## 1 Accretion rate

Eddington luminosity $L_{\mathrm{Edd}}$ は以下で定義される:

$$L_{\mathrm{Edd}} = \frac{4\pi G M_* m_p c}{\sigma_{\mathrm{T}}} = 1.26 \times 10^{38}\,\mathrm{erg/s}\ \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)$$

$G$, $M_*$, $m_p$, $c$, $\sigma_{\mathrm{T}}$ はそれぞれ重力定数, 中性子星の質量, 陽子の質量, 真空中の光速, トムソン散乱断面積.

Eddington accretion rate $\dot{M}_{\mathrm{Edd}}$ を以下で定義する:

$$\begin{aligned}\dot{M}_{\mathrm{Edd}} \coloneqq L_{\mathrm{Edd}}/c^2 &= 1.34 \times 10^{17}\,\mathrm{g/s}\ \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right) \\ &= 2.22 \times 10^{-9}\ M_\odot/\mathrm{yr}\ \left(\frac{M_*}{M_\odot}\right)\end{aligned}$$

4U 1728–34 の fiducial value として, mass $M_* = 1.4 M_\odot$(Shaposhnikov et al. 2003), accretion rate $\dot{M} = 0.1\dot{M}_{\mathrm{Edd}}$(Galloway et al. 2008) を, それぞれ採用する. すなわち,

$$\dot{M} = \epsilon \dot{M}_{\mathrm{Edd}}(1.4 M_\odot) = 1.96 \times 10^{16}\,\mathrm{g/s}\ \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}$$

## 2 Shock の形成

X–ray burst の duration time $t_X \approx 10\,\mathrm{s}$ の間に飛んでいったモノが shock ejecta を形成すると仮定する. Ejecta の運動する速さを $v_{\mathrm{sh}} = 0.3c$ とすると, shock の厚み $l_{\mathrm{sh}}$ は

$$l_{\mathrm{sh}} \approx v_{\mathrm{sh}} t_X = 9 \times 10^{10}\,\mathrm{cm}\ v_{\mathrm{sh},0.3}\ t_{\mathrm{X},10}$$

shock ejecta の質量 $M_{\mathrm{ej}}$ は, recurrence time $t_{\mathrm{rec}} \approx 200\,\mathrm{min}$ の間に降着する質量の $\eta$ 倍に等しいとすると

$$M_{\mathrm{ej}} \approx \eta \dot{M} t_{\mathrm{rec}} = 2.3 \times 10^{20}\,\mathrm{g}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ t_{\mathrm{rec},200}$$

電波が立ち上がるのは, X–ray burst が起きてから $t_{\mathrm{rise}} \approx 3\,\mathrm{min}$ 後である. shock が形成される位置 $r_{\mathrm{sh}}$ は

$$r_{\mathrm{sh}} \approx v_{\mathrm{sh}} t_{\mathrm{rise}} = 1.6 \times 10^{12}\,\mathrm{cm}\ v_{\mathrm{sh},0.3}\ t_{\mathrm{rise},3} = 0.11\,\mathrm{AU}\ v_{\mathrm{sh},0.3}\ t_{\mathrm{rise},3}$$

## 3 磁場の強さ

collisionless–shock はそのエネルギーの一部を磁場へ渡す. 変換効率を $\epsilon_B$ とすると, エネルギー密度について

$$\epsilon_{\mathrm{B}} \frac{M_{\mathrm{ej}} v_{\mathrm{sh}}^2/2}{4\pi r_{\mathrm{sh}}^2 l_{\mathrm{sh}}} = \frac{B^2}{8\pi}$$

$B$ について解くと

$$B^2 = \frac{\epsilon_{\mathrm{B}} M_{\mathrm{ej}} v_{\mathrm{sh}}^2}{r_{\mathrm{sh}}^2 l_{\mathrm{sh}}} = 8.1 \times 10^2\,\mathrm{erg\,cm^{-3}}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ \epsilon_{\mathrm{B},0.01}\ M_{*,1.4}\ v_{\mathrm{sh},0.3}^{-1}\ t_{\mathrm{rec},200}\ t_{\mathrm{rise},3}^{-1}\ t_{\mathrm{X},10}^{-1}$$

$$B \approx 28\,\mathrm{G}\ \sqrt{\eta}\ \epsilon_{0.1}^{1/2}\ \epsilon_{\mathrm{B},0.01}^{1/2}\ M_{*,1.4}^{1/2}\ v_{\mathrm{sh},0.3}^{-1/2}\ t_{\mathrm{rec},200}^{1/2}\ t_{\mathrm{rise},3}^{-1/2}\ t_{\mathrm{X},10}^{-1/2}$$

$\epsilon_{\mathrm{B}} = 0.01$ は Kashiyama et al.(2018) から引用.

