

1 Accretion rate

Eddington luminosity L_{Edd} は以下で定義される:

$$L_{\text{Edd}} = \frac{4\pi G M_* m_p c}{\sigma_T} = 1.26 \times 10^{38} \text{ erg/s} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right)$$

G , M_* , m_p , c , σ_T はそれぞれ重力定数, 中性子星の質量, 陽子の質量, 真空中の光速, トムソン散乱断面積.

Eddington accretion rate \dot{M}_{Edd} を以下で定義する:

$$\begin{aligned} \dot{M}_{\text{Edd}} &:= L_{\text{Edd}}/c^2 = 1.34 \times 10^{17} \text{ g/s} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right) \\ &= 2.22 \times 10^{-9} M_\odot/\text{yr} \left(\frac{M_*}{M_\odot} \right) \end{aligned}$$

4U 1728-34 の fiducial value として, mass $M_* = 1.4M_\odot$ (Shaposhnikov et al. 2003), accretion rate $\dot{M} = 0.1\dot{M}_{\text{Edd}}$ (Galloway et al. 2008) を, それぞれ採用する. すなわち,

$$\dot{M} = \epsilon \dot{M}_{\text{Edd}}(1.4M_\odot) = 1.96 \times 10^{16} \text{ g/s } \epsilon_{0.1} M_{*,1.4}$$

2 Shock の形成

X-ray burst の duration time $t_X \approx 10 \text{ s}$ の間に飛んでいったモノが shock ejecta を形成すると仮定する. Ejecta の運動する速さを $v_{\text{sh}} = 0.3c$ とすると, shock の厚み l_{sh} は

$$l_{\text{sh}} \approx v_{\text{sh}} t_X = 9 \times 10^{10} \text{ cm } v_{\text{sh},0.3} t_{X,10}$$

shock ejecta の質量 M_{ej} は, recurrence time $t_{\text{rec}} \approx 200 \text{ min}$ の間に降着する質量の η 倍に等しいとすると

$$M_{\text{ej}} \approx \eta \dot{M} t_{\text{rec}} = 2.3 \times 10^{20} \text{ g } \eta \epsilon_{0.1} M_{*,1.4} t_{\text{rec},200}$$

電波が立ち上がるのは, X-ray burst が起きてから $t_{\text{rise}} \approx 3 \text{ min}$ 後である. shock が形成される位置 r_{sh} は

$$r_{\text{sh}} \approx v_{\text{sh}} t_{\text{rise}} = 1.6 \times 10^{12} \text{ cm } v_{\text{sh},0.3} t_{\text{rise},3} = 0.11 \text{ AU } v_{\text{sh},0.3} t_{\text{rise},3}$$

3 磁場の強さ

collisionless-shock はそのエネルギーの一部を磁場へ渡す. 変換効率を ϵ_B とすると, エネルギー密度について

$$\epsilon_B \frac{M_{\text{ej}} v_{\text{sh}}^2 / 2}{4\pi r_{\text{sh}}^2 l_{\text{sh}}} = \frac{B^2}{8\pi}$$

B について解くと

$$B^2 = \frac{\epsilon_B M_{\text{ej}} v_{\text{sh}}^2}{r_{\text{sh}}^2 l_{\text{sh}}} = 8.1 \times 10^2 \text{ erg cm}^{-3} \eta \epsilon_{0.1} \epsilon_{B,0.01} M_{*,1.4} v_{\text{sh},0.3}^{-1} t_{\text{rec},200} t_{\text{rise},3}^{-1} t_{X,10}^{-1}$$

$$B \approx 28 \text{ G } \sqrt{\eta} \epsilon_{0.1}^{1/2} \epsilon_{B,0.01}^{1/2} M_{*,1.4}^{1/2} v_{\text{sh},0.3}^{-1/2} t_{\text{rec},200}^{1/2} t_{\text{rise},3}^{-1/2} t_{X,10}^{-1/2}$$

$\epsilon_B = 0.01$ は Kashiyama et al.(2018) から引用.

