

Apostila de Guias e Ondas

Volume II

Equação de Onda

Sérgio Antenor de Carvalho
©2007

Conteúdo

2 Equação de Onda	5
2.1 Introdução	5
2.2 Equação de Onda para Campos Harmônicos no Tempo	12
2.3 Solução da Equação de Onda	13
2.3.1 Solução da equação de onda em coordenadas retangulares	13
2.4 Ondas Planas Uniformes	16
2.4.1 Equações de Maxwell para solução em ondas planas	19
2.5 Parâmetros da Onda Eletromagnética	24
2.5.1 Impedância de Onda	24
2.5.2 Velocidade de Fase	25
2.5.3 Velocidade de Grupo	28
2.5.4 Polarização	33
2.6 Ondas eletromagnéticas em meios sem perdas	42
2.7 Ondas estacionárias	44
2.8 Ondas eletromagnéticas em meios com perdas	48
2.8.1 Impedância dos meios condutores	56
2.9 Aproximações para os parâmetros α , β , Z , λ , e v_f	60
2.10 Onda plana incidência normal em interface	62
2.11 Onda plana incidência normal em sistema com n regiões	70
2.12 Onda plana incidência oblíqua em interface	79
2.12.1 Incidência oblíqua - polarização perpendicular	86
2.12.2 Incidência oblíqua - polarização paralela	90
2.12.3 Condição para transmissão total - ângulo de Brewster	94
2.12.4 Condição para reflexão total - ângulo crítico	97
2.13 Exercícios	101
2.14 Referências	109

Listas de Figuras

2.1	Onda propagando no sentido $+z$	8
2.2	Onda propagando no sentido $-z$	8
2.3	Sinal no tempo gerado pela fonte	9
2.4	Onda propagando na direção $+y$	9
2.5	Quatro vistas da onda $F(z, t)$ versus tempo e espaço	11
2.6	Onda estacionária pura mostrando E em vários instantes de tempo	15
2.7	Onda plana uniforme	17
2.8	Planos de fase de uma onda plana uniforme	18
2.9	Esfera que contém o vetor propagação \vec{k}	18
2.10	Onda eletromagnética transversal	20
2.11	Onda plana incidindo na antena retangular	21
2.12	Distribuição de campo elétrico sobre a antena	23
2.13	Distribuição de campo elétrico no espaço	25
2.14	Onda plana e suas velocidades de fase	27
2.15	Modulação em Amplitude	29
2.16	Velocidades de fase v_f e de grupo v_g de uma onda AM	30
2.17	Diagrama de dispersão de um gás ionizado	32
2.18	Curva traçada pelo vetor campo elétrico quando a onda propaga	33
2.19	Sistema de coordenada na direção de propagação da onda	34
2.20	Polarização linear	34
2.21	Polarização circular	35
2.22	Polarização elíptica	35
2.23	Onda polarizada linearmente na direção x	36
2.24	Onda polarizada linearmente num ângulo de 45°	37
2.25	Ondas polarizadas circularmente: a) onda polarizada circularmente a direita; b) onda polarizada circularmente a esquerda	38
2.26	Ondas polarizadas elipticamente: a) onda polarizada elipticamente a direita; b) onda polarizada elipticamente a esquerda	41
2.27	Onda plana propagando em um meio sem perdas	43
2.28	Duas ondas propagando em direções opostas: a) a partir de uma fonte; b) por reflexão em uma interface	44
2.29	Onda estacionária resultante da superposição de duas ondas propagando em direções opostas.	46
2.30	Ondas propagando em um meio com perdas: a) no sentido $+z$; (b) no sentido $-z$.	49
2.31	Onda propagando no sentido $+z$ nos instantes de tempo $\omega t = 0$, $\omega t = \pi/3$ e $\omega t = 2\pi/3$.	50
2.32	Razão $\sigma/\omega\varepsilon$ em função da freqüência para vários meios.	51
2.33	Diagrama fasorial das densidades de corrente em um meio.	52
2.34	Atenuação do campo versus constante de atenuação.	54
2.35	Atenuação e Profundidade de Penetração no cobre versus freqüência.	55

2.36 Atenuação e Profundidade de Penetração do solo bom versus freqüência.	55
2.37 Onda propagando num meio com perdas.	58
2.38 Onda plana incidindo normalmente em uma interface plana.	62
2.39 Campo eletromagnético e densidade de corrente de elétrica num meio com perdas.	69
2.40 Formação das ondas planas num sistema de 3 regiões.	70
2.41 Onda plana incidindo num sistema com três regiões distintas.	72
2.42 Onda plana incidência normal em sistema com n regiões.	76
2.43 Onda plana incidindo num sistema de 4 regiões.	78
2.44 Tipos de incidência: (a) incidência normal, (b) incidência oblíqua.	79
2.45 Plano de incidência.	80
2.46 Campo incidente na polarização perpendicular.	81
2.47 Campo incidente na polarização paralela.	81
2.48 Onda plana incidindo obliquamente em uma interface.	82
2.49 Onda plana na incidência oblíqua.	84
2.50 Incidência oblíqua - campo elétrico na polarização perpendicular.	86
2.51 Módulos do coeficientes Γ_{\perp} e T_{\perp} no caso que $\varepsilon_2/\varepsilon_1 > 1$	88
2.52 Incidência oblíqua - campo elétrico na polarização paralela.	90
2.53 Módulos do coeficientes Γ_{\parallel} e T_{\parallel} no caso que $\varepsilon_2/\varepsilon_1 > 1$	92
2.54 Onda de superfície gerada quando $\theta_i = \theta_c$	99
2.55 Onda plana não uniforme gerada quando $\theta_i > \theta_c$	100

Listas de Tabelas

2.1	Parâmetros constitutivos de meios comuns	53
2.2	Expressões para o cálculo dos parâmetros α , β , Z , λ e v_f	60
2.3	Parâmetros α , β , Z , λ e η de cada meio	77

Capítulo 2

Equação de Onda

2.1 Introdução

Os campos eletromagnéticos de problemas de valor de fronteira são mas facilmente obtidos, resolvendo-se as equações de Maxwell na sua forma diferencial, *equações diferenciais parciais de 1ª ordem*, a saber

$$\nabla \times \vec{E} = -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \quad (2.1)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}. \quad (2.2)$$

Examinando as equações diferenciais (2.1) e (2.2), vemos que estas equações são acopladas, isto é, possuem cada uma duas incógnitas que estão relacionadas entre si $(\vec{E}, \vec{B}) \leftrightarrow (\vec{H}, \vec{D})$. As equações só podem ser desacopladas ao custo de se elevar a ordem, seguindo tal procedimento, chegamos a uma equação diferencial parcial de 2ª ordem, denominada *equação de onda*.

Aplicando o rotacional em ambos os lados das equações (2.1) e (2.2) e usando a identidade vetorial $\nabla \times (\psi \vec{A}) = \nabla \psi \times \vec{A} + \psi \nabla \times \vec{A}$ obtemos

$$\nabla \times \nabla \times \vec{E} = -\nabla \mu \times \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \mu \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{H}, \quad (2.3)$$

$$\nabla \times \nabla \times \vec{H} = \nabla \times \vec{J} + \nabla \epsilon \times \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \epsilon \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \vec{E}, \quad (2.4)$$

substituindo as equações (2.1) e (2.2) na equação (2.3) para retirar os termos em \vec{H} e usando a identidade vetorial $\nabla \times \nabla \times \vec{A} \equiv \nabla(\nabla \cdot \vec{A}) - \nabla^2 \vec{A}$, encontramos

$$\begin{aligned} \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= \frac{\nabla \mu}{\mu} \times [\nabla \times \vec{E}] - \mu \frac{\partial}{\partial t} \left[\vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right], \\ \nabla(\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E} &= \frac{\nabla \mu}{\mu} \times \nabla \times \vec{E} - \mu \frac{\partial \vec{J}_i}{\partial t} - \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} - \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \end{aligned} \quad (2.5)$$

onde o termo \vec{J} foi desmembrado nas parcelas da corrente da fonte \vec{J}_i e a corrente de condução $\vec{J}_c = \sigma \vec{E}$.

Da equação (1.13) e usando a identidade vetorial $\nabla \cdot (\psi \vec{A}) \equiv \vec{A} \cdot \nabla \psi + \psi \nabla \cdot \vec{A}$ temos

$$\nabla \cdot \vec{D} = \nabla \cdot (\epsilon \vec{E}) = \vec{E} \cdot \nabla \epsilon + \epsilon \nabla \cdot \vec{E} = \rho \Rightarrow \nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon} - \vec{E} \cdot \frac{\nabla \epsilon}{\epsilon}. \quad (2.6)$$

Substituindo a equação (2.6) na equação (2.5) e considerando meios homogêneos para os quais $\nabla \mu$ e $\nabla \epsilon$ são nulos, encontramos

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{\nabla \rho}{\epsilon} + \mu \frac{\partial \vec{J}_i}{\partial t} + \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (2.7)$$

o termo $\frac{\nabla \rho}{\epsilon} + \mu \frac{\partial \vec{J}_i}{\partial t}$ representa a contribuição da fonte (excitação), a equação de onda para \vec{H} é obtida de maneira similar, é dada por

$$\nabla^2 \vec{H} = -\nabla \times \vec{J}_i + \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}, \quad (2.8)$$

o termo $\nabla \times \vec{J}_i$ representa a contribuição da fonte.

Para regiões sem fontes e cargas ($\vec{J}_i = \rho = 0$) as equações de ondas (2.7) e (2.8) tornam-se

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (2.9)$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu \sigma \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} + \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (2.10)$$

As equações (2.9) e (2.10) possuem a mesma estrutura matemática, assim, resolvendo uma, a forma matemática da solução serve para a outra. Estas equações fornecem o campo que pode existir num meio caracterizado por (ϵ, μ, σ) . Considerando que o meio é sem perdas, isto é, $\sigma = 0$, estas equações reduzem-se a

$$\nabla^2 \vec{E} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (2.11)$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \mu \epsilon \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (2.12)$$

Definimos o termo

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu \epsilon}}, \quad (2.13)$$

que possui a dimensão de velocidade, no espaço livre $v = c = 1/\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$. Substituindo v nas equações (2.11) e (2.12) encontramos

$$\nabla^2 \vec{E} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (2.14)$$

$$\nabla^2 \vec{H} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (2.15)$$

Vamos considerar que os campos sejam funções da coordenada z e do tempo t , assim as equações (2.14) e (2.15) tornam-se

$$\frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{E}}{\partial t^2}, \quad (2.16)$$

$$\frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 \vec{H}}{\partial t^2}. \quad (2.17)$$

Consideramos que no sistema de coordenadas utilizado os vetores unitários não sejam funções da coordenada z , por exemplo, sistema de coordenadas retangulares, assim, podemos reduzir o estudo da solução das equações vetoriais (2.16) e (2.17), ao estudo da solução da seguinte equação escalar

$$\frac{\partial^2 F}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} \quad (2.18)$$

onde F pode assumir os seguintes valores $E_x, E_y, E_z, H_x, H_y, H_z$. Vamos considerar a solução da equação (2.18) ser da forma $F = f(u)$, $u = z + at$, assim, os termos da equação (2.18) são dados por

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial z} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} = f'(u), & \frac{\partial F}{\partial t} &= \frac{\partial F}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial t} = a f'(u), \\ \frac{\partial^2 F}{\partial z^2} &= f''(u), & \frac{\partial^2 F}{\partial t^2} &= a^2 f''(u), \end{aligned}$$

substituindo na equação (2.18) encontramos

$$f''(u) - \frac{a^2}{v^2} f''(u) = 0, \quad (2.19)$$

que é verdadeira somente se $a = \pm v$, portanto, a solução geral para a equação de onda (2.18) é da forma

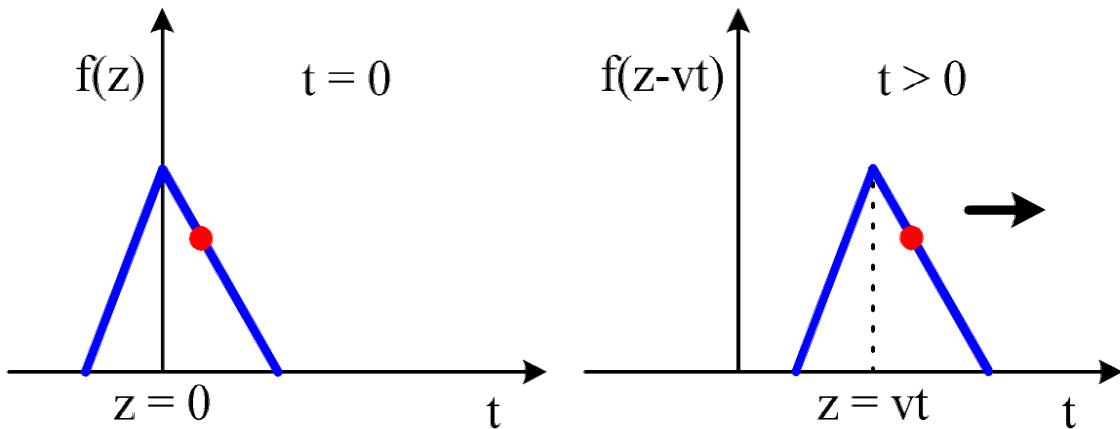
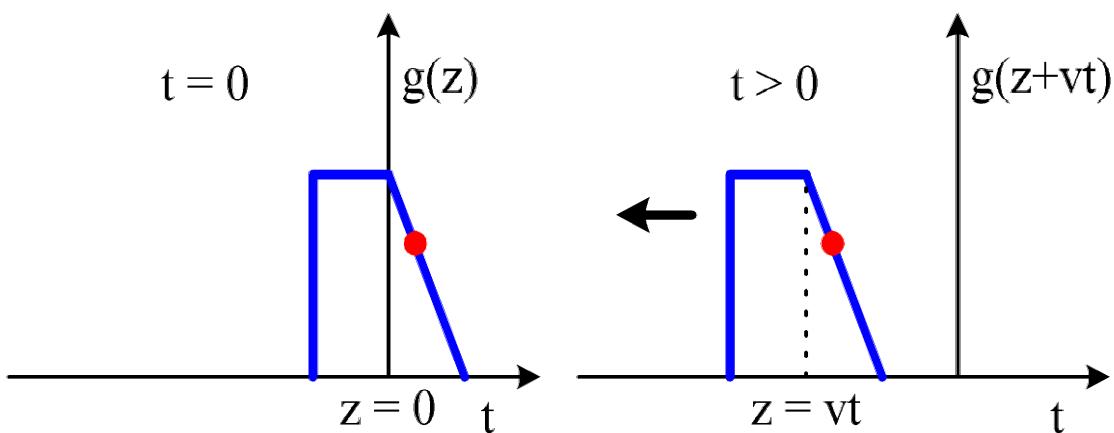
$$F = f(z - vt) + g(z + vt), \quad (2.20)$$

onde f e g são funções arbitrárias.

A solução $f(z - vt)$ representa uma onda movendo-se na direção $+\vec{a}_z$ quando t aumenta, figura 2.1, a solução $g(z + vt)$ representa uma onda movendo-se na direção $-\vec{a}_z$ quando t aumenta, figura 2.2.

As formas das ondas f e g permanecem inalteradas quando elas se movem ao longo do eixo z .

Exemplo 2.1 A função $f(\xi) = 5e^{-(3\xi)^2}$ é uma distribuição no espaço gerada por uma fonte, figura 2.3. Considerando que uma onda possua esta forma e propague na direção $+y$ numa velocidade de $v = 2 \text{ m/s}$, determine a função de onda.

Figura 2.1: Onda propagando no sentido $+z$ Figura 2.2: Onda propagando no sentido $-z$

Solução 2.1 Uma distribuição no espaço define a forma da onda numa dada posição no espaço. O argumento da função de onda que propaga na direção $+y$ é da forma $y - vt$, assim, se substituirmos ξ por $y - 2t$ converteremos a distribuição no espaço para uma onda propagando na direção $+y$ com velocidade de $v = 2 \text{ m/s}$, a forma de onda é

$$F(y, t) = 5 e^{-(3y-6t)^2},$$

na figura 2.4 temos a onda propagando.

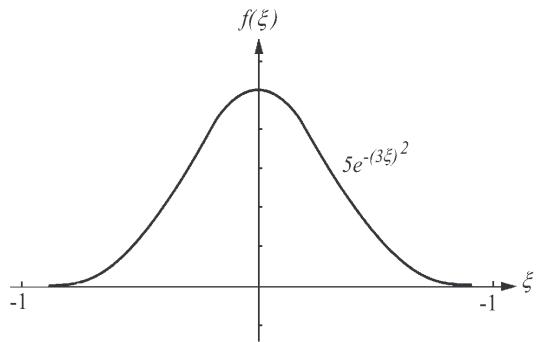
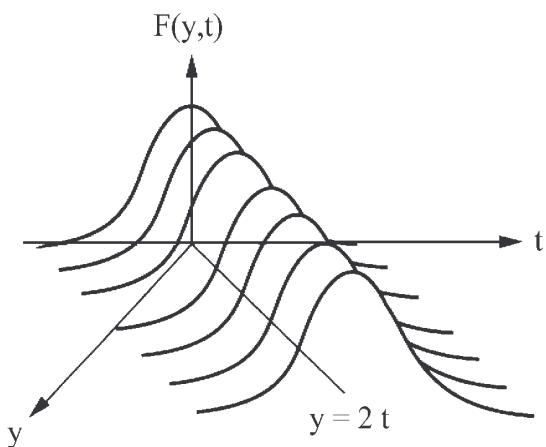


Figura 2.3: Sinal no tempo gerado pela fonte

Figura 2.4: Onda propagando na direção $+y$

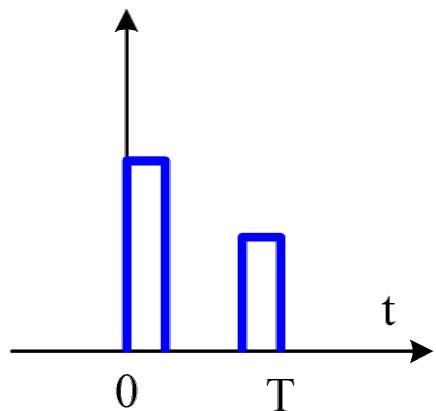
Uma onda pode ser formada de uma *distribuição espacial* $f(\xi)$ pela substituição $\xi = y - vt$, como feito no exemplo 2.1, ou de uma *distribuição temporal* $h(\tau)$ pela substituição $\tau = t - y/v$. A diferença é de ponto de vista, no primeiro caso consideramos que a quantidade $F(y, t)$ é uma distribuição no espaço $f(y)$ que desenvolve-se no tempo como uma onda $f(y-vt)$, assim a função $f(y)$ é exatamente $F(y, 0)$, a variação espacial inicial de F ; no segundo caso $F(y, t)$ é vista como uma distribuição no tempo (sinal) $h(t)$ que espalha-se no espaço como uma onda $h(t - y/v)$, assim a função $h(t)$ é exatamente $F(0, t)$, a variação no tempo de F como vista na origem espacial $y = 0$. Como $\xi = -vt$, a relação entre as duas funções, a distribuição espacial $f(\xi)$ e a distribuição temporal $h(\tau)$ é $h(\tau) = f(-v\tau)$ ou $f(\xi) = h(-\xi/v)$. No exemplo 2.1 a distribuição temporal é $h(\tau) = 5e^{-(6\tau)^2}$.

Vamos interpretar fisicamente a onda $F(z, t)$, assumimos que existe um maneira de gerar a onda e uma maneira de detecta-la. Na origem do eixo z colocamos uma fonte capaz de lançar a onda e, a uma distância $z = l$, colocamos o detector que reconhece ou faz a medição de $F(z, t)$. O meio que separa a fonte do detector permite a $F(z, t)$ propagar ao longo do eixo z como uma onda com velocidade v . O que a fonte faz é gerar um sinal no tempo $h(t)$, na sua própria posição, $z = 0$, assim a fonte é responsável pela existência de $F(0, t) = h(t)$. O meio elabora uma onda $F(z, t)$ do sinal $F(0, t)$ e o detector em $z = l$ pode reconhecer $F(l, t)$ e seguir a sua variação no tempo.

Na figura 2.5.a o sinal da fonte $h(t)$ é mostrado como um par de pulsos, um mais forte seguido de um mais fraco, a duração do sinal é de T segundos. Este sinal $F(0, t) = h(t)$ torna-se $F(z, t) = h(t - z/v)$ por toda a parte e é mostrado na figura 2.5.b onde a função $F(z, t)$ é observada numa posição fixa z do espaço. Como a função $h(t)$ em (a) é zero quando o seu argumento torna-se zero, então torna-se os pulsos e reverte a zero quando o argumento excede T , a função $h(t - z/v)$ em (b) é zero quando o seu argumento torna-se zero, o que ocorre no tempo z/v , então torna-se par de pulsos e reverte a zero quando o argumento $(t - z/v)$ torna-se T , o que ocorre no tempo $(z/v + T)$. Em z temos uma duplicata exata do par de pulsos mas atrasados no tempo de z/v segundos. O gráfico em (b) é o mesmo que em (a) mas deslocado por z/v segundos ao longo do eixo t . O detector em $z = l$ receberá o mesmo sinal que foi produzido pelo gerador do pulso em $z = 0$, mas atrasado por l/v segundos.

