1 Accretion rate と ejecta mass

shock ejecta の質量 $M_{\rm ej}$ は, recurrence time $t_{\rm rec} \approx 200\,{\rm min}$ の間に降着する質量の η 倍に等しいとする．accretion rate は Eddington accretion rate $\dot{M}_{\rm Edd}$ と仮定する．ここで, $\dot{M}_{\rm Edd}$ は Eddington luminosity:

$$L_{\rm Edd} \approx 10^{38}\,{\rm erg/s} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)$$

と, 輻射への変換効率 ϵ を用いて

$$\dot{M}_{\rm Edd} = \frac{L_{\rm Edd}}{\epsilon c^2} = 1.1 \times 10^{17}\,{\rm g/s}\ \left(\frac{\epsilon}{0.1}\right)^{-1} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)$$

と表せる．よって

$$M_{\rm ej} = \eta \dot{M}_{\rm Edd} t_{\rm rec} = 1.3 \times 10^{21}\ {\rm g}\ \eta \left(\frac{t_{\rm rec}}{200\,{\rm min}}\right) \left(\frac{\epsilon}{0.1}\right) \left(\frac{M}{M_\odot}\right)$$

2 電波立ち上がり時の shock radius

X–ray burst の瞬間に $t = 0$ に shock が立ち, $v_{\rm sh} = 0.3c$ の速さで走ると仮定する．観測によれば, X–ray burst が起きてから電波が立ち上がるまでの時間は $t_{\rm rise} \approx 3\,{\rm min}$ なので

$$r_{\rm sh} = v_{\rm sh} t_{\rm rise} = 1.6 \times 10^{12}\,{\rm cm}\ \left(\frac{v_{\rm sh}}{0.3c}\right) \left(\frac{t_{\rm rise}}{3\,{\rm min}}\right) = 0.11\,{\rm AU}\ \left(\frac{v_{\rm sh}}{0.3c}\right) \left(\frac{t_{\rm rise}}{3\,{\rm min}}\right)$$

3 磁場の強さ

collisionless–shock はそのエネルギーの一部を磁場へ渡す．変換効率を ϵ_B とすると

$$\epsilon_{\rm B} \frac{M_{\rm ej} v_{\rm sh}^2/2}{4\pi r_{\rm sh}^2 v_{\rm sh} \tau} = \frac{B^2}{8\pi}$$

ここで $\tau \approx 10\,{\rm min}$ は X–ray burst が起きてから電波が減衰するまでの時間である．B について解くと

$$\begin{aligned} B^2 &= \epsilon_B \frac{M_{\rm ej} v_{\rm sh}}{r_{\rm sh}^2 \tau} = \eta \epsilon_B \frac{\dot{M}_{\rm Edd} t_{\rm rec}}{v_{\rm sh} t_{\rm rise}^2 \tau} \\ &\approx 7.6 \times 10^3\,{\rm erg\,cm^{-3}}\ \eta \epsilon_{\rm B} \left(\frac{\epsilon}{0.1}\right) \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \left(\frac{t_{\rm rec}}{200\,{\rm min}}\right) \left(\frac{v_{\rm sh}}{0.3c}\right)^{-1} \left(\frac{t_{\rm rise}}{3\,{\rm min}}\right)^{-2} \left(\frac{\tau}{10\,{\rm min}}\right) \end{aligned}$$

$$B \approx 87\,{\rm G}\ \sqrt{\eta \epsilon_{\rm B}} \left(\frac{\epsilon}{0.1}\right)^{1/2} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/2} \left(\frac{t_{\rm rec}}{200\,{\rm min}}\right)^{1/2} \left(\frac{v_{\rm sh}}{0.3c}\right)^{-1/2} \left(\frac{t_{\rm rise}}{3\,{\rm min}}\right)^{-1} \left(\frac{\tau}{10\,{\rm min}}\right)^{1/2}$$

4 周辺ガスの密度

$\tau \approx 10\,{\rm min}$ の間に shock が掃いた領域にあるガスの総質量は $M_{\rm ej}$ に等しいと仮定する．すなわち

$$4\pi r_{\rm sh}^2 \rho_{\rm amb} v_{\rm sh} \tau = M_{\rm ej}$$

$\rho_{\rm amb}$ は周辺ガスの質量密度である．$\rho_{\rm amb}$ について解くと

$$\begin{aligned} \rho_{\rm amb} &= \frac{M_{\rm ej}}{4\pi r_{\rm sh}^2 v_{\rm sh} \tau} \\ &\approx 7.5 \times 10^{-18}\,{\rm g\,cm^{-3}} \left(\frac{\epsilon}{0.1}\right) \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \left(\frac{t_{\rm rec}}{200\,{\rm min}}\right) \left(\frac{v_{\rm sh}}{0.3c}\right)^{-3} \left(\frac{t_{\rm rise}}{3\,{\rm min}}\right)^{-2} \left(\frac{\tau}{10\,{\rm min}}\right)^{-1} \end{aligned}$$

5　Power–law の比例係数

電子分布は power law に従うとする.

