# ADL aula 2

## Função de Transferência

Comecemos escrevendo a forma geral de uma equação diferencial de ordem *n,* 1 inear e invariante no tempo,

$$a_n \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \cdots + a_0 c(t)$$
$$= b_m \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \cdots + b_0 r(t)$$

onde *c(t)* é a saída, *r(t)* é a entrada e os $a_i$, $b_i$ e a forma da equação diferencial representam o sistema. Aplicando a transformada de Laplace a ambos os lados da equação,

$$a_n s^n C(s) + a_{n-1} s^{n-1} C(s) + \cdots + a_0 C(s) + \text{termos de condição inicial envolvendo } c(t)$$
$$= b_m s^m R(s) + b_{m-1} s^{m-1} R(s) + \cdots + b_0 R(s) + \text{termos de condição inicial envolvendo } r(t) \qquad (2.50)$$

A Eq. (2.51) é uma expressão puramente algébrica. Admitindo-se que todas as condições iniciais sejam iguais a zero, a Ea. (2.51) se reduz a

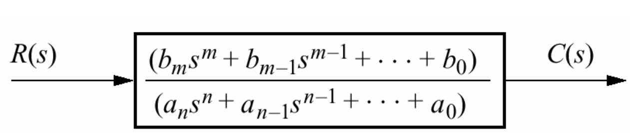
$$(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0) C(s) = (b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0) R(s)$$

Forme agora a relação entre a transformada da saída, C(s), dividida pela transformada da entrada, *R(s):*

$$\frac{C(s)}{R(s)} = G(s) = \frac{(b_m s^m + b_{m-1} s^{m-1} + \cdots + b_0)}{(a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \cdots + a_0)}$$

Observe que a Eq.(2.53) separa a saída, *C(s),* a entrada, *R(s),* e o sistema, a relação de polinômios em *s* na direita. Chamamos esta relação, G(s) de *função de transferência* e o seu cálculo é feito com *condições iniciais iguais a zero.*

$$C(s) = R(s)G(s)$$



## Função de transferência de uma equação diferencial

***EXEMPLO 2.4***

***Problema*** Obter a função de transferência:

$$\frac{dc(t)}{dt} + 2c(t) = r(t) \qquad (2.55)$$

***Solução*** Aplicando a transformada de Laplace a ambos os membros, supondo condições iniciais iguais a zero, temos

$$sC(s) + 2C(s) = R(s) \qquad (2.56)$$

A função de transferência, G(s), é

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{1}{s+2} \qquad (2.57)$$

## Resposta do sistema a partir da função de transferência

***EXEMPLO 2.5***

***Problema*** Usar o resultado do Exemplo 2.4 para obter a resposta, *c(t)*, a uma entrada, *r(t) = u(t),* a um degrau unitário, supondo condições iniciais iguais a zero.

***Solução*** Para resolver o problema, usamos a Eq. (2.54), onde *G(s)* = 1*/(s* + 2), como encontrado no Exemplo 2.4. Como *r(t)* = *u(t)*, *R(s)* = l/s, com base na Tabela 2.1. Como as condições iniciais são nulas,

$$C(s) = R(s)G(s) = \frac{1}{s(s+2)} \qquad (2.58)$$

Expandindo em frações parciais, obtemos *:*

$$C(s) = \frac{1/2}{s} - \frac{1/2}{s+2} \qquad (2.59)$$

Finalmente, aplicando a transformada de Laplace inversa a cada um dos termos, resulta

$$c(t) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}e^{-2t} \qquad (2.60)$$

## 2.4 Funções de Transferência de Circuitos Elétricos

Os circuitos equivalentes às redes elétricas com as quais trabalhamos consistem basicamente em três componentes lineares passivos: resistores,capacitores e indutores. A Tabela 2.3 resume os componentes e as relações entre tensão e corrente e entre tensão e carga, sob condições iniciais iguais a zero.

**Tabela 2.3** Relações Tensão-corrente, tensão-carga e impedância para capacitores, resistores e indutores

| Compo-nente | Tensão-corrente | Corrente-tensão | Tensão-carga | *Impedância* *Z(s)=V(s)/I(s)* | *Admitância* *Y(s)=I(s)/V(s)* |
|---|---|---|---|---|---|
| Capacitor | $v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau$ | $i(t) = C\frac{dv(t)}{dt}$ | $v(t) = \frac{1}{C}q(t)$ | $\frac{1}{Cs}$ | $Cs$ |
| Resistor | $v(t) = Ri(t)$ | $i(t) = \frac{1}{R}v(t)$ | $v(t) = R\frac{dq(t)}{dt}$ | $R$ | $\frac{1}{R} = G$ |
| Inductor | $v(t) = L\frac{di(t)}{dt}$ | $i(t) = \frac{1}{L}\int_0^t v(\tau)d\tau$ | $v(t) = L\frac{d^2q(t)}{dt^2}$ | $Ls$ | $\frac{1}{Ls}$ |

Note: The following set of symbols and units is used throughout this book: $v(t)$ = V (volts), $i(t)$ = A (amps), $q(t)$ = Q (coulombs), $C$ = F (farads), $R$ = Ω (ohms), $G$ = ℧ (mhos), $L$ = H (henries).

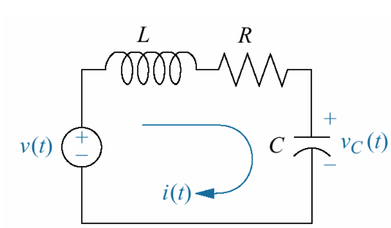
## Circuitos Simples via Método das Malhas

As funções de transferência podem ser obtidas usando a lei de Kirchhoff das tensões e somando as tensões ao longo de laços ou malhas. Chamamos este método de *análise pelo método das malhas.* Ele é mostrado no exemplo a seguir.

