6

6. При эпидемии гриппа из 200 контролируемых людей однократное заболевание наблюдалось у 181 человека, а дважды болели гриппом 9 человек. Правдоподобна ли гипотеза о том, что в течение эпидемии гриппа число заболеваний отдельного человека суть случайная величина, подчиняющаяся биномиальному распределению с количеством испытаний $n = 2$?

$N=200;\ \alpha=0{,}05;\ n=2;\ \Theta \in \boxed{} \in \mathbb{R}^S;\ S=1$

$m_1 = 10$ A_1 - не болел

$m_2 = 181$ A_2 - болел один раз

$m_3 = 9$ A_3 - болел два раза

$H_0 : P(m) = C_n^m p^m q^{n-m} = C_2^m p^m (1-p)^{2-m}$

$H_1 : \overline{H_0}$

$P(A_1) = C_2^0 \cdot p^0 (1-p)^2 = (1-p)^2 = p_1$

$P(A_2) = C_2^1 \cdot p^1 (1-p)^1 = 2p(1-p) = p_2$

$P(A_3) = C_2^2 \cdot p^2 (1-p)^0 = p^2 = p_3$

$L(\vec{\Theta}) = p_1^{10} \cdot p_2^{181} \cdot p_3^9 = 2^{181} \cdot p^{199} (1-p)^{201}$

$L \to \max:$

$\ln L \to \max : \ 181 \ln 2 + 199 \ln p + 201 \ln(1-p)$

$\frac{\partial \ln L}{\partial p} = \frac{199}{p} - \frac{201}{1-p} = 0 \Rightarrow p = \frac{199}{400}$

$\frac{\partial^2 \ln L}{\partial p^2} = -\frac{199}{p^2} - \frac{201}{(1-p)^2} < 0 \Rightarrow \max$

$N \geqslant 50;\ Np_i \geqslant 5 \Rightarrow$

$\Rightarrow \tilde{\Delta} = \sum_{i=1}^{3} \frac{(Np_i - m_i)^2}{Np_i} = \dots \approx 32{,}48 + 65{,}62 + 33{,}14 = 131{,}24$

$$p\text{-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} \mid H_0) = \int_{131,24}^{\infty} p_{\chi^2(3-1-1)}\,dx < 10^{-5} << 0,05 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ гипотеза H_0 отвергается

7

7. Произведено измерение размеров деталей в двух партиях по 100 деталей в каждой партии. В первой партии оказалось 25 деталей с заниженным размером, 50 деталей с точным размером, 25 деталей с завышенным размером, а во второй партии аналогичные числа оказались равны 52, 41, 7 соответственно. Проверить гипотезу о независимости номера партии деталей и размера детали.

$n_1 = 100$

$n_2 = 100$

$\alpha = 0,05$

H_0 : независ. размера от № партии;

H_1 : $\overline{H_0}$ (есть зависимость)

	заниж.	точн.	завыш.
I	25	50	25
II	52	41	7
всего	77	91	32

$p_1 = \frac{77}{200}$; $p_2 = \frac{91}{200}$; $p_3 = \frac{32}{200}$

$n_j p_i$:

I	38,5	45,5	16
II	38,5	45,5	16

$n_j \geq 50$; $n_j p_i \geq 5 \Rightarrow$

$$\tilde{\Delta} = \Delta_1 + \Delta_2 = \overbrace{\frac{(38,5-25)^2}{38,5} + \frac{(45,5-50)^2}{45,5} + \frac{(16-25)^2}{16}}^{\Delta_1} +$$

$$+ \underbrace{\frac{(38,5-52)^2}{38,5} + \frac{(45,5-41)^2}{45,5} + \frac{(16-7)^2}{16}}_{\Delta_2} \approx 4,73 + 0,45 + 5,06 + 4,73 + 0,45 + 5,06 = 20,48$$

$$\Delta \sim \chi^2((k-1)(m-1)) = \chi^2((3-1)(2-1)) = \chi^2(2)$$

$$p\text{-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} \mid H_0) = \int_{20,48}^{\infty} p_{\chi^2(2)}\,dx \approx 0,00036 < \alpha \Rightarrow \text{отвергаем } H_0$$

8

8. Участники олимпиады по математике разбиты на два потока по 300 человек в каждом. Итоги олимпиады оказались следующими: в первом потоке оценки 2, 3, 4, 5 получили соответственно 33, 43, 80 и 144 человека, соответствующие данные для второго потока 39, 35, 72 и 154. Можно ли считать оба потока однородными?

