1 Accretion rate

Eddington luminosity $L_{\rm Edd}$ は以下で定義される:

$$L_{\rm Edd} = \frac{4\pi G M_* m_p c}{\sigma_{\rm T}} = 1.26 \times 10^{38}\,{\rm erg/s}\ \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)$$

G, M_*, m_p, c, $\sigma_{\rm T}$ はそれぞれ重力定数, 中性子星の質量, 陽子の質量, 真空中の光速, トムソン散乱断面積.

Eddington accretion rate $\dot{M}_{\rm Edd}$ を以下で定義する:

$$\begin{aligned}\dot{M}_{\rm Edd} &\coloneqq L_{\rm Edd}/c^2 = 1.34 \times 10^{17}\,{\rm g/s}\ \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right) \\ &= 2.22 \times 10^{-9}\ M_\odot/{\rm yr}\ \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)\end{aligned}$$

4U 1728–34 の fiducial value として, mass $M_* = 1.4 M_\odot$(Shaposhnikov et al. 2003), accretion rate $\dot{M} = 0.1\dot{M}_{\rm Edd}$(Galloway et al. 2008) を, それぞれ採用する. すなわち,

$$\dot{M} = \epsilon \dot{M}_{\rm Edd}(1.4M_\odot) = 1.96 \times 10^{16}\,{\rm g/s}\ \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}$$

2 Shock の形成

X–ray burst の duration time $t_X \approx 10\,{\rm s}$ の間に飛んでいったモノが shock ejecta を形成すると仮定する. Ejecta の運動する速さを $v_{\rm sh} = 0.3c$ とすると, shock の厚み $l_{\rm sh}$ は

$$l_{\rm sh} \approx v_{\rm sh} t_X = 9 \times 10^{10}\,{\rm cm}\ v_{{\rm sh},0.3}\ t_{{\rm X},10}$$

shock ejecta の質量 $M_{\rm ej}$ は, recurrence time $t_{\rm rec} \approx 200\,{\rm min}$ の間に降着する質量の η 倍に等しいとすると

$$M_{\rm ej} \approx \eta \dot{M} t_{\rm rec} = 2.3 \times 10^{20}\,{\rm g}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ t_{{\rm rec},200}$$

電波が立ち上がるのは, X–ray burst が起きてから $t_{\rm rise} \approx 3\,{\rm min}$ 後である. shock が形成される位置 $r_{\rm sh}$ は

$$r_{\rm sh} \approx v_{\rm sh} t_{\rm rise} = 1.6 \times 10^{12}\,{\rm cm}\ v_{{\rm sh},0.3}\ t_{{\rm rise},3} = 0.11\,{\rm AU}\ v_{{\rm sh},0.3}\ t_{{\rm rise},3}$$

3 磁場の強さ

collisionless–shock はそのエネルギーの一部を磁場へ渡す. 変換効率を ϵ_B とすると, エネルギー密度について

$$\epsilon_{\rm B} \frac{M_{\rm ej} v_{\rm sh}^2/2}{4\pi r_{\rm sh}^2 l_{\rm sh}} = \frac{B^2}{8\pi}$$

B について解くと

$$B^2 = \frac{\epsilon_{\rm B} M_{\rm ej} v_{\rm sh}^2}{r_{\rm sh}^2 l_{\rm sh}} = 8.1 \times 10^2\,{\rm erg\,cm^{-3}}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ \epsilon_{{\rm B},0.01}\ M_{*,1.4}\ v_{{\rm sh},0.3}^{-1}\ t_{{\rm rec},200}\ t_{{\rm rise},3}^{-1}\ t_{{\rm X},10}^{-1}$$

$$B \approx 28\,{\rm G}\ \sqrt{\eta}\ \epsilon_{0.1}^{1/2}\ \epsilon_{{\rm B},0.01}^{1/2}\ M_{*,1.4}^{1/2}\ v_{{\rm sh},0.3}^{-1/2}\ t_{{\rm rec},200}^{1/2}\ t_{{\rm rise},3}^{-1/2}\ t_{{\rm X},10}^{-1/2}$$

$\epsilon_{\rm B} = 0.01$ は Kashiyama et al.(2018) から引用.

