1 Accretion rate

Eddington luminosity $L_{\rm Edd}$ は以下で定義される:

$$L_{\rm Edd} = \frac{4\pi G M_* m_p c}{\sigma_{\rm T}} = 1.26 \times 10^{38}\,{\rm erg/s}\,\left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)$$

G, M_*, m_p, c, $\sigma_{\rm T}$ はそれぞれ重力定数, 中性子星の質量, 陽子の質量, 真空中の光速, トムソン散乱断面積.

Eddington accretion rate $\dot{M}_{\rm Edd}$ を以下で定義する:

$$\begin{aligned}\dot{M}_{\rm Edd} &\coloneqq L_{\rm Edd}/c^2 = 1.34 \times 10^{17}\,{\rm g/s}\,\left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)\\ &= 2.22 \times 10^{-9}\,M_\odot/{\rm yr}\,\left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)\end{aligned}$$

4U 1728–34 の fiducial value として, mass $M_* = 1.4M_\odot$(Shaposhnikov et al. 2003), accretion rate $\dot{M} = 0.1\dot{M}_{\rm Edd}$(Galloway et al. 2008) を, それぞれ採用する. すなわち,

$$\dot{M} = \epsilon \dot{M}_{\rm Edd}(1.4M_\odot) = 1.96 \times 10^{16}\,{\rm g/s}\;\epsilon_{0.1}\;M_{*,1.4}$$

2 Shock の形成

X–ray burst の duration time $t_X \approx 10\,{\rm s}$ の間に飛んでいったモノが shock ejecta を形成すると仮定する. Ejecta の運動する速さを $v_{\rm sh} = 0.3c$ とすると, shock の厚み $l_{\rm sh}$ は

$$l_{\rm sh} \approx v_{\rm sh} t_X = 9 \times 10^{10}\,{\rm cm}\;v_{\rm sh,0.3}\;t_{\rm X,10}$$

shock ejecta の質量 $M_{\rm ej}$ は, recurrence time $t_{\rm rec} \approx 200\,{\rm min}$ の間に降着する質量の η 倍に等しいとすると

$$M_{\rm ej} \approx \eta \dot{M} t_{\rm rec} = 2.3 \times 10^{20}\,{\rm g}\;\eta\;\epsilon_{0.1}\;M_{*,1.4}\;t_{\rm rec,200}$$

電波が立ち上がるのは, X–ray burst が起きてから $t_{\rm rise} \approx 3\,{\rm min}$ 後である. shock が形成される位置 $r_{\rm sh}$ は

$$r_{\rm sh} \approx v_{\rm sh} t_{\rm rise} = 1.6 \times 10^{12}\,{\rm cm}\;v_{\rm sh,0.3}\;t_{\rm rise,3} = 0.11\,{\rm AU}\;v_{\rm sh,0.3}\;t_{\rm rise,3}$$

3 磁場の強さ

collisionless–shock はそのエネルギーの一部を磁場へ渡す. 変換効率を ϵ_B とすると, エネルギー密度について

$$\epsilon_{\rm B} \frac{M_{\rm ej} v_{\rm sh}^2/2}{4\pi r_{\rm sh}^2 l_{\rm sh}} = \frac{B^2}{8\pi}$$

B について解くと

$$B^2 = \frac{\epsilon_{\rm B} M_{\rm ej} v_{\rm sh}^2}{r_{\rm sh}^2 l_{\rm sh}} = 8.1 \times 10^2\,{\rm erg\,cm^{-3}}\;\eta\;\epsilon_{0.1}\;\epsilon_{\rm B,0.01}\;M_{*,1.4}\;v_{\rm sh,0.3}^{-1}\;t_{\rm rec,200}\;t_{\rm rise,3}^{-1}\;t_{\rm X,10}^{-1}$$

$$B \approx 28\,{\rm G}\;\sqrt{\eta}\;\epsilon_{0.1}^{1/2}\;\epsilon_{\rm B,0.01}^{1/2}\;M_{*,1.4}^{1/2}\;v_{\rm sh,0.3}^{-1/2}\;t_{\rm rec,200}^{1/2}\;t_{\rm rise,3}^{-1/2}\;t_{\rm X,10}^{-1/2}$$

$\epsilon_{\rm B} = 0.01$ は Kashiyama et al.(2018) から引用.