## 4　周辺ガスの密度

電波は $\tau \approx 10\,\mathrm{min}$ の時間で減衰する．この間に shock は $4\pi r_{\mathrm{sh}}^2 v_{\mathrm{sh}}\tau$ の領域を掃く．掃過領域にあるガス (一様密度 $\rho_{\mathrm{amb}}$ を仮定) の全質量が $M_{\mathrm{ej}}$ に等しいとすると

$$4\pi r_{\mathrm{sh}}^2 \rho_{\mathrm{amb}} v_{\mathrm{sh}} \tau = M_{\mathrm{ej}}$$

を満たす．$\rho_{\mathrm{amb}}$ について解くと

$$\begin{aligned}\rho_{\mathrm{amb}} &= \frac{M_{\mathrm{ej}}}{4\pi r_{\mathrm{sh}}^2 v_{\mathrm{sh}} \tau} \\ &= 1.3\times 10^{-18}\,\mathrm{g\,cm^{-3}} \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ v_{\mathrm{sh},0.3}^{-3}\ t_{\mathrm{rec},200}\ t_{\mathrm{rise},3}^{-2}\ \tau_{10}^{-1}\end{aligned}$$

ガスがすべて水素で構成されているとすると, 電子数密度は

$$n_{\mathrm{amb,e}} = \rho_{\mathrm{amb}}/(1\cdot m_u) = 7\times 10^5\,\mathrm{cm^{-3}}\ \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ v_{\mathrm{sh},0.3}^{-3}\ t_{\mathrm{rec},200}\ t_{\mathrm{rise},3}^{-2}\ \tau_{10}^{-1}$$

## 5　電子の Lorentz factor

### 5.1　Maximum Lorentz factor

電子の最大 Lorentz factor$\gamma_{\mathrm{max}}$ は

$$\left(\frac{9\pi e\beta^2}{10\sigma_{\mathrm{T}}B}\right)^{1/2} \approx \left(\frac{9\pi e}{10\sigma_{\mathrm{T}}B}\right)^{1/2}\ (\beta\to 1)$$

で与えられる (Kashiyama et al.(2018))．値を代入すると

$$\gamma_{\mathrm{max}} = 8.5\times 10^6\ B_{28}^{-1/2}$$

### 5.2　Minimum Lorentz factor

プラズマガスは shock からエネルギーを受け取り熱化される．電子の熱エネルギー $kT_e$ が, $v_{\mathrm{sh}}$ で走る電子の運動エネルギーに等しいと仮定すると

$$kT_e = \frac{m_e}{2}v_{\mathrm{sh}}^2 = 0.045 m_e c^2\ v_{\mathrm{sh},0.3}^2$$

プラズマが電子と陽子のみから構成されていると仮定する．陽子の熱化についても電子と同様に考えると, 各々の Lorentz factor はいずれも

$$\gamma_{\mathrm{th}} = \frac{kT_i}{m_i c^2} \approx 0.045 \quad (i = \mathrm{e},\, \mathrm{p})$$

となる．

熱化された陽子と電子とが互いにエネルギーをやりとりできるのであれば, 電子が陽子の熱エネルギーの一部を受け取れるはずである. 電子が受け取る, 陽子の熱エネルギーの割合を $\zeta$ とする. 電子の Lorentz factor は, もともとの熱エネルギーに陽子からもらった分が加わると考えて

$$\begin{aligned}\gamma_{\min} &= \frac{1}{m_e c^2}(kT_e + \zeta kT_p)\\ &\approx \zeta \frac{kT_p}{m_e c^2}\ (\text{ignoring}\ kT_e)\\ &= \zeta \frac{m_p}{2m_e}\frac{v_{\rm sh}^2}{c^2}\\ &= 33\ \zeta_{0.4}\ v_{\rm sh,0.3}^2\end{aligned}$$

となる. $\zeta = 0.4$ は Kashiyama et al.(2018) の値を引用.

