1 Eddington accretion rate

Eddington luminosity $L_{\rm Edd}$ は以下で定義される:

$$L_{\rm Edd} = \frac{4\pi G M_* m_p c}{\sigma_{\rm T}} = 1.26\times10^{38}\,{\rm erg/s}\ \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)$$

G, M_*, m_p, c, $\sigma_{\rm T}$ はそれぞれ重力定数, 中性子星の質量, 陽子の質量, 真空中の光速, トムソン散乱断面積.

Eddington accretion rate $\dot{M}_{\rm Edd}$ を以下で定義する:

$$\begin{aligned}\dot{M}_{\rm Edd} &\coloneqq L_{\rm Edd}/c^2 = 1.34\times10^{17}\,{\rm g/s}\ \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)\\ &= 2.22\times10^{-9}\ M_\odot/{\rm yr}\ \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)\end{aligned}$$

2 Accretion rate と ejecta mass

4U 1728–34 の fiducial value として, mass $M_* = 1.4M_\odot$(Shaposhnikov et al. 2003), accretion rate $\dot{M} = 0.1\dot{M}_{\rm Edd}$(Galloway et al. 2008) を, それぞれ採用する．すなわち,

$$\dot{M} = \epsilon\dot{M}_{\rm Edd}(1.4M_\odot) = 1.96\times10^{16}\,{\rm g/s}\ \left(\frac{M_*}{1.4M_\odot}\right)\left(\frac{\epsilon}{0.1}\right).$$

shock ejecta の質量 $M_{\rm ej}$ は, recurrence time $t_{\rm rec}\approx 200\,{\rm min}$ の間に降着する質量の η 倍に等しいとする.

$$M_{\rm ej} = \eta\dot{M}t_{\rm rec} = 2.35\times10^{20}\,{\rm g}\ \eta\left(\frac{t_{\rm rec}}{200\,{\rm min}}\right)\left(\frac{M_*}{1.4M_\odot}\right)\left(\frac{\epsilon}{0.1}\right)$$

3 電波立ち上がり時の shock radius

Shock ejecta の速さを $v_{\rm sh} = 0.3c$ と仮定する．観測によれば, X–ray burst が起きてから電波が立ち上がるまでの時間は $t_{\rm rise}\approx 3\,{\rm min}$ である.

$$r_{\rm sh} = v_{\rm sh}t_{\rm rise} = 1.6\times10^{12}\,{\rm cm}\ \left(\frac{v_{\rm sh}}{0.3c}\right)\left(\frac{t_{\rm rise}}{3\,{\rm min}}\right) = 0.11\,{\rm AU}\ \left(\frac{v_{\rm sh}}{0.3c}\right)\left(\frac{t_{\rm rise}}{3\,{\rm min}}\right)$$

この位置で shock が形成され, shock が周辺ガスを加熱すると仮定しておく.

4 磁場の強さ

collisionless–shock はそのエネルギーの一部を磁場へ渡す．変換効率を ϵ_B とすると

$$\epsilon_{\rm B}\frac{M_{\rm ej}v_{\rm sh}^2/2}{4\pi r_{\rm sh}^2 v_{\rm sh}\tau} = \frac{B^2}{8\pi}$$

ここで $\tau\approx 10\,{\rm min}$ は X–ray burst が起きてから電波が減衰するまでの時間である．B について解くと

$$\begin{aligned}B^2 &= \epsilon_B\frac{M_{\rm ej}v_{\rm sh}}{r_{\rm sh}^2\tau} = \eta\epsilon_B\frac{\dot{M}_{\rm Edd}t_{\rm rec}}{v_{\rm sh}t_{\rm rise}^2\tau}\\ &\approx 13.4\,{\rm erg\,cm^{-3}}\ \eta\ \epsilon_1^{\rm B}\ \epsilon_1\ M_4^*\ t_{200}^{\rm rec}\ (v_3^{\rm sh})^{-1}\ (t_3^{\rm rise})^{-2}\ (\tau_{10})^{-1}\end{aligned}$$

$$B \approx 87\,\mathrm{G}\ \sqrt{\eta \epsilon_{\mathrm{B}}} \left(\frac{\epsilon}{0.1}\right)^{1/2} \left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/2} \left(\frac{t_{\mathrm{rec}}}{200\,\mathrm{min}}\right)^{1/2} \left(\frac{v_{\mathrm{sh}}}{0.3c}\right)^{-1/2} \left(\frac{t_{\mathrm{rise}}}{3\,\mathrm{min}}\right)^{-1} \left(\frac{\tau}{10\,\mathrm{min}}\right)^{1/2}$$

5　周辺ガスの密度

$\tau \approx 10\,\mathrm{min}$ の間に shock が掃いた領域にあるガスの総質量は M_{ej} に等しいと仮定する．すなわち

$$4\pi r_{\mathrm{sh}}^2 \rho_{\mathrm{amb}} v_{\mathrm{sh}} \tau = M_{\mathrm{ej}}$$