$n_1 = 300;\ n_2 = 300;\ \alpha = 0{,}05$

	2	3	4	5
I	33	43	80	144
II	39	35	72	154
всего	72	78	152	298

H_0 : потоки однородны

$H_1 : \overline{H_0}$

$p_1 = \frac{72}{600};\ p_2 = \frac{78}{600};\ p_3 = \frac{152}{600};\ p_4 = \frac{298}{600}$

$n_j p_i$:

	2	3	4	5
I	36	39	76	149
II	36	39	76	149

$n_j \geq 50;\quad n_j p_i \geq 5 \Rightarrow \tilde{\Delta} = \Delta_1 + \Delta_2 = \frac{(36-33)^2}{36} + \ldots + \frac{(149-154)^2}{149} = 2{,}08$

$\Delta \sim \chi^2((\underbrace{k-1}_{3})(\underbrace{m-1}_{1})) = \chi^2(3)$

$p\text{-value} = P(\Delta \geq \tilde{\Delta} \mid H_0) = \int\limits_{2{,}08}^{\infty} p_{\chi^2(3)}\, dx = 0{,}556$

$p\text{-value} > \alpha \Rightarrow$ нет оснований отвергнуть H_0

// задачи 9-10 будут в отдельных файлах //

11

11. У игрока, наблюдавшего за игрой в четырехгранные кости, создалось впечатление, что четверка выпадает в 8 случаях из 24, тройка в 4, а остальные две грани выпадают равновероятно. Получив приглашение принять участие в игре, игрок попросил разрешения предварительно проверить свою гипотезу на двух производимых подряд бросаниях кости. Единственная рассматриваемая им альтернатива состоит в том, что игральная кость сделана «честно». Найти наиболее мощный критерий с уровнем значимости 0,2. Найти мощность критерия.

⚃ - 8
⚂ - 4
⚁ - 6
⚀ - 6
всего - 24

$$l = \frac{L_1}{L_0} = \frac{p_1(x_1)\,p_1(x_2)}{p_0(x_1)\,p_0(x_2)} \geq C$$

$$p_1 = \frac{1}{4}\delta(x-1) + \frac{1}{4}\delta(x-2) + \frac{1}{4}\delta(x-3) + \frac{1}{4}\delta(x-4)$$

$$p_0 = \frac{1}{4}\delta(x-1) + \frac{1}{4}\delta(x-2) + \frac{1}{6}\delta(x-3) + \frac{1}{3}\delta(x-4)$$

l:

2 \ 1	1	2	3	4
1	1	1	3/2	3/4
2	1	1	3/2	3/4
3	3/2	3/2	9/4	9/8
4	3/4	3/4	9/8	9/16

H_0:

2 \ 1	1	2	3	4
1	1/16	1/16	1/24	1/12
2	1/16	1/16	1/24	1/12
3	1/24	1/24	1/36	1/18
4	1/12	1/12	1/18	1/9

H_1:

2 \ 1	1	2	3	4
1	1/16	1/16	1/16	1/16
2	1/16	1/16	1/16	1/16
3	1/16	1/16	1/16	1/16
4	1/16	1/16	1/16	1/16

$P(l \geq C \mid H_0) = 0{,}2$ ($\leq 0{,}2$, т.к. дискр. величина

$\frac{1}{36} \leq 0{,}2$

$\underbrace{\frac{1}{36} + \frac{1}{24} \cdot 4}_{\approx 0{,}194} \leq 0{,}2$

Дальше $> 0{,}2$ $\Rightarrow$ $G_{кр}$: выпадение $(1,3), (2,3), (3,2), (3,1), (3,3)$

$\alpha_1 \simeq 0{,}194$

$\alpha_2 = 1 - W = 1 - \underbrace{P(l \geq C \mid H_1)}_{\frac{1}{16} \cdot 5 = W = 0{,}3125} = \frac{11}{16} = 0{,}6875$

12

12. Дана выборка объемы $n = 3$ из нормального распределения $N(a, \sigma^2)$: $-1.11; -6.10; 2.42$. Проверьте гипотезу $a = 0$, против альтернатив $a > 0$, $a < 0$, $a \neq 0$.