# 6　シンクロトロン放射

$\gamma_e$ の Lorenz factor をもつ電子からのシンクロトロン放射を考える. 放射の典型的な振動数 $\nu_e$ は

$$\nu_e = \gamma_e^3 \nu_B \sin\alpha = \frac{\gamma_e^2 eB}{2\pi m_e c}\sin\alpha$$

である (Rybicki & Lightman (1979)). ここで $\nu_B$ はサイクロトロン振動数, $\alpha$ はピッチ角である. 磁場がランダムな方向を向いていると仮定し, $\sin\alpha$ の平均をとると

$$\int_0^{\pi/2} \sin\alpha\, \mathrm{d}\alpha = 1$$

ゆえ

$$\nu_e = \frac{\gamma_e^2 eB}{2\pi m_e c}$$

$\gamma_e = \gamma_{\min}$ として値を代入すると

$$\nu_e \approx 87\,\mathrm{GHz}\ \sqrt{\eta}\ \epsilon_{0.1}^{1/2}\ \epsilon_{\mathrm{B},0.01}^{1/2}\ \zeta_{0.4}^2\ M_{*,1.4}^{1/2}\ v_{\rm sh,0.3}^{3/2}\ t_{\rm rec,200}^{1/2}$$

シンクロトロン放射した電子はその分エネルギーを失う. ある Lorentz factor$\gamma$ をもつ電子がエネルギー密度 $U_B$ の磁場の中で単位時間に放射するエネルギー (=電子のエネルギー損失率) は

$$P(\gamma, B) = \frac{4}{3}\sigma_{\rm T} c\beta^2\gamma^2 U_B$$

と表せる (Rybicki&Lightman, 1979). いまの場合,

$$\gamma = \gamma_{\min} = 33\ \zeta_{0.4}\ v_{\rm sh,0.3}^2\ ,$$

$$\beta^2 = 1 - \frac{1}{\gamma_{\min}^2}\ (= 0.999)\ \approx 1$$

$$U_B = \frac{B^2}{8\pi} = 32\,\mathrm{erg\,em^{-3}}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ \epsilon_{\mathrm{B},0.01}\ M_{*,1.4}\ v_{\rm sh,0.3}^{-1}\ t_{\rm rec,200}\ t_{\rm rise,3}^{-1}\ t_{\rm X,10}^{-1}$$

なので

$$\begin{aligned}P &= 9.3\times10^{-10}\,\mathrm{erg/s}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ \epsilon_{\mathrm{B},0.01}\ \zeta_{0.4}^2 M_{*,1.4}\ v_{\rm sh,0.3}^3\ t_{\rm rec,200}\ t_{\rm rise,3}^{-1}\ t_{\rm X,10}^{-1}\\ &= 0.58\,\mathrm{keV/s}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ \epsilon_{\mathrm{B},0.01}\ \zeta_{0.4}^2 M_{*,1.4}\ v_{\rm sh,0.3}^3\ t_{\rm rec,200}\ t_{\rm rise,3}^{-1}\ t_{\rm X,10}^{-1}\end{aligned}$$

となる．よって, シンクロトロン放射の寄与だけを考えた冷却時間は

$$t_{\rm cool} \approx \frac{\gamma_{\rm min} m_e c^2}{P} \approx 484\,{\rm min}\ \eta^{-1}\ \epsilon_{\rm B,0.01}^{-1}\ \epsilon_{0.1}^{-1}\ \zeta_{0.4}^{-1}\ M_{*,1.4}^{-1}\ v_{\rm sh,0.3}^{-2}\ t_{\rm rec,200}^{-1}\ t_{\rm rise,3}\ t_{\rm X,10}$$

上で求めた $P$ は 1 個の電子による放射パワーである．shock で掃かれたガスに含まれる電子がすべて $\gamma_{\rm min}$ のシンクロトロン放射しているならば, 電子の総数 $N_e$ は

$$N_e \approx \frac{M_{\rm ej}}{m_u} = 1.4\times10^{44}\ \eta\ \epsilon_{0.1}\ M_{*,1.4}\ t_{\rm rec,200}$$

