

## 1 Accretion rate

Eddington luminosity  $L_{\text{Edd}}$  は以下で定義される:

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi G M_* m_p c}{\sigma_T} = 1.26 \times 10^{38} \text{ erg/s} \left( \frac{M_*}{M_\odot} \right)$$

$G$ ,  $M_*$ ,  $m_p$ ,  $c$ ,  $\sigma_T$  はそれぞれ重力定数, 中性子星の質量, 陽子の質量, 真空中の光速, トムソン散乱断面積.

Eddington accretion rate  $\dot{M}_{\text{Edd}}$  を以下で定義する:

$$\begin{aligned} \dot{M}_{\text{Edd}} &:= L_{\text{Edd}}/c^2 = 1.34 \times 10^{17} \text{ g/s} \left( \frac{M_*}{M_\odot} \right) \\ &= 2.22 \times 10^{-9} M_\odot/\text{yr} \left( \frac{M_*}{M_\odot} \right) \end{aligned}$$

4U 1728-34 の fiducial value として, mass  $M_* = 1.4M_\odot$  (Shaposhnikov et al. 2003), accretion rate  $\dot{M} = 0.1\dot{M}_{\text{Edd}}$  (Galloway et al. 2008) を, それぞれ採用する. すなわち,

$$\dot{M} = \epsilon \dot{M}_{\text{Edd}}(1.4M_\odot) = 1.96 \times 10^{16} \text{ g/s } \epsilon_{0.1} M_{*,1.4}$$

## 2 Shock の形成

X-ray burst の duration time  $t_X \approx 10 \text{ s}$  の間に飛んでいったモノが shock ejecta を形成すると仮定する. Ejecta の運動する速さを  $v_{\text{sh}} = 0.3c$  とすると, shock の厚み  $l_{\text{sh}}$  は

$$l_{\text{sh}} \approx v_{\text{sh}} t_X = 9 \times 10^{10} \text{ cm } v_{\text{sh},0.3} t_{X,10}$$

shock ejecta の質量  $M_{\text{ej}}$  は, recurrence time  $t_{\text{rec}} \approx 200 \text{ min}$  の間に降着する質量の  $\eta$  倍に等しいとすると

$$M_{\text{ej}} \approx \eta \dot{M} t_{\text{rec}} = 2.3 \times 10^{20} \text{ g } \eta \epsilon_{0.1} M_{*,1.4} t_{\text{rec},200}$$

電波が立ち上がるのは, X-ray burst が起きてから  $t_{\text{rise}} \approx 3 \text{ min}$  後である. shock が形成される位置  $r_{\text{sh}}$  は

$$r_{\text{sh}} \approx v_{\text{sh}} t_{\text{rise}} = 1.6 \times 10^{12} \text{ cm } v_{\text{sh},0.3} t_{\text{rise},3} = 0.11 \text{ AU } v_{\text{sh},0.3} t_{\text{rise},3}$$

## 3 磁場の強さ

collisionless-shock はそのエネルギーの一部を磁場へ渡す. 変換効率を  $\epsilon_B$  とすると, エネルギー密度について

$$\epsilon_B \frac{M_{\text{ej}} v_{\text{sh}}^2 / 2}{4\pi r_{\text{sh}}^2 l_{\text{sh}}} = \frac{B^2}{8\pi}$$

$B$  について解くと

$$B^2 = \frac{\epsilon_B M_{\text{ej}} v_{\text{sh}}^2}{r_{\text{sh}}^2 l_{\text{sh}}} = 8.1 \times 10^2 \text{ erg cm}^{-3} \eta \epsilon_{0.1} \epsilon_{B,0.01} M_{*,1.4} v_{\text{sh},0.3}^{-1} t_{\text{rec},200} t_{\text{rise},3}^{-1} t_{X,10}^{-1}$$

$$B \approx 28 \text{ G } \sqrt{\eta} \epsilon_{0.1}^{1/2} \epsilon_{B,0.01}^{1/2} M_{*,1.4}^{1/2} v_{\text{sh},0.3}^{-1/2} t_{\text{rec},200}^{1/2} t_{\text{rise},3}^{-1/2} t_{X,10}^{-1/2}$$

$\epsilon_B = 0.01$  は Kashiyama et al.(2018) から引用.

