1　Accretion rate と ejecta mass

shock ejecta の質量 $M_{\rm ej}$ は, recurrence time $t_{\rm rec} \approx 200\,{\rm min}$ の間に降着する質量の η 倍に等しいとする．accretion rate は Eddington accretion rate $\dot{M}_{\rm Edd}$ と仮定する．ここで, $\dot{M}_{\rm Edd}$ は Eddington luminosity:

$$L_{\rm Edd} \approx 10^{38}\,{\rm erg/s}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)$$

と, 輻射への変換効率 ϵ を用いて

$$\dot{M}_{\rm Edd} = \frac{L_{\rm Edd}}{\epsilon c^2} = 1.1\times10^{17}\,{\rm g/s}\ \left(\frac{\epsilon}{0.1}\right)^{-1}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)$$

と表せる．よって

$$M_{\rm ej} = \eta\dot{M}_{\rm Edd}t_{\rm rec} = 1.3\times10^{21}\,{\rm g}\ \eta\left(\frac{t_{\rm rec}}{200\,{\rm min}}\right)\left(\frac{\epsilon}{0.1}\right)\left(\frac{M}{M_\odot}\right)$$

2　電波立ち上がり時の shock radius

X–ray burst の瞬間に $t=0$ に shock が立ち, $v_{\rm sh}=0.3c$ の速さで走ると仮定する．観測によれば, X–ray burst が起きてから電波が立ち上がるまでの時間は $t_{\rm rise}\approx 3\,{\rm min}$ なので

$$r_{\rm sh} = v_{\rm sh}t_{\rm rise} = 1.6\times10^{12}\,{\rm cm}\ \left(\frac{v_{\rm sh}}{0.3c}\right)\left(\frac{t_{\rm rise}}{3\,{\rm min}}\right) = 0.11\,{\rm AU}\ \left(\frac{v_{\rm sh}}{0.3c}\right)\left(\frac{t_{\rm rise}}{3\,{\rm min}}\right)$$

3　磁場の強さ

collisionless–shock はそのエネルギーの一部を磁場へ渡す．変換効率を ϵ_B とすると

$$\epsilon_{\rm B}\frac{M_{\rm ej}v_{\rm sh}^2/2}{4\pi r_{\rm sh}^2 v_{\rm sh}\tau} = \frac{B^2}{8\pi}$$

ここで $\tau\approx 10\,{\rm min}$ は X–ray burst が起きてから電波が減衰するまでの時間である．B について解くと

$$\begin{aligned}
B^2 &= \epsilon_B\frac{M_{\rm ej}v_{\rm sh}}{r_{\rm sh}^2\tau} = \eta\epsilon_B\frac{\dot{M}_{\rm Edd}t_{\rm rec}}{v_{\rm sh}t_{\rm rise}^2\tau}\\
&\approx 7.6\times10^{3}\,{\rm erg\,cm^{-3}}\ \eta\epsilon_{\rm B}\left(\frac{\epsilon}{0.1}\right)\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{t_{\rm rec}}{200\,{\rm min}}\right)\left(\frac{v_{\rm sh}}{0.3c}\right)^{-1}\left(\frac{t_{\rm rise}}{3\,{\rm min}}\right)^{-2}\left(\frac{\tau}{10\,{\rm min}}\right)\\
B &\approx 87\,{\rm G}\ \sqrt{\eta\epsilon_{\rm B}}\left(\frac{\epsilon}{0.1}\right)^{1/2}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{t_{\rm rec}}{200\,{\rm min}}\right)^{1/2}\left(\frac{v_{\rm sh}}{0.3c}\right)^{-1/2}\left(\frac{t_{\rm rise}}{3\,{\rm min}}\right)^{-1}\left(\frac{\tau}{10\,{\rm min}}\right)^{1/2}
\end{aligned}$$

4　周辺ガスの密度

$\tau\approx 10\,{\rm min}$ の間に shock が掃いた領域にあるガスの総質量は $M_{\rm ej}$ に等しいと仮定する．すなわち

$$4\pi r_{\rm sh}^2\rho_{\rm amb}v_{\rm sh}\tau = M_{\rm ej}$$

$\rho_{\rm amb}$ は周辺ガスの質量密度である．$\rho_{\rm amb}$ について解くと

$$\begin{aligned}
\rho_{\rm amb} &= \frac{M_{\rm ej}}{4\pi r_{\rm sh}^2 v_{\rm sh}\tau}\\
&\approx 7.5\times10^{-18}\,{\rm g\,cm^{-3}}\left(\frac{\epsilon}{0.1}\right)\left(\frac{M}{M_\odot}\right)\left(\frac{t_{\rm rec}}{200\,{\rm min}}\right)\left(\frac{v_{\rm sh}}{0.3c}\right)^{-3}\left(\frac{t_{\rm rise}}{3\,{\rm min}}\right)^{-2}\left(\frac{\tau}{10\,{\rm min}}\right)^{-1}
\end{aligned}$$

5　Power–law の比例係数

電子分布は power law に従うとする.