となる．

$$P_{\rm tot} = N_e P = 1.3\times10^{35}\,{\rm erg/s}\ \eta^2\ \epsilon_{0.1}^2\ \epsilon_{\rm B,0.01}\ \zeta_{0.4}^2\ M_{*,1.4}^2\ v_{\rm sh,0.3}^3\ t_{\rm rec,200}^2\ t_{\rm rise,3}^{-1}\ t_{\rm X,10}^{-1}$$

# 7 Power–law に従う電子分布からのシンクロトロン放射

## 7.1 比例係数の決定

電子分布は power law に従うとする．

$$\frac{{\rm d}N(\gamma)}{{\rm d}\gamma} = N_0\gamma^{-p} \quad (\gamma_{\rm min} < \gamma < \gamma_{\rm max}) \tag{1}$$

ここで $N_0$ は数密度の次元をもつ定数である．

shock はそのエネルギーの一部を周囲の電子へ受け渡す．効率を $\epsilon_{\rm e}$ とおくと

$$\begin{aligned}
\epsilon_{\rm e}\frac{M_{\rm ej}v_{\rm sh}^2/2}{4\pi r_{\rm sh}^2 l_{\rm sh}} &= \int_{\gamma_{\rm min}}^{\gamma_{\rm max}} \gamma m_{\rm e}c^2 \frac{{\rm d}N}{{\rm d}\gamma}\,{\rm d}\gamma \\
&= m_{\rm e}c^2\frac{N_0}{2-p}\left[\gamma^{2-p}\right]_{\gamma_{\rm min}}^{\gamma_{\rm max}} \\
&\approx m_{\rm e}c^2\frac{N_0}{p-2}\gamma_{\rm min}^{2-p} \quad (p>2,\ \gamma_{\rm max}\gg\gamma_{\rm min})
\end{aligned}$$

が成り立つ．$N_0$ について解くと

$$\begin{aligned}
N_0 &= (p-2)\gamma_{\rm min}^{p-2}\ \frac{\epsilon_e M_{\rm ej}v_{\rm sh}^2/2}{4\pi r_{\rm sh}^2 l_{\rm sh} m_e c^2} \\
&= 1.1\times10^9\,{\rm cm}^{-3}\ \epsilon_e(p-2)\gamma_{\rm min}^{p-2}
\end{aligned}$$

## 7.2 Optically thin 領域からの放射

分布 (1) に従うシンクロトロン電子の power は以下で与えられる (Rybicki & Lightman, 1979):

$$\begin{aligned}
P_\nu &= \frac{\sqrt{3}e^3N_0B}{m_ec^2(p+1)}\Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right)\left(\frac{2\pi\nu m_ec}{3eB}\right)^{-(p-1)/2} \\
&= \frac{\sqrt{3}N_0r_eeB}{p+1}\left(\frac{2\pi(m_ec^2)(\nu/c)}{3eB}\right)^{-(p-1)/2}\Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right)
\end{aligned}$$

ここで, $r_e = e^2/(m_ec^2)$ は古典電子半径.

$p=2.5$ の場合で具体的に計算すると,

$$P_\nu = 4.2\times 10^{-14}\,\mathrm{erg\,cm^{-3}\,s^{-1}\,Hz^{-1}}\ {B_{28}}^{7/4}\ {\nu_{100}}^{-3/4}\ \left(\frac{N_0}{1.1\times 10^{9}\,\mathrm{cm^{-3}}}\right)$$

ただし, $B_{28}=B/(28\,\mathrm{G})$, $\nu_{100}=\nu/(100\,\mathrm{GHz})$, $d_{4.5}=d/(4.5\,\mathrm{kpc})$, .