4 周辺ガスの密度

電波は $\tau \approx 10 \text{ min}$ の時間で減衰する．この間に shock は $4\pi r_{\text{sh}}^2 v_{\text{sh}} \tau$ の領域を掃く．掃過領域にあるガス（一様密度 ρ_{amb} を仮定）の全質量が M_{ej} に等しいとすると

$$4\pi r_{\text{sh}}^2 \rho_{\text{amb}} v_{\text{sh}} \tau = M_{\text{ej}}$$

を満たす． ρ_{amb} について解くと

$$\begin{aligned} \rho_{\text{amb}} &= \frac{M_{\text{ej}}}{4\pi r_{\text{sh}}^2 v_{\text{sh}} \tau} \\ &= 1.3 \times 10^{-18} \text{ g cm}^{-3} \epsilon_{0.1} M_{*,1.4} v_{\text{sh},0.3}^{-3} t_{\text{rec},200} t_{\text{rise},3}^{-2} \tau_{10}^{-1} \end{aligned}$$

ガスがすべて水素で構成されているとすると，電子数密度は

$$n_{\text{amb,e}} = \rho_{\text{amb}} / (1 \cdot m_u) = 7 \times 10^5 \text{ cm}^{-3} \epsilon_{0.1} M_{*,1.4} v_{\text{sh},0.3}^{-3} t_{\text{rec},200} t_{\text{rise},3}^{-2} \tau_{10}^{-1}$$

5 電子の Lorentz factor

5.1 Maximum Lorentz factor

電子の最大 Lorentz factor γ_{max} は

$$\left(\frac{9\pi e \beta^2}{10\sigma_{\text{T}} B} \right)^{1/2} \approx \left(\frac{9\pi e}{10\sigma_{\text{T}} B} \right)^{1/2} (\beta \rightarrow 1)$$

で与えられる (Kashiyama et al.(2018)). 値を代入すると

$$\gamma_{\text{max}} = 8.5 \times 10^6 B_{28}^{-1/2}$$

5.2 Minimum Lorentz factor

プラズマガスは shock からエネルギーを受け取り熱化される．電子の熱エネルギー kT_e が, v_{sh} で走る電子の運動エネルギーに等しいと仮定すると

$$kT_e = \frac{m_e}{2} v_{\text{sh}}^2 = 0.045 m_e c^2 v_{\text{sh},0.3}^2$$

プラズマが電子と陽子のみから構成されていると仮定する．陽子の熱化についても電子と同様に考えると，各々の Lorentz factor はいずれも

$$\gamma_{\text{th}} = \frac{kT_i}{m_i c^2} \approx 0.045 \quad (i = \text{e, p})$$

となる．

熱化された陽子と電子とが互いにエネルギーをやりとりできるのであれば、電子が陽子の熱エネルギーの一部を受け取れるはずである。電子が受け取る、陽子の熱エネルギーの割合を ζ とする。電子の Lorentz factor は、もともとの熱エネルギーに陽子からもらった分が加わると考えて

$$\begin{aligned}\gamma_{\min} &= \frac{1}{m_e c^2} (kT_e + \zeta kT_p) \\ &\approx \zeta \frac{kT_p}{m_e c^2} \text{ (ignoring } kT_e) \\ &= \zeta \frac{m_p}{2m_e} \frac{v_{\text{sh}}^2}{c^2} \\ &= 33 \zeta_{0.4} v_{\text{sh},0.3}^2\end{aligned}$$

となる。 $\zeta = 0.4$ は Kashiyama et al.(2018) の値を引用。

6 シンクロトロン放射

γ_e の Lorentz factor をもつ電子からのシンクロトロン放射を考える。放射の典型的な振動数 ν_e は

$$\nu_e = \gamma_e^3 \nu_B \sin \alpha = \frac{\gamma_e^2 e B}{2\pi m_e c} \sin \alpha$$