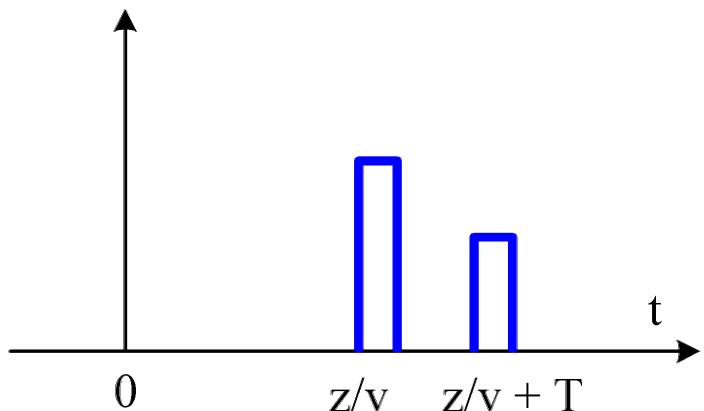
Suponha agora que nós somos capazes de visualizar a onda $F(z, t)$ em um instante de tempo, mas sobre uma faixa do espaço, isto é, estamos vendo a onda F como uma distribuição espacial, figura 2.5.c. A distribuição espacial $f(z)$ é $F(z, t) = h(t - z/v)$, avaliada em $t = 0$, de forma que $f(z) = h(-z/v)$, isto é, a função f é da mesma forma que h , mas com o seu argumento reescalado pelo fator z/v e revertida pelo sinal $-$, figura 2.5.d. A reversão que aparece na figura 2.5.c em relação a figura 2.5.a é porque em (a) temos a ordem no tempo em que o pulso é gerado, no caso o pulso mais intenso é o gerado primeiro e, em (b), como é o pulso mais intenso que foi gerado primeiro, é o que gera distribuição no espaço primeiro. Na figura 2.5.d vemos que o pulso mais intenso propagou na direção $+z$ uma distância maior que o pulso menor e na figura 2.5.b ele é detectado primeiro a uma distância $z = l$ da fonte.

$$h(t) = F(0, t)$$



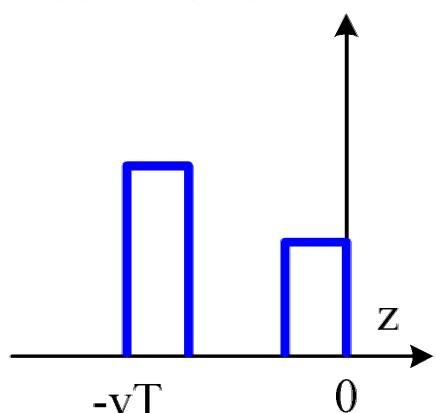
(a)

$$F(z, t) = h(t - z/v)$$



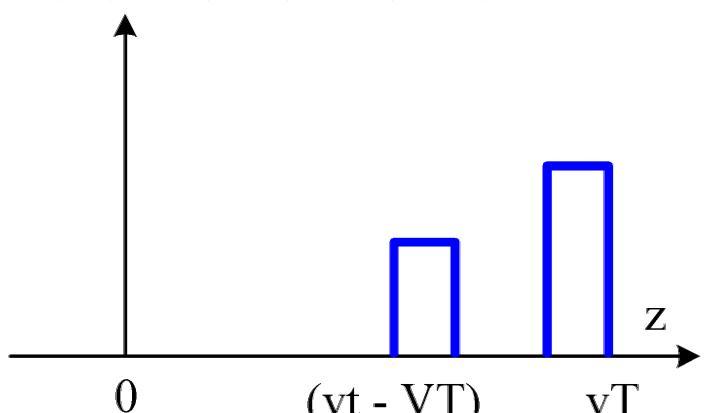
(b)

$$f(z) = F(z, 0) = h(-z/v)$$



(c)

$$F(z, t) = f(z - vt) = h(t - z/v)$$



(d)

Figura 2.5: Quatro vistas da onda $F(z, t)$ versus tempo e espaço

2.2 Equação de Onda para Campos Harmônicos no Tempo

Podemos deduzi-la a partir das equações de Maxwell para campos harmônicos no tempo ou, de forma mais direta, observando que a variação $e^{j\omega t}$ implica em

$$\frac{\partial}{\partial t} \leftrightarrow j\omega, \quad \frac{\partial^2}{\partial t^2} \leftrightarrow (j\omega)^2 = -\omega^2,$$

o que transforma as equações (2.7) e (2.8) nas equações

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\nabla q_e}{\epsilon} + j\omega\mu\mathbf{J}_i + j\omega\mu\sigma\mathbf{E} - \omega^2\mu\epsilon\mathbf{E}, \quad (2.21)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -\nabla \times \mathbf{J}_i + j\omega\mu\sigma\mathbf{H} - \omega^2\mu\epsilon\mathbf{H}. \quad (2.22)$$

Para regiões sem fontes de campo ($\mathbf{J}_i = q_e = 0$) as equações de ondas (2.21) e (2.22) tornam-se

$$\nabla^2 \mathbf{E} = j\omega\mu\sigma\mathbf{E} - \omega^2\mu\epsilon\mathbf{E}, \quad (2.23)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = j\omega\mu\sigma\mathbf{H} - \omega^2\mu\epsilon\mathbf{H}. \quad (2.24)$$

Definimos um parâmetro complexo $\gamma^2 = j\omega\mu\sigma - \omega^2\mu\epsilon$, assim as equações (2.23) e (2.24) tornam-se

$$\nabla^2 \mathbf{E} = \gamma^2 \mathbf{E}, \quad (2.25)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = \gamma^2 \mathbf{H}. \quad (2.26)$$

Para um meio sem fontes e sem perdas ($\mathbf{J}_i = q_e = 0$ e $\sigma = 0$) as equações (2.23) e (2.24) tornam-se

$$\nabla^2 \mathbf{E} = -k^2 \mathbf{E}, \quad (2.27)$$

$$\nabla^2 \mathbf{H} = -k^2 \mathbf{H}, \quad (2.28)$$

onde $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$. Como justificaremos nas seções posteriores, as constantes γ e k são denominadas de **constantes de propagação** e são funções das características elétricas do meio e da freqüência da onda eletromagnética (freqüência da fonte).

A solução da equação (2.25) ou (2.26) define uma onda eletromagnética que perde energia ao propagar no meio com perdas e a solução da equação (2.27) ou (2.28) define uma onda eletromagnética que propaga sem perda da sua energia. Só resolvemos uma das equações porque o outro campo é obtido usando-se as equações de Maxwell.

2.3 Solução da Equação de Onda

Um campo eletromagnético não pode, em geral, ser definido por uma função escalar do tempo e espaço, como consequência, a análise dos campos é mais difícil que o estudo de campos escalares, ex. estudo do fluxo de calor ou da transmissão de vibrações acústicas num meio. Para muitos casos, por exemplo, certos sistemas de coordenadas, as equações vetoriais de onda reduzem-se a equações escalares de onda, as *equações de Helmholtz* e as soluções gerais podem ser construídas a partir de cada solução das equações escalares de onda. A equação escalar de onda tridimensional é separável em 11 sistemas de coordenadas distintos, mas soluções completas da equação vetorial de onda, em uma forma aplicável aos problemas de valor de fronteira, são disponíveis nos sistemas retangular, cilíndrico e esférico. O método de solução é conhecido como o *método de separação de variáveis*.

2.3.1 Solução da equação de onda em coordenadas retangulares

No sistema de coordenadas retangulares as equações vetoriais de onda, equações (2.27) e (2.28), podem ser reduzidas a três equações escalares de onda, isto é possível porque neste sistema os seus vetores unitários \vec{a}_x , \vec{a}_y e \vec{a}_z não variam com as coordenadas (x, y, z) .

Vamos considerar que não temos fontes no meio ($\mathbf{J}_i = q_e = 0$) e nem perdas ($\sigma = 0$), as equações vetoriais de onda, para campos complexos, são dadas por (2.27) e (2.28). Como possuem a mesma forma matemática, consideraremos a solução de uma delas, a outra é obtida pela troca de \mathbf{E} por \mathbf{H} ou \mathbf{H} por \mathbf{E} . Obteremos a solução para o campo complexo \mathbf{E} . A equação vetorial de onda para \mathbf{E} é dada, da equação (2.27), por

$$\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0, \quad (2.29)$$

uma solução geral para \mathbf{E} , em coordenadas retangulares, é escrita como

$$\mathbf{E}(x, y, z) = E_x(x, y, z) \vec{a}_x + E_y(x, y, z) \vec{a}_y + E_z(x, y, z) \vec{a}_z, \quad (2.30)$$

substituindo a equação (2.30) na equação (2.29) obtemos

$$\nabla^2 (E_x \vec{a}_x + E_y \vec{a}_y + E_z \vec{a}_z) + k^2 (E_x \vec{a}_x + E_y \vec{a}_y + E_z \vec{a}_z) = 0, \quad (2.31)$$

como ∇^2 é um operador linear e os vetores unitários \vec{a}_x , \vec{a}_y e \vec{a}_z são constantes, temos

$$\nabla^2 (E_x \vec{a}_x + E_y \vec{a}_y + E_z \vec{a}_z) = \vec{a}_x \nabla^2 E_x + \vec{a}_y \nabla^2 E_y + \vec{a}_z \nabla^2 E_z \quad (2.32)$$

assim, a equação (2.31) reduz-se a três equações de onda escalares, a saber

$$\nabla^2 E_x(x, y, z) + k^2 E_x(x, y, z) = 0, \quad (2.33)$$

$$\nabla^2 E_y(x, y, z) + k^2 E_y(x, y, z) = 0, \quad (2.34)$$

$$\nabla^2 E_z(x, y, z) + k^2 E_z(x, y, z) = 0. \quad (2.35)$$

Como as equações anteriores são da mesma forma matemática podemos resolver só uma e teremos a solução das outras fazendo as devidas substituições, considerando a equação (2.33) temos

$$\nabla^2 E_x(x, y, z) + k^2 E_x(x, y, z) = \frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 z} + k^2 E_x = 0. \quad (2.36)$$

Vamos usar o método de separação de variáveis, que consiste em assumir uma solução para $E_x(x, y, z)$ como o produto de três funções, a saber

$$E_x(x, y, z) = f(x) g(y) h(z), \quad (2.37)$$

onde as variações em x , y e z são separáveis (daí o nome) nas funções f , g e h . Se qualquer inconsistência for encontrada no desenvolvimento, uma outra forma para obter a solução deve ser tentada. Substituindo a solução proposta, equação (2.37), na equação (2.36), obtemos

$$g h \frac{\partial^2 f}{\partial^2 x} + f h \frac{\partial^2 g}{\partial^2 y} + f g \frac{\partial^2 h}{\partial^2 z} + k^2 f g h = 0. \quad (2.38)$$

Como $f(x)$, $g(y)$ e $h(z)$ são funções de uma única variável, podemos trocar as derivadas parciais na equação (2.38) por derivadas ordinárias, fazendo isto e dividindo cada termo por fgh , nós encontramos

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d^2 x} + \frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d^2 y} + \frac{1}{h} \frac{d^2 h}{d^2 z} = -k^2. \quad (2.39)$$

Cada termo da equação (2.39) é uma função de uma única variável, assim, a soma destes termos é igual a constante $-k^2$ somente se cada termo for igual a uma constante. Separamos a equação (2.39) em três equações, associando a cada uma a constante respectiva, temos então

$$\frac{1}{f} \frac{d^2 f}{d^2 x} = -k_x^2 \Rightarrow \frac{d^2 f}{d^2 x} = -f k_x^2, \quad (2.40)$$

$$\frac{1}{g} \frac{d^2 g}{d^2 y} = -k_y^2 \Rightarrow \frac{d^2 g}{d^2 y} = -g k_y^2, \quad (2.41)$$

$$\frac{1}{h} \frac{d^2 h}{d^2 z} = -k_z^2 \Rightarrow \frac{d^2 h}{d^2 z} = -h k_z^2, \quad (2.42)$$

onde k_x , k_y e k_z são constantes de onda nas direções x , y e z , respectivamente, são determinadas pelas condições de fronteira e satisfazendo a seguinte equação

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2, \quad (2.43)$$

o que implica que somente duas constantes são independentes, isto é, determinadas as duas primeiras a terceira está especificada.

A solução das equações (2.40), (2.41) e (2.42), que são adequadas para o nosso problema, são formadas por funções exponenciais e senoidais, a saber

$$f_1 = A_1 e^{-j k_x x} + B_1 e^{+j k_x x}, \quad (2.44)$$

$$f_2 = C_1 \cos(k_x x) + D_1 \sin(k_x x), \quad (2.45)$$

$$g_1 = A_2 e^{-j k_y y} + B_2 e^{+j k_y y}, \quad (2.46)$$

$$g_2 = C_2 \cos(k_y y) + D_2 \sin(k_y y), \quad (2.47)$$

$$h_1 = A_3 e^{-j k_z z} + B_3 e^{+j k_z z}, \quad (2.48)$$

$$h_2 = C_3 \cos(k_z z) + D_3 \sin(k_z z). \quad (2.49)$$

Todas as diferentes formas de solução são válidas para $f(x)$, $g(y)$ e $h(z)$, mas deve-se escolher a forma mais apropriada para simplificar a complexidade da solução. As soluções dadas na forma de exponenciais representam **ondas propagantes** e as soluções dadas pelas senoides representam **ondas estacionárias**.

Exemplo 2.2 Consideremos um problema unidirecional em que a solução adequada é da forma $A_3 e^{-jk_z z}$, com $A_3 = 1$, o campo complexo \mathbf{E} para o problema é dado por

$$\mathbf{E} = (\vec{a}_x + \vec{a}_y) e^{-jk_z z},$$

recuperando a sua forma instantânea obtemos

$$\vec{E} = \Re \{ \mathbf{E} e^{j\omega t} \} = (\vec{a}_x + \vec{a}_y) \cos(\omega t - k_z z),$$

que é uma função da forma $f(z - vt)$ já que $\cos(\omega t - k_z z) = \cos(z - \omega t/k_z) = \cos(z - \omega t/k) = \cos(z - vt)$, indicando uma onda propagando na direção $+z$.

Exemplo 2.3 Consideremos um outro problema unidirecional em que a solução adequada é da forma $C_3 \cos(k_z z)$, com $C_3 = 1$, o campo complexo \mathbf{E} para o problema é dado por

$$\mathbf{E} = \vec{a}_x \cos(k_z z),$$

recuperando a sua forma instantânea obtemos

$$\vec{E} = \Re \{ \mathbf{E} e^{j\omega t} \} = \vec{a}_x \cos(k_z z) \cos(\omega t),$$

que representa uma onda estacionária. Na figura 2.6 vemos que um ponto da onda não varia a sua posição espacial quando o tempo passa.

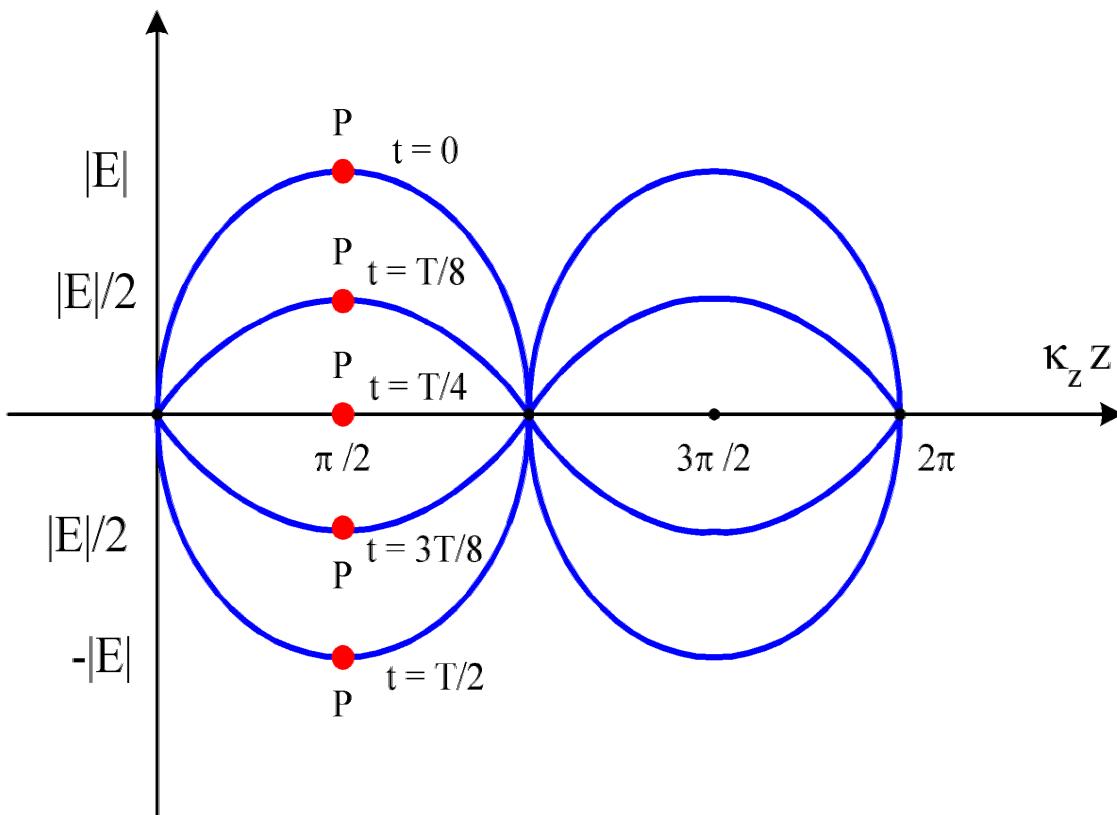


Figura 2.6: Onda estacionária pura mostrando E em vários instantes de tempo

2.4 Ondas Planas Uniformes

As soluções mais simples da equação de onda são as *ondas planas uniformes*, caracterizadas por campos uniformes sobre superfícies planas infinitas em instantes fixos do tempo. As propriedades que simplificam o problema são: as soluções se aplicam no sistema de coordenadas retangulares, e o número de componentes de campo reduzem-se a um mínimo de duas componentes.

Consideremos a solução da equação de onda para a componente x do campo elétrico, então temos, da equação (2.36), que

$$\frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 y} + \frac{\partial^2 E_x}{\partial^2 z} + k^2 E_x = 0, \quad (2.50)$$

considerando que a onda propaga em um meio ilimitado a solução adequada, das equações (2.44) a (2.49), é da seguinte forma

$$E_x(\vec{r}) = E_{x0} e^{\pm j(k_x x + k_y y + k_z z)}, \quad (2.51)$$

onde E_{x0} é uma constante arbitrária, substituindo esta solução na equação de onda para E_x obtemos

$$k_x^2 + k_y^2 + k_z^2 = k^2 = \omega^2 \mu \varepsilon, \quad (2.52)$$

que é conhecida como *relação de dispersão*, uma relação funcional entre a constante de fase k e a freqüência ω . Definimos um vetor propagação \vec{k} da seguinte forma

$$\vec{k} = k_x \vec{a}_x + k_y \vec{a}_y + k_z \vec{a}_z, \quad (2.53)$$

e o vetor posição \vec{r} como

$$\vec{r} = x \vec{a}_x + y \vec{a}_y + z \vec{a}_z, \quad (2.54)$$

substituindo as definições (2.53) e (2.54) na equação (2.51) obtemos

$$E_x(\vec{r}) = E_{x0} e^{\pm j \vec{k} \cdot \vec{r}}, \quad (2.55)$$

e a componente x do campo elétrico variante no tempo é dada por

$$\begin{aligned} E_x(\vec{r}, t) &= \Re \{ E_{x0} e^{j\omega t} e^{\pm j(k_x x + k_y y + k_z z)} \} \\ &= E_{x0} \cos(\omega t \pm \vec{k} \cdot \vec{r}). \end{aligned} \quad (2.56)$$

Tomemos o campo elétrico $E_x(\vec{r}, t)$ em algum tempo, digamos $t = t_0$ e verifiquemos em que pontos do espaço, definidos pelo vetor \vec{r} , a amplitude do campo elétrico E_x é constante. Como t é fixo, isto requer que $\vec{k} \cdot \vec{r}$ também o seja, assim

$$\vec{k} \cdot \vec{r} = \text{constante} = C_1, \quad (2.57)$$

esta equação define um plano de fase constante, daí o nome *onda plana*, em que a amplitude do campo elétrico é constante (uniforme), conforme mostrado na figura 2.7.a. Na figura 2.7.b vemos a propagação da onda plana uniforme em dois instantes de tempo e na figura 2.8 temos os seus planos de fase.