次に, Intensity $I_\nu$ は

$$I_\nu \approx \frac{P_\nu l_{\rm sh}}{4\pi} = \frac{\sqrt{3}N_0 r_e eBl_{\rm sh}}{4\pi(p+1)}\left(\frac{2\pi(m_ec^2)(\nu/c)}{3eB}\right)^{-(p-1)/2}\Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right)$$

と表せる. $p=2.5$ の場合で具体的に計算すると,

$$I_\nu = 3.0\times 10^{-4}\,\mathrm{erg\,cm^{-2}\,s^{-1}\,Hz^{-1}\,str^{-1}}\ {B_{28}}^{7/4}\ {\nu_{100}}^{-3/4}\left(\frac{l_{\rm sh}}{9\times 10^{10}\,\mathrm{cm}}\right)\left(\frac{N_0}{1.1\times 10^{9}\,\mathrm{cm^{-3}}}\right)$$

## 7.3 Optically thick 領域からの放射

エネルギー $E$ あたりの電子の密度分布 $N(E)$ は以下に従うと仮定する.

$$\frac{\mathrm{d}N(E)}{\mathrm{d}E} = \tilde{N}_0 E^{-p}$$

$\gamma = E/(m_ec^2)$ ゆえ, $\tilde{N}_0$ と $N_0$ とは以下の関係にある:

$$\tilde{N}_0 = (m_ec^2)^{p-1}N_0 \tag{2}$$

Synchrotron self–absorption(SSA) の吸収係数は以下で与えられる (Rybicki & Lightman, 1979).

$$\begin{aligned}
\alpha_\nu &= \frac{\sqrt{3}e^3}{8\pi m_e}\left(\frac{3e}{2\pi m_e^3c^5}\right)^{p/2}\tilde{N}_0 B^{(p+2)/2}\ \Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)\nu^{-(p+4)/2}\\
&= \frac{\sqrt{3}\tilde{N}_0 r_e eB}{8\pi}\left(\frac{c}{\nu}\right)^2\left(\frac{3}{2\pi}\frac{eB}{(m_ec^2)^3}\frac{c}{\nu}\right)^{p/2}\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)\\
&= \frac{\sqrt{3}}{8\pi}\frac{N_0 r_e eB}{m_ec^2(\nu/c)^2}\left(\frac{3eB}{2\pi(m_ec^2)(\nu/c)}\right)^{p/2}\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)
\end{aligned}$$

最後の等式で (2) を用いた. $p=2.5$ として計算すると

$$\alpha_\nu = 2.6\times 10^{-11}\,\mathrm{cm^{-1}}\ {B_{28}}^{9/4}\ {\nu_{100}}^{-13/4}\left(\frac{N_0}{1.1\times 10^{9}\,\mathrm{cm^{-3}}}\right)$$

次に, source function $S_\nu$ は

$$S_\nu \coloneqq \frac{P_\nu}{4\pi\alpha_\nu} = \left(\frac{\nu}{c}\right)^{5/2}\frac{2m_ec^2}{p+1}\left(\frac{2\pi m_ec^2}{3eB}\right)^{1/2}G(p)$$

となる. ただし

$$G(p) = \frac{\Gamma\left(\frac{3p+19}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p-1}{12}\right)}{\Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right)\Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)}$$

## 7.4 Optical depth の評価

Optical depth $\tau_\nu$ は

$$\tau_\nu \coloneqq \alpha_\nu l_{\mathrm{sh}} = \frac{\sqrt{3}}{8\pi} \frac{N_0 r_e e B l_{\mathrm{sh}}}{m_e c^2 (\nu/c)^2} \left( \frac{3eB}{2\pi (m_e c^2)(\nu/c)} \right)^{p/2} \Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right)$$

と表せる．$\tau = 1$ のときの周波数 $\nu_{\mathrm{SSA}}$ を求めると

$$\nu_{\mathrm{SSA}}/c = \left( \frac{\sqrt{3} N_0 r_e e B l_{\mathrm{sh}}}{8\pi m_e c^2} \Gamma\left(\frac{3p+2}{12}\right) \Gamma\left(\frac{3p+22}{12}\right) \right)^{2/(p+4)} \left( \frac{3eB}{2\pi m_e c^2} \right)^{p/(p+4)}$$

となる．

$p = 2.5$ として具体的に計算すると

$$\nu_{\mathrm{SSA}} = 130\,\mathrm{GHz}\ {B_{28}}^{9/13} \left( \frac{l_{\mathrm{sh}}}{9 \times 10^{10}\,\mathrm{cm}} \right)^{4/13} \left( \frac{N_0}{1.1 \times 10^{9}\,\mathrm{cm}^{-3}} \right)^{4/13}$$