1 Accretion rate

Eddington luminosity $L_{\rm Edd}$ は以下で定義される:

$$L_{\rm Edd} = \frac{4\pi G M_* m_p c}{\sigma_{\rm T}} = 1.26 \times 10^{38}\,{\rm erg/s}\ \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)$$

G, M_*, m_p, c, $\sigma_{\rm T}$ はそれぞれ重力定数, 中性子星の質量, 陽子の質量, 真空中の光速, トムソン散乱断面積.

Eddington accretion rate $\dot{M}_{\rm Edd}$ を以下で定義する:

$$\begin{aligned}\dot{M}_{\rm Edd} &\coloneqq L_{\rm Edd}/c^2 = 1.34 \times 10^{17}\,{\rm g/s}\ \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)\\ &= 2.22 \times 10^{-9}\ M_\odot/{\rm yr}\ \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)\end{aligned}$$

4U 1728–34 の fiducial value として, mass $M_* = 1.4M_\odot$(Shaposhnikov et al. 2003), accretion rate $\dot{M} = 0.1\dot{M}_{\rm Edd}$(Galloway et al. 2008) を, それぞれ採用する．すなわち,

$$\dot{M} = \epsilon \dot{M}_{\rm Edd}(1.4M_\odot) = 1.96 \times 10^{16}\,{\rm g/s}\ \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}$$

2 Shock の形成

X–ray burst の duration time $t_X \approx 10\,{\rm s}$ の間に飛んでいったモノが shock ejecta を形成すると仮定する．Ejecta の運動する速さを $v_{\rm sh} = 0.3c$ とすると, shock の厚み $l_{\rm sh}$ は

$$l_{\rm sh} \approx v_{\rm sh} t_X = 9 \times 10^{10}\,{\rm cm}\ v_{\rm sh,0.3}\ t_{\rm X,10}$$

shock ejecta の質量 $M_{\rm ej}$ は, recurrence time $t_{\rm rec} \approx 200\,{\rm min}$ の間に降着する質量の η 倍に等しいとすると

$$M_{\rm ej} \approx \eta \dot{M} t_{\rm rec} = 2.3 \times 10^{20}\,{\rm g}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ t_{\rm rec,200}$$

電波が立ち上がるのは, X–ray burst が起きてから $t_{\rm rise} \approx 3\,{\rm min}$ 後である．shock が形成される位置 $r_{\rm sh}$ は

$$r_{\rm sh} \approx v_{\rm sh} t_{\rm rise} = 1.6 \times 10^{12}\,{\rm cm}\ v_{\rm sh,0.3}\ t_{\rm rise,3} = 0.11\,{\rm AU}\ v_{\rm sh,0.3}\ t_{\rm rise,3}$$

3 磁場の強さ

collisionless–shock はそのエネルギーの一部を磁場へ渡す．変換効率を ϵ_B とすると, エネルギー密度について

$$\epsilon_{\rm B} \frac{M_{\rm ej} v_{\rm sh}^2/2}{4\pi r_{\rm sh}^2 l_{\rm sh}} = \frac{B^2}{8\pi}$$

B について解くと

$$B^2 = \frac{\epsilon_{\rm B} M_{\rm ej} v_{\rm sh}^2}{r_{\rm sh}^2 l_{\rm sh}} = 8.1 \times 10^2\,{\rm erg\,cm^{-3}}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ \epsilon_{\rm B,0.01}\ M_{*,1.4}\ v_{\rm sh,0.3}^{-1}\ t_{\rm rec,200}\ t_{\rm rise,3}^{-1}\ t_{\rm X,10}^{-1}$$

$$B \approx 28\,{\rm G}\ \sqrt{\eta}\ \epsilon_{0.1}^{1/2}\ \epsilon_{\rm B,0.01}^{1/2}\ M_{*,1.4}^{1/2}\ v_{\rm sh,0.3}^{-1/2}\ t_{\rm rec,200}^{1/2}\ t_{\rm rise,3}^{-1/2}\ t_{\rm X,10}^{-1/2}$$

$\epsilon_{\rm B} = 0.01$ は Kashiyama et al.(2018) から引用.