Das figuras 2.7 e 2.8 vemos que o vetor \vec{k} define a direção de propagação da onda e da relação de dispersão, equação (2.52), temos que a sua magnitude é dada por

$$|\vec{k}| = k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}, \quad (2.58)$$

esta equação mostra que estamos livres para escolher qualquer direção, isto é, definir k_x , k_y e k_z , desde que extremo do vetor \vec{k} esteja sobre uma esfera de raio $k = \omega \sqrt{\mu \varepsilon}$, conforme mostrado na figura 2.9.

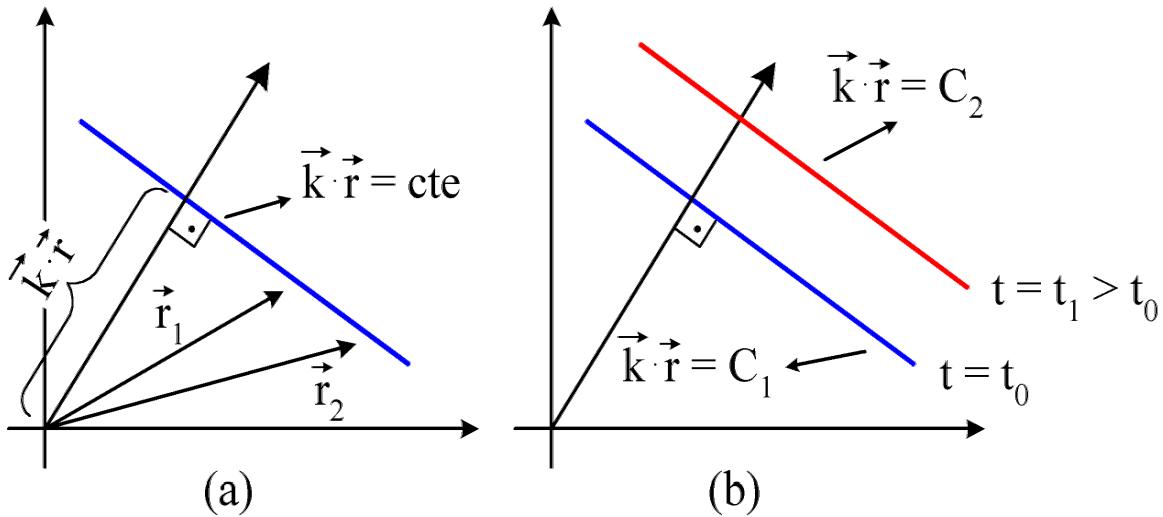


Figura 2.7: Onda plana uniforme

Exemplo 2.4 Uma onda plana oscilando na freqüência de $f = 3 \times 10^{14} \text{ Hz}$ está propagando no espaço livre e tem um campo elétrico dado por $\mathbf{E} = e^{-jk_x x} e^{-jk_z z} \vec{a}_y$, onde $k_x = \pi \times 10^6 \text{ (rad/m)}$ e $k_y = 0$. Qual é o ângulo que o vetor propagação faz com respeito ao eixo z ?

Solução 2.4 A magnitude do vetor \vec{k} é

$$k = 2\pi \times 3 \times 10^{14} \times \sqrt{4\pi \times 10^{-7} \times (1/36\pi) \times 10^{-9}} = 2\pi \times 10^6,$$

assim

$$\begin{aligned} k_z &= \sqrt{k^2 - k_x^2} = \sqrt{(2\pi)^2 - \pi^2} \times 10^6 = \sqrt{3}\pi 10^6 \\ \vec{k} &= k_x \vec{a}_x + k_z \vec{a}_z \\ \tan \theta &= k_x/k_z = 1/\sqrt{3} \rightarrow \theta = 30^\circ \end{aligned}$$

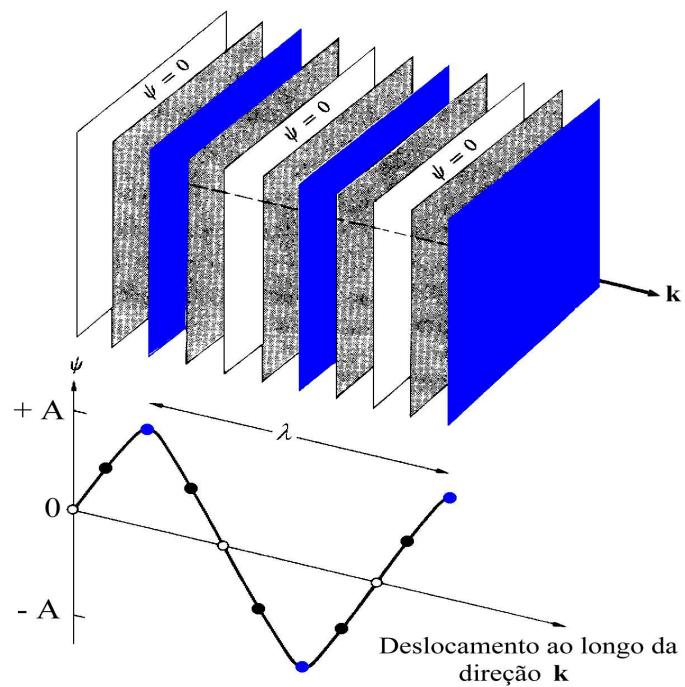
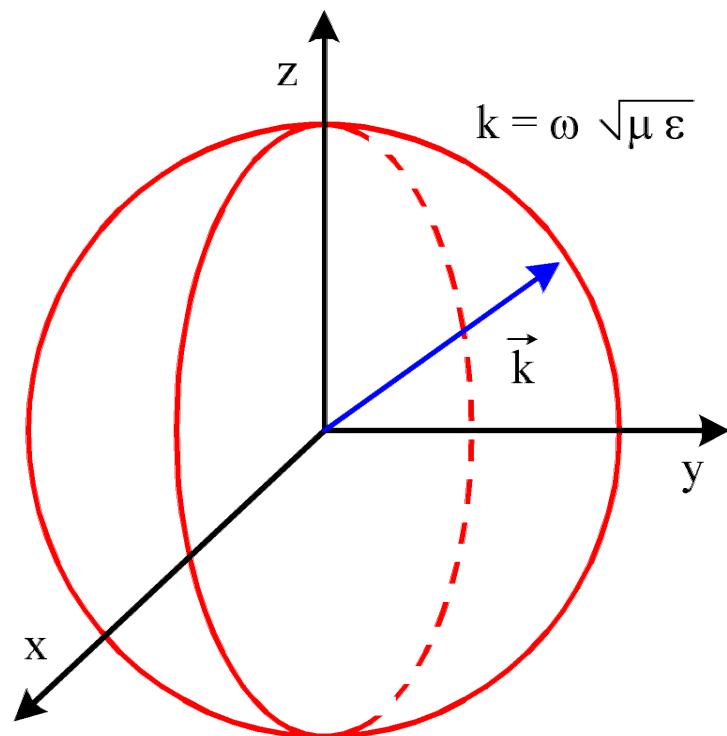


Figura 2.8: Planos de fase de uma onda plana uniforme

Figura 2.9: Esfera que contém o vetor propagação \vec{k} .

2.4.1 Equações de Maxwell para solução em ondas planas

Nós mostramos que a consideração de campos eletromagnéticos harmônicos no tempo reduz a complexidade das equações de Maxwell ao eliminar a variável tempo. Para muitos problemas de interesse prático, a dependência espacial pode também ser eliminada considerando que as soluções dos campos são em termos de ondas planas. Assumimos agora campos eletromagnéticos com variação harmônica no tempo e variação espacial da forma $e^{\pm j \vec{k} \cdot \vec{r}}$, isto é, ondas planas propagando num meio sem perdas, assim temos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}(\vec{r}) &= \mathbf{E} e^{\pm j \vec{k} \cdot \vec{r}} \\ \mathbf{H}(\vec{r}) &= \mathbf{H} e^{\pm j \vec{k} \cdot \vec{r}}.\end{aligned}\quad (2.59)$$

O efeito do operador rotacional sobre campos com variação $e^{\pm j \vec{k} \cdot \vec{r}}$ é

$$\begin{aligned}\nabla \times \mathbf{E}(\vec{r}) &= \left(\frac{\partial}{\partial x} \vec{a}_x + \frac{\partial}{\partial y} \vec{a}_y + \frac{\partial}{\partial z} \vec{a}_z \right) \times \mathbf{E} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ &= \pm j (k_x \vec{a}_x + k_y \vec{a}_y + k_z \vec{a}_z) \times \mathbf{E} e^{-j(k_x x + k_y y + k_z z)} \\ &= \pm j \vec{k} \times \mathbf{E}(\vec{r}).\end{aligned}\quad (2.60)$$

Usando a mesma técnica mostramos que o operador divergente leva a

$$\nabla \cdot \mathbf{E}(\vec{r}) = \pm j \vec{k} \cdot \mathbf{E}(\vec{r}).\quad (2.61)$$

Das equações (2.60) e (2.61) vemos que o operador ∇ é substituído por $\pm j \vec{k}$, o que leva a uma forma simplificada das equações de Maxwell, que, em uma região sem fontes, são dadas por

$$\vec{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H} \quad (2.62)$$

$$\vec{k} \times \mathbf{H} = -\omega \varepsilon \mathbf{E} \quad (2.63)$$

$$\vec{k} \cdot \mathbf{D} = 0 \quad (2.64)$$

$$\vec{k} \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (2.65)$$

Observe que as variações espaciais foram eliminadas porque o termo $e^{\pm j \vec{k} \cdot \vec{r}}$ é comum a todos os campos.

Algumas considerações gerais podem ser feitas analisando as equações de Maxwell para ondas planas:

- \mathbf{E} é perpendicular a \mathbf{H} ;
- \mathbf{D} e \mathbf{B} são perpendiculares a direção de propagação da onda;
- como para meios isotrópicos \mathbf{D} e \mathbf{B} estão relacionados a \mathbf{E} e \mathbf{H} , respectivamente, por escalares ε e μ temos que \mathbf{E} e \mathbf{H} são perpendiculares a \vec{k} .

Das considerações temos que os campos \mathbf{E} e \mathbf{H} são transversos a direção de propagação, isto é, não possuem componente na direção de propagação e são perpendiculares entre si, este tipo de onda recebe o nome de **onda eletromagnética transversal**, onda **TEM**. Na figura 2.10 temos uma ilustração de uma onda TEM.

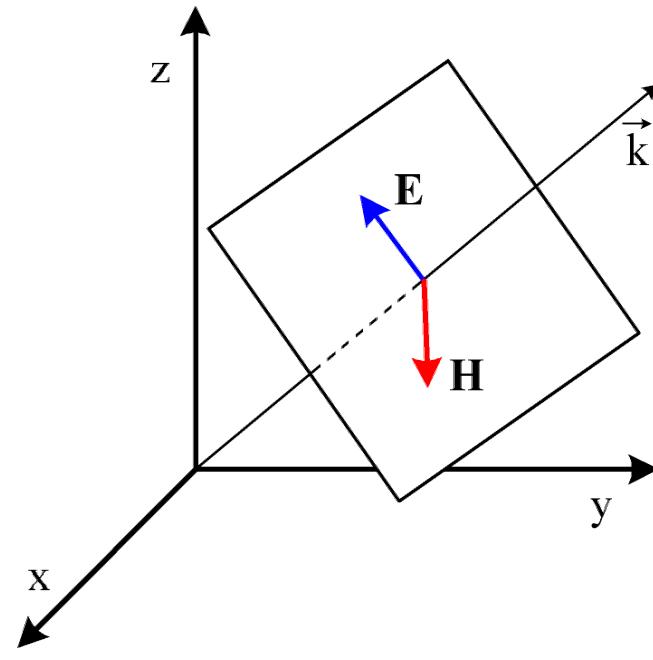


Figura 2.10: Onda eletromagnética transversal

Exemplo 2.5 Uma onda plana oscilando na freqüência de 20MHz está propagando no espaço livre e tem um campo elétrico dado por $\mathbf{E} = 1000 e^{-jk_z z} \vec{a}_x (\text{V/m})$. Determine os campos instantâneos \vec{E} e \vec{H} .

Solução 2.5 O campo magnético na forma fasorial é facilmente obtido usando-se a equação (2.62), temos então

$$\begin{aligned}\mathbf{H} &= \frac{\vec{k} \times \mathbf{E}}{\omega \mu} = \frac{k_z \vec{a}_z \times 1000 e^{-jk_z z} \vec{a}_x}{\omega \mu} \\ &= \frac{1000 e^{-jk_z z} \vec{a}_y}{120\pi} = 2,65 e^{-jk_z z} \vec{a}_y (\text{A/m})\end{aligned}$$

As formas instantâneas são obtidas multiplicando-se os campos fasoriais por $e^{j\omega t}$ e tomando-se a parte real, assim temos

$$\begin{aligned}\vec{E} &= 1000 \cos(\omega t - k_z z) \vec{a}_x (\text{V/m}) \\ \vec{H} &= 2,65 \cos(\omega t - k_z z) \vec{a}_y (\text{A/m})\end{aligned}$$

Exemplo 2.6 O campo elétrico de uma onda plana é dado por $\vec{E} = E_1 \cos(\omega t - k_z z) \vec{a}_x + E_2 \cos(\omega t - k_z z) \vec{a}_y (\text{V/m})$, num meio caracterizado por (μ, ϵ) . Determine o campo magnético \vec{H} desta onda plana.

Solução 2.6 Colocando o campo \vec{E} na forma fasorial temos

$$\mathbf{E} = E_1 e^{-jk_z z} \vec{a}_x + E_2 e^{-jk_z z} \vec{a}_y$$

usando agora a equação (2.62) obtemos o campo \vec{H} na forma fasorial

$$\mathbf{H} = \frac{\vec{k} \times \mathbf{E}}{\omega \mu} = \frac{k_z \vec{a}_z \times [E_1 e^{-jk_z z} \vec{a}_x + E_2 e^{-jk_z z} \vec{a}_y]}{\omega \mu},$$

como $k_z = k = \omega\sqrt{\mu\epsilon}$, obtemos

$$\vec{H} = E_1 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} e^{-jk_z z} \vec{a}_y - E_2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} e^{-jk_z z} \vec{a}_x,$$

colocando o campo no domínio do tempo temos

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \Re \left\{ \left(E_1 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} e^{-jk_z z} \vec{a}_y - E_2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} e^{-jk_z z} \vec{a}_x \right) e^{j\omega t} \right\} \\ &= -E_2 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos(\omega t - k_z z) \vec{a}_x + E_1 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos(\omega t - k_z z) \vec{a}_y \text{ (A/m)}, \end{aligned}$$

Exemplo 2.7 Uma onda plana cujo campo eletromagnético é dado por $\vec{E} = E_1 \cos(\omega t - k_z z) \vec{a}_x$ (V/m) e $\vec{H} = E_1 \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \cos(\omega t - k_z z) \vec{a}_y$ (A/m), incide sobre uma antena retangular como mostrado na figura 2.11. Determine a tensão observada no osciloscópio.

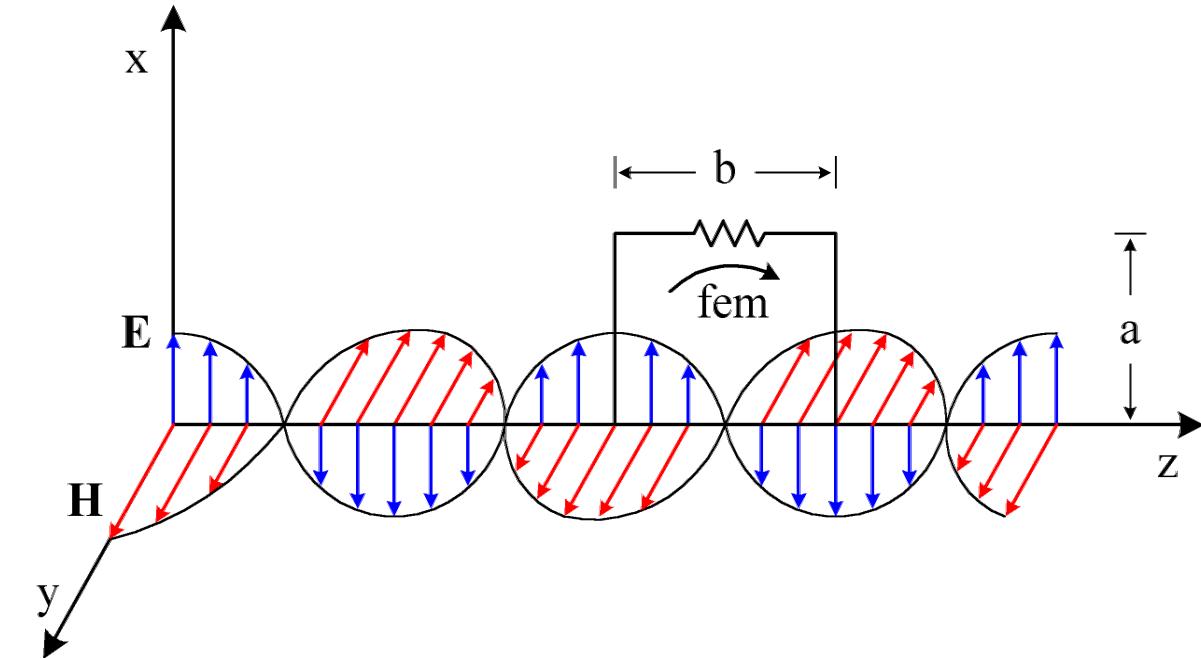


Figura 2.11: Onda plana incidindo na antena retangular

Solução 2.7 Podemos calcular a força eletromotriz induzida na antena pela onda incidente de duas formas, uma é usando o campo elétrico incidente, expressão do trabalho, $fem = \oint \vec{E} \cdot d\vec{l}$, a outra é considerando o fluxo magnético incidente na antena, $fem = - \int_s \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \cdot d\vec{s}$. Vamos calcular usando a do trabalho, deixando o outro método como exercício. Calculando pelo trabalho temos

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_1^2 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_2^3 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_3^4 \vec{E} \cdot d\vec{l} + \int_4^1 \vec{E} \cdot d\vec{l},$$

o sentido de integração escolhido está ilustrado na figura 2.12.a, onde vemos a distribuição do campo elétrico sobre a antena, observe que nos percursos $2 \rightarrow 3$ e $4 \rightarrow 1$ temos que o campo elétrico é perpendicular ao percurso, dando numa integração nula, assim, as integrais acima reduzem-se a

$$\oint \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_a^0 E_1 \cos(\omega t - k_z z_1) \vec{a}_x \cdot dx \vec{a}_x + \int_0^a E_1 \cos(\omega t - k_z z_3) \vec{a}_x \cdot dx \vec{a}_x,$$

resolvendo as integrais obtemos para a fem induzida no circuito

$$\begin{aligned} fem &= -a E_1 \cos(\omega t - k_z z_1) + a E_1 \cos(\omega t - k_z z_3) \\ &= a E_1 [\cos(\omega t - k_z z_3) - \cos(\omega t - k_z z_1)], \end{aligned}$$

como $z_1 = z_3 + b$ e definindo $\phi_z = \omega t - k_z z_3$ obtemos para a expressão anterior

$$\begin{aligned} fem &= a E_1 [\cos(\phi_z) - \cos(\phi_z - k_z b)] \\ &= a E_1 [-2 \sin 1/2(2\phi_z - k_z b) \sin 1/2(k_z b)] \\ &= 2a E_1 [-\sin(\phi_z - k_z b/2) \sin(k_z b/2)]. \end{aligned}$$

Sabemos que $k_z = k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$ e que a senoide repete o seu valor está a λ da distância original, isto é, $z = z' + \lambda$ repete o valor obtido com $z = z'$, assim um deslocamento de $k \lambda$ corresponde a um acréscimo de 2π na fase da onda, isto é, $k \lambda = 2\pi$. Na equação anterior temos um termo representando a variação no tempo, $\sin(\phi_z - k_z b/2)$, e um representando a amplitude máxima alcançada, $2a E_1 \sin(k_z b/2)$, esta amplitude máxima ocorre quando $k_z b/2 = (2n + 1)\pi/2$, isto é, múltiplo ímpar de $\pi/2$, assim temos que

$$\frac{k_z b}{2} = (2n + 1) \frac{\pi}{2} \rightarrow b = (2n + 1) \frac{\lambda}{2},$$

a menor dimensão b da antena em que a fem é máxima é dada por $b = \lambda/2$, neste caso obtemos para fem

$$fem = 2a E_1 [-\sin(\phi_z - \pi/2)] = 2a E_1 \cos(\omega t - k_z z), \quad (V)$$

onde substituímos z_3 por z , uma coordenada sobre o eixo z .

