10. Основная гипотеза H_0 состоит в том, что случайная величина имеет распределение с плотностью $p_0(x) = \begin{cases} 1, & x \in (0,\,1) \\ 0, & x \notin (0,\,1) \end{cases}$. Альтернатива H_1 состоит в том, что случайная величина имеет распределение с плотностью $p_1(x) = \begin{cases} \dfrac{e^{1-x}}{e-1}, & x \in (0,\,1) \\ 0, & x \notin (0,\,1) \end{cases}$.

a) Построить наиболее мощный критерий проверки этих гипотез по выборке объема $n = 1$ с уровнем значимости α, найти ошибки первого и второго рода, мощность критерия.

b) Построить наиболее мощный критерий проверки этих гипотез по выборке объема $n = 2$ с уровнем значимости α, найти ошибки первого и второго рода, мощность критерия.

c) Построить наиболее мощный асимптотический критерий проверки этих гипотез по выборке объема n с уровнем значимости α, найти ошибки первого и второго рода, мощность критерия.

d) Построить критерий по выборке объема n с критической областью $x_{\min} < c$ и уровнем значимости α, найти ошибки первого и второго рода, мощность критерия.

a) $n=1$; α

Нейман - Пирсон

$$l = \frac{p_1}{p_0} = \frac{e}{e-1} e^{-x} \geq C$$

$$e^{-x} \geq B$$

$G: \underline{x \leq A}$ по Н-П

$$P(x \leq A \mid H_0) = \alpha$$

$$\int_0^A 1\,dx = \alpha$$

$$A = \alpha$$

$$G: x \leq \alpha$$

$$\alpha_1 = P(H_1|H_0) = \alpha$$

$$W = P(x \le A|H_1) = \int_0^{\alpha} \frac{e}{e-1} e^{-x} dx =$$

$$= \frac{e}{e-1} e^{-x}\Big|_{\alpha}^{0} = \frac{e}{e-1}(1-e^{-\alpha})$$

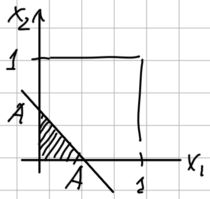
$$\alpha_2 = 1 - W = 1 - \frac{e}{e-1}(1-e^{-\alpha})$$

б) $n=2$

Н-П: $$l = \frac{L_1}{L_0} = \frac{\left(\frac{e}{e-1}\right)^2 e^{-x_1} e^{-x_2}}{1\cdot 1} \ge C$$

$$e^{-x_1-x_2} \ge B$$

$$G: x_1 + x_2 \le A$$



$$P(x_1 + x_2 \le A|H_0) =$$

$$= A^2/2 = \alpha$$

$$A = \sqrt{2\alpha}$$

$$G: x_1 + x_2 \le \sqrt{2\alpha}$$

$$\alpha_1 = \alpha$$

$$W = P(x_1 + x_2 \le A|H_1) = \int_0^A dx_1 \int_0^{A-x_1} \frac{e}{e-1} e^{-x_1-x_2} dx_2 =$$

$$= -\frac{e^2}{(e-1)^2}\left(1 - e^{-\sqrt{2\alpha}} - \sqrt{2\alpha}\, e^{-\sqrt{2\alpha}}\right)$$

$$\alpha_2 = 1 - W = 1 + \frac{e^2}{(e-1)^2}\left(1 - e^{-\sqrt{2\alpha}} - \sqrt{2\alpha}\, e^{-\sqrt{2\alpha}}\right)$$

c) $l = \frac{L_1}{L_0} =$ (отн. правдоподобия)

$= \prod_{i=1}^{n} \frac{p_1(x_i)}{p_0(x_i)} \geq C$ (крит. Неймана-Пирсона)

$$P(l \geq C \mid H_0) = \alpha$$

$$\ln l = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\ln \frac{p_1(x_i)}{p_0(x_i)}}_{\eta_i} \Rightarrow \text{ЦПТ}$$

$$\frac{\overbrace{\sum \eta_i}^{\ln l} - nM[\eta_i]}{\sqrt{nD[\eta_i]}} \sim N(0,1)$$

Найдем M, D:

H_0: $M[\eta_i] = M\left[\ln \frac{e}{e-1} e^{-x_i}\right] = M\left[\ln \frac{e}{e-1} - x_i\right] =$

$$= \ln \frac{e}{e-1} - \frac{1}{2}$$

$$D[\eta_i] = D\left[\ln \frac{e}{e-1} e^{-x_i}\right] = D\left[\ln \frac{e}{e-1} - x_i\right] = D[x_i] = \frac{1}{12}$$