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\gamma} = C\gamma^{-p} \quad (\text{for } \gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max})$$

shock はそのエネルギーの一部を周囲の電子へ受け渡す. 効率を ϵ_{e} とおくと

$$\epsilon_{\mathrm{e}} \frac{M_{\mathrm{ej}}}{2} v_{\mathrm{sh}}^2 = \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} \gamma m_{\mathrm{e}} c^2 \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\gamma}\,\mathrm{d}\gamma = m_{\mathrm{e}} c^2 \frac{C}{2-p} \left[\gamma^{2-p}\right]_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}}$$

となる. C について解くと

$$\begin{aligned} C &= \epsilon_{\mathrm{e}} \frac{M_{\mathrm{ej}} v_{\mathrm{sh}}^2}{2 m_{\mathrm{e}} c^2} (2-p) \left(\gamma_{\max}^{2-p} - \gamma_{\min}^{2-p}\right)^{-1} \\ &= 6.6 \times 10^{46} \eta \epsilon_{\mathrm{e}}\ (2-p) \left(\gamma_{\max}^{2-p} - \gamma_{\min}^{2-p}\right)^{-1} \left(\frac{\dot{M}}{\dot{M}_{\mathrm{Edd}}}\right) \left(\frac{t_{\mathrm{rec}}}{200\,\mathrm{min}}\right) \left(\frac{v_{\mathrm{sh}}}{0.3c}\right)^2 \end{aligned}$$

shock で加速される電子のエネルギー範囲 $(\gamma_{\min}, \gamma_{\max})$ が分かれば, C の値を見積もることができる.

6　放射電子の最小エネルギー

プラズマガスは shock からエネルギーを受け取り熱化される. 電子の熱エネルギー kT_e が, v_{sh} で走る電子の運動エネルギーに等しいと仮定すると

$$kT_e \approx \frac{m_e}{2} v_{\mathrm{sh}}^2 \approx 0.045 m_e c^2 \left(\frac{v_{\mathrm{sh}}}{0.3c}\right)^2$$

プラズマが電子と陽子のみから構成されていると仮定する. 陽子の熱化についても電子と同様に考えると, 各々の Lorentz factor はいずれも

$$\gamma_{\mathrm{th}} = \frac{kT_i}{m_i c^2} \approx 0.045 \quad (i = \mathrm{e},\ \mathrm{p})$$

となる.

熱化された陽子と電子とが互いにエネルギーをやりとりできるのであれば, 電子が陽子の熱エネルギーの一部を受け取れるはずである. 電子が受け取る, 陽子の熱エネルギーの割合を ζ とすると

$$\begin{aligned} \gamma_e &= \frac{1}{m_e c^2}(kT_e + \zeta kT_p) \\ &= 0.045 \left(1 + \zeta \frac{m_p}{m_e}\right) \left(\frac{v_{\mathrm{sh}}}{0.3c}\right)^2 \\ &\approx 45\zeta \left(\frac{v_{\mathrm{sh}}}{0.3c}\right)^2 \ (\text{using } m_p/m_e \approx 10^3) \end{aligned}$$

となる.

7　シンクロトロン放射

γ_e の Lorenz factor をもつ電子からのシンクロトロン放射を考える．放射の典型的な振動数 ν_e は

$$\nu_e = \gamma_e^3 \nu_B \sin\alpha = \frac{\gamma_e^2 eB}{2\pi m_e c} \sin\alpha$$

である (Rybicki & Lightman (1979))．ここで ν_B はサイクロトロン振動数, α はピッチ角である．磁場がランダムな方向を向いていると仮定し, $\sin\alpha$ の平均をとると

$$\int_0^{\pi/2} \sin\alpha \, \mathrm{d}\alpha = 1$$

ゆえ

$$\nu_e = \frac{\gamma_e^2 eB}{2\pi m_e c}$$

値を代入すると

$$\nu_e \approx 495\,\mathrm{GHz}\,\zeta\sqrt{\eta\epsilon_{\mathrm{B}}}\left(\frac{\epsilon}{0.1}\right)^{1/2}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{t_{\mathrm{rec}}}{200\,\mathrm{min}}\right)^{1/2}\left(\frac{v_{\mathrm{sh}}}{0.3c}\right)^{3/2}\left(\frac{t_{\mathrm{rise}}}{3\,\mathrm{min}}\right)^{-1}\left(\frac{\tau}{10\,\mathrm{min}}\right)^{1/2}$$