Associado com a fem induzida, isto é, com a distribuição de potencial imposta sobre a antena $V = fem$, temos um campo elétrico induzido sobre os pontos da antena, como mostrado na figura 2.12.b, este campo é dado por

$$|E| = |\nabla V| = 2a E_1 k_z [\cos(\phi_z - k_z b/2) \sin(k_z b/2)], \quad (V/m)$$

observe que este campo induzido é função da posição da antena no eixo z e função do tempo.

Considerando o caso de indução máxima, isto é, $b = \lambda/2$ obtemos

$$|E| = 4a E_1 \frac{\pi}{\lambda} \cos(\phi_z - \pi/2) = E_1 \frac{4a \pi}{\lambda} \sin(\omega t - k_z z). \quad V/m$$

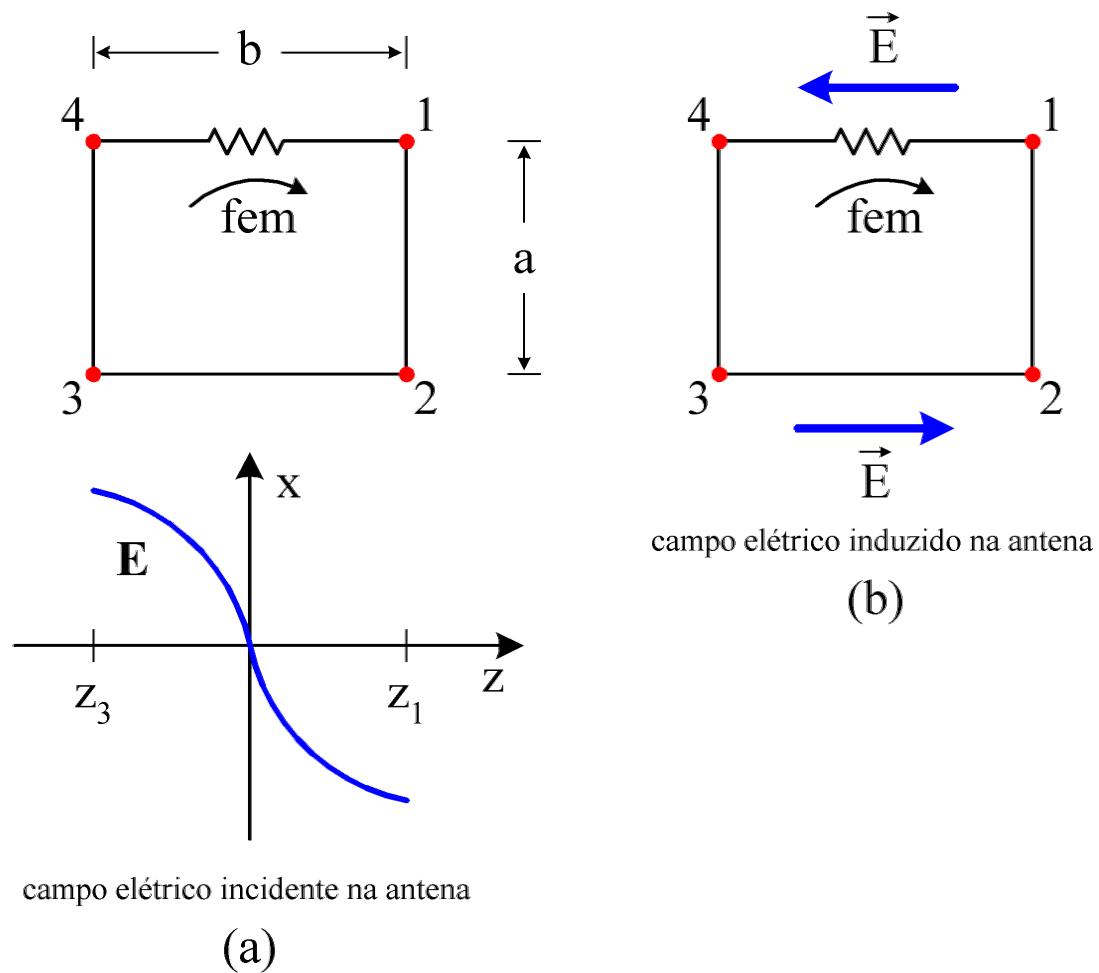


Figura 2.12: Distribuição de campo elétrico sobre a antena

2.5 Parâmetros da Onda Eletromagnética

Nesta seção definiremos parâmetros da onda eletromagnética, estes elementos são importantes para se entender como se comporta a onda ao propagar em um meio e como esta propagação afeta os seus parâmetros, isto é, a onda.

2.5.1 Impedância de Onda

A relação entre uma componente de campo elétrico E e uma componente de campo magnético H tem a dimensão de impedância, e é denominada de **impedância de onda** na direção definida pela regra do produto vetorial aplicada às duas componentes, na forma matemática temos

$$Z = \frac{E}{H}, \quad (\Omega) \quad (2.66)$$

assim, se tivermos uma onda plana propagando na direção $+z$ com componentes E_x, E_y, H_x e H_y , teremos

$$Z_z = \frac{E_x}{H_y} = -\frac{E_y}{H_x}, \quad (2.67)$$

observe que o sinal negativo aparece porque o produto vetorial $E_y \times H_x$ está na direção contrária da propagação. Z_z é a Impedância na direção de propagação, isto é, na direção $+z$.

Exemplo 2.8 Determine a impedância de uma onda plana na sua direção de propagação.

Solução 2.8 A direção de propagação de uma onda plana é definida pelo vetor propagação \vec{k} e a impedância nesta direção é dada pela razão entre as componentes \vec{E} e \vec{H} que são perpendiculares a direção de propagação, assim, usando a equação (2.62) temos

$$\vec{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H} \rightarrow k \hat{k} \times \mathbf{E} = \omega \mu \mathbf{H}, \quad k = \omega \sqrt{\mu \epsilon}$$

$$\frac{|\mathbf{E}|}{|\mathbf{H}|} = \frac{|\mathbf{E}|}{\frac{|k|}{\omega \mu} |\hat{k} \times \mathbf{E}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{|\mathbf{E}|}{|\hat{k} \times \mathbf{E}|} = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{|\mathbf{E}|}{|\hat{k}| |\mathbf{E}| \sin \theta}$$

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}},$$

o que mostra que a impedância de onda da onda plana é igual a **impedância intrínseca do meio** ou **impedância característica do meio**.

2.5.2 Velocidade de Fase

Consideremos uma onda plana da forma

$$\mathbf{E}(\vec{r}) = \vec{E}_0 e^{-jk_x x} e^{j\phi}, \quad (2.68)$$

no domínio do tempo temos

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k_x x + \phi), \quad (2.69)$$

na figura 2.13 temos o gráfico desta onda nos instantes de tempo $t = 0$, $t = t_1$ e $t = t_2$.

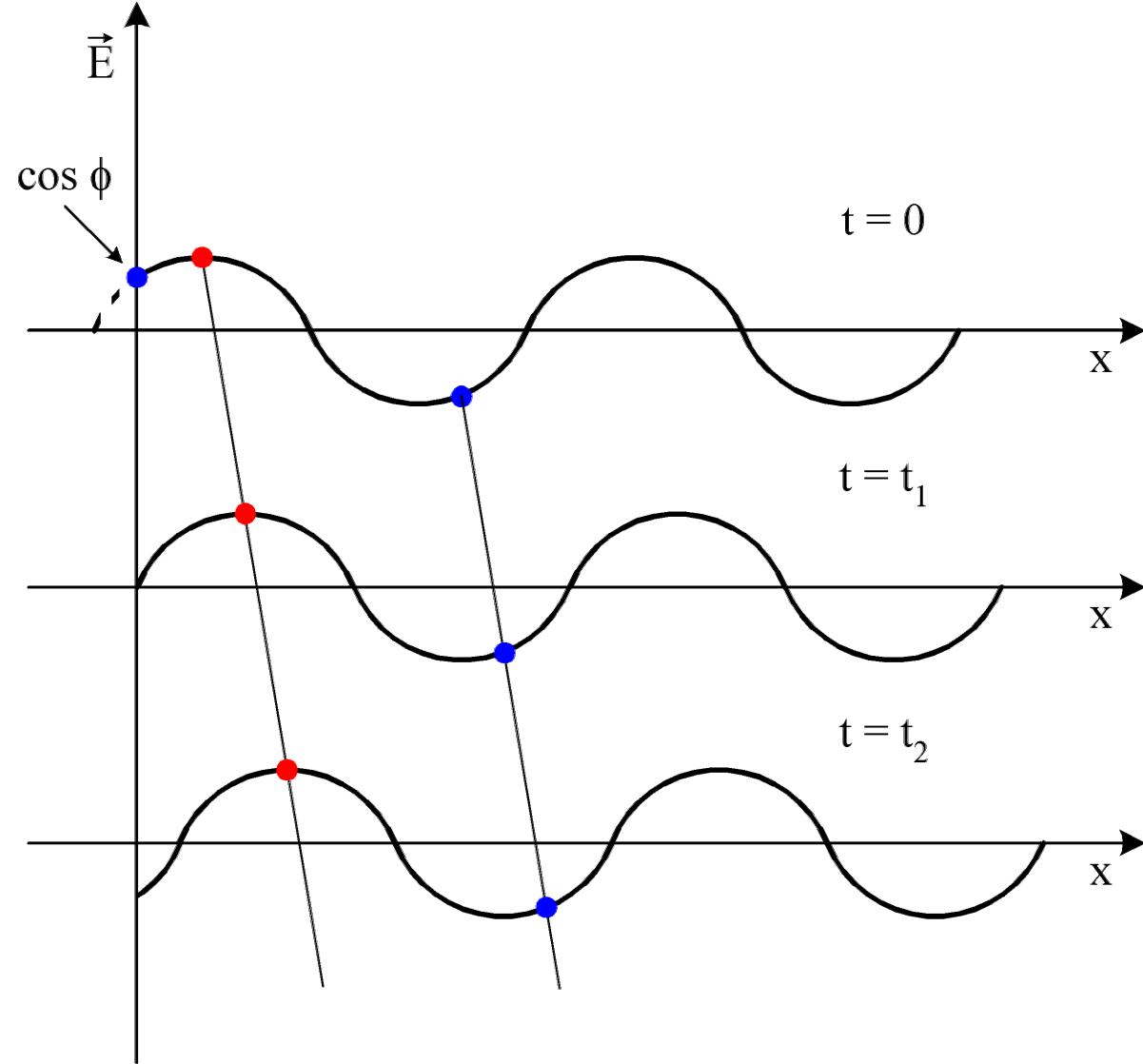


Figura 2.13: Distribuição de campo elétrico no espaço

Na figura 2.13 assinalamos dois pontos e observamos o seu comportamento, queremos determinar a velocidade que um observador teria que ter para acompanhar a evolução destes pontos no espaço. Cada ponto indica um valor para a função cosseno, isto é, está associado a uma fase. O primeiro ponto está associado com a fase ϕ_1 , assim o par (t_0, x_0) implica na fase ϕ_1 , o par (t_1, x_1) também implica na fase ϕ_1 e o par $(t_2, x_2) \rightarrow \phi_1$, temos então

$$\omega t_0 - k_x x_0 + \phi = \omega t_1 - k_x x_1 + \phi = \omega t_2 - k_x x_2 + \phi = \text{constante},$$

define os pontos de mesma fase. Na forma geral temos

$$\omega t - k_x x + \phi = \text{constante}. \quad (2.70)$$

é a equação de pontos de mesma fase. Derivando esta equação em relação ao tempo obtemos

$$\begin{aligned}\omega - k_x \frac{dx}{dt} &= 0 \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\omega}{k_x} \\ v_{fx} &= \frac{\omega}{k_x},\end{aligned}\quad (2.71)$$

que é a velocidade de fase na direção de propagação definida por k_x . A velocidade de fase na direção de propagação definida pelo vetor \vec{k} é, similarmente, dada por

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}, \quad (2.72)$$

no espaço livre a velocidade de fase observada na direção de propagação é $v_f = c$. Como veremos no exemplo a velocidade de fase v_f pode ser maior que a velocidade da luz c , ressaltamos que a velocidade de fase é um parâmetro conceitual, não sendo uma velocidade física.

Exemplo 2.9 Considere a onda plana dada no exemplo 2.4, cujo vetor propagação está no plano xz , como mostrado na figura 2.14. O vetor campo elétrico é definido por $\mathbf{E} = E_0 e^{j(k_x x + k_z z)} \vec{a}_y$ com $k_x = \pi \times 10^6$ (rad/m) e $k_z = \sqrt{3} \pi \times 10^6$ (rad/m). Determine as velocidades de fase nas direções \vec{a}_x , \vec{a}_z e na direção de propagação da onda.

Solução 2.9 Para acompanhar um ponto de fase propagando na direção \vec{a}_z temos que ter a seguinte velocidade de fase

$$v_{fz} = \frac{\omega}{k_z} = \frac{6\pi \times 10^{14}}{\sqrt{3}\pi \times 10^6} \approx 3,46 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

No caso de um ponto de fase propagando na direção \vec{a}_x temos

$$v_{fx} = \frac{\omega}{k_x} = \frac{6\pi \times 10^{14}}{\pi \times 10^6} = 6 \times 10^8 \text{ m/s}.$$

Para o caso de um ponto de fase sendo acompanhado na direção de propagação da onda temos

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{6\pi \times 10^{14}}{2\pi \times 10^6} = 3 \times 10^8 \text{ m/s},$$

que é igual a velocidade da propagação da energia, velocidade da luz porque o meio é o espaço livre. Na figura 2.14 assinalamos as velocidades de fase da onda.

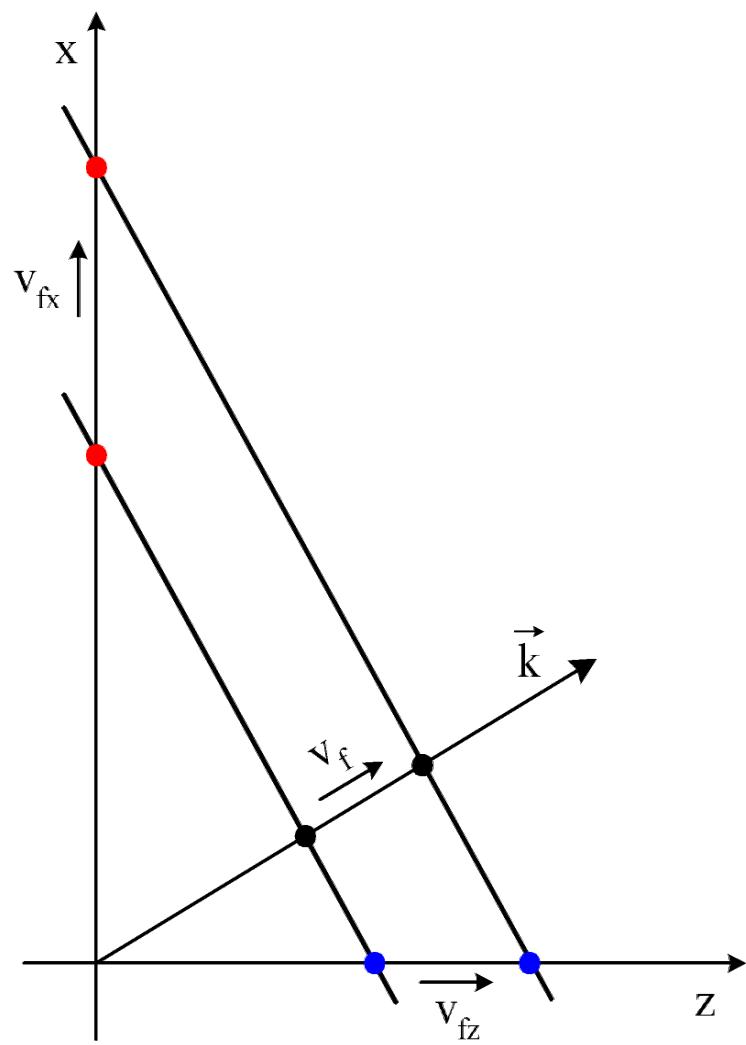


Figura 2.14: Onda plana e suas velocidades de fase

2.5.3 Velocidade de Grupo

Até agora estudamos a onda eletromagnética numa única freqüência, mas, em geral, temos um pacote de ondas em várias freqüências, representando um sinal com informação a ser transmitido por um dado meio. Da definição de velocidade de fase, equação 2.72 temos

$$v_f = \frac{\omega}{k} = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}},$$

que pode depender da freqüência, no caso dos parâmetros variarem com a freqüência, *meio dispersivo*, ou não, *meio não dispersivo*. O conceito de velocidade de fase só é aplicável a campos harmônicos de estado estável, isto é, amplitude e freqüência constantes.

Podemos usar a superposição de Fourier, de qualquer quantidade de soluções de campos harmônicos de estado estável com freqüências diferentes, para construir *ondas moduladas*, isto é, ondas em que algum de seus parâmetros variam de acordo com uma informação. Quando o parâmetro que varia é a amplitude temos a *modulação AM*, quando é a freqüência temos a *modulação FM*. O processo de modulação leva a um outro conceito conhecido como *velocidade de grupo* ou *velocidade da informação*, que está associado com o grupo de ondas distribuídas no espectro de freqüências contidas no sinal modulado.

Consideremos a formação de uma onda modulada em amplitude, para uma onda com duas freqüências, em torno de uma central ω_0 , temos

$$\begin{aligned}\omega_0 + \Delta\omega \rightarrow k &= \omega_0\sqrt{\mu\varepsilon} + \Delta\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = k_0 + \Delta k_0 \\ \omega_0 - \Delta\omega \rightarrow k &= \omega_0\sqrt{\mu\varepsilon} - \Delta\omega\sqrt{\mu\varepsilon} = k_0 - \Delta k_0,\end{aligned}$$

sendo o campo elétrico dado por $\vec{E} = \vec{E}_0 \cos(\omega t - k_x x)$ teremos

$$\begin{aligned}\vec{E}_1 &= \vec{E}_0 \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (k_0 + \Delta k_0)x], \\ \vec{E}_2 &= \vec{E}_0 \cos[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (k_0 - \Delta k_0)x],\end{aligned}$$

assim, a superposição das ondas é dada por

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \vec{E}_1 + \vec{E}_2 \\ &= \vec{E}_0 \{ \cos[(\omega_0 + \Delta\omega)t - (k_0 + \Delta k_0)x] + \cos[(\omega_0 - \Delta\omega)t - (k_0 - \Delta k_0)x] \},\end{aligned}\tag{2.73}$$

usando $\cos x + \cos y = 2 \cos \frac{1}{2}(x+y) \cos \frac{1}{2}(x-y)$ na equação anterior obtemos

$$\vec{E} = 2 \vec{E}_0 \cos(\omega_0 t - k_0 x) \cos(\Delta\omega t - \Delta k_0 x).\tag{2.74}$$

Esta equação representa um sinal modulado em amplitude, mostrado na figura 2.15, onde $f_m \leftrightarrow \Delta\omega$ é a freqüência da onda moduladora, $f_p \leftrightarrow \omega_0$ é a freqüência da onda portadora. Na figura 2.15.a temos o sinal modulante (informação), na figura 2.15.b temos a portadora, sinal que mudará a sua amplitude de acordo com a informação e na figura 2.15.c temos o sinal gerado pela modulação. A direita temos o espectro em freqüência dos sinais. Para que o sinal modulado mantenha a sua forma o meio deverá ter um comportamento igual ou próximo para cada freqüência contida no sinal.