である (Rybicki & Lightman (1979)). ここで ν_B はサイクロトロン振動数, α はピッチ角である。磁場がランダムな方向を向いていると仮定し, $\sin \alpha$ の平均をとると

$$\int_0^{\pi/2} \sin \alpha \, d\alpha = 1$$

ゆえ

$$\nu_e = \frac{\gamma_e^2 e B}{2\pi m_e c}$$

$\gamma_e = \gamma_{\min}$ として値を代入すると

$$\nu_e \approx 87 \text{ GHz } \sqrt{\eta} \, \epsilon_{0.1}^{1/2} \, \epsilon_{\text{B},0.01}^{1/2} \, \zeta_{0.4}^2 \, M_{*,1.4}^{1/2} \, v_{\text{sh},0.3}^{3/2} \, t_{\text{rec},200}^{1/2}$$

シンクロトロン放射した電子はその分エネルギーを失う。ある Lorentz factor γ をもつ電子がエネルギー密度 U_B の磁場の中で単位時間に放射するエネルギー (=電子のエネルギー損失率) は

$$P(\gamma, B) = \frac{4}{3} \sigma_T c \beta^2 \gamma^2 U_B$$

と表せる (Rybicki&Lightman, 1979). いまの場合,

$$\gamma = \gamma_{\min} = 33 \zeta_{0.4} v_{\text{sh},0.3}^2,$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma_{\min}^2} (= 0.999) \approx 1$$

$$U_B = \frac{B^2}{8\pi} = 32 \text{ erg cm}^{-3} \, \eta \, \epsilon_{0.1} \, \epsilon_{\text{B},0.01} \, M_{*,1.4} \, v_{\text{sh},0.3}^{-1} \, t_{\text{rec},200} \, t_{\text{rise},3}^{-1} \, t_{\text{X},10}^{-1}$$

なので

$$\begin{aligned}P &= 9.3 \times 10^{-10} \text{ erg/s } \eta \, \epsilon_{0.1} \, \epsilon_{\text{B},0.01} \, \zeta_{0.4}^2 \, M_{*,1.4} \, v_{\text{sh},0.3}^3 \, t_{\text{rec},200} \, t_{\text{rise},3}^{-1} \, t_{\text{X},10}^{-1} \\ &= 0.58 \text{ keV/s } \eta \, \epsilon_{0.1} \, \epsilon_{\text{B},0.01} \, \zeta_{0.4}^2 \, M_{*,1.4} \, v_{\text{sh},0.3}^3 \, t_{\text{rec},200} \, t_{\text{rise},3}^{-1} \, t_{\text{X},10}^{-1}\end{aligned}$$

となる。よって、シンクロトロン放射の寄与だけを考えた冷却時間は

$$t_{\text{cool}} \approx \frac{\gamma_{\text{min}} m_e c^2}{P} \approx 484 \text{ min } \eta^{-1} \epsilon_{\text{B},0.01}^{-1} \epsilon_{0.1}^{-1} \zeta_{0.4}^{-1} M_{*,1.4}^{-1} v_{\text{sh},0.3}^{-2} t_{\text{rec},200}^{-1} t_{\text{rise},3} t_{\text{X},10}$$

上で求めた P は 1 個の電子による放射パワーである。shock で掃かれたガスに含まれる電子がすべて γ_{min} のシンクロトロン放射しているならば、電子の総数 N_e は

$$N_e \approx \frac{M_{\text{ej}}}{m_u} = 1.4 \times 10^{44} \eta \epsilon_{0.1} M_{*,1.4} t_{\text{rec},200}$$

となる。

$$P_{\text{tot}} = N_e P = 1.3 \times 10^{35} \text{ erg/s } \eta^2 \epsilon_{0.1}^2 \epsilon_{\text{B},0.01} \zeta_{0.4}^2 M_{*,1.4}^2 v_{\text{sh},0.3}^3 t_{\text{rec},200}^2 t_{\text{rise},3}^{-1} t_{\text{X},10}^{-1}$$