4 周辺ガスの密度

電波は $\tau \approx 10\,\mathrm{min}$ の時間で減衰する．この間に shock は $4\pi r_{\mathrm{sh}}^2 v_{\mathrm{sh}} \tau$ の領域を掃く．掃過領域にあるガス (一様密度 ρ_{amb} を仮定) の全質量が M_{ej} に等しいとすると

$$4\pi r_{\mathrm{sh}}^2 \rho_{\mathrm{amb}} v_{\mathrm{sh}} \tau = M_{\mathrm{ej}}$$

を満たす．ρ_{amb} について解くと

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{amb}} &= \frac{M_{\mathrm{ej}}}{4\pi r_{\mathrm{sh}}^2 v_{\mathrm{sh}} \tau} \\ &= 1.3 \times 10^{-18}\,\mathrm{g\,cm^{-3}} \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ v_{\mathrm{sh},0.3}^{-3}\ t_{\mathrm{rec},200}\ t_{\mathrm{rise},3}^{-2}\ \tau_{10}^{-1}\end{aligned}$$

ガスがすべて水素で構成されているとすると, 電子数密度は

$$n_{\mathrm{amb,e}} = \rho_{\mathrm{amb}}/(1 \cdot m_u) = 7 \times 10^5\,\mathrm{cm^{-3}}\ \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ v_{\mathrm{sh},0.3}^{-3}\ t_{\mathrm{rec},200}\ t_{\mathrm{rise},3}^{-2}\ \tau_{10}^{-1}$$

5 電子の Lorentz factor

5.1 Maximum Lorentz factor

電子の最大 Lorentz factor$\gamma_{\max}$ は

$$\left(\frac{9\pi e \beta^2}{10\sigma_{\mathrm{T}} B}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{9\pi e}{10\sigma_{\mathrm{T}} B}\right)^{1/2}\ (\beta \to 1)$$

で与えられる (Kashiyama et al.(2018))．値を代入すると

$$\gamma_{\max} = 8.5 \times 10^6\ B_{28}^{-1/2}$$

5.2 Minimum Lorentz factor

プラズマガスは shock からエネルギーを受け取り熱化される．電子の熱エネルギー kT_e が, v_{sh} で走る電子の運動エネルギーに等しいと仮定すると

$$kT_e = \frac{m_e}{2} v_{\mathrm{sh}}^2 = 0.045 m_e c^2\ v_{\mathrm{sh},0.3}^2$$

プラズマが電子と陽子のみから構成されていると仮定する．陽子の熱化についても電子と同様に考えると, 各々の Lorentz factor はいずれも

$$\gamma_{\mathrm{th}} = \frac{kT_i}{m_i c^2} \approx 0.045 \quad (i = \mathrm{e},\ \mathrm{p})$$

となる．

熱化された陽子と電子とが互いにエネルギーをやりとりできるのであれば, 電子が陽子の熱エネルギーの一部を受け取れるはずである. 電子が受け取る, 陽子の熱エネルギーの割合を ζ とする. 電子の Lorentz factor は, もともとの熱エネルギーに陽子からもらった分が加わると考えて

$$\begin{aligned}\gamma_{\rm min} &= \frac{1}{m_e c^2}(kT_e + \zeta k T_p) \\ &\approx \zeta \frac{kT_p}{m_e c^2} \ (\text{ignoring}\, kT_e) \\ &= \zeta \frac{m_p}{2m_e}\frac{v_{\rm sh}^2}{c^2} \\ &= 33\ \zeta_{0.4}\ v_{\rm sh,0.3}^2\end{aligned}$$

となる. $\zeta = 0.4$ は Kashiyama et al.(2018) の値を引用.

6 シンクロトロン放射

γ_e の Lorenz factor をもつ電子からのシンクロトロン放射を考える. 放射の典型的な振動数 ν_e は

$$\nu_e = \gamma_e^3 \nu_B \sin\alpha = \frac{\gamma_e^2 eB}{2\pi m_e c}\sin\alpha$$

である (Rybicki & Lightman (1979)). ここで ν_B はサイクロトロン振動数, α はピッチ角である. 磁場がランダムな方向を向いていると仮定し, $\sin\alpha$ の平均をとると

$$\int_0^{\pi/2} \sin\alpha\, \mathrm{d}\alpha = 1$$

ゆえ

$$\nu_e = \frac{\gamma_e^2 eB}{2\pi m_e c}$$

$\gamma_e = \gamma_{\rm min}$ として値を代入すると

$$\nu_e \approx 87\,\mathrm{GHz}\ \sqrt{\eta}\ \epsilon_{0.1}^{1/2}\ \epsilon_{\rm B,0.01}^{1/2}\ \zeta_{0.4}^2\ M_{*,1.4}^{1/2}\ v_{\rm sh,0.3}^{3/2}\ t_{\rm rec,200}^{1/2}$$