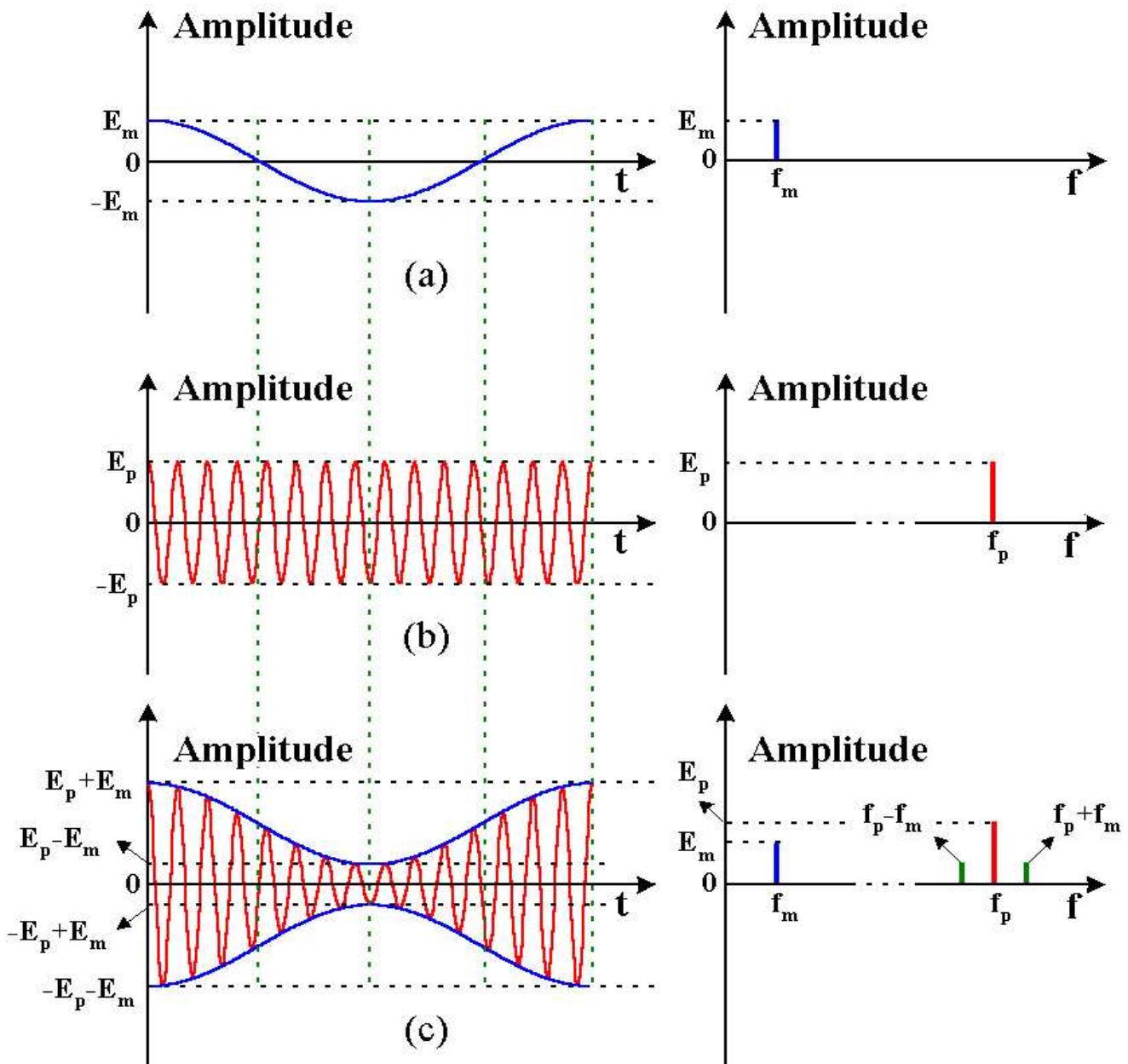


Figura 2.15: Modulação em Amplitude

Na equação (2.74) temos dois fatores senoidais:

- $\cos(\Delta\omega t - \Delta k_0 x)$ termo de variação lenta
- $\cos(\omega_0 t - k_0 x)$ termo de variação rápida

O argumento de $\cos(\omega_0 t - k_0 x)$ constante implica em acompanhar um ponto de fase da onda, isto é, definir a velocidade de fase. O argumento de $\cos(\Delta\omega t - \Delta k_0 x)$ constante implica em

$$\Delta\omega t - \Delta k_0 x = cte \Rightarrow \frac{dx}{dt} = \frac{\Delta\omega}{\Delta k_0},$$

que é a definição da **velocidade de grupo** v_g , velocidade para acompanhar um ponto de fase da informação, isto é, a velocidade na qual a informação é transferida do transmissor para o receptor. Na figura 2.16 temos o ponto de fase da onda e o ponto de fase da informação. No limite em que a largura de faixa $\Delta\omega \rightarrow 0$, a expressão para v_g torna-se

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \left(\frac{dk}{d\omega} \right)^{-1}, \quad (2.75)$$

a última forma, escrita como um inverso, é mais útil porque geralmente se escreve k explicitamente em função da freqüência ω .

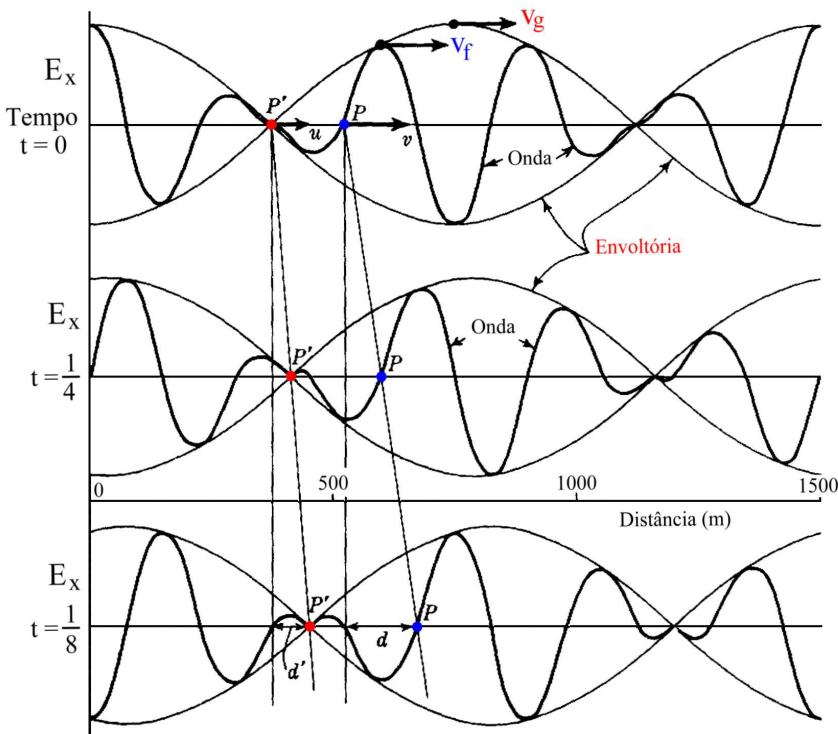


Figura 2.16: Velocidades de fase v_f e de grupo v_g de uma onda AM

Como $\omega = 2\pi f = 2\pi f \lambda/\lambda = k v_f$ podemos escrever v_g em termos da v_f como

$$v_g = \frac{d\omega}{dk} = \frac{d(Kv_f)}{dk} = k \frac{dv_f}{dk} + v_f,$$

ou

$$v_g = v_f + k \frac{dv_f}{dk}. \quad (2.76)$$

Podemos também mostrar que

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda}. \quad (2.77)$$

Um meio dispersivo é aquele em que a velocidade de fase varia com a freqüência, isto é, $v_f \neq v_g$. Os meios dispersivos são de dois tipos:

- **normalmente dispersivo**, nestes meios $v_g < v_f$ o que implica numa taxa positiva de variação da v_f , isto é, $dv_f/d\lambda > 0$;
- **anomalamente dispersivo**, nestes meios $v_g > v_f$ o que implica numa taxa negativa de variação da v_f , isto é, $dv_f/d\lambda < 0$

Exemplo 2.10 Uma onda plana propagando em um meio contendo N partículas ionizadas por unidade de volume, de massa m e carga q tem uma constante de propagação dada por

$$k(\omega) = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon(\omega)},$$

onde

$$\varepsilon(\omega) = \varepsilon_0 (1 - \omega_p^2/\omega^2),$$

ω_p é conhecida como freqüência do plasma e é definida por

$$\omega_p = \sqrt{N q^2 / m \varepsilon_0}.$$

Quando as partículas carregadas são elétrons e a densidade N está em unidades de m^{-3} , ω_p é dada por

$$\omega_p \approx 56,4 \sqrt{N}.$$

Na figura 2.17 temos o **diagrama de dispersão**, isto é, o diagrama $\omega - k$ da onda plana propagando no plasma, um gás ionizado com $N = 10^{18}/m^3$ e da onda no espaço livre. A velocidade de fase é medida pela inclinação ou declividade de uma linha que liga um ponto na curva de dispersão com a origem, no plasma é sempre maior que a do espaço livre e a velocidade de grupo é medida pela inclinação da tangente a curva. Observe que quando $\omega = \omega_p$, $v_f = \infty$ e $v_g = 0$ e quando $\omega \gg \omega_p$, v_f e $v_g \rightarrow c$.

Exemplo 2.11 Uma onda plana de 10 MHz está propagando em um meio normal-mente dispersivo, sem perdas e tem uma velocidade de fase de $3 \times 10^8 m/s$. A velocidade de fase em função de λ é dada por $v_f = c_1 \sqrt{\lambda}$, onde c_1 é uma constante. Determine a velocidade de grupo.

Solução 2.11 De acordo com a equação (2.77) v_g é dada por

$$v_g = v_f - \lambda \frac{dv_f}{d\lambda} = v_f - \frac{c_1}{2} \sqrt{\lambda} = v_f (1 - 1/2) = 1,5 \times 10^8 m/s.$$

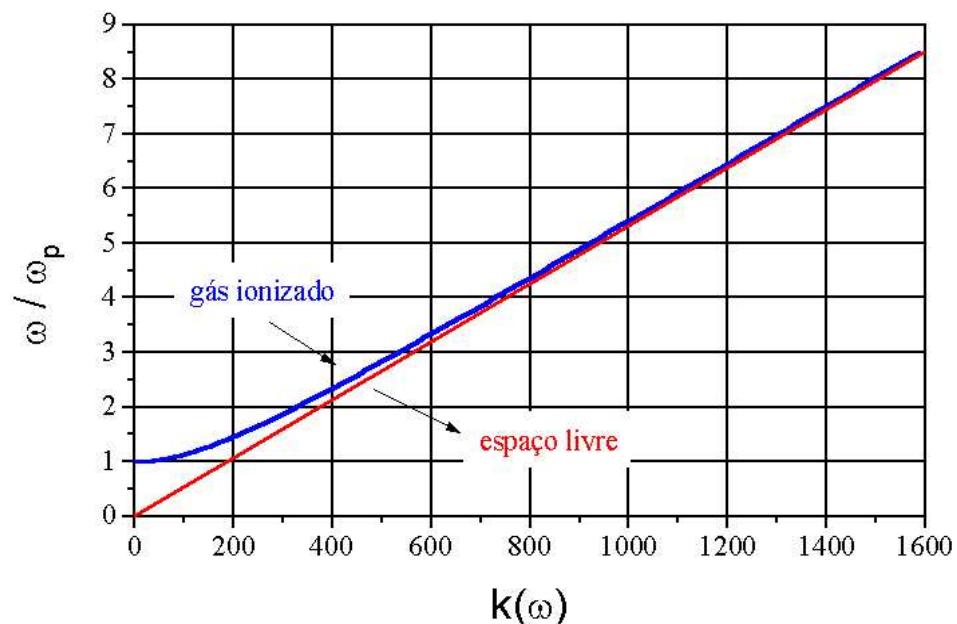


Figura 2.17: Diagrama de dispersão de um gás ionizado

2.5.4 Polarização

É definida como a curva traçada pelo vetor campo elétrico \vec{E} quando a onda propaga, na figura 2.18 temos um exemplo de uma curva traçada pelo vetor campo elétrico quando a onda propaga.

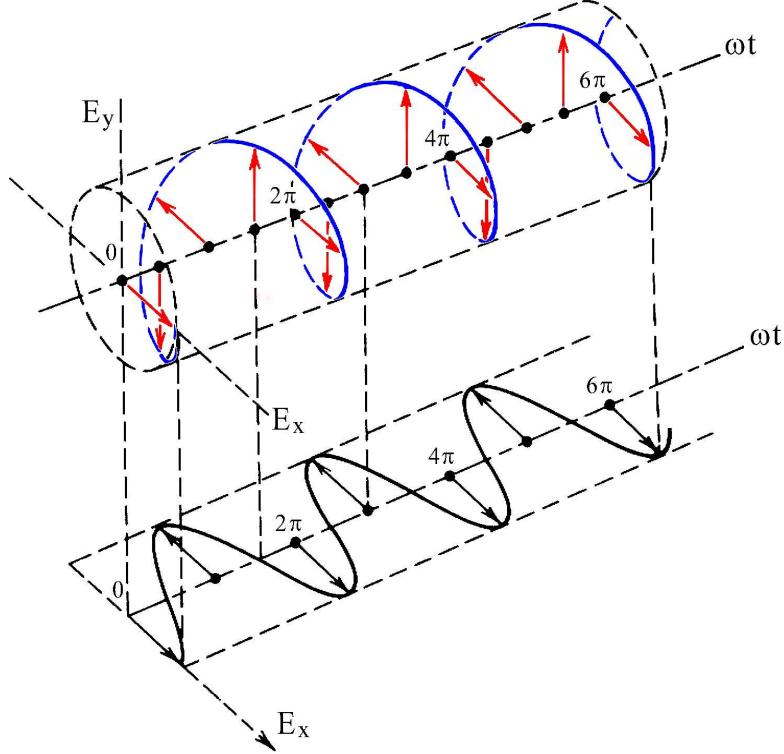


Figura 2.18: Curva traçada pelo vetor campo elétrico quando a onda propaga

Uma onda plana não tem componente paralela a direção de propagação, como mostrado na figura 2.19.a, para estudar a polarização de onda, rodemos o nosso sistema de coordenadas para coincidir com a direção de propagação, como mostrado na figura 2.19.b. Neste sistema a forma mais geral para o campo elétrico é dada por

$$\mathbf{E} = (\mathbf{E}_{x0} \vec{a}_x + \mathbf{E}_{y0} \vec{a}_y) e^{-jk_z z}, \quad (2.78)$$

com

$$\mathbf{E}_{x0} = E_{x0} e^{j\phi_x}, \quad \mathbf{E}_{y0} = E_{y0} e^{j\phi_y}, \quad (2.79)$$

onde ϕ_x e ϕ_y são as fases iniciais das componentes x e y do campo elétrico. No domínio do tempo temos

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_{x0} \cos(\omega t - k_z z + \phi_x) \vec{a}_x + E_{y0} \cos(\omega t - k_z z + \phi_y) \vec{a}_y. \quad (2.80)$$

Definimos os seguintes parâmetros

$$A = \frac{E_{y0}}{E_{x0}}, \quad (2.81)$$

que é a razão entre as intensidades das componentes \vec{a}_x e \vec{a}_y e

$$\phi = \phi_y - \phi_x, \quad (2.82)$$

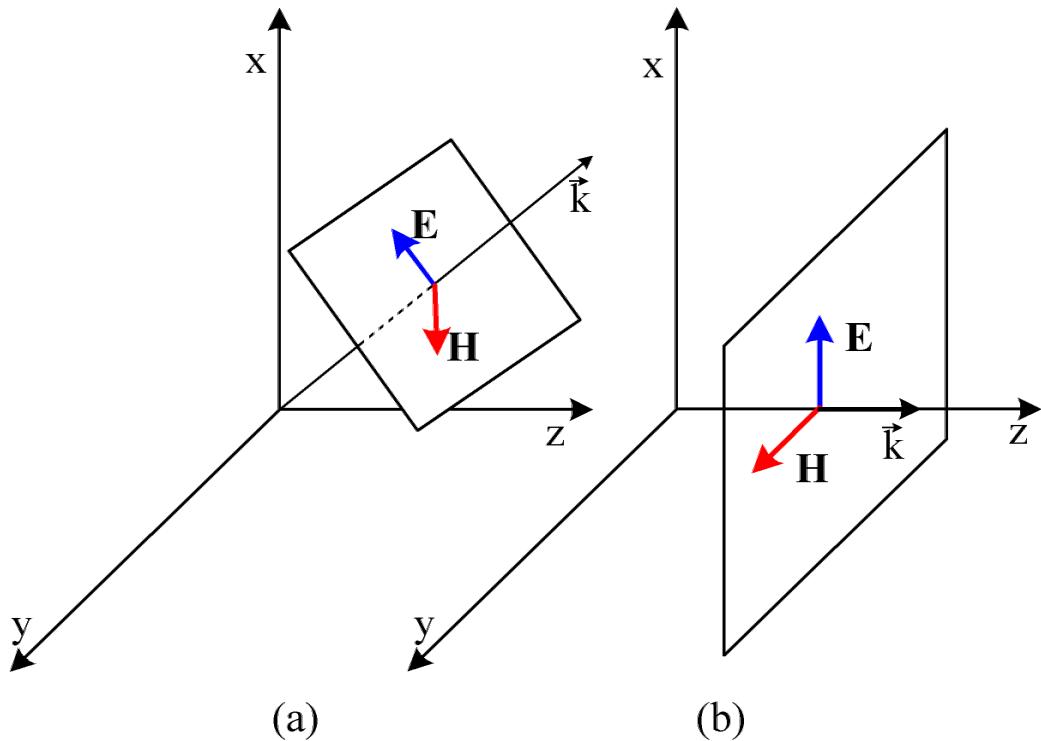


Figura 2.19: Sistema de coordenada na direção de propagação da onda

a diferença entre as fases das componentes \vec{a}_x e \vec{a}_y .

Usando as definições feitas nas equações (2.81) e (2.82), podemos escrever a equação (2.78) como

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_{x0} \left(\vec{a}_x + \vec{a}_y A e^{j\phi} \right) e^{-jk_z z}, \quad (2.83)$$

sem perder a generalidade fazemos $E_{x0} = 1$ e a equação (2.83) torna-se

$$\mathbf{E} = (\vec{a}_x + \vec{a}_y A e^{j\phi}) e^{-jk_z z}, \quad (2.84)$$

Dependendo dos valores de A e ϕ teremos a **polarização linear** quando a figura descrita pelo vetor campo elétrico é uma reta, figura 2.20, a **polarização circular** quando a figura descrita pelo vetor campo elétrico é um círculo, figura 2.21, e a **polarização elíptica** quando a figura descrita pelo vetor campo elétrico é uma elipse, figura 2.22.

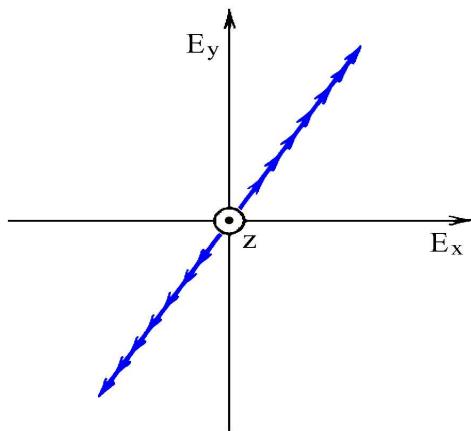


Figura 2.20: Polarização linear

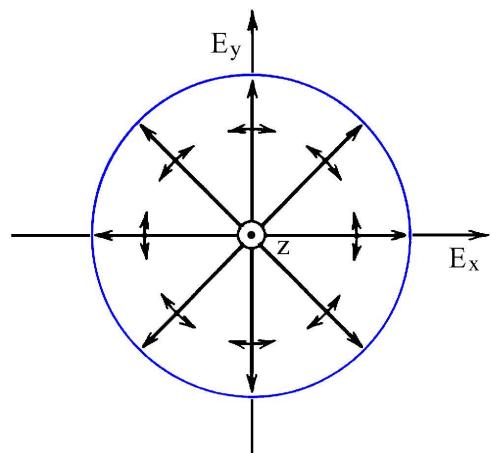


Figura 2.21: Polarização circular

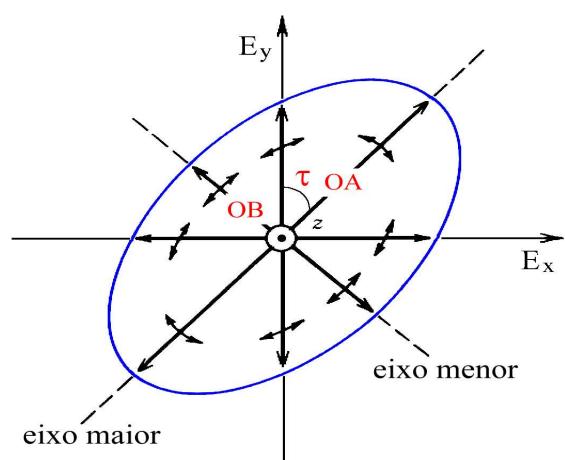


Figura 2.22: Polarização elíptica

Polarização linear

Uma onda tem polarização linear nos seguintes casos:

1. quando o parâmetro $A = 0$, só existe a componente \vec{a}_x ou $A = \infty$, só existe a componente \vec{a}_y ;
2. quando a diferença de fase entre as duas componentes atende a seguinte condição

$$\phi = \phi_y - \phi_x = n\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (2.85)$$

Exemplo 2.12 Considere uma onda plana com o campo elétrico da forma $\mathbf{E} = e^{-jk_z z} \vec{a}_x$. Determine a polarização da onda.