4　周辺ガスの密度

電波は $\tau \approx 10\,\mathrm{min}$ の時間で減衰する．この間に shock は $4\pi r_{\mathrm{sh}}^2 v_{\mathrm{sh}}\tau$ の領域を掃く．掃過領域にあるガス (一様密度 ρ_{amb} を仮定) の全質量が M_{ej} に等しいとすると

$$4\pi r_{\mathrm{sh}}^2 \rho_{\mathrm{amb}} v_{\mathrm{sh}}\tau = M_{\mathrm{ej}}$$

を満たす．ρ_{amb} について解くと

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{amb}} &= \frac{M_{\mathrm{ej}}}{4\pi r_{\mathrm{sh}}^2 v_{\mathrm{sh}}\tau} \\ &= 1.3\times10^{-18}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}\epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ v_{\mathrm{sh},0.3}^{-3}\ t_{\mathrm{rec},200}\ t_{\mathrm{rise},3}^{-2}\ \tau_{10}^{-1}\end{aligned}$$

ガスがすべて水素で構成されているとすると, 電子数密度は

$$n_{\mathrm{amb,e}} = \rho_{\mathrm{amb}}/(1\cdot m_u) = 7\times10^5\,\mathrm{cm^{-3}}\ \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ v_{\mathrm{sh},0.3}^{-3}\ t_{\mathrm{rec},200}\ t_{\mathrm{rise},3}^{-2}\ \tau_{10}^{-1}$$

5　電子の Lorentz factor

5.1　Maximum Lorentz factor

電子の最大 Lorentz factorγ_{max} は

$$\left(\frac{9\pi e\beta^2}{10\sigma_{\mathrm{T}}B}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{9\pi e}{10\sigma_{\mathrm{T}}B}\right)^{1/2}\ (\beta\to1)$$

で与えられる (Kashiyama et al.(2018))．値を代入すると

$$\gamma_{\mathrm{max}} = 8.5\times10^6\ B_{28}^{-1/2}$$

5.2　Minimum Lorentz factor

プラズマガスは shock からエネルギーを受け取り熱化される．電子の熱エネルギー kT_e が, v_{sh} で走る電子の運動エネルギーに等しいと仮定すると

$$kT_e = \frac{m_e}{2}v_{\mathrm{sh}}^2 = 0.045 m_e c^2\ v_{\mathrm{sh},0.3}^2$$

プラズマが電子と陽子のみから構成されていると仮定する．陽子の熱化についても電子と同様に考えると, 各々の Lorentz factor はいずれも

$$\gamma_{\mathrm{th}} = \frac{kT_i}{m_i c^2} \approx 0.045 \quad (i = \mathrm{e,\ p})$$

となる．

熱化された陽子と電子とが互いにエネルギーをやりとりできるのであれば, 電子が陽子の熱エネルギーの一部を受け取れるはずである. 電子が受け取る, 陽子の熱エネルギーの割合を ζ とする. 電子の Lorentz factor は, もともとの熱エネルギーに陽子からもらった分が加わると考えて

$$\begin{aligned}\gamma_{\rm min} &= \frac{1}{m_e c^2}(kT_e + \zeta k T_p) \\ &\approx \zeta \frac{kT_p}{m_e c^2}\ (\text{ignoring}\ kT_e) \\ &= \zeta \frac{m_p}{2m_e}\frac{v_{\rm sh}^2}{c^2} \\ &= 33\ \zeta_{0.4}\ v_{\rm sh,0.3}^2\end{aligned}$$

となる. $\zeta = 0.4$ は Kashiyama et al.(2018) の値を引用.

