1 Eddington accretion rate

Eddington luminosity $L_{\rm Edd}$ は以下で定義される:

$$L_{\rm Edd} = \frac{4\pi G M_* m_p c}{\sigma_{\rm T}} = 1.26 \times 10^{38}\,{\rm erg/s}\,\left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)$$

G, M_*, m_p, c, $\sigma_{\rm T}$ はそれぞれ重力定数, 中性子星の質量, 陽子の質量, 真空中の光速, トムソン散乱断面積.

Eddington accretion rate $\dot{M}_{\rm Edd}$ を以下で定義する:

$$\begin{aligned}\dot{M}_{\rm Edd} &\coloneqq L_{\rm Edd}/c^2 = 1.34 \times 10^{17}\,{\rm g/s}\,\left(\frac{M_*}{M_\odot}\right) \\ &= 2.22 \times 10^{-9}\,M_\odot/{\rm yr}\,\left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)\end{aligned}$$

2 Accretion rate と ejecta mass

4U 1728–34 の fiducial value として, mass $M_* = 1.4M_\odot$(Shaposhnikov et al. 2003), accretion rate $\dot{M} = 0.1\dot{M}_{\rm Edd}$(Galloway et al. 2008) を, それぞれ採用する. すなわち,

$$\dot{M} = \epsilon \dot{M}_{\rm Edd}(1.4M_\odot) = 1.96 \times 10^{16}\,{\rm g/s}\,\epsilon_{0.1} M_{*,1.4}$$

shock ejecta の質量 $M_{\rm ej}$ は, recurrence time $t_{\rm rec} \approx 200\,{\rm min}$ の間に降着する質量の η 倍に等しいとする.

$$M_{\rm ej} = \eta \dot{M} t_{\rm rec} = 2.35 \times 10^{20}\,{\rm g}\,\eta \epsilon_{0.1} M_{*,1.4} t_{\rm rec,200}$$

3 電波立ち上がり時の shock radius

Shock ejecta の速さを $v_{\rm sh} = 0.3c$ と仮定する. 観測によれば, X–ray burst が起きてから電波が立ち上がるまでの時間は $t_{\rm rise} \approx 3\,{\rm min}$ である. shock が形成される位置 $r_{\rm sh}$ を見積もると

$$r_{\rm sh} = v_{\rm sh} t_{\rm rise} = 1.6 \times 10^{12}\,{\rm cm}\,v_{\rm sh,0.3} t_{\rm rise,3} = 0.11\,{\rm AU}\,v_{\rm sh,0.3} t_{\rm rise,3}$$

4 磁場の強さ

collisionless–shock はそのエネルギーの一部を磁場へ渡す. 変換効率を ϵ_B とすると

$$\epsilon_{\rm B} \frac{M_{\rm ej} v_{\rm sh}^2/2}{4\pi r_{\rm sh}^2 v_{\rm sh} \tau} = \frac{B^2}{8\pi}$$

ここで $\tau \approx 10\,{\rm min}$ は X–ray burst が起きてから電波が減衰するまでの時間である. B について解くと

$$\begin{aligned}B^2 &= \epsilon_B \frac{M_{\rm ej} v_{\rm sh}}{r_{\rm sh}^2 \tau} = \eta \epsilon_B \frac{\dot{M} t_{\rm rec}}{v_{\rm sh} t_{\rm rise}^2 \tau} \\ &\approx 13.4\,{\rm erg\,cm^{-3}}\ \eta\ \epsilon_{\rm B,0.01}\ \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ v_{\rm sh,0.3}^{-1}\ t_{\rm rec,200}\ t_{\rm rise,3}^{-2}\ \tau_{10}^{-1} \\ B &\approx 3.66\,{\rm G}\ \sqrt{\eta}\ \epsilon_{\rm B,0.01}^{1/2}\ \epsilon_{0.1}^{1/2}\ M_{*,1.4}^{1/2}\ v_{\rm sh,0.3}^{-1/2}\ t_{\rm rec,200}^{1/2}\ t_{\rm rise,3}^{-1}\ \tau_{10}^{-1/2}\end{aligned}$$

$\epsilon_{\rm B} = 0.01$ は Kashiyama et al.(2018) をそのまま引用.

5 周辺ガスの密度

$\tau \approx 10\,\mathrm{min}$ の間に shock が掃いた領域にあるガスの総質量は M_{ej} に等しいと仮定する．すなわち

$$4\pi r_{\mathrm{sh}}^2 \rho_{\mathrm{amb}} v_{\mathrm{sh}} \tau = M_{\mathrm{ej}}$$

ρ_{amb} は周辺ガスの質量密度である．ρ_{amb} について解くと

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{amb}} &= \frac{M_{\mathrm{ej}}}{4\pi r_{\mathrm{sh}}^2 v_{\mathrm{sh}} \tau} \\ &\approx 1.32 \times 10^{-18}\,\mathrm{g\,cm^{-3}} \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ v_{\mathrm{sh},0.3}^{-3}\ t_{\mathrm{rec},200}\ t_{\mathrm{rise},3}^{-2}\ \tau_{10}^{-1}\end{aligned}$$

6 Power–law の比例係数

工事中.