$n = 3$, $\alpha = 0{,}05$

$N(a, \sigma^2)$: $-1.11; -6.10; 2.42$

$H_0: a = 0$

$H_1: a > 0; a < 0; a \neq 0$

1. $H_1: a > 0$

$\theta_1 = 0$

$$\overline{X} = \frac{-1{,}11 + (-6{,}10) + 2{,}42}{3} \approx -1{,}597$$

$$S^2 = \frac{1}{2}\left((-1{,}11 + 1{,}597)^2 + (-6{,}10 + 1{,}597)^2 + (2{,}42 + 1{,}597)^2\right) \approx$$

$$\approx 18{,}325$$

$S \approx 4{,}281$

$$\frac{\overline{X} - \theta_1}{S}\sqrt{n} \sim t(n-1)$$

$$\frac{-1{,}597 - 0}{4{,}281}\sqrt{2} \sim t(2)$$

$\hat{\Delta} = -0{,}528$

$$\text{p-value} = P(\Delta \leq -|\hat{\Delta}|) + P(\Delta \geq |\hat{\Delta}|) =$$

$$= P(\Delta \leq -0{,}528) + P(\Delta \geq 0{,}528) = 2P(\Delta \geq 0{,}528) =$$

$$= 2 \cdot 0{,}3251 = 0{,}6502 > \alpha \Rightarrow$$

нет оснований отвергнуть H_0

2. $H_1: a < 0$

$$p\text{-value} = P(\Delta \le \tilde{\Delta}) = P(\Delta \le -0{,}528) = 0{,}3251 > \alpha \Rightarrow$$

нет оснований отвергнуть H_0

3. $H_1: a > 0$

Отвергаем H_1 => нет осн. отвергнуть H_0

13

13. Пусть z_n и y_m — независимые случайные выборки из нормального распределения с параметрами $a, \sigma_x^2 = 2$ и $b, \sigma_y^2 = 1$ соответственно. Используя реализации случайных выборок: $x = \{-1.11, -6.10, 2.42\}$, $y = \{-2.29, -2.91\}$, проверить гипотезу о равенстве средних против альтернатив $a > b$, $a < b$, $a \neq b$.

$\vec{Z}_n, \vec{Y}_m$

$\xi \sim N(a, \sigma_x^2);\ \sigma_x^2 = 2;\ n = 3$

$\eta \sim N(b, \sigma_y^2);\ \sigma_y^2 = 1;\ m = 2$

$x = \{-1.11; -6.10; 2{,}42\};\ \overline{x} = -1{,}597$

$y = \{-2{,}29; -2{,}91\},\ \overline{y} = -2{,}6$

$H_0: a = b;\ H_1: a \neq b,\ a > b,\ a < b;\ \alpha = 0{,}05$

Т.к. $\sigma_x \neq \sigma_y$, воспользуемся статистич критерием

$$Z = \frac{\overline{x} - \overline{y}}{\sqrt{\frac{\sigma_x^2}{n} + \frac{\sigma_y^2}{m}}}$$

$$Z_{набл} = \frac{-1{,}597 - (-2{,}6)}{\sqrt{\frac{2}{3} + \frac{1}{2}}} \approx \frac{1{,}003}{1{,}080} \approx 0{,}929$$

$H_1: a \neq b \quad \Phi(Z_{крит}) = \frac{1-\alpha}{2} = 0{,}475 \Rightarrow Z_{крит} = 1{,}96$

$H_1: a > b,\ a < b: \ \Phi(z_{крит}) = \frac{1-2\alpha}{2} = 0{,}45 \Rightarrow z_{крит} \approx 1{,}65$

$H_1: a \neq b: \ -1{,}96 < 0{,}929 < 1{,}96 \Rightarrow$ нет оснований отвергнуть H_0

$H_1: a > b: \ 0{,}929 < 1{,}65 \Rightarrow$ нет осн. отвергнуть H_0

$H_1: a < b: \ -1{,}65 < 0{,}929 \Rightarrow$ нет осн. отвергнуть H_0