6 シンクロトロン放射

γ_e の Lorenz factor をもつ電子からのシンクロトロン放射を考える. 放射の典型的な振動数 ν_e は

$$\nu_e = \gamma_e^3 \nu_B \sin\alpha = \frac{\gamma_e^2 eB}{2\pi m_e c}\sin\alpha$$

である (Rybicki & Lightman (1979)). ここで ν_B はサイクロトロン振動数, α はピッチ角である. 磁場がランダムな方向を向いていると仮定し, $\sin\alpha$ の平均をとると

$$\int_0^{\pi/2} \sin\alpha\, \mathrm{d}\alpha = 1$$

ゆえ

$$\nu_e = \frac{\gamma_e^2 eB}{2\pi m_e c}$$

$\gamma_e = \gamma_{\rm min}$ として値を代入すると

$$\nu_e \approx 87\,\mathrm{GHz}\ \sqrt{\eta}\ \epsilon_{0.1}^{1/2}\ \epsilon_{\rm B,0.01}^{1/2}\ \zeta_{0.4}^2\ M_{*,1.4}^{1/2}\ v_{\rm sh,0.3}^{3/2}\ t_{\rm rec,200}^{1/2}$$

シンクロトロン放射した電子はその分エネルギーを失う. ある Lorentz factorγ をもつ電子がエネルギー密度 U_B の磁場の中で単位時間に放射するエネルギー (=電子のエネルギー損失率) は

$$P(\gamma, B) = \frac{4}{3}\sigma_{\rm T} c \beta^2 \gamma^2 U_B$$

と表せる (Rybicki&Lightman, 1979). いまの場合,

$$\gamma = \gamma_{\rm min} = 33\ \zeta_{0.4}\ v_{\rm sh,0.3}^2\ ,$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma_{\rm min}^2}\ (= 0.999)\ \approx 1$$

$$U_B = \frac{B^2}{8\pi} = 32\,\mathrm{erg\,em^{-3}}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ \epsilon_{\rm B,0.01}\ M_{*,1.4}\ v_{\rm sh,0.3}^{-1}\ t_{\rm rec,200}\ t_{\rm rise,3}^{-1}\ t_{\rm X,10}^{-1}$$

なので

$$\begin{aligned}P &= 9.3\times10^{-10}\,\mathrm{erg/s}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ \epsilon_{\rm B,0.01}\ \zeta_{0.4}^2 M_{*,1.4}\ v_{\rm sh,0.3}^3\ t_{\rm rec,200}\ t_{\rm rise,3}^{-1}\ t_{\rm X,10}^{-1} \\ &= 0.58\,\mathrm{keV/s}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ \epsilon_{\rm B,0.01}\ \zeta_{0.4}^2 M_{*,1.4}\ v_{\rm sh,0.3}^3\ t_{\rm rec,200}\ t_{\rm rise,3}^{-1}\ t_{\rm X,10}^{-1}\end{aligned}$$

となる．よって, シンクロトロン放射の寄与だけを考えた冷却時間は

$$t_{\rm cool} \approx \frac{\gamma_{\rm min} m_e c^2}{P} \approx 484\,{\rm min}\ \eta^{-1}\ \epsilon_{\rm B,0.01}^{-1}\ \epsilon_{0.1}^{-1}\ \zeta_{0.4}^{-1}\ M_{*,1.4}^{-1}\ v_{\rm sh,0.3}^{-2}\ t_{\rm rec,200}^{-1}\ t_{\rm rise,3}\ t_{\rm X,10}$$

上で求めた P は 1 個の電子による放射パワーである．shock で掃かれたガスに含まれる電子がすべて $\gamma_{\rm min}$ のシンクロトロン放射しているならば, 電子の総数 N_e は

$$N_e \approx \frac{M_{\rm ej}}{m_u} = 1.4\times 10^{44}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ t_{\rm rec,200}$$

となる．

$$P_{\rm tot} = N_e P = 1.3\times 10^{35}\,{\rm erg/s}\ \eta^2\ \epsilon_{0.1}^2\ \epsilon_{\rm B,0.01}\ \zeta_{0.4}^2\ M_{*,1.4}^2\ v_{\rm sh,0.3}^3\ t_{\rm rec,200}^2\ t_{\rm rise,3}^{-1}\ t_{\rm X,10}^{-1}$$