Solução 2.12 Como só temos a componente \vec{a}_x temos que o parâmetro A é igual a 0 e a diferença de fase é nula. A polarização é linear com a reta alinhada com o eixo x , como mostrado na figura 2.23, que é a variação do campo instantâneo, dado por $\vec{E} = \cos(\omega t - k_z z) \vec{a}_x$. Leva o nome de onda polarizada linearmente na direção x

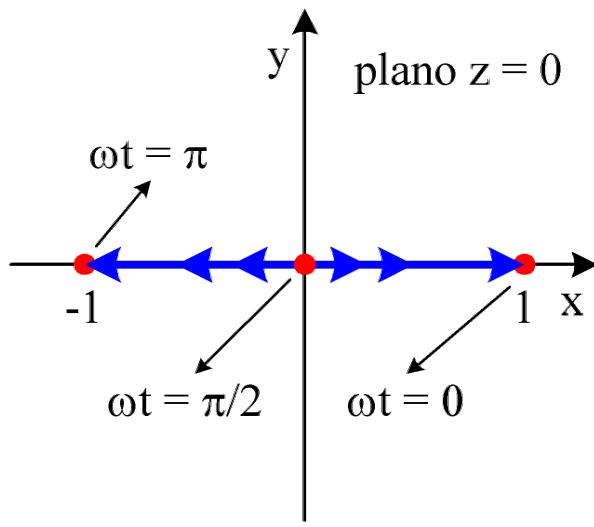


Figura 2.23: Onda polarizada linearmente na direção x

Exemplo 2.13 Considere uma onda plana com o campo elétrico da forma $\mathbf{E} = (\vec{a}_x + \vec{a}_y) e^{-jk_z z}$. Determine a polarização da onda.

Solução 2.13 O campo possui as duas componentes, \vec{a}_x e \vec{a}_y , o parâmetro A é igual a 1 e a diferença de fase é $\phi = 0$. A polarização é linear com a reta inclinada fazendo um ângulo de $\tan^{-1}(E_y/E_x = 1) = 45^\circ$ em relação ao eixo x , como mostrado na figura 2.24, que é a variação do campo instantâneo, dado por $\vec{E} = (\vec{a}_x + \vec{a}_y) \cos(\omega t - k_z z)$. Leva o nome de onda polarizada linearmente num ângulo de 45° .

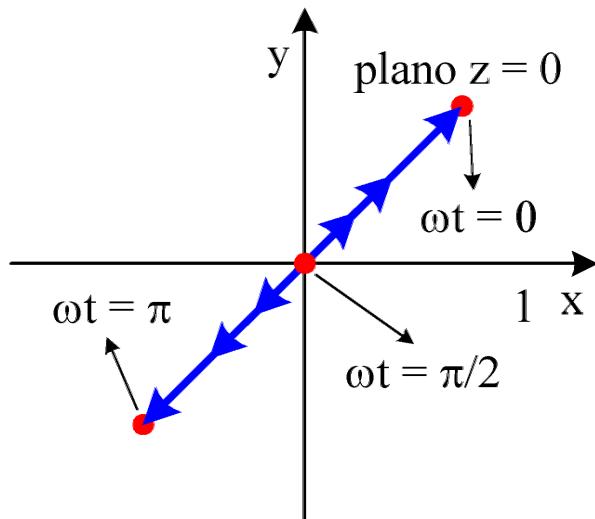


Figura 2.24: Onda polarizada linearmente num ângulo de 45°

Polarização circular

Uma onda tem polarização circular quando atende as seguintes condições:

1. quando as magnitudes das duas componentes são iguais, isto é, $A = 1$, e
2. quando a diferença de fase entre as duas componentes é múltiplo ímpar de $\pi/2$, isto é,

$$\phi = \pm(2n + 1)\pi/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow \begin{cases} > 0 & \text{mão esquerda} \\ < 0 & \text{mão direita} \end{cases} \quad (2.86)$$

Exemplo 2.14 Considere uma onda plana com o campo elétrico da forma $\mathbf{E} = (\vec{a}_x - j\vec{a}_y) e^{-jk_z z}$. Determine a polarização da onda.

Solução 2.14 O campo possui as duas componentes, \vec{a}_x e \vec{a}_y , o parâmetro A é igual a 1 e a diferença de fase é $\phi = -\pi/2$. A polarização é circular com o campo girando no sentido contrário dos ponteiros do relógio, como mostrado na figura 2.25.a, que é a variação do campo instantâneo, dado por $\vec{E} = \cos(\omega t - k_z z)\vec{a}_x + \cos(\omega t - k_z z - \pi/2)\vec{a}_y = \cos(\omega t - k_z z)\vec{a}_x + \sin(\omega t - k_z z)\vec{a}_y$. Leva o nome de onda polarizada circularmente a direita porque tem que se usar a mão direita para alinhar o sentido de rotação com o sentido de propagação, como mostrado na figura 2.25.a.

Exemplo 2.15 Considere uma onda plana com o campo elétrico da forma $\mathbf{E} = (\vec{a}_x + j\vec{a}_y) e^{-jk_z z}$. Determine a polarização da onda.

Solução 2.15 O campo possui as duas componentes, \vec{a}_x e \vec{a}_y , o parâmetro A é igual a 1 e a diferença de fase é $\phi = \pi/2$. A polarização é circular com o campo girando no sentido dos ponteiros do relógio, como mostrado na figura 2.25.b, que é a variação do campo instantâneo, dado por $\vec{E} = \cos(\omega t - k_z z)\vec{a}_x + \cos(\omega t - k_z z + \pi/2)\vec{a}_y = \cos(\omega t - k_z z)\vec{a}_x - \sin(\omega t - k_z z)\vec{a}_y$. Leva o nome de onda polarizada circularmente a esquerda porque tem que se usar a mão esquerda para alinhar o sentido de rotação com o sentido de propagação, como mostrado na figura 2.25.b.

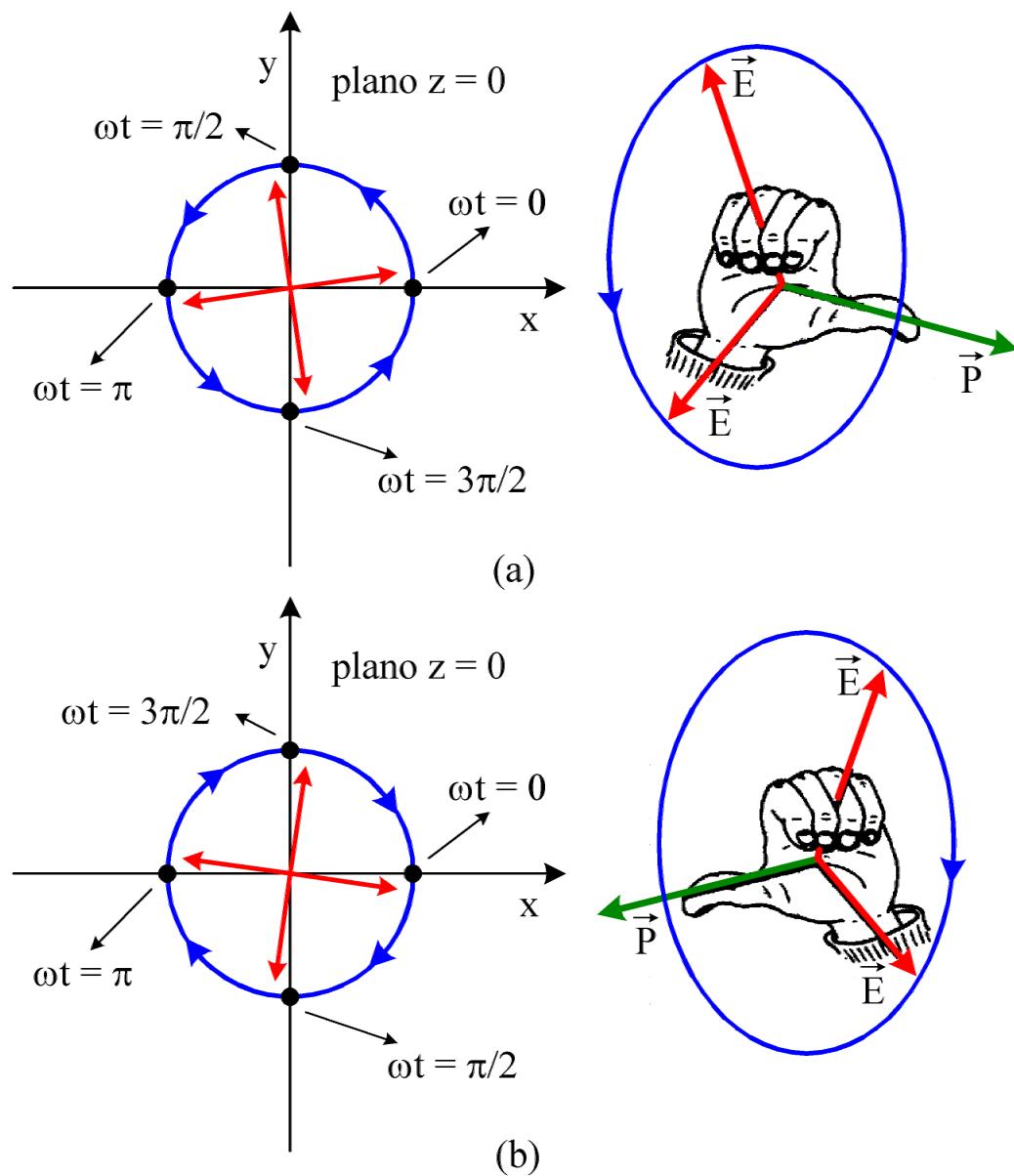


Figura 2.25: Ondas polarizadas circularmente: a) onda polarizada circularmente a direita; b) onda polarizada circularmente a esquerda

Polarização elíptica

Vamos considerar que a fase inicial da componente \vec{a}_x é nula, assim, usando a definição feita na equação 2.82), podemos escrever a equação (2.80) como

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_{x0} \cos(\omega t - k_z z) \vec{a}_x + E_{y0} \cos(\omega t - k_z z + \phi) \vec{a}_y. \quad (2.87)$$

Queremos deduzir uma equação que relaciona as componentes $E_x = E_{x0} \cos(\omega t - k_z z)$ e $E_y = E_{y0} \cos(\omega t - k_z z + \phi)$, definimos o argumento do cosseno como

$$W = \omega t - k_z z, \quad (2.88)$$

assim temos que

$$E_x = E_{x0} \cos W \quad (2.89)$$

$$\sin W = \sqrt{1 - E_x^2/E_{x0}^2}, \quad (2.90)$$

usando as equações anteriores podemos escrever que a componente E_y é dada por

$$E_y = E_{y0} \cos(W + \phi) = E_{y0} [\cos W \cos \phi - \sin W \sin \phi]$$

$$\frac{E_y}{E_{y0}} = \frac{E_x}{E_{x0}} \cos \phi - \sqrt{1 - E_x^2/E_{x0}^2} \sin \phi$$

elevando a última equação ao quadrado e organizando os termos obtemos

$$\frac{E_x^2}{E_{x0}^2} - \frac{2 E_x E_y \cos \phi}{E_{x0} E_{y0}} + \frac{E_y^2}{E_{y0}^2} = \sin^2 \phi, \quad (2.91)$$

ou

$$a E_x^2 - b E_x E_y + c E_y^2 = 1, \quad (2.92)$$

onde

$$a = \frac{1}{E_{x0}^2 \sin^2 \phi}, \quad b = \frac{2 \cos \phi}{E_{x0} E_{y0} \sin^2 \phi}, \quad c = \frac{1}{E_{y0}^2 \sin^2 \phi}.$$

A equação (2.92) descreve uma elipse, como mostrado na figura 2.22, o segmento de linha OA é o eixo maior e o segmento de linha OB é o eixo menor da elipse, a razão entre o eixo maior e o menor é denominada de razão axial, RA , e é dada por

$$RA = \frac{OA}{OB}, \quad 1 \leq RA \leq \infty \quad (2.93)$$

onde

$$OA = \left[\frac{1}{2} \left\{ E_{x0}^2 + E_{y0}^2 + [E_{x0}^4 + E_{y0}^4 + 2 E_{x0}^2 E_{y0}^2 \cos(2\phi)]^{1/2} \right\} \right]^{1/2} \quad (2.94)$$

$$OB = \left[\frac{1}{2} \left\{ E_{x0}^2 + E_{y0}^2 - [E_{x0}^4 + E_{y0}^4 + 2 E_{x0}^2 E_{y0}^2 \cos(2\phi)]^{1/2} \right\} \right]^{1/2} \quad (2.95)$$

O ângulo de inclinação da elipse, em relação ao eixo y , é representado pelo ângulo τ , figura 2.22, é dado por

$$\tau = \frac{\pi}{2} - \frac{1}{2} \tan^{-1} \left[\frac{2 E_{x0} E_{y0}}{E_{x0}^2 - E_{y0}^2} \cos \phi \right]. \quad (2.96)$$

Se aplicarmos as condições para que uma onda tenha polarização circular, a equação da elipse reduz-se à equação de uma circunferência, esta demonstração é deixada como exercício.

Uma onda tem polarização elíptica quando atende as seguintes condições:

1. quando as magnitudes das duas componentes são diferentes , isto é, $A \neq 1$, e a diferença de fase entre as duas componentes é múltiplo ímpar de $\pi/2$, isto é,

$$\phi = \pm(2n + 1)\pi/2, \quad n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow \begin{cases} > 0 & \text{mão esquerda} \\ < 0 & \text{mão direita} \end{cases} \quad (2.97)$$

ou

2. quando a diferença de fase entre as duas componentes não é igual a múltiplos de $\pi/2$, isto é,

$$\phi \neq \pm\frac{n}{2}\pi, \quad n = 0, 1, 2, \dots \Rightarrow \begin{cases} > 0 & \text{mão esquerda} \\ < 0 & \text{mão direita} \end{cases} \quad (2.98)$$

Exemplo 2.16 Considere duas ondas planas com os campos elétricos da forma $\mathbf{E} = (\vec{a}_x - 2j\vec{a}_y) e^{-jk_z z}$ e $\mathbf{E} = (\vec{a}_x + 2j\vec{a}_y) e^{-jk_z z}$. Determine a polarização das duas ondas.

Solução 2.16 No primeiro caso o campo possui as duas componentes, \vec{a}_x e \vec{a}_y , o parâmetro A é igual a 2 e a diferença de fase é $\phi = -\pi/2$. A polarização é elíptica com o campo girando no sentido contrário dos ponteiros do relógio, como mostrado na figura 2.26.a, que é a variação do campo instantâneo, dado por $\vec{E} = \cos(\omega t - k_z z)\vec{a}_x + 2\cos(\omega t - k_z z - \pi/2)\vec{a}_y = \cos(\omega t - k_z z)\vec{a}_x + 2\sin(\omega t - k_z z)\vec{a}_y$. Leva o nome de onda polarizada elipticamente a direita porque tem que se usar a mão direita para alinhar o sentido de rotação com o sentido de propagação, como mostrado na figura 2.26.a. No segundo caso o parâmetro A é igual a 2 e a diferença de fase é $\phi = +\pi/2$, o campo instantâneo é $\vec{E} = \cos(\omega t - k_z z)\vec{a}_x + 2\cos(\omega t - k_z z + \pi/2)\vec{a}_y = \cos(\omega t - k_z z)\vec{a}_x - 2\sin(\omega t - k_z z)\vec{a}_y$ o que define uma onda polarizada elipticamente a esquerda, como mostrado na figura 2.26.b.

Exemplo 2.17 Considere uma onda plana com o campo elétrico da forma $\mathbf{E} = [5\vec{a}_x + (3 + 4j)\vec{a}_y] e^{-jk_z z}$. Determine a polarização da onda.

Solução 2.17 O campo possui as duas componentes, \vec{a}_x e \vec{a}_y e pode ser escrito como $\mathbf{E} = (5\vec{a}_x + 5\vec{a}_y e^{j53,13^\circ}) e^{-jk_z z}$, assim o parâmetro A é igual a 1 e a diferença de fase é $\phi = 53,13^\circ$. A polarização é elíptica com o campo girando no sentido dos ponteiros do relógio, que é a variação do campo instantâneo, dado por $\vec{E} = 5\cos(\omega t - k_z z)\vec{a}_x + 5\cos(\omega t - k_z z + 53,13^\circ)\vec{a}_y$, é uma onda polarizada elipticamente a esquerda.

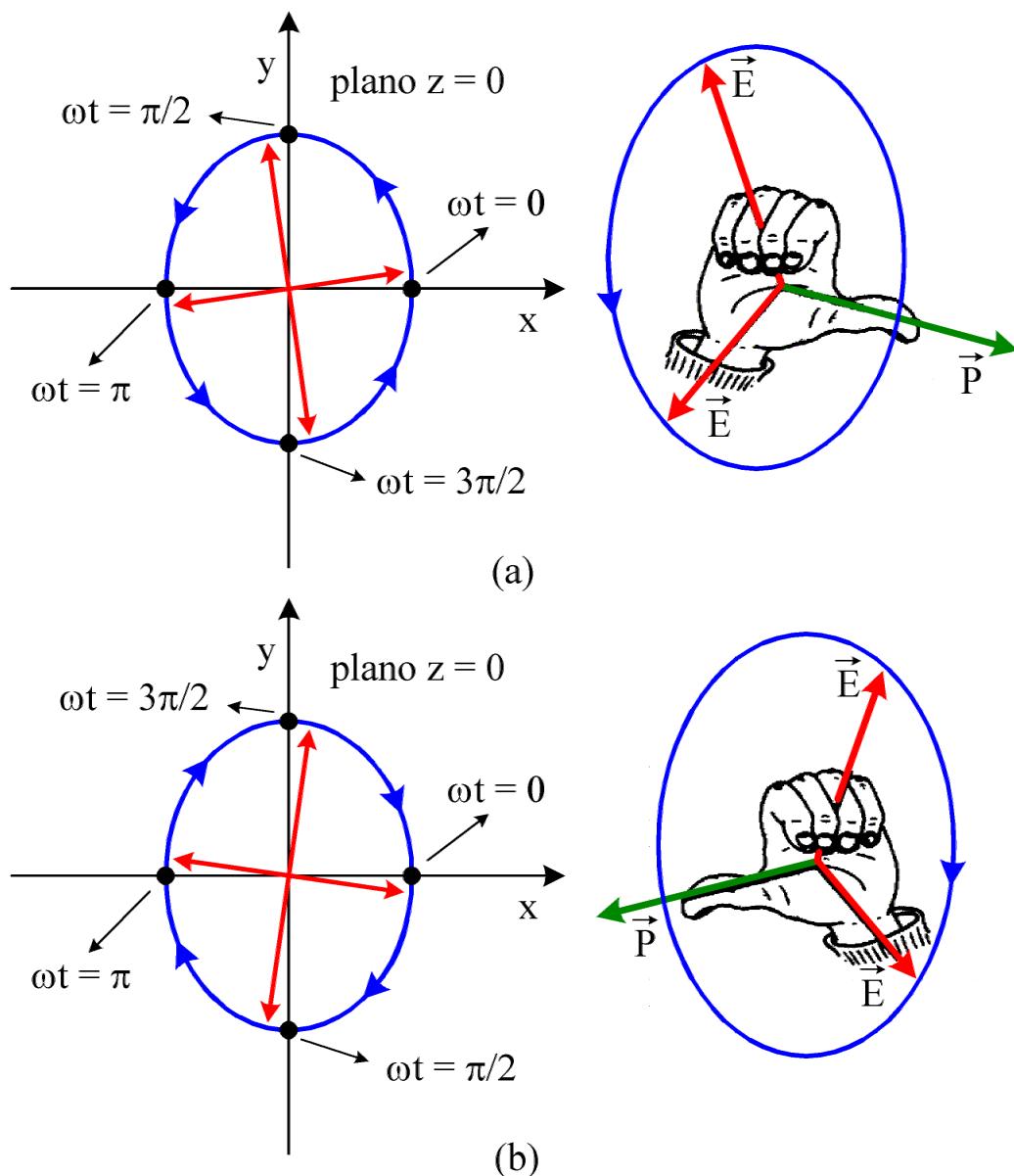


Figura 2.26: Ondas polarizadas elipticamente: a) onda polarizada elipticamente a direita; b) onda polarizada elipticamente a esquerda

2.6 Ondas eletromagnéticas em meios sem perdas

Uma onda eletromagnética em um meio sem perdas manterá a sua energia inalterada, já que o meio não possui cargas livres para gerar perdas. O campo elétrico estará em fase com o campo magnético, isto é, não existe defasagem entre os campos \vec{E} e \vec{H} e a impedância de onda será um número real.

Exemplo 2.18 Uma onda plana no espaço livre ($\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$) tem o campo elétrico dado por $\mathbf{E} = 1000 e^{-jk_0z} \vec{a}_x V/m$ cuja freqüência é de 20 MHz. Determine: a) constante de propagação k_0 ; b) a velocidade de fase v_f ; c) o comprimento de onda λ ; d) impedância de onda Z ; e) o campo eletromagnético instantâneo (\vec{E}, \vec{H}); f) o vetor de Poynting médio.