7 Power-law に従う電子分布からのシンクロトロン放射

7.1 比例係数の決定

電子分布は power law に従うとする。

$$\frac{dN(\gamma)}{d\gamma} = N_0 \gamma^{-p} \quad (\gamma_{\text{min}} < \gamma < \gamma_{\text{max}}) \quad (1)$$

ここで N_0 は数密度の次元をもつ定数である。

shock はそのエネルギーの一部を周囲の電子へ受け渡す。効率を ϵ_e とおくと

$$\begin{aligned} \epsilon_e \frac{M_{\text{ej}} v_{\text{sh}}^2 / 2}{4\pi r_{\text{sh}}^2 l_{\text{sh}}} &= \int_{\gamma_{\text{min}}}^{\gamma_{\text{max}}} \gamma m_e c^2 \frac{dN}{d\gamma} d\gamma \\ &= m_e c^2 \frac{N_0}{2-p} [\gamma^{2-p}]_{\gamma_{\text{min}}}^{\gamma_{\text{max}}} \\ &\approx m_e c^2 \frac{N_0}{p-2} \gamma_{\text{min}}^{2-p} \quad (p > 2, \gamma_{\text{max}} \gg \gamma_{\text{min}}) \end{aligned}$$

が成り立つ。 N_0 について解くと

$$\begin{aligned} N_0 &= (p-2) \gamma_{\text{min}}^{p-2} \frac{\epsilon_e M_{\text{ej}} v_{\text{sh}}^2 / 2}{4\pi r_{\text{sh}}^2 l_{\text{sh}} m_e c^2} \\ &= 1.1 \times 10^9 \text{ cm}^{-3} \epsilon_e (p-2) \gamma_{\text{min}}^{p-2} \end{aligned}$$

7.2 Optically thin 領域からの放射

分布 (1) に従うシンクロトロン電子の power は以下で与えられる (Rybicki & Lightman, 1979):

$$\begin{aligned} P_\nu &= \frac{\sqrt{3} e^3 N_0 B}{m_e c^2 (p+1)} \Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right) \left(\frac{2\pi \nu m_e c}{3eB}\right)^{-(p-1)/2} \\ &= \frac{\sqrt{3} N_0 r_e e B}{p+1} \left(\frac{2\pi (m_e c^2)(\nu/c)}{3eB}\right)^{-(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right) \end{aligned}$$

ここで、 $r_e = e^2/(m_e c^2)$ は古典電子半径。

$p = 2.5$ の場合で具体的に計算すると,

$$P_\nu = 4.2 \times 10^{-14} \text{ erg cm}^{-3} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} B_{28}^{7/4} \nu_{100}^{-3/4} \left(\frac{N_0}{1.1 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}} \right)$$

次に, Intensity I_ν は

$$I_\nu \approx \frac{P_\nu l_{\text{sh}}}{4\pi} = \frac{\sqrt{3} N_0 r_e e B l_{\text{sh}}}{4\pi(p+1)} \left(\frac{2\pi(m_e c^2)(\nu/c)}{3eB} \right)^{-(p-1)/2} \Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right)$$

と表せる. $p = 2.5$ の場合で具体的に計算すると,

$$I_\nu = 3.0 \times 10^{-4} \text{ erg cm}^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ Hz}^{-1} \text{ str}^{-1} B_{28}^{7/4} \nu_{100}^{-3/4} \left(\frac{l_{\text{sh}}}{9 \times 10^{10} \text{ cm}} \right)^{4/13} \left(\frac{N_0}{1.1 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}} \right)$$

7.3 Optically thick 領域からの放射

エネルギー E あたりの電子の密度分布 $N(E)$ は以下に従うと仮定する.