4　周辺ガスの密度

電波は $\tau \approx 10\,\mathrm{min}$ の時間で減衰する．この間に shock は $4\pi r_{\mathrm{sh}}^2 v_{\mathrm{sh}}\tau$ の領域を掃く．掃過領域にあるガス (一様密度 ρ_{amb} を仮定) の全質量が M_{ej} に等しいとすると

$$4\pi r_{\mathrm{sh}}^2 \rho_{\mathrm{amb}} v_{\mathrm{sh}} \tau = M_{\mathrm{ej}}$$

を満たす．ρ_{amb} について解くと

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{amb}} &= \frac{M_{\mathrm{ej}}}{4\pi r_{\mathrm{sh}}^2 v_{\mathrm{sh}}\tau} \\ &= 1.3\times 10^{-18}\,\mathrm{g\,cm^{-3}}\epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ v_{\mathrm{sh},0.3}^{-3}\ t_{\mathrm{rec},200}\ t_{\mathrm{rise},3}^{-2}\ \tau_{10}^{-1}\end{aligned}$$

ガスがすべて水素で構成されているとすると, 電子数密度は

$$n_{\mathrm{amb,e}} = \rho_{\mathrm{amb}}/(1\cdot m_u) = 7\times 10^5\,\mathrm{cm^{-3}}\ \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ v_{\mathrm{sh},0.3}^{-3}\ t_{\mathrm{rec},200}\ t_{\mathrm{rise},3}^{-2}\ \tau_{10}^{-1}$$

5　電子の最大 Lorentz factor

電子の最大 Lorentz factor$\gamma_{\max}$ は

$$\left(\frac{9\pi e\beta^2}{10\sigma_{\mathrm{T}}B}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{9\pi e}{10\sigma_{\mathrm{T}}B}\right)^{1/2}\ (\beta\to 1)$$

で与えられる (Kashiyama et al.(2018))．値を代入すると

$$\gamma_{\max} = 8.5\times 10^6\ B_{28}^{-1/2}$$

6　Power–law の比例係数

電子分布は power law に従うとする．

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\gamma} = C\gamma^{-p}\quad (\gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max})$$

shock はそのエネルギーの一部を周囲の電子へ受け渡す．効率を ϵ_{e} とおくと

$$\begin{aligned}\epsilon_{\mathrm{e}}\frac{M_{\mathrm{ej}}}{2}v_{\mathrm{sh}}^2 &= \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} \gamma m_{\mathrm{e}}c^2 \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\gamma}\,\mathrm{d}\gamma \\ &= m_{\mathrm{e}}c^2\frac{C}{2-p}\left[\gamma^{2-p}\right]_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} \\ &\approx m_{\mathrm{e}}c^2\frac{C}{p-2}\gamma_{\min}^{2-p}\quad (p>2,\ \gamma_{\max}\gg\gamma_{\min})\end{aligned}$$

となる．C について解くと

$$\begin{aligned}C &= (p-2)\gamma_{\min}^{p-2}\frac{\epsilon_e M_{\mathrm{ej}} v_{\mathrm{sh}}^2/2}{m_e c^2} \\ &= 1.1\times 10^{46}\ (p-2)\gamma_{\min}^{p-2}\epsilon_e\end{aligned}$$

7　放射電子の最小エネルギー

プラズマガスは shock からエネルギーを受け取り熱化される．電子の熱エネルギー kT_e が, $v_{\rm sh}$ で走る電子の運動エネルギーに等しいと仮定すると

$$kT_e = \frac{m_e}{2} v_{\rm sh}^2 = 0.045 m_e c^2 \ v_{\rm sh,0.3}^2$$

プラズマが電子と陽子のみから構成されていると仮定する．陽子の熱化についても電子と同様に考えると, 各々の Lorentz factor はいずれも

$$\gamma_{\rm th} = \frac{kT_i}{m_i c^2} \approx 0.045 \quad (i = \mathrm{e, \, p})$$

となる．

熱化された陽子と電子とが互いにエネルギーをやりとりできるのであれば, 電子が陽子の熱エネルギーの一部を受け取れるはずである．電子が受け取る, 陽子の熱エネルギーの割合を ζ とする．電子の Lorentz factor は, もともとの熱エネルギーに陽子からもらった分が加わると考えて

$$\begin{aligned} \gamma_{\rm min} &= \frac{1}{m_e c^2}(kT_e + \zeta kT_p) \\ &\approx \zeta \frac{kT_p}{m_e c^2} \ (\text{ignoring } kT_e) \\ &= \zeta \frac{m_p}{2m_e} \frac{v_{\rm sh}^2}{c^2} \\ &= 33 \ \zeta_{0.4} \ v_{\rm sh,0.3}^2 \end{aligned}$$