Solução 2.18

$$a) k_0 = \omega \sqrt{\mu \varepsilon} = \frac{2\pi 20 \times 10^6}{3 \times 10^8} = \frac{4}{3}\pi \times 10^{-1} \text{ rad}/m;$$

$$b) v_f = \frac{\omega}{k_0} = \frac{1}{\sqrt{\mu \varepsilon}} = 3 \times 10^8 \text{ m/s};$$

$$c) k_0 = \frac{2\pi}{\lambda} \rightarrow \lambda = 15 \text{ m};$$

$$d) Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = 120\pi \Omega;$$

$$e) \quad \mathbf{E} = 1000 e^{-jk_0z} \vec{a}_x V/m$$

$$\mathbf{H} = \frac{\vec{k} \times \mathbf{E}}{\omega \mu} = \frac{k_0 \vec{a}_z \times 1000 e^{-jk_0z} \vec{a}_x}{\omega \mu} = \frac{1000}{Z} e^{-jk_0z} \vec{a}_y A/m$$

$$\vec{E} = \Re \{ 1000 e^{-jk_0z} e^{j\omega t} \vec{a}_x \} = 1000 \cos(\omega t - k_0 z) \vec{a}_x V/m$$

$$\vec{H} = \Re \left\{ \frac{1000}{120\pi} e^{-jk_0z} e^{j\omega t} \right\} = \frac{1000}{120\pi} \cos(\omega t - k_0 z) \vec{a}_y A/m$$

f)

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \Re e [\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}}] = \frac{1}{2} \Re e \left[\frac{1000^2}{Z} \vec{a}_z \right] = \frac{1000^2}{240\pi} \vec{a}_z W/m^2$$

Na figura 2.27 temos o gráfico desta onda plana.

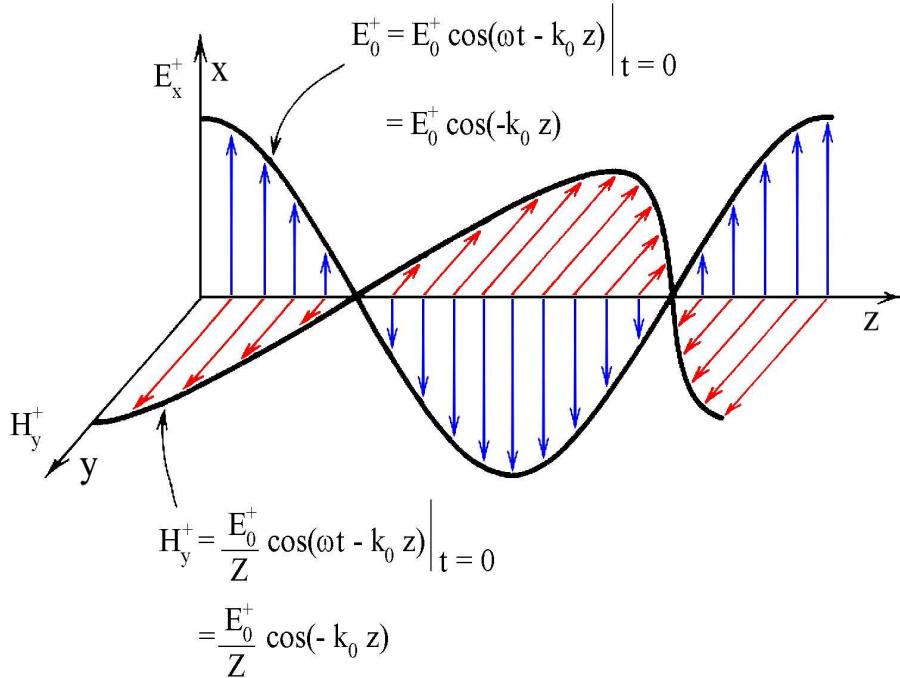


Figura 2.27: Onda plana propagando em um meio sem perdas

Exemplo 2.19 Expressar os campos \vec{E} e \vec{H} de uma onda plana uniforme que propaga na direção \vec{a}_x , numa freqüência de 30 MHz , num meio sem perdas caracterizado por $\varepsilon = 20 \times 10^{-12}\text{ F/m}$ e $\mu = 5 \times 10^{-6}\text{ H/m}$. Sabe-se que o campo elétrico só tem componente \vec{a}_y e alcança o valor máximo positivo de 800 V/m em ($x = 0,4\text{ m}$, $t = 6\text{ ns}$).

Solução 2.19 A forma geral do campo elétrico é $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - k x + \phi_0) \vec{a}_y$ já que está propagando na direção \vec{a}_x e só tem componente \vec{a}_y . Calculando os parâmetros k e ω obtemos

$$k = 2\pi f \sqrt{\varepsilon \mu} = 2\pi 30 \times 10^6 \times 1 \times 10^{-8} = 0,6\pi \text{ rad/m}$$

$$\omega = 2\pi f = 60\pi \times 10^6 \text{ rad/s}$$

Como em ($x = 0,4\text{ m}$, $t = 6\text{ ns}$) temos o valor máximo positivo de 800 V/m segue que $800 = 800 \cos(\omega t - k x + \phi_0) \rightarrow \cos(\omega t - k x + \phi_0) = 1$. Os valores de ϕ_0 que atendem esta condição são dados por

$$0,36\pi - 0,24\pi + \phi_0 = 2\pi n,$$

$$\phi_0 = 2\pi n - 0,12\pi, \quad n = 1, 2, 3, \dots$$

Para $n = 0$ temos que $\phi_0 = -0,12\pi \rightarrow \phi_0 = -21,6^\circ$ e para $n = 1$ temos que $\phi_0 = 1,88\pi \rightarrow \phi_0 = 338,4^\circ$, escolhemos o primeiro valor porque os outros só significam soma 2π a fase. A expressão final para o campo elétrico é

$$\vec{E} = 800 \cos(60\pi \times 10^6 t - 0,6\pi x - 21,6^\circ) \vec{a}_y,$$

para definir o campo magnético calculamos a impedância do meio $Z = \sqrt{\mu/\varepsilon} = 500\Omega$ e como feito no exercício anterior obtemos

$$\begin{aligned} \vec{H} &= \frac{800}{Z} \cos(60\pi \times 10^6 t - 0,6\pi x - 21,6^\circ) \vec{a}_z \\ &= 1,6 \cos(60\pi \times 10^6 t - 0,6\pi x - 21,6^\circ) \vec{a}_z. \end{aligned}$$

2.7 Ondas estacionárias

Até agora consideramos a existência de uma única onda progressiva propagando em uma dada direção, consideraremos agora a existência de duas ondas, propagam em direções opostas, como mostrado no caso da figura 2.28.a, onde uma plano infinito com corrente variante no tempo gera duas ondas planas em direções opostas e no caso de uma onda incidindo numa interface, dando origem a uma onda refletida, figura 2.28.b.

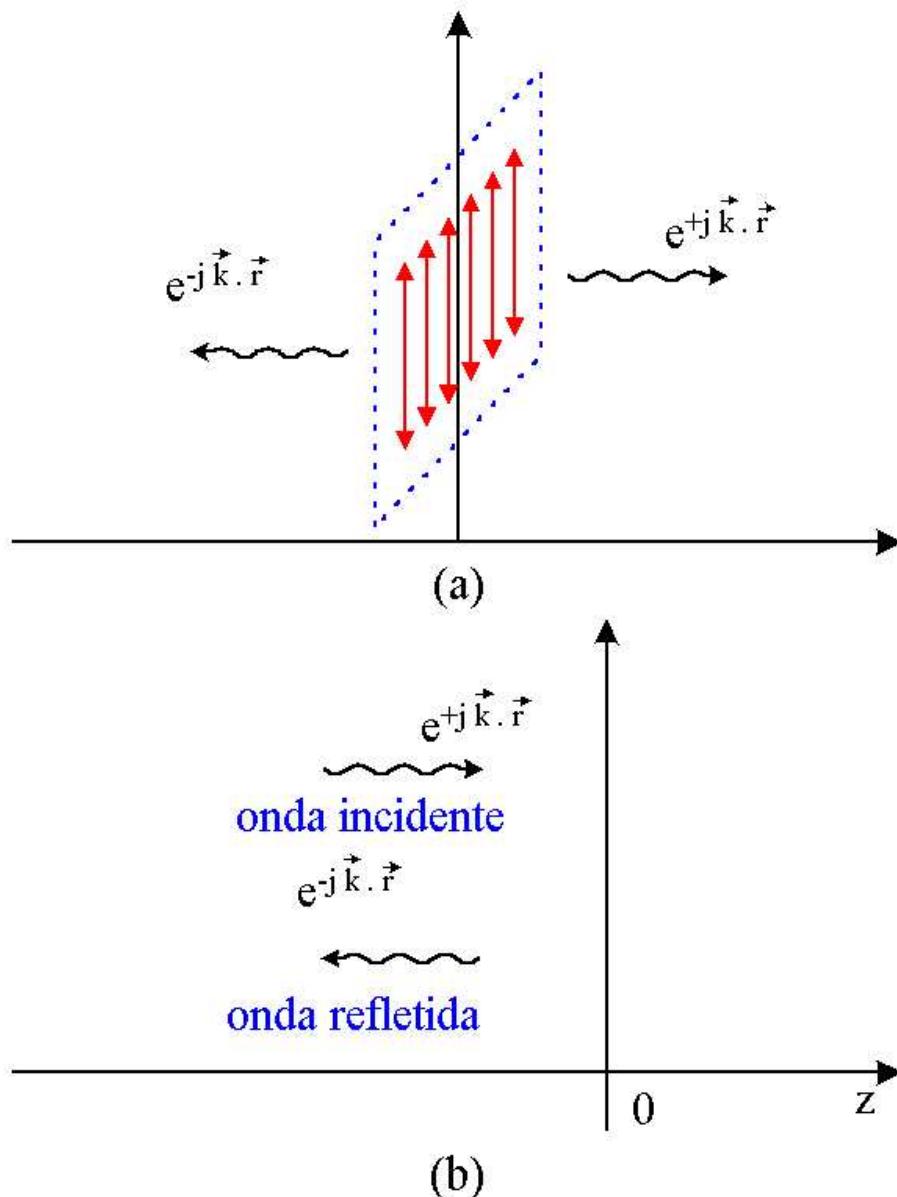


Figura 2.28: Duas ondas propagando em direções opostas: a) a partir de uma fonte; b) por reflexão em uma interface

Consideremos que temos duas ondas progressivas, a 1^a propagando na direção positiva do eixo z e a 2^a na direção negativa, como mostrado na figura 2.28.b. O campo elétrico pode ser escrito da seguinte forma

$$\mathbf{E} = [E_0^+ e^{-jkz} + E_0^- e^{+jkz}] \vec{a}_x, \quad (2.99)$$

onde E_0^+ e E_0^- são as intensidades do campo elétrico, na fronteira $z = 0$, das ondas incidente e

refletida, respectivamente. Expandindo a equação (2.99) obtemos

$$\begin{aligned}
 \mathbf{E}_x &= E_0^+ [\cos kz - j \sin kz] + E_0^- [\cos kz + j \sin kz] \\
 &= (E_0^+ + E_0^-) \cos kz - j (E_0^+ - E_0^-) \sin kz \\
 &= \sqrt{(E_0^+ + E_0^-)^2 \cos^2 kz + (E_0^+ - E_0^-)^2 \sin^2 kz} \exp \left\{ -j \tan^{-1} \left[\frac{(E_0^+ + E_0^-) \cos kz}{(E_0^+ - E_0^-) \sin kz} \right] \right\} \\
 \mathbf{E}_x &= \sqrt{(E_0^+)^2 + (E_0^-)^2 + 2 E_0^+ E_0^- \cos 2kz} \exp \left\{ -j \tan^{-1} \left[\frac{(E_0^+ + E_0^-)}{(E_0^+ - E_0^-)} \tan kz \right] \right\}, \\
 \end{aligned} \tag{2.100}$$

onde o termo sob raiz quadrada é a amplitude e o termo exponencial é a fase da onda resultante. Estudaremos quando o termo de amplitude é máximo e quando é mínimo, a expressão da amplitude da onda resultante é dada por

$$|\mathbf{E}_x| = \sqrt{(E_0^+)^2 + (E_0^-)^2 + 2 E_0^+ E_0^- \cos 2kz}. \tag{2.101}$$

O máximo de $|\mathbf{E}_x|$ é obtido quando $\cos 2kz = 1$ o que implica que $kz = n\pi$, $n = 0, 1, 2, \dots$, e é dado por

$$|\mathbf{E}_x|_{max} = |E_0^+| + |E_0^-|. \tag{2.102}$$

O mínimo de $|\mathbf{E}_x|$ é obtido quando $\cos 2kz = -1$ o que implica que $kz = (2n+1)\pi/2$, $n = 0, 1, 2, \dots$, e é dado por

$$|\mathbf{E}_x|_{min} = |E_0^+| - |E_0^-|. \tag{2.103}$$

A distância entre dois máximos ou dois mínimos consecutivos é dada por

$$k \Delta z = \pi \rightarrow \Delta z = \frac{\pi}{k} = \frac{\lambda}{2}. \tag{2.104}$$

A distância entre um máximo e um mínimo consecutivo é dada por

$$\frac{(2n+1)\pi}{2} - n\pi = k \Delta z \rightarrow \Delta z = \frac{\pi}{2k} = \frac{\lambda}{4}. \tag{2.105}$$

A forma instantânea da onda resultante é dada por

$$\begin{aligned}
 E_x(z, t) &= \Re e [\mathbf{E}_x e^{j\omega t}] \\
 E_x(z, t) &= \sqrt{(E_0^+)^2 + (E_0^-)^2 + 2 E_0^+ E_0^- \cos 2kz} \\
 &\quad \times \cos \left[\omega t - \tan^{-1} \left\{ \frac{E_0^+ - E_0^-}{E_0^+ + E_0^-} \tan kz \right\} \right]
 \end{aligned} \tag{2.106}$$

Consideremos que $E_0^+ = E_0^-$ temos então que

$$E_x(z, t) = \sqrt{2(E_0^+)^2 (1 + \cos(2kz))} \cos \omega t = 2 E_0^+ \cos kz \cos \omega t. \tag{2.107}$$

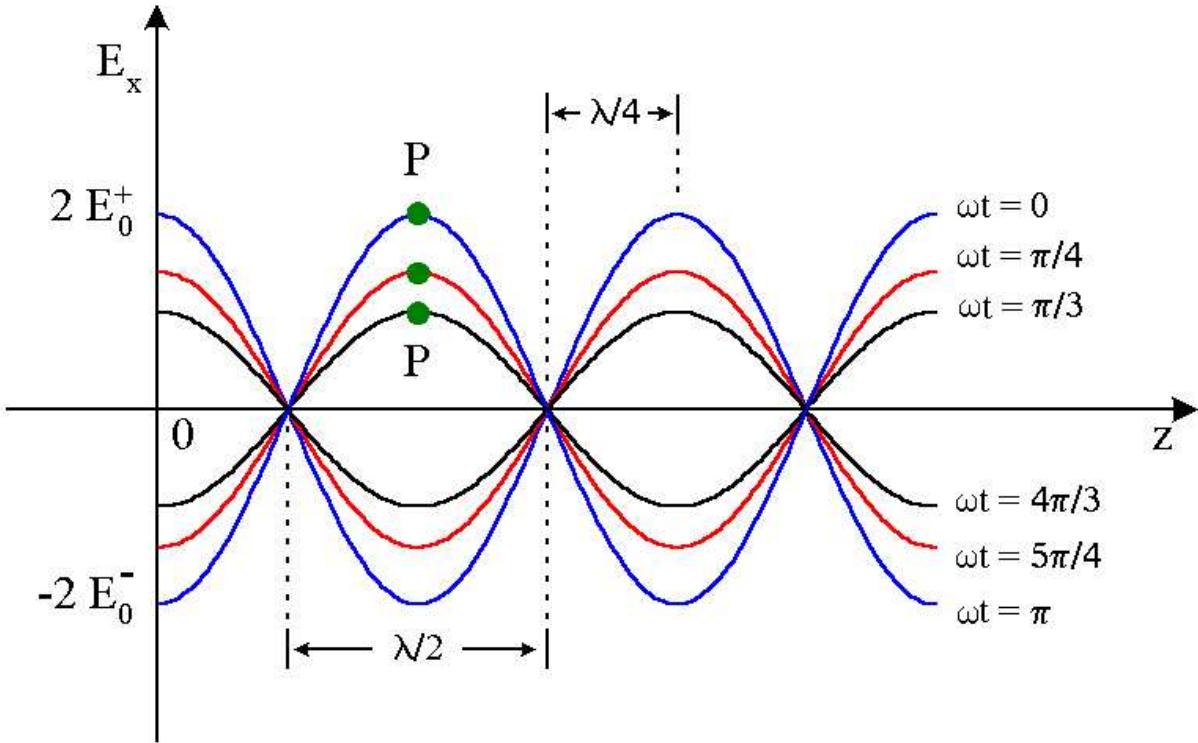


Figura 2.29: Onda estacionária resultante da superposição de duas ondas propagando em direções opostas.

Na figura 2.29 vemos o gráfico desta onda para vários instantes de tempo, observamos que é uma onda estacionária, isto é, uma onda que não propaga no espaço.

Uma onda estacionária cria um padrão de máximos e mínimos que não se movem no espaço, assim a razão entre o máximo e o mínimo do diagrama da onda estacionária é um parâmetro importante e denominado de ***taxa de onda estacionária TOE*** ou ***coeficiente de onda estacionária*** é definido como

$$TOE = \frac{|E|_{max}}{|E|_{min}} = \frac{|E_0^+| + |E_0^-|}{|E_0^+| - |E_0^-|}. \quad (2.108)$$

A *TOE* também está relacionada com um outro parâmetro, o ***coeficiente de reflexão***, que é a razão entre o campo refletido e o campo incidente, dado por

$$\Gamma = \frac{E_0^-}{E_0^+}. \quad (2.109)$$

O relacionamento entre *TOE* e Γ é

$$TOE = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|}, \quad (2.110)$$

a dedução desta equação é deixada como exercício.

O valor da *TOE* indica o grau de interferência entre as duas ondas, por exemplo:

- $TOE = 1 \rightarrow |\Gamma| = 0$ sem onda refletida - ***sem interferência***;
- $TOE = \infty \rightarrow |\Gamma| = 1$ onda refletida de mesma intensidade, ***máxima interferência***.

Exemplo 2.20 Uma onda plana incide normalmente sobre uma fronteira plana, sabendo que o coeficiente de reflexão da fronteira é $\Gamma = 0,967|178,1^\circ$ calcule a taxa de onda estacionária.

Solução 2.20 Da equação 2.110 temos

$$TOE = \frac{1 + |\Gamma|}{1 - |\Gamma|} = \frac{1 + 0,967}{1 - 0,967} \approx 59,61$$

2.8 Ondas eletromagnéticas em meios com perdas

Um meio com perdas ou *meio dissipativo* é um meio que consumirá energia da onda eletromagnética, isto é, atenuará a onda. A equação de onda para campo elétrico num meio com perdas e sem fontes é, da equação (2.25), dada por

$$\nabla^2 \mathbf{E} - \gamma^2 \mathbf{E} = 0, \quad (2.111)$$

A solução, em ondas planas, da equação $\nabla^2 \mathbf{E} + k^2 \mathbf{E} = 0$ é dada por $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{\pm j \vec{k} \cdot \vec{r}}$, usando o mesmo procedimento feito para deduzir esta solução, chegamos que a solução da equação (2.111) é dada por

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{\pm \vec{\gamma} \cdot \vec{r}}, \quad (2.112)$$

onde $\vec{\gamma}$ é o vetor propagação complexo dado por

$$\vec{\gamma} = \gamma_x \vec{a}_x + \gamma_y \vec{a}_y + \gamma_z \vec{a}_z. \quad (2.113)$$

As componentes γ_x , γ_y e γ_z satisfazem a seguinte equação de dispersão

$$\gamma^2 = \gamma_x^2 + \gamma_y^2 + \gamma_z^2. \quad (2.114)$$

O parâmetro γ^2 já foi definido e é dado por

$$\gamma^2 = j \omega \mu \sigma - \omega^2 \mu \epsilon. \quad (2.115)$$

Como γ^2 é um número complexo escrevemos γ como $\gamma = \alpha + j\beta$ e substituindo na equação (2.115) obtemos

$$(\alpha + j\beta)^2 = \alpha^2 - \beta^2 + j 2 \alpha \beta = -\omega^2 \mu \epsilon + j \omega \mu \sigma. \quad (2.116)$$

Separando as partes real e imaginária da equação 2.116 obtemos

$$\alpha^2 - \beta^2 = -\omega^2 \mu \epsilon \quad (2.117)$$

$$2 \alpha \beta = \omega \mu \sigma. \quad (2.118)$$

As equações (2.117) e (2.118) formam um sistema de equações algébricas não lineares para α e β em termos de ω , μ , ϵ e σ . Resolvendo este sistema obtemos

$$\alpha = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} - 1 \right)}, \quad (Np/m) \quad (2.119)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\frac{\mu \epsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega \epsilon} \right)^2} + 1 \right)}, \quad (rad/m) \quad (2.120)$$

Substituindo a definição de γ na equação (2.112) obtemos

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{\pm \alpha \vec{a}_\gamma \cdot \vec{r}} e^{\pm j \beta \vec{a}_\gamma \cdot \vec{r}}. \quad (2.121)$$

onde \vec{a}_γ é o unitário na direção de propagação da onda.