## 4 周辺ガスの密度

電波は  $\tau \approx 10 \text{ min}$  の時間で減衰する．この間に shock は  $4\pi r_{\text{sh}}^2 v_{\text{sh}} \tau$  の領域を掃く．掃過領域にあるガス（一様密度  $\rho_{\text{amb}}$  を仮定）の全質量が  $M_{\text{ej}}$  に等しいとすると

$$4\pi r_{\text{sh}}^2 \rho_{\text{amb}} v_{\text{sh}} \tau = M_{\text{ej}}$$

を満たす． $\rho_{\text{amb}}$  について解くと

$$\begin{aligned} \rho_{\text{amb}} &= \frac{M_{\text{ej}}}{4\pi r_{\text{sh}}^2 v_{\text{sh}} \tau} \\ &= 1.3 \times 10^{-18} \text{ g cm}^{-3} \epsilon_{0.1} M_{*,1.4} v_{\text{sh},0.3}^{-3} t_{\text{rec},200} t_{\text{rise},3}^{-2} \tau_{10}^{-1} \end{aligned}$$

ガスがすべて水素で構成されているとすると，電子数密度は

$$n_{\text{amb,e}} = \rho_{\text{amb}} / (1 \cdot m_u) = 7 \times 10^5 \text{ cm}^{-3} \epsilon_{0.1} M_{*,1.4} v_{\text{sh},0.3}^{-3} t_{\text{rec},200} t_{\text{rise},3}^{-2} \tau_{10}^{-1}$$

## 5 Power-law の比例係数

工事中．

## 6 放射電子の最小エネルギー

プラズマガスは shock からエネルギーを受け取り熱化される．電子の熱エネルギー  $kT_e$  が， $v_{\text{sh}}$  で走る電子の運動エネルギーに等しいと仮定すると

$$kT_e = \frac{m_e}{2} v_{\text{sh}}^2 = 0.045 m_e c^2 v_{\text{sh},0.3}^2$$

プラズマが電子と陽子のみから構成されていると仮定する．陽子の熱化についても電子と同様に考えると，各々の Lorentz factor はいずれも

$$\gamma_{\text{th}} = \frac{kT_i}{m_i c^2} \approx 0.045 \quad (i = e, p)$$

となる．

熱化された陽子と電子とが互いにエネルギーをやりとりできるのであれば，電子が陽子の熱エネルギーの一部を受け取れるはずである．電子が受け取る，陽子の熱エネルギーの割合を  $\zeta$  とする．電子の Lorentz factor は，もともとの熱エネルギーに陽子からもらった分が加わると考えて

$$\begin{aligned} \gamma_{\text{min}} &= \frac{1}{m_e c^2} (kT_e + \zeta kT_p) \\ &\approx \zeta \frac{kT_p}{m_e c^2} \text{ (ignoring } kT_e) \\ &= \zeta \frac{m_p}{2m_e} \frac{v_{\text{sh}}^2}{c^2} \\ &= 33 \zeta_{0.4} v_{\text{sh},0.3}^2 \end{aligned}$$

となる． $\zeta_{0.4}$  は Kashiyama et al.(2018) の値を引用．

## 7 シンクロトロン放射

$\gamma_e$  の Lorentz factor をもつ電子からのシンクロトロン放射を考える．放射の典型的な振動数  $\nu_e$  は

$$\nu_e = \gamma_e^3 \nu_B \sin \alpha = \frac{\gamma_e^2 e B}{2\pi m_e c} \sin \alpha$$

である (Rybicki & Lightman (1979)). ここで  $\nu_B$  はサイクロトロン振動数,  $\alpha$  はピッチ角である．磁場がランダムな方向を向いていると仮定し,  $\sin \alpha$  の平均をとると

$$\int_0^{\pi/2} \sin \alpha \, d\alpha = 1$$

ゆえ

$$\nu_e = \frac{\gamma_e^2 e B}{2\pi m_e c}$$

$\gamma_e = \gamma_{\min}$  として値を代入すると

$$\nu_e \approx 87 \text{ GHz} \, \sqrt{\eta} \, \epsilon_{0.1}^{1/2} \, \epsilon_{B,0.01}^{1/2} \, \zeta_{0.4}^2 \, M_{*,1.4}^{1/2} \, v_{\text{sh},0.3}^{3/2} \, t_{\text{rec},200}^{1/2}$$