7 Power–law に従う電子分布からのシンクロトロン放射

7.1 比例係数の決定

電子分布は power law に従うとする．

$$\frac{{\rm d}N(\gamma)}{{\rm d}\gamma} = N_0 \gamma^{-p} \quad (\gamma_{\rm min} < \gamma < \gamma_{\rm max}) \tag{1}$$

ここで N_0 は数密度の次元をもつ定数である．

shock はそのエネルギーの一部を周囲の電子へ受け渡す．効率を $\epsilon_{\rm e}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\rm e}\frac{M_{\rm ej} v_{\rm sh}^2/2}{4\pi r_{\rm sh}^2 l_{\rm sh}} &= \int_{\gamma_{\rm min}}^{\gamma_{\rm max}} \gamma m_{\rm e} c^2 \frac{{\rm d}N}{{\rm d}\gamma}\,{\rm d}\gamma \\
&= m_{\rm e} c^2 \frac{N_0}{2-p}\left[\gamma^{2-p}\right]_{\gamma_{\rm min}}^{\gamma_{\rm max}} \\
&\approx m_{\rm e} c^2 \frac{N_0}{p-2}\gamma_{\rm min}^{2-p} \quad (p>2,\ \gamma_{\rm max}\gg\gamma_{\rm min})
\end{aligned}$$

が成り立つ．N_0 について解くと

$$\begin{aligned}
N_0 &= (p-2)\gamma_{\rm min}^{p-2}\ \frac{\epsilon_e M_{\rm ej} v_{\rm sh}^2/2}{4\pi r_{\rm sh}^2 l_{\rm sh} m_e c^2} \\
&= 1.1\times 10^9\,{\rm cm}^{-3}\ \epsilon_e (p-2)\gamma_{\rm min}^{p-2}
\end{aligned}$$

7.2 Optically thin 領域からの放射

分布 (1) に従うシンクロトロン電子の power は以下で与えられる (Rybicki & Lightman, 1979):

$$\begin{aligned}
P_\nu &= \frac{\sqrt{3} e^3 N_0 B}{m_e c^2 (p+1)}\Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right)\left(\frac{2\pi\nu m_e c}{3eB}\right)^{-(p-1)/2} \\
&= \frac{\sqrt{3} N_0 r_e e B}{p+1}\left(\frac{2\pi(m_e c^2)(\nu/c)}{3eB}\right)^{-(p-1)/2}\Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right)
\end{aligned}$$

ここで, $r_e = e^2/(m_e c^2)$ は古典電子半径.

$p = 2.5$ の場合で具体的に計算すると,

$$P_\nu = 4.2 \times 10^{-14}\,\mathrm{erg\,cm^{-3}\,s^{-1}\,Hz^{-1}}\ {B_{28}}^{7/4}\ {\nu_{100}}^{-3/4}\ \left(\frac{N_0}{1.1\times 10^9\,\mathrm{cm^{-3}}}\right)$$

次に, Intensity I_ν は

$$I_\nu \approx \frac{P_\nu l_{\mathrm{sh}}}{4\pi} = \frac{\sqrt{3}N_0 r_e e B l_{\mathrm{sh}}}{4\pi(p+1)}\left(\frac{2\pi(m_e c^2)(\nu/c)}{3eB}\right)^{-(p-1)/2}\Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right)$$

と表せる. $p = 2.5$ の場合で具体的に計算すると,

$$I_\nu = 3.0 \times 10^{-4}\,\mathrm{erg\,cm^{-2}\,s^{-1}\,Hz^{-1}\,str^{-1}}\ {B_{28}}^{7/4}\ {\nu_{100}}^{-3/4}\left(\frac{l_{\mathrm{sh}}}{9\times 10^{10}\,\mathrm{cm}}\right)\left(\frac{N_0}{1.1\times 10^9\,\mathrm{cm^{-3}}}\right)$$

7.3 Optically thick 領域からの放射

エネルギー E あたりの電子の密度分布 $N(E)$ は以下に従うと仮定する.