### Função de transferência —malha única via equação diferencial

***EXEMPLO 2.6***

***Problema*** Obter a função de transferência relacionando a tensão, $v_c(t)$, no capacitor à tensão de entrada, *V(s),*




Solução

1) Decidir quais variáveis serão:

*Entradas (obr): tensão aplicada*
*Saídas (obr):. tensão do capacitor*
*V. Intermediárias (opc): corrente*

2) Escrever equações relacionando Entradas. Saídas e V. Intermediárias

$$L\frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)\,d\tau = v(t) \qquad (2.61)$$

$$V_c(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(\tau)d\tau \qquad (2.XX)$$

Passando Ambas para o domínio s:

$$(Ls + R + \frac{1}{sC})I(s) = V(s) \qquad (2.XX)$$

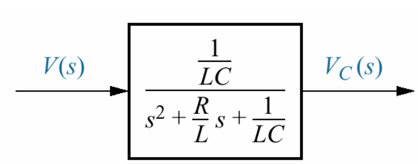
$$V_c(s) = \frac{1}{sC}I(s) \qquad (2.XX)$$

Eliminando a variável Intermediária *I(s)* nas equações acima, resta:

$$(LCs^2 + RCs + 1)V_C(s) = V(s) \qquad (2.65)$$

Calculando a função de transferência, obtemos:

$$\frac{V_C(s)}{V(s)} = \frac{1/LC}{s^2 + \frac{R}{L}s + \frac{1}{LC}} \qquad (2.XX)$$




## Simplificação da solução de problemas

- Aplicando transformada de Laplace das equações tensão-corrente dos dispositivos básicos, supondo condições iniciais nulas. Para o capacitor,

$$V(s) = \frac{1}{Cs}I(s) \qquad (2.67)$$

Para o resistor,

$$V(s) = RI(s) \qquad (2.68)$$

Para o indutor,

$$V(s) = LsI(s) \qquad (2.69)$$

Defina agora a seguinte função de transferência:

$$\frac{V(s)}{I(s)} = Z(s) \qquad (2.70)$$

O resultados da definição de impedância Z(s) nos três componentes básicos está na tabela 2.3.

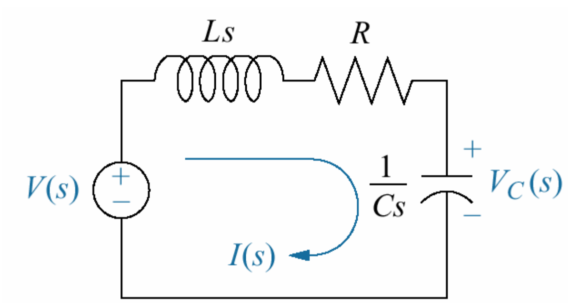
Mostremos agora como o conceito de impedância simplifica a solução para obter a função de transferência. A transformada de Laplace da Eq. (2.61), supondo condições iniciais nulas, é:

$$\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)I(s) = V(s) \tag{2.71}$$

Observe que a Eq. (2.71), que está sob a forma

[Soma de impedâncias] *I(s)* = [Soma de tensões aplicadas]

sugere o circuito série mostrado abaixo (*circuito transformado)*




## Função de transferência — malha única via método da transformada

***Problema*** Repetir o Exemplo 2.6 usando os métodos das malhas e do circuito transformado sem escrever a equação diferencial.

***Solução :*** escrevendo a equação de malha com as impedâncias, obtemos:

$$\left(Ls + R + \frac{1}{Cs}\right)I(s) = V(s) \tag{2.73}$$

Resolvendo em função de *I(s)/V(s),*

$$\frac{I(s)}{V(s)} = \frac{1}{Ls + R + \frac{1}{Cs}} \tag{2.74}$$

Porém, a tensão sobre o capacitor, $V_C(s)$, é o produto da corrente pela impedância do capacitor. Por conseguinte,

$$V_C(s) = I(s)\frac{1}{Cs} \tag{2.75}$$

Solucionando a Eq. acima para $I(s)$, substituindo na anterior e simplificando, obtemos o mesmo resultado da Eq. (2.66).

### Função de transferência — nó único via método da transformada

***Problema*** Repetir o Exemplo 2.6 usando os métodos dos nós sem escrever a equação diferencial.

***Solução*** A função de transferência pode ser obtida somando as correntes que saem do nó, cuja tensão é $V_c(s)$ na Fig. 2.5. Admita que as correntes que deixam o nó sejam positivas e que as correntes que chegam ao nó sejam negativas. As correntes são as que circulam através do capacitor e a que flui através do resistor e do indutor em série. Com base na Eq. (2.70), para cada corrente, $I(s) = V(s)/Z(s)$. Portanto,

$$\frac{V_C(s)}{1/Cs} + \frac{V_C(s) - V(s)}{R + Ls} = 0 \qquad (2.76)$$

Cuja resolução para $V_C(s)/V(s)$ fornece o mesmo resultado de (2.66)

## Circuitos Simples via Divisão de Tensão

O Exemplo 2.6 pode ser resolvido diretamente usando divisão de tensão no circuito transformado. Vamos mostrar esta técnica, a seguir.

### Função de transferência — malha única via divisão de tensão

***Problema*** Repetir o Exemplo 2.6 usando divisão de tensão e o circuito transformado.