シンクロトロン放射した電子はその分エネルギーを失う．ある Lorentz factor  $\gamma$  をもつ電子がエネルギー密度  $U_B$  の磁場の中で単位時間に放射するエネルギー (=電子のエネルギー損失率) は

$$P(\gamma, B) = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B$$

と表せる (Rybicki&Lightman, 1979). いまの場合,

$$\gamma = \gamma_{\min} = 33 \, \zeta_{0.4} \, v_{\text{sh},0.3}^2,$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma_{\min}^2} (= 0.999) \approx 1$$

$$U_B = \frac{B^2}{8\pi} = 32 \text{ erg cm}^{-3} \, \eta \, \epsilon_{0.1} \, \epsilon_{B,0.01} \, M_{*,1.4} \, v_{\text{sh},0.3}^{-1} \, t_{\text{rec},200} \, t_{\text{rise},3}^{-1} \, t_{X,10}^{-1}$$

なので

$$\begin{aligned} P &= 9.3 \times 10^{-10} \text{ erg/s} \, \eta \, \epsilon_{0.1} \, \epsilon_{B,0.01} \, \zeta_{0.4}^2 \, M_{*,1.4} \, v_{\text{sh},0.3}^3 \, t_{\text{rec},200} \, t_{\text{rise},3}^{-1} \, t_{X,10}^{-1} \\ &= 0.58 \text{ keV/s} \, \eta \, \epsilon_{0.1} \, \epsilon_{B,0.01} \, \zeta_{0.4}^2 \, M_{*,1.4} \, v_{\text{sh},0.3}^3 \, t_{\text{rec},200} \, t_{\text{rise},3}^{-1} \, t_{X,10}^{-1} \end{aligned}$$

となる．よって, シンクロトロン放射の寄与だけを考えた冷却時間は

$$t_{\text{cool}} \approx \frac{\gamma_{\min} m_e c^2}{P} \approx 484 \text{ min} \, \eta^{-1} \, \epsilon_{B,0.01}^{-1} \, \epsilon_{0.1}^{-1} \, \zeta_{0.4}^{-1} \, M_{*,1.4}^{-1} \, v_{\text{sh},0.3}^{-2} \, t_{\text{rec},200}^{-1} \, t_{\text{rise},3} \, t_{X,10}$$

上で求めた  $P$  は 1 個の電子による放射パワーである．shock で掃かれたガスに含まれる電子がすべて  $\gamma_{\min}$  のシンクロトロン放射しているならば, ビーミングを考慮した上での電子の総数  $N_e$  は

$$N_e \approx \frac{M_{\text{ej}}}{m_u} \times \frac{2\gamma_{\min}^{-1}}{2\pi} = 1.4 \times 10^{42} \, \eta \, \epsilon_{0.1} \, \zeta_{0.4} \, M_{*,1.4} \, v_{\text{sh},0.3}^2 \, t_{\text{rec},200}$$

となる.

$$P_{\text{tot}} = N_e P = 1.3 \times 10^{33} \text{ erg/s } \eta^2 \epsilon_{0.1}^2 \epsilon_{\text{B},0.01} \zeta_{0.4}^3 M_{*,1.4}^2 v_{\text{sh},0.3}^5 t_{\text{rec},200}^2 t_{\text{rise},3}^{-1} t_{\text{X},10}^{-1}$$

4U 1728-34 までの距離  $d \approx 4.5 \text{ kpc} = 1.4 \times 10^{22} \text{ cm}$  (Shaposhnikov et al.(2003)) を用いると, flux は

$$\begin{aligned} F &\approx P_{\text{tot}} / (4\pi d^2 \nu_e) \\ &= 6 \times 10^2 \text{ mJy } \eta^{1/2} \epsilon_{0.1}^{3/2} \epsilon_{\text{B},0.01}^{1/2} \zeta_{0.4}^{-1} M_{*,1.4}^{3/2} v_{\text{sh},0.3}^{7/2} t_{\text{rec},200}^{3/2} t_{\text{rise},3}^{-1} t_{\text{X},10}^{-1} d_{4.5}^{-2} \end{aligned}$$

となる. (Russell et al.(2024) の 100 倍)