となる．$\zeta_{=}0.4$ は Kashiyama et al.(2018) の値を引用．

8　シンクロトロン放射

γ_e の Lorenz factor をもつ電子からのシンクロトロン放射を考える．放射の典型的な振動数 ν_e は

$$\nu_e = \gamma_e^3 \nu_B \sin\alpha = \frac{\gamma_e^2 eB}{2\pi m_e c} \sin\alpha$$

である (Rybicki & Lightman (1979))．ここで ν_B はサイクロトロン振動数, α はピッチ角である．磁場がランダムな方向を向いていると仮定し, $\sin\alpha$ の平均をとると

$$\int_0^{\pi/2} \sin\alpha \, \mathrm{d}\alpha = 1$$

ゆえ

$$\nu_e = \frac{\gamma_e^2 eB}{2\pi m_e c}$$

$\gamma_e = \gamma_{\rm min}$ として値を代入すると

$$\nu_e \approx 87 \, \mathrm{GHz} \ \sqrt{\eta} \ \epsilon_{0.1}^{1/2} \ \epsilon_{\rm B,0.01}^{1/2} \ \zeta_{0.4}^2 \ M_{*,1.4}^{1/2} \ v_{\rm sh,0.3}^{3/2} \ t_{\rm rec,200}^{1/2}$$

シンクロトロン放射した電子はその分エネルギーを失う．ある Lorentz factorγ をもつ電子がエネルギー密度 U_B の磁場の中で単位時間に放射するエネルギー (=電子のエネルギー損失率) は

$$P(\gamma, B) = \frac{4}{3}\sigma_{\rm T} c \beta^2 \gamma^2 U_B$$

と表せる (Rybicki&Lightman, 1979)．いまの場合,

$$\gamma = \gamma_{\rm min} = 33\ \zeta_{0.4}\ v_{\rm sh,0.3}^2\ ,$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma_{\rm min}^2}\ (= 0.999)\ \approx 1$$

$$U_B = \frac{B^2}{8\pi} = 32\,{\rm erg\,em^{-3}}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ \epsilon_{\rm B,0.01}\ M_{*,1.4}\ v_{\rm sh,0.3}^{-1}\ t_{\rm rec,200}\ t_{\rm rise,3}^{-1}\ t_{\rm X,10}^{-1}$$

なので

$$\begin{aligned} P &= 9.3\times10^{-10}\,{\rm erg/s}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ \epsilon_{\rm B,0.01}\ \zeta_{0.4}^2 M_{*,1.4}\ v_{\rm sh,0.3}^3\ t_{\rm rec,200}\ t_{\rm rise,3}^{-1}\ t_{\rm X,10}^{-1} \\ &= 0.58\,{\rm keV/s}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ \epsilon_{\rm B,0.01}\ \zeta_{0.4}^2 M_{*,1.4}\ v_{\rm sh,0.3}^3\ t_{\rm rec,200}\ t_{\rm rise,3}^{-1}\ t_{\rm X,10}^{-1} \end{aligned}$$

となる．よって, シンクロトロン放射の寄与だけを考えた冷却時間は

$$t_{\rm cool} \approx \frac{\gamma_{\rm min} m_e c^2}{P} \approx 484\,{\rm min}\ \eta^{-1}\ \epsilon_{\rm B,0.01}^{-1}\ \epsilon_{0.1}^{-1}\ \zeta_{0.4}^{-1}\ M_{*,1.4}^{-1}\ v_{\rm sh,0.3}^{-2}\ t_{\rm rec,200}^{-1}\ t_{\rm rise,3}\ t_{\rm X,10}$$

上で求めた P は 1 個の電子による放射パワーである．shock で掃かれたガスに含まれる電子がすべて $\gamma_{\rm min}$ のシンクロトロン放射しているならば, 電子の総数 N_e は

$$N_e \approx \frac{M_{\rm ej}}{m_u} = 1.4\times10^{44}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ t_{\rm rec,200}$$

となる．

$$P_{\rm tot} = N_e P = 1.3\times10^{35}\,{\rm erg/s}\ \eta^2\ \epsilon_{0.1}^2\ \epsilon_{\rm B,0.01}\ \zeta_{0.4}^2\ M_{*,1.4}^2\ v_{\rm sh,0.3}^3\ t_{\rm rec,200}^2\ t_{\rm rise,3}^{-1}\ t_{\rm X,10}^{-1}$$

8.1 Power–law に従う電子分布からのシンクロトロン放射

$$P_\nu = \frac{\sqrt{3} e^3 C B}{m_e c^2 (p+1)} \Gamma\left(\frac{p}{4} + \frac{19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{p}{4} - \frac{1}{12}\right) \left(\frac{2\pi\nu m_e c}{3eB}\right)^{-(p-1)/2}$$