Theta}} + e^{-\frac{y}{\Theta}} - 4e^{-\frac{2y}{\Theta}}\right)\right)dy - \frac{11}{18}\Theta^2 = \frac{3}{2}\Theta^2\left(\frac{4}{3^3} + \frac{1}{3} + 1 - 4\frac{1}{4}\right) - \frac{11}{18}\Theta^2 = \frac{1}{9}\Theta^2$$

Получаем

$$D[\tilde{\Theta}_2'] = \underline{\frac{61}{169}\Theta^2}$$

$$D[\tilde{\Theta}_3'] = \frac{36}{25}\Theta^2\left(12\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{27}\right) - \frac{25}{36}\right) = \underline{\frac{13}{25}\Theta^2}$$

Получаем, что $\tilde{\Theta}_1$ наиболее эффективна

b) Неравенство Крамера-Рао

$$D[\tilde{g}(\vec{X_n})] \geq \frac{g'^2(\theta)}{nJ(\theta)}$$

У нас $g(\theta) = \theta \Rightarrow g'(\theta) = 1$

$$J(\theta) = -M\left[\frac{\partial^2 \ln p}{\partial \theta^2}\right] = M\left[\frac{2x}{\theta^3} - \frac{1}{\theta^2}\right] = \frac{2}{\theta^3} M\xi - \frac{1}{\theta^2} =$$

$$= \frac{1}{\theta^2}$$

Нерав. К-Р принимает вид

$$D[\tilde{\theta}] \geq \frac{1}{3}\theta^2$$

Получается, что $\tilde{\theta}_1$ эффективна по К-Р,

$\Rightarrow$ $\tilde{\theta}_1$ эффективная