シンクロトロン放射した電子はその分エネルギーを失う. ある Lorentz factorγ をもつ電子がエネルギー密度 U_B の磁場の中で単位時間に放射するエネルギー (=電子のエネルギー損失率) は

$$P(\gamma, B) = \frac{4}{3}\sigma_{\rm T} c \beta^2 \gamma^2 U_B$$

と表せる (Rybicki&Lightman, 1979). いまの場合,

$$\gamma = \gamma_{\rm min} = 33\ \zeta_{0.4}\ v_{\rm sh,0.3}^2\ ,$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma_{\rm min}^2}\ (= 0.999)\ \approx 1$$

$$U_B = \frac{B^2}{8\pi} = 32\,\mathrm{erg\,em^{-3}}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ \epsilon_{\rm B,0.01}\ M_{*,1.4}\ v_{\rm sh,0.3}^{-1}\ t_{\rm rec,200}\ t_{\rm rise,3}^{-1}\ t_{\rm X,10}^{-1}$$

なので

$$\begin{aligned}P &= 9.3\times 10^{-10}\,\mathrm{erg/s}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ \epsilon_{\rm B,0.01}\ \zeta_{0.4}^2 M_{*,1.4}\ v_{\rm sh,0.3}^3\ t_{\rm rec,200}\ t_{\rm rise,3}^{-1}\ t_{\rm X,10}^{-1} \\ &= 0.58\,\mathrm{keV/s}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ \epsilon_{\rm B,0.01}\ \zeta_{0.4}^2 M_{*,1.4}\ v_{\rm sh,0.3}^3\ t_{\rm rec,200}\ t_{\rm rise,3}^{-1}\ t_{\rm X,10}^{-1}\end{aligned}$$

となる．よって，シンクロトロン放射の寄与だけを考えた冷却時間は

$$t_{\rm cool} \approx \frac{\gamma_{\rm min} m_e c^2}{P} \approx 484\,{\rm min}\ \eta^{-1}\ \epsilon_{\rm B,0.01}^{-1}\ \epsilon_{0.1}^{-1}\ \zeta_{0.4}^{-1}\ M_{*,1.4}^{-1}\ v_{\rm sh,0.3}^{-2}\ t_{\rm rec,200}^{-1}\ t_{\rm rise,3}\ t_{\rm X,10}$$

上で求めた P は 1 個の電子による放射パワーである．shock で掃かれたガスに含まれる電子がすべて $\gamma_{\rm min}$ のシンクロトロン放射しているならば，電子の総数 N_e は

$$N_e \approx \frac{M_{\rm ej}}{m_u} = 1.4\times 10^{44}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ t_{\rm rec,200}$$

となる．

$$P_{\rm tot} = N_e P = 1.3\times 10^{35}\,{\rm erg/s}\ \eta^2\ \epsilon_{0.1}^2\ \epsilon_{\rm B,0.01}\ \zeta_{0.4}^2\ M_{*,1.4}^2\ v_{\rm sh,0.3}^3\ t_{\rm rec,200}^2\ t_{\rm rise,3}^{-1}\ t_{\rm X,10}^{-1}$$

7 Power–law に従う電子分布からのシンクロトロン放射

7.1 比例係数の決定

電子分布は power law に従うとする．

$$\frac{{\rm d}N}{{\rm d}\gamma} = N_0 \gamma^{-p} \quad (\gamma_{\rm min} < \gamma < \gamma_{\rm max}) \tag{1}$$

ここで N_0 は数密度の次元をもつ定数である．

shock はそのエネルギーの一部を周囲の電子へ受け渡す．効率を $\epsilon_{\rm e}$ とおくと

$$\begin{aligned}\epsilon_{\rm e}\frac{M_{\rm ej}v_{\rm sh}^2/2}{4\pi r_{\rm sh}^2 l_{\rm sh}} &= \int_{\gamma_{\rm min}}^{\gamma_{\rm max}} \gamma m_{\rm e} c^2 \frac{{\rm d}N}{{\rm d}\gamma}\,{\rm d}\gamma \\ &= m_{\rm e}c^2 \frac{N_0}{2-p}\left[\gamma^{2-p}\right]_{\gamma_{\rm min}}^{\gamma_{\rm max}} \\ &\approx m_{\rm e}c^2\frac{N_0}{p-2}\gamma_{\rm min}^{2-p} \quad (p>2,\ \gamma_{\rm max}\gg\gamma_{\rm min})\end{aligned}$$

が成り立つ．N_0 について解くと

$$\begin{aligned}N_0 &= (p-2)\gamma_{\rm min}^{p-2}\ \frac{\epsilon_e M_{\rm ej} v_{\rm sh}^2/2}{4\pi r_{\rm sh}^2 l_{\rm sh} m_e c^2} \\ &= 1.1\times 10^9\,{\rm cm}^{-3}\ \epsilon_e (p-2)\gamma_{\rm min}^{p-2}\end{aligned}$$