$$\frac{dN(E)}{dE} = \tilde{N}_0 E^{-p}$$

$\gamma = E/(m_e c^2)$ ゆえ, \tilde{N}_0 と N_0 とは以下の関係にある:

$$\tilde{N}_0 = (m_e c^2)^{p-1} N_0 \quad (2)$$

Synchrotron self-absorption(SSA) の吸収係数は以下で与えられる (Rybicki & Lightman, 1979).

$$\begin{aligned} \alpha_\nu &= \frac{\sqrt{3}e^3}{8\pi m_e} \left(\frac{3e}{2\pi m_e^3 c^5} \right)^{p/2} \tilde{N}_0 B^{(p+2)/2} \Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right) \nu^{-(p+4)/2} \\ &= \frac{\sqrt{3}\tilde{N}_0 r_e e B}{8\pi} \left(\frac{c}{\nu} \right)^2 \left(\frac{3}{2\pi} \frac{eB}{(m_e c^2)^3} \frac{c}{\nu} \right)^{p/2} \Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \frac{N_0 r_e e B}{m_e c^2 (\nu/c)^2} \left(\frac{3eB}{2\pi(m_e c^2)(\nu/c)} \right)^{p/2} \Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right) \end{aligned}$$

最後の等式で (2) を用いた. $p = 2.5$ として計算すると

$$\alpha_\nu = 4.4 \times 10^{-7} \text{ cm}^{-1} B_{28}^{9/4} \nu_{100}^{-13/4}$$

源泉関数は

$$\begin{aligned} S_\nu &:= \frac{P_\nu}{4\pi\alpha_\nu} = \frac{2\lambda^{-2} E_{\text{res}}}{p+1} \left(\frac{2\pi E_{\text{res}} \lambda^{-1}}{3f} \right)^{1/2} G(p) \\ &= \left(\frac{\nu}{c} \right)^{5/2} \frac{2m_e c^2}{p+1} \left(\frac{2\pi m_e c^2}{3eB} \right)^{1/2} G(p) \end{aligned}$$

となる. ただし

$$G(p) = \frac{\Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)}$$

である. $p = 2.5$ として計算すると

$$S_\nu = 2.9 \times 10^{-4} \text{ erg cm}^{-2} B_{28}^{-1/2} \nu_{100}^{5/2}$$

天体までの距離 $d = 4.5 \text{ kpc}$ とすると, 観測される flux F_ν は

$$F_\nu \approx S_\nu \left(\frac{r_{\text{sh}}^2}{d^2} \right) \approx 400 \text{ mJy } B_{28}^{-1/2} \nu_{100}^{5/2} d_{4.5}^{-2} \left(\frac{r_{\text{sh}}}{1.6 \times 10^{12} \text{ cm}} \right)^2$$

となる.

7.4 Optical depth の評価

Optical depth τ_ν は

$$\tau_\nu := \alpha_\nu l_{\text{sh}} = \frac{\sqrt{3}(m_e c^2)^{p-1} N_0 r_e e B l_{\text{sh}}}{8\pi(\nu/c)^2} \left(\frac{3eB}{2\pi(m_e c^2)^3(\nu/c)} \right)^{p/2} \Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)$$

とかける. $\tau = 1$ のときの周波数 ν_{SSA} を求めると

$$\nu_{\text{SSA}}/c = \left(\frac{\sqrt{3}N_0 r_e e B l_{\text{sh}}}{8\pi m_e c^2} \Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right) \right)^{2/(p+4)} \left(\frac{3eB}{2\pi m_e c^2} \right)^{p/(p+4)}$$

である. $p = 2.5$ として具体的に計算すると

$$\nu_{\text{SSA}} = 140 \text{ GHz } B_{28}^{9/13} \left(\frac{l_{\text{sh}}}{9 \times 10^{10} \text{ cm}} \right)^{4/13} \left(\frac{N_0}{1.1 \times 10^9 \text{ cm}^{-3}} \right)^{4/13}$$