ρ_{amb} は周辺ガスの質量密度である．ρ_{amb} について解くと

$$\begin{aligned} \rho_{\mathrm{amb}} &= \frac{M_{\mathrm{ej}}}{4\pi r_{\mathrm{sh}}^2 v_{\mathrm{sh}} \tau} \\ &\approx 7.5 \times 10^{-18}\,\mathrm{g\,cm^{-3}} \left(\frac{\epsilon}{0.1}\right) \left(\frac{M}{M_\odot}\right) \left(\frac{t_{\mathrm{rec}}}{200\,\mathrm{min}}\right) \left(\frac{v_{\mathrm{sh}}}{0.3c}\right)^{-3} \left(\frac{t_{\mathrm{rise}}}{3\,\mathrm{min}}\right)^{-2} \left(\frac{\tau}{10\,\mathrm{min}}\right)^{-1} \end{aligned}$$

6　Power–law の比例係数

電子分布は power law に従うとする．

$$\frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\gamma} = C\gamma^{-p} \quad (\text{for } \gamma_{\min} < \gamma < \gamma_{\max})$$

shock はそのエネルギーの一部を周囲の電子へ受け渡す．効率を ϵ_{e} とおくと

$$\epsilon_{\mathrm{e}} \frac{M_{\mathrm{ej}}}{2} v_{\mathrm{sh}}^2 = \int_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}} \gamma m_{\mathrm{e}} c^2 \frac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}\gamma}\,\mathrm{d}\gamma = m_{\mathrm{e}} c^2 \frac{C}{2-p} \left[\gamma^{2-p}\right]_{\gamma_{\min}}^{\gamma_{\max}}$$

となる．C について解くと

$$\begin{aligned} C &= \epsilon_{\mathrm{e}} \frac{M_{\mathrm{ej}} v_{\mathrm{sh}}^2}{2 m_{\mathrm{e}} c^2} (2-p) \left(\gamma_{\max}^{2-p} - \gamma_{\min}^{2-p}\right)^{-1} \\ &= 6.6 \times 10^{46} \eta \epsilon_{\mathrm{e}}\ (2-p) \left(\gamma_{\max}^{2-p} - \gamma_{\min}^{2-p}\right)^{-1} \left(\frac{\dot{M}}{\dot{M}_{\mathrm{Edd}}}\right) \left(\frac{t_{\mathrm{rec}}}{200\,\mathrm{min}}\right) \left(\frac{v_{\mathrm{sh}}}{0.3c}\right)^2 \end{aligned}$$

shock で加速される電子のエネルギー範囲 $(\gamma_{\min}, \gamma_{\max})$ が分かれば, C の値を見積もることができる．

7　放射電子の最小エネルギー

プラズマガスは shock からエネルギーを受け取り熱化される．電子の熱エネルギー kT_e が, v_{sh} で走る電子の運動エネルギーに等しいと仮定すると

$$kT_e \approx \frac{m_e}{2} v_{\mathrm{sh}}^2 \approx 0.045 m_e c^2 \left(\frac{v_{\mathrm{sh}}}{0.3c}\right)^2$$

プラズマが電子と陽子のみから構成されていると仮定する．陽子の熱化についても電子と同様に考えると, 各々の Lorentz factor はいずれも

$$\gamma_{\mathrm{th}} = \frac{kT_i}{m_i c^2} \approx 0.045 \quad (i = \mathrm{e},\ \mathrm{p})$$

となる.

熱化された陽子と電子とが互いにエネルギーをやりとりできるのであれば, 電子が陽子の熱エネルギーの一部を受け取れるはずである. 電子が受け取る, 陽子の熱エネルギーの割合を ζ とすると

$$\begin{aligned}\gamma_e &= \frac{1}{m_e c^2}(kT_e + \zeta kT_p)\\ &= 0.045\left(1 + \zeta\frac{m_p}{m_e}\right)\left(\frac{v_{\mathrm{sh}}}{0.3c}\right)^2\\ &\approx 45\zeta\left(\frac{v_{\mathrm{sh}}}{0.3c}\right)^2\end{aligned}$$

となる. 最後の行で, $1 \ll m_p/m_e$, $\zeta \leq 1$ より第 1 項を無視した.

8 シンクロトロン放射

γ_e の Lorenz factor をもつ電子からのシンクロトロン放射を考える. 放射の典型的な振動数 ν_e は

$$\nu_e = \gamma_e^3 \nu_B \sin\alpha = \frac{\gamma_e^2 eB}{2\pi m_e c}\sin\alpha$$

である (Rybicki & Lightman (1979)). ここで ν_B はサイクロトロン振動数, α はピッチ角である. 磁場がランダムな方向を向いていると仮定し, $\sin\alpha$ の平均をとると

$$\int_0^{\pi/2} \sin\alpha\,\mathrm{d}\alpha = 1$$

ゆえ

$$\nu_e = \frac{\gamma_e^2 eB}{2\pi m_e c}$$

値を代入すると

$$\nu_e \approx 495\,\mathrm{GHz}\ \zeta\sqrt{\eta\epsilon_{\mathrm{B}}}\left(\frac{\epsilon}{0.1}\right)^{1/2}\left(\frac{M}{M_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{t_{\mathrm{rec}}}{200\,\mathrm{min}}\right)^{1/2}\left(\frac{v_{\mathrm{sh}}}{0.3c}\right)^{3/2}\left(\frac{t_{\mathrm{rise}}}{3\,\mathrm{min}}\right)^{-1}\left(\frac{\tau}{10\,\mathrm{min}}\right)^{1/2}$$