Analizando a equação (2.121) vemos que o termo em α representa uma diminuição do campo elétrico enquanto a onda propaga quer na direção $+z$, sinal $-$, quer na direção $-z$, sinal

+, observe que a escolha dos sinais está fundamentada na interpretação física que uma onda propagando num meio com perdas sofre uma atenuação na sua energia, assim, α é a **constante de atenuação** cuja unidade é o *Neper/metro*. O termo β representa a variação de fase da onda e é denominado de **constante de fase**, a sua unidade é o *radiano/metro* e possui o mesmo significado que a constante k para uma onda propagando num meio sem perdas, mas observe que a sua definição depende da condutividade do meio, σ .

Exemplo 2.21 Considere que duas ondas planas foram geradas por um plano infinito, com corrente variante no tempo, colocado no plano $z = 0$, figura 2.27.a, e propagam em um meio com perdas. Escreva as equações dos campos instantâneos e mostre os seus gráficos.

Solução 2.21 Como o meio é com perdas temos os fatores α e β , o plano infinito gera uma onda propagando no sentido $+z$ e a outra no sentido $-z$, assim, da equação (2.112) temos que $\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 e^{\pm\gamma_z \vec{a}_z \cdot z \vec{a}_z}$ o que leva as seguintes formas instantâneas

$$\begin{aligned}\vec{E}^+(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \text{ onda propagando na direção } +\vec{a}_z, \\ \vec{E}^-(\vec{r}, t) &= \vec{E}_0 e^{+\alpha z} \cos(\omega t + \beta z) \text{ onda propagando na direção } -\vec{a}_z,\end{aligned}$$

os gráficos são apresentados nas figuras 2.30.a e 2.30.b, respectivamente.

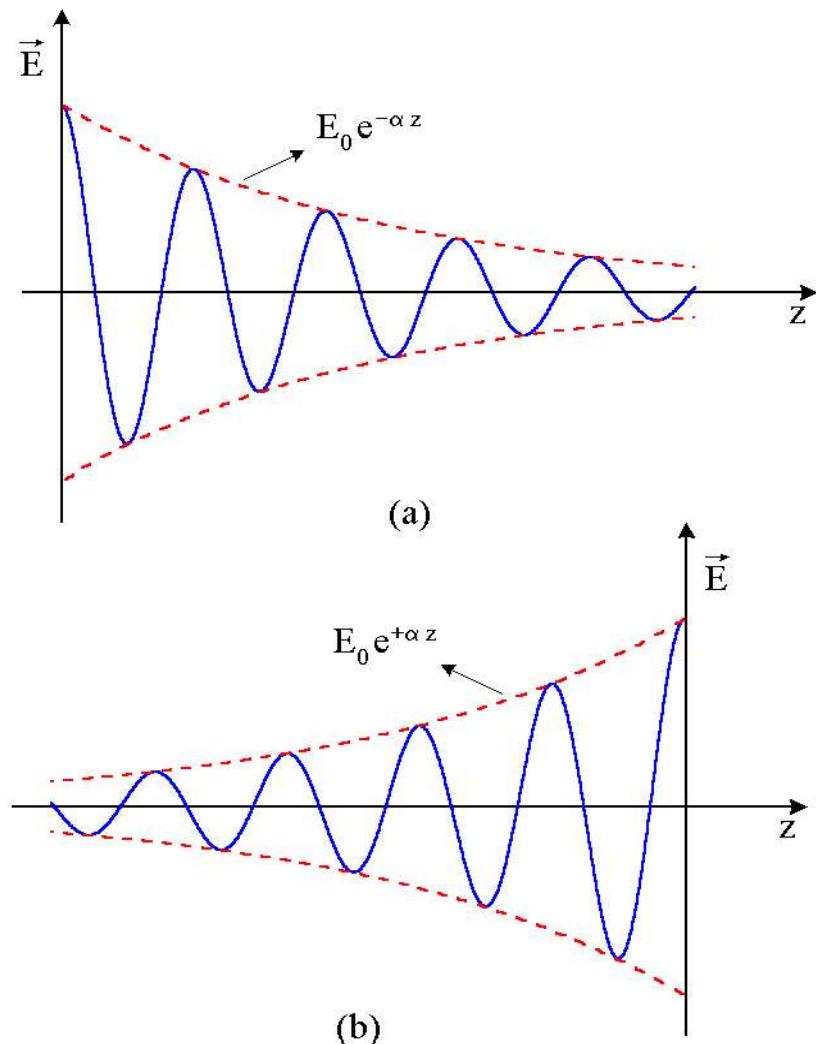


Figura 2.30: Ondas propagando em um meio com perdas: a) no sentido $+z$; b) no sentido $-z$.

Na figura 2.31 temos a onda que propaga no sentido $+z$ em três instantes de tempo.

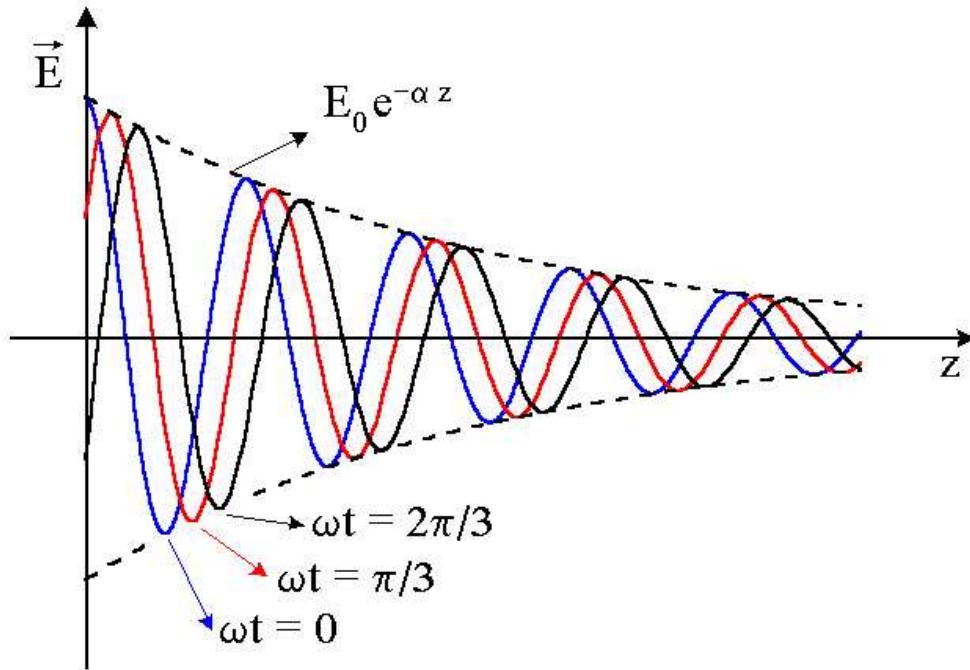


Figura 2.31: Onda propagando no sentido $+z$ nos instantes de tempo $\omega t = 0$, $\omega t = \pi/3$ e $\omega t = 2\pi/3$.

Quando um meio possui $\sigma \neq 0$ podemos definir, arbitrariamente, três condições:

1. $\omega \varepsilon \gg \sigma$
2. $\omega \varepsilon \sim \sigma$
3. $\omega \varepsilon \ll \sigma$

A primeira condição implica que a corrente de deslocamento é muito maior que a corrente de condução, o meio é classificado como **dielétrico** (tabela 1.1). A terceira implica que a corrente de condução é muito maior que a corrente de deslocamento, o meio é classificado como **condutor** (tabela 1.1). No caso intermediário, corrente de condução da mesma ordem da corrente de deslocamento, o meio é classificado como **quase condutor**. Podemos ser mais específicos e classificar os meios em relação ao valor da razão $\sigma/\omega\varepsilon$ como segue:

1. Dielétricos: $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} < \frac{1}{100}$
2. Quase condutores: $\frac{1}{100} < \frac{\sigma}{\omega\varepsilon} < 100$
3. Condutores: $\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} > 100$

Observe que todas as condições são dependentes da freqüência da onda, assim, qualquer meio pode se comportar como dielétrico, quase condutor ou condutor. Na figura 2.32 temos a razão $\sigma/\omega\varepsilon$ em função da freqüência para vários meios e na tabela 2.1 temos os parâmetros constitutivos destes meios.

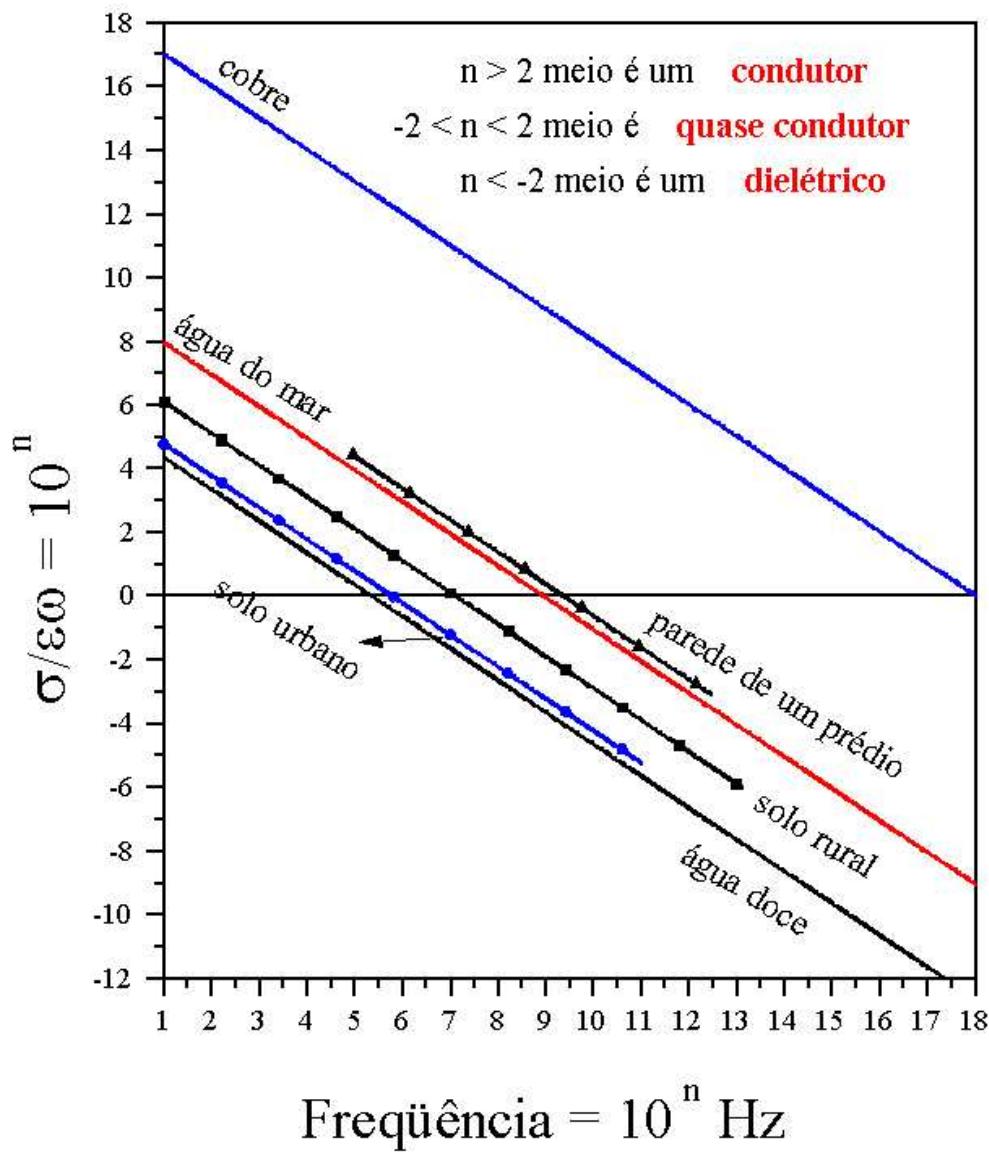


Figura 2.32: Razão $\sigma/\omega\epsilon$ em função da freqüência para vários meios.

O termo $\sigma/\omega\epsilon$ é denominado de **tangente de perdas** porque representa a razão entre a corrente de condução e a corrente de deslocamento, para vermos isto partimos da equação de Maxwell, equação (1.75), assim temos

$$\nabla \times \mathbf{H} = (\sigma + j\omega\epsilon) \mathbf{E} = \mathbf{J}_\sigma + \mathbf{J}_{desl}, \quad (2.122)$$

onde consideramos uma região sem fonte ($\mathbf{J}_i = 0$), assim, só temos a existência das correntes de condução e deslocamento. A razão entre as duas é

$$\frac{\mathbf{J}_\sigma}{\mathbf{J}_{desl}} = \frac{\sigma}{j\omega\epsilon}, \quad (2.123)$$

isto é, as duas correntes estão na mesma direção mais defasadas de 90° . A densidade de corrente de deslocamento está atrasada da densidade de corrente de condução de 90° , da mesma forma que a corrente do capacitor está atrasada da corrente de um resistor em paralelo com ele por 90° . A relação

$$\tan \theta = \frac{\sigma}{\omega\epsilon} \quad (2.124)$$

levou o nome de **tangente de perdas**. O diagrama fasorial das densidades de corrente está mostrado na figura 2.33.

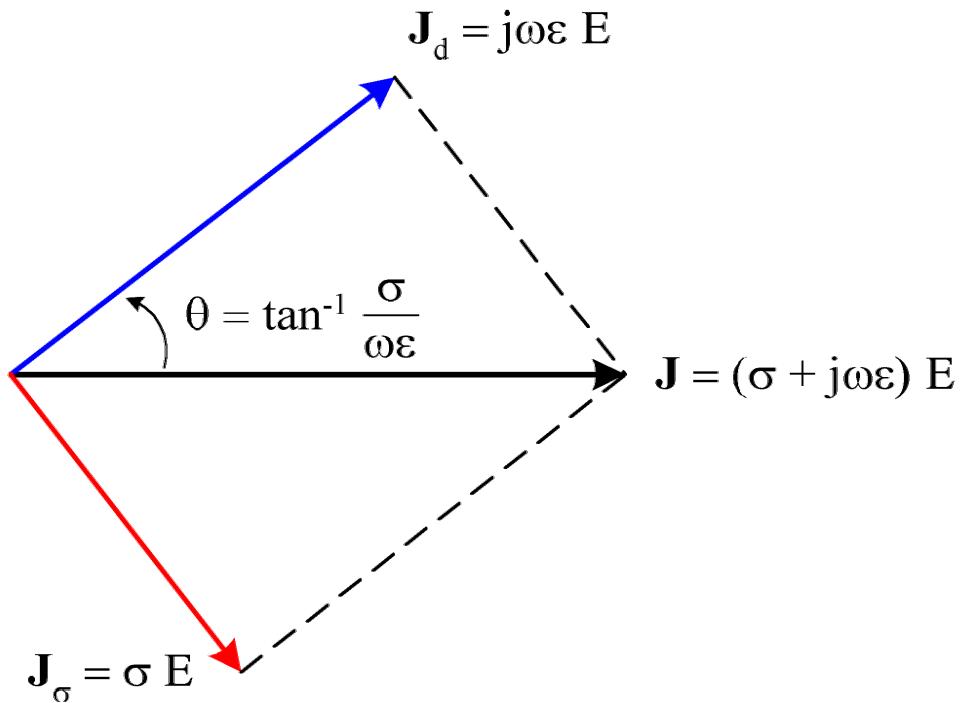


Figura 2.33: Diagrama fasorial das densidades de corrente em um meio.

Expressões para α e β em termos do ângulo de perdas θ , definido pela equação (2.124), são dadas por

$$\alpha = \omega \sqrt{\mu \epsilon \sec \theta} \operatorname{sen} \frac{\theta}{2}, \quad (\text{Np/m}) \quad (2.125)$$

$$\beta = \omega \sqrt{\mu \epsilon \sec \theta} \operatorname{cos} \frac{\theta}{2}. \quad (\text{rad/m}) \quad (2.126)$$

Exemplo 2.22 Um certo meio possui os parâmetros constitutivos de forma que a velocidade de propagação da energia é $1/3$ da velocidade da luz e a tangente de perdas é igual a 1 na freqüência de operação, nesta freqüência o comprimento de onda do espaço livre é $\lambda_0 = 2\text{ m}$. Determine as constantes de fase e atenuação, a velocidade de fase e o comprimento de onda.

Solução 2.22 Dos dados do problema temos que o ângulo de perdas é $\theta = 45^\circ$, $v = 1/\sqrt{\mu\epsilon} = 1 \times 10^8\text{ m/s}$. A freqüência de operação para a qual $\lambda_0 = 2\text{ m}$ é obtida usando $v = \lambda f \rightarrow f = 50\text{ MHz}$, assim $\omega = 100\pi 10^6$. Substituindo os parâmetros calculados nas equações (2.125) e (2.126) obtemos $\alpha \approx 4,289\text{ Np/m}$ e $\beta \approx 0,6068\text{ rad/m}$, para $v_f = \omega/\beta$ temos $v_f = 0,9095 \times 10^8\text{ m/s}$ e $\lambda = 2\pi/\beta \approx 0,6068\text{ m}$.

Meio	Permissividade relativa ϵ_r	Condutividade σ
cobre	1	$5,8 \times 10^7$
água do mar	80	4
água doce	80	10^{-2}
solo bom	10	10^{-2}
solo mau	4	10^{-3}
parede de um prédio	15	2

Tabela 2.1: Parâmetros constitutivos de meios comuns

Quando uma onda penetra em um meio com perdas sofrerá uma atenuação, para termos uma referência de atenuação convencionou-se definir uma distância de penetração em que o campo elétrico cai a $1/e$ do seu valor inicial, que é cerca de 36,79% do valor inicial, esta distância é denominada de **profundidade de penetração** e é dada por

$$\delta = \frac{1}{\alpha}. \quad (2.127)$$

Em termos de potência significa que a potência nesta distância chegou a 13,53% do seu valor inicial, uma queda de 8,67dB. Na figura 2.34 temos a atenuação do campo elétrico em um meio com perdas para várias constantes de atenuação.

Exemplo 2.23 Analise o comportamento da profundidade de penetração versus freqüência para o cobre e para o solo bom.

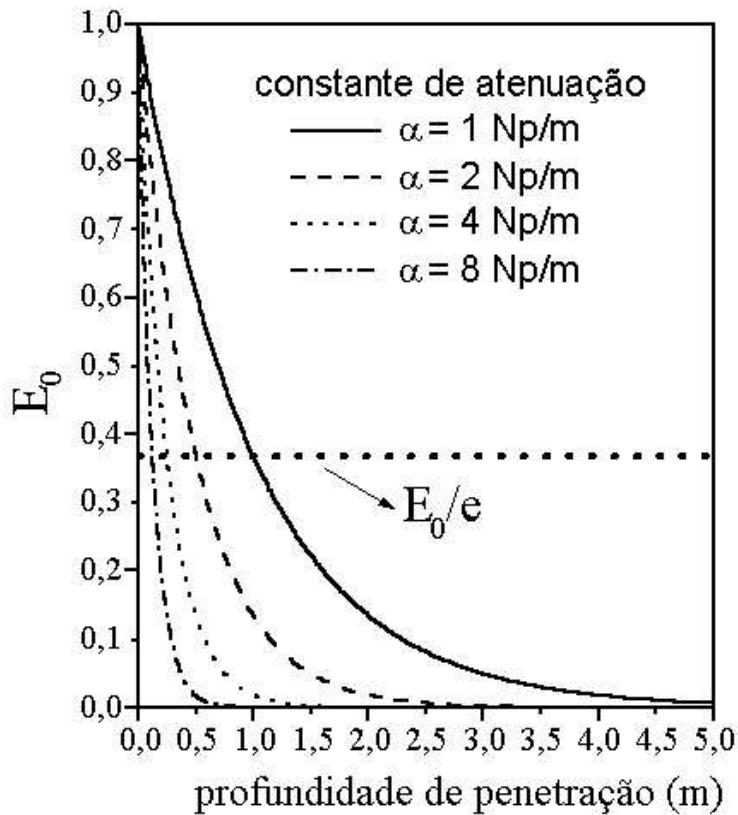


Figura 2.34: Atenuação do campo versus constante de atenuação.

Solução 2.23 Da tabela 2.1 temos que a condutividade do cobre é $\sigma = 5,8 \times 10^7 \text{ S/m}$ e $\varepsilon = \varepsilon_0$ assim temos todos os dados para calcular a constante de atenuação α e depois a profundidade de penetração δ . Na freqüência de 60 Hz $\delta = 0,85 \text{ cm}$ e na freqüência de 1 MHz $\delta \approx 6,6 \times 10^{-5} \text{ m}$. A figura 2.35 mostra o gráfico da atenuação e profundidade de penetração versus freqüência, vemos que a onda estará confinada numa fina camada do cobre e que a atenuação aumenta com a freqüência. Na figura 2.36 temos o gráfico para o caso do solo bom.