ЦПТ: $P(\ln l \geq \ln C \mid H_0) = P\left(\frac{\sum \eta_i - n \cdot M[\eta]}{\sqrt{nD[\eta]}} \geq\right.$

$\left. \geq \frac{\ln C - nM[\eta]}{\sqrt{nD[\eta]}}\right) = \alpha$

$$\frac{\ln C - n\left(\ln \frac{e}{e-1} - 1/2\right)}{\sqrt{\frac{n}{12}}} = U_{1-\alpha}$$

$$\ln C = n\left(\ln \frac{e}{e-1} - \frac{1}{2}\right) + U_{1-\alpha} \sqrt{\frac{n}{12}}$$

$$\ln l = \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{e}{e-1} e^{-x_i}\right) = n \ln \frac{e}{e-1} - \sum_{i=1}^{n} x_i$$

$G: \ln \ell \geq \ln C$

$$-\sum_{i=1}^{n} x_i \geq -\frac{n}{2} + u_{1-\alpha}\sqrt{\frac{n}{12}}$$

$G: \bar{x} \leq A$, где $A = \frac{1}{2} - \frac{u_{1-\alpha}}{\sqrt{12n}}$ - крит область ; $\alpha_1 = \alpha$

$$W = P(\vec{x}_n \in G \mid H_1) = P(\bar{x} \leq A \mid H_1)$$

ЦПТ: $\frac{\bar{x} - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\sqrt{n} \sim N(0,1)$

$$H_1: M\xi = \int_0^1 x \frac{e}{e-1} e^{-x} dx = \frac{e}{e-1}\left[-xe^{-x}\Big|_0^1 + \int_0^1 e^{-x} dx\right] =$$

$$= \frac{e}{e-1}\left[-e^{-1} + 1 - e^{-1}\right] = \frac{e-2}{e-1}$$

$$M[\xi^2] = \int_0^1 x^2 \frac{e}{e-1} e^{-x} dx = \frac{e}{e-1}\left[-x^2 e^{-x}\Big|_0^1 + \right.$$

$$\left. + 2\int_0^1 x e^{-x} dx\right] = \frac{e}{e-1}\cdot(-1)e^{-1} + 2\frac{e-2}{e-1} = \frac{2e-5}{e-1}$$

$$D\xi = M[\xi^2] - M^2[\xi] = \frac{e^2 - 3e + 1}{(e-1)^2}$$

$$W = P(\bar{x} \leq A \mid H_1) = P\left(\frac{\bar{x} - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\sqrt{n} \leq \frac{A - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\sqrt{n}\right) =$$

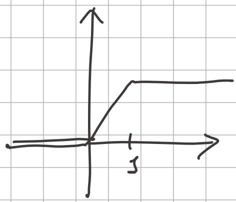
$$= \int_{-\infty}^{\frac{A - M\xi}{\sqrt{D\xi}}\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

$$\alpha_2 = 1 - W$$

d) $G: X_{min} < C$

$$P(X_{min} < C \mid H_0) = \alpha$$

$$H_0: F_0(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ x, & x \in [0, 1] \\ 1, & x > 1 \end{cases}$$



$$F_{min}(x) = (1 - F_0(x))^n - P(X_{min} \geq C \mid H_0)$$

$$P(X_{min} < C \mid H_0) = 1 - F_{min}(C) = \alpha$$

$$1 - (1 - C)^n = \alpha$$

$$\sqrt[n]{1-\alpha} = 1 - C \Rightarrow C = 1 - \sqrt[n]{1-\alpha}$$

$$W = P(X_{min} < C \mid H_1)$$

$$H_1 = F_1(x) = \int_0^x \frac{e}{e-1} e^{-t}\, dt = \frac{e}{e-1}(1 - e^{-x})$$

$$W = 1 - F_{min}(C) = 1 - (1 - F_1(C))^n =$$

$$= 1 - \left(1 - \frac{e}{e-1} + \frac{e}{e-1} \cdot e^{-C}\right)^n = 1 - \left(\frac{-1}{e-1} + \frac{e}{e-1} e^{-C}\right)^n =$$

$$= 1 + \frac{1}{(e-1)^n}\left(1 - e^{1-C}\right)^n$$

$$\alpha_1 = \alpha, \quad \alpha_2 = 1 - W$$