$$\frac{\mathrm{d}N(E)}{\mathrm{d}E} = \tilde{N}_0 E^{-p}$$

$\gamma = E/(m_e c^2)$ ゆえ, $\tilde{N}_0$ と N_0 とは以下の関係にある:

$$\tilde{N}_0 = (m_e c^2)^{p-1} N_0 \tag{2}$$

Synchrotron self–absorption(SSA) の吸収係数は以下で与えられる (Rybicki & Lightman, 1979).

$$\begin{aligned}
\alpha_\nu &= \frac{\sqrt{3}e^3}{8\pi m_e}\left(\frac{3e}{2\pi m_e^3 c^5}\right)^{p/2}\tilde{N}_0 B^{(p+2)/2}\,\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)\nu^{-(p+4)/2}\\
&= \frac{\sqrt{3}\tilde{N}_0 r_e e B}{8\pi}\left(\frac{c}{\nu}\right)^2\left(\frac{3}{2\pi}\frac{eB}{(m_e c^2)^3}\frac{c}{\nu}\right)^{p/2}\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{8\pi}\frac{N_0 r_e e B}{m_e c^2(\nu/c)^2}\left(\frac{3eB}{2\pi(m_e c^2)(\nu/c)}\right)^{p/2}\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)
\end{aligned}$$

最後の等式で (2) を用いた. $p = 2.5$ として計算すると

$$\alpha_\nu = 4.4 \times 10^{-7}\,\mathrm{cm^{-1}}\ {B_{28}}^{9/4}\ {\nu_{100}}^{-13/4}$$

源泉関数は

$$\begin{aligned}
S_\nu \coloneqq \frac{P_\nu}{4\pi\alpha_\nu} &= \frac{2\lambda^{-2}E_{\mathrm{res}}}{p+1}\left(\frac{2\pi E_{\mathrm{res}}\lambda^{-1}}{3f}\right)^{1/2} G(p)\\
&= \left(\frac{\nu}{c}\right)^{5/2}\frac{2m_e c^2}{p+1}\left(\frac{2\pi m_e c^2}{3eB}\right)^{1/2} G(p)
\end{aligned}$$

となる. ただし

$$G(p) = \frac{\Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)}$$

である. $p = 2.5$ として計算すると

$$S_\nu = 2.9 \times 10^{-4}\,\mathrm{erg\,cm^{-2}}\ {B_{28}}^{-1/2}\ {\nu_{100}}^{5/2}$$

天体までの距離 $d = 4.5\,\mathrm{kpc}$ とすると, 観測される flux F_ν は

$$F_\nu \approx S_\nu \left(\frac{r_{\mathrm{sh}}^2}{d^2}\right) \approx 400\,\mathrm{mJy}\ {B_{28}}^{-1/2}\ {\nu_{100}}^{5/2}\ {d_{4.5}}^{-2}\ \left(\frac{r_{\mathrm{sh}}}{1.6\times 10^{12}\,\mathrm{cm}}\right)^2$$

となる.

7.4 Optical depth の評価

Optical depth τ_ν は

$$\tau_\nu \coloneqq \alpha_\nu l_{\mathrm{sh}} = \frac{\sqrt{3}(m_e c^2)^{p-1} N_0 r_e e B l_{\mathrm{sh}}}{8\pi(\nu/c)^2}\left(\frac{3eB}{2\pi(m_e c^2)^3(\nu/c)}\right)^{p/2}\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)$$

とかける. $\tau = 1$ のときの周波数 ν_{SSA} を求めると

$$\nu_{\mathrm{SSA}}/c = \left(\frac{\sqrt{3}N_0 r_e e B l_{\mathrm{sh}}}{8\pi m_e c^2}\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)\right)^{2/(p+4)}\left(\frac{3eB}{2\pi m_e c^2}\right)^{p/(p+4)}$$

である. $p = 2.5$ として具体的に計算すると

$$\nu_{\mathrm{SSA}} = 140\,\mathrm{GHz}\ {B_{28}}^{9/13}\ \left(\frac{l_{\mathrm{sh}}}{9\times 10^{10}\,\mathrm{cm}}\right)^{4/13}\left(\frac{N_0}{1.1\times 10^9\,\mathrm{cm}^{-3}}\right)^{4/13}$$