7.2 Optically thin 領域からの放射

分布が (1) で与えられる電子のシンクロトロン放射スペクトルは以下で与えられる (Rybicki & Lightman, 1979):

$$\begin{aligned}P_\nu &= \frac{\sqrt{3}e^3 N_0 B}{m_e c^2 (p+1)}\Gamma\left(\frac{p}{4}+\frac{19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{p}{4}-\frac{1}{12}\right)\left(\frac{2\pi\nu m_e c}{3eB}\right)^{-(p-1)/2} \\ &= \frac{eB\hbar c}{m_e c^2}\left(\frac{2\pi m_e c^2 \nu}{3eBc}\right)^{-(p-1)/2}\frac{\sqrt{3}\alpha N_0}{p+1}\Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right) \\ &= \frac{\sqrt{3}N_0 r_e e B}{p+1}\left(\frac{2\pi(m_e c^2)(\nu/c)}{3eB}\right)^{-(p-1)/2}\Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right)\end{aligned}$$

ここで, $r_e = e^2/(m_e c^2)$ は古典電子半径である.

観測される flux F_ν は

$$F_\nu \approx P_\nu l_{\mathrm{sh}} (r_{\mathrm{sh}}/d)^2 = 1.2 \times 10^{-9}\,\mathrm{cm}\ P_\nu$$

と表せる.

7.3 Optically thick 領域からの放射

エネルギー E あたりの電子の密度分布 $N(E)$ は以下に従うと仮定する.

$$\frac{\mathrm{d}N(E)}{\mathrm{d}E} = \tilde{N}_0 E^{-p}$$

$\gamma = E/(m_e c^2)$ ゆえ, $\tilde{N}_0$ と N_0 とは以下の関係にある:

$$\tilde{N}_0 = (m_e c^2)^{p-1} N_0 \tag{2}$$

synchrotron self–absorption の吸収係数は以下で与えられる (Rybicki & Lightman, 1979).

$$\begin{aligned}
\alpha_\nu &= \frac{\sqrt{3}e^3}{8\pi m_e}\left(\frac{3e}{2\pi m_e^3 c^5}\right)^{p/2} \tilde{N}_0 B^{(p+2)/2}\,\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)\nu^{-(p+4)/2} \\
&= \frac{\sqrt{3}\tilde{N}_0 r_e}{8\pi} eB\left(\frac{c}{\nu}\right)^2\left(\frac{3}{2\pi}\frac{eB}{(m_e c^2)^3}\frac{c}{\nu}\right)^{p/2}\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right) \\
&= \frac{\sqrt{3}{E_{\mathrm{res}}}^{p-1} N_0 r_e f}{8\pi\lambda^{-2}}\left(\frac{3f}{2\pi E_{\mathrm{res}}^3 \lambda^{-1}}\right)^{p/2}\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)
\end{aligned}$$

最後の等式で (2) を用いた.

源泉関数は

$$\begin{aligned}
S_\nu \coloneqq \frac{P_\nu}{4\pi\alpha_\nu} &= \frac{2\lambda^{-2}E_{\mathrm{res}}}{p+1}\left(\frac{2\pi E_{\mathrm{res}}\lambda^{-1}}{3f}\right)^{1/2} G(p) \\
&= \left(\frac{\nu}{c}\right)^{5/2}\frac{2m_e c^2}{p+1}\left(\frac{2\pi m_e c^2}{3eB}\right)^{1/2} G(p)
\end{aligned}$$

となる. ただし

$$G(p) = \frac{\Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)}$$

である.

天体までの距離 $d = 4.5\,\mathrm{kpc}$ とすると, 観測される flux F_ν は

$$F_\nu \approx S_\nu\left(\frac{r_{\mathrm{sh}}^2}{d^2}\right) \approx 1.4 \times 10^{-20} S_\nu$$

となる.

7.4 Optical depth の評価

Optical depth τ_ν は

$$\tau_\nu \coloneqq \alpha_\nu l_{\mathrm{sh}} = \frac{\sqrt{3}(m_e c^2)^{p-1} N_0 r_e e B l_{\mathrm{sh}}}{8\pi(\nu/c)^2}\left(\frac{3eB}{2\pi(m_e c^2)^3(\nu/c)}\right)^{p/2}\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)$$

とかける. $\tau = 1$ のときの周波数 ν_0 を求めると

$$\nu_0/c = \left(\frac{\sqrt{3}(m_e c^2)^{p-1} N_0 r_e e B l_{\rm sh}}{8\pi} \Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right) \right)^{2/(p+4)} \left(\frac{3eB}{2\pi (m_e c^2)^3} \right)^{p/(p+4)}$$

すなわち

$$\nu_0 = 1.4 \times 10^2 \,\mathrm{GHz}$$