7 放射電子の最小エネルギー

プラズマガスは shock からエネルギーを受け取り熱化される．電子の熱エネルギー kT_e が, v_{sh} で走る電子の運動エネルギーに等しいと仮定すると

$$kT_e = \frac{m_e}{2} v_{\mathrm{sh}}^2 = 0.045 m_e c^2\ v_{\mathrm{sh},0.3}^2$$

プラズマが電子と陽子のみから構成されていると仮定する．陽子の熱化についても電子と同様に考えると, 各々の Lorentz factor はいずれも

$$\gamma_{\mathrm{th}} = \frac{kT_i}{m_i c^2} \approx 0.045 \quad (i = \mathrm{e,\ p})$$

となる．

熱化された陽子と電子とが互いにエネルギーをやりとりできるのであれば, 電子が陽子の熱エネルギーの一部を受け取れるはずである．電子が受け取る, 陽子の熱エネルギーの割合を ζ とする．電子の Lorentz factor は, もともとの熱エネルギーに陽子からもらった分が加わると考えて

$$\begin{aligned}\gamma_{\min} &= \frac{1}{m_e c^2}(kT_e + \zeta kT_p) \\ &\approx \zeta \frac{kT_p}{m_e c^2}\ (\text{ignoring } kT_e) \\ &= \zeta \frac{m_p}{2m_e} \frac{v_{\mathrm{sh}}^2}{c^2} \\ &= 33\ \zeta_{0.4}\ v_{\mathrm{sh},0.3}^2\end{aligned}$$

となる．

8 シンクロトロン放射

γ_e の Lorenz factor をもつ電子からのシンクロトロン放射を考える．放射の典型的な振動数 ν_e は

$$\nu_e = \gamma_e^3 \nu_B \sin\alpha = \frac{\gamma_e^2 eB}{2\pi m_e c} \sin\alpha$$

である (Rybicki & Lightman (1979)). ここで ν_B はサイクロトロン振動数, α はピッチ角である. 磁場がランダムな方向を向いていると仮定し, $\sin\alpha$ の平均をとると

$$\int_0^{\pi/2} \sin\alpha \, \mathrm{d}\alpha = 1$$

ゆえ

$$\nu_e = \frac{\gamma_e^2 eB}{2\pi m_e c}$$

$\gamma_e = \gamma_{\min}$ として値を代入すると

$$\nu_e \approx 11.2\,\mathrm{GHz}\ \sqrt{\eta}\ \zeta_{0.4}^2\ \epsilon_{\mathrm{B},0.01}^{1/2}\ \epsilon_{0.1}^{1/2}\ M_{*,1.4}^{1/2}\ t_{\mathrm{rec},200}^{1/2}\ v_{\mathrm{sh},0.3}^{3/2}\ t_{\mathrm{rise},3}^{-1}\ \tau_{10}^{-1/2}$$

9 Synchrotron cooling

シンクロトロン放射した電子はその分エネルギーを失う. ある Lorentz factorγ をもつ電子がエネルギー密度 U_B の磁場の中で単位時間に放射するエネルギー (=電子のエネルギー損失率) は

$$P(\gamma, B) = \frac{4}{3}\sigma_{\mathrm{T}} c \beta^2 \gamma^2 U_B$$

と表せる (Rybicki&Lightman, 1979). いまの場合,

$$\gamma = \gamma_{\min} = 33\ \zeta_{0.4}\ v_{\mathrm{sh},0.3}^2\ ,$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma_{\min}^2}\ (= 0.999)\ \approx 1$$

$$U_B = \frac{B^2}{8\pi} = 0.53\,\mathrm{erg\,em^{-3}}\ \eta\ \epsilon_{\mathrm{B},0.01}\ \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ v_{\mathrm{sh},0.3}^{-1}\ t_{\mathrm{rec},200}\ t_{\mathrm{rise},3}^{-2}\ \tau_{10}^{-1}$$

なので

$$\begin{aligned} P &= 1.55\times10^{-11}\,\mathrm{erg/s}\ \eta\ \zeta_{0.4}^2\ \epsilon_{\mathrm{B},0.01}\ \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ v_{\mathrm{sh},0.3}^3\ t_{\mathrm{rec},200}\ t_{\mathrm{rise},3}^{-2}\ \tau_{10}^{-1} \\ &= 9.68\times10^{-6}\,\mathrm{MeV/s}\ \eta\ \zeta_{0.4}^2\ \epsilon_{\mathrm{B},0.01}\ \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ v_{\mathrm{sh},0.3}^3\ t_{\mathrm{rec},200}\ t_{\mathrm{rise},3}^{-2}\ \tau_{10}^{-1} \end{aligned}$$

となる. よって, シンクロトロン放射の寄与だけを考えた冷却時間は

$$t_{\mathrm{cool}} \approx \frac{\gamma_{\min} m_e c^2}{P} = 2.9\times10^4\,\mathrm{min}\ \eta^{-1}\ \zeta_{0.4}^{-1}\ \epsilon_{\mathrm{B},0.01}^{-1}\ \epsilon_{0.1}^{-1}\ M_{*,1.4}^{-1}\ v_{\mathrm{sh},0.3}^{-2}\ t_{\mathrm{rec},200}^{-1}\ t_{\mathrm{rise},3}^{2}\ \tau_{10}^{1}$$