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\gamma} = C\gamma^{-p} \quad (\text{for } \gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max})$$

shock はそのエネルギーの一部を周囲の電子へ受け渡す. 効率を ϵ_e とおくと

$$\epsilon_\mathrm{e}\frac{M_\mathrm{ej}}{2}v_\mathrm{sh}^2 = \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} \gamma m_\mathrm{e}c^2\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\gamma}\,\mathrm{d}\gamma = m_\mathrm{e}c^2\frac{C}{2-p}\left[\gamma^{2-p}\right]_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}}$$

となる. C について解くと

$$\begin{aligned} C &= \epsilon_\mathrm{e}\frac{M_\mathrm{ej}v_\mathrm{sh}^2}{2m_\mathrm{e}c^2}(2-p)\left(\gamma_{\max}^{2-p} - \gamma_{\min}^{2-p}\right)^{-1} \\ &= 6.6\times 10^{46}\eta\epsilon_\mathrm{e}\ (2-p)\left(\gamma_{\max}^{2-p} - \gamma_{\min}^{2-p}\right)^{-1}\left(\frac{\dot{M}}{\dot{M}_\mathrm{Edd}}\right)\left(\frac{t_\mathrm{rec}}{200\,\mathrm{min}}\right)\left(\frac{v_\mathrm{sh}}{0.3c}\right)^2 \end{aligned}$$

shock で加速される電子のエネルギー範囲 $(\gamma_{\min}, \gamma_{\max})$ が分かれば, C の値を見積もることができる.

6　放射電子の最小エネルギー

Circumstellar medium は shock からエネルギーを受け取り熱化される. 電子の熱エネルギー kT_e が, v_sh で走る電子の運動エネルギーに等しいと仮定すると

$$kT_e \approx \frac{m_e}{2}v_\mathrm{sh}^2 \approx 0.045 m_e c^2\left(\frac{v_\mathrm{sh}}{0.3c}\right)^2$$

CSM が電子と陽子のみから構成されていると仮定する. 陽子の熱化についても電子と同様に考えると, 各々の Lorentz factor はいずれも

$$\gamma_\mathrm{th} = \frac{kT_i}{m_i c^2} \approx 0.045 \quad (i = \mathrm{e},\, \mathrm{p})$$

となる.

熱化された陽子と電子とが互いにエネルギーをやりとりできるのであれば, 電子が陽子の熱エネルギーの一部を受け取れるはずである. 電子が受け取る, 陽子の熱エネルギーの割合を ζ とすると

$$\begin{aligned} \gamma_e &= \frac{1}{m_e c^2}(kT_e + \zeta kT_p) \\ &= 0.045\left(1 + \zeta\frac{m_p}{m_e}\right)\left(\frac{v_\mathrm{sh}}{0.3c}\right)^2 \\ &\approx 45\zeta\left(\frac{v_\mathrm{sh}}{0.3c}\right)^2\ (\text{using } m_p/m_e \approx 10^3) \end{aligned}$$

となる.

7 シンクロトロン放射

γ_e の Lorenz factor をもつ電子からのシンクロトロン放射を考える．放射の典型的な振動数 ν_e は

$$\nu_e = \gamma_e^3 \nu_B \sin\alpha = \frac{\gamma_e^2 eB}{2\pi m_e c} \sin\alpha$$

である (Rybicki & Lightman (1979))．ここで ν_B はサイクロトロン振動数, α はピッチ角である．磁場がランダムな方向を向いていると仮定し, $\sin\alpha$ の平均をとると

$$\int_0^{\pi/2} \sin\alpha \, \mathrm{d}\alpha = 1$$

ゆえ

$$\nu_e = \frac{\gamma_e^2 eB}{2\pi m_e c}$$

値を代入すると

$$\nu_e \approx 495\,\mathrm{GHz}\,\zeta\sqrt{\eta\epsilon_\mathrm{B}}\left(\frac{\epsilon}{0.1}\right)^{1/2}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{t_\mathrm{rec}}{200\,\mathrm{min}}\right)^{1/2}\left(\frac{v_\mathrm{sh}}{0.3c}\right)^{3/2}\left(\frac{t_\mathrm{rise}}{3\,\mathrm{min}}\right)^{-1}\left(\frac{\tau}{10\,\mathrm{min}}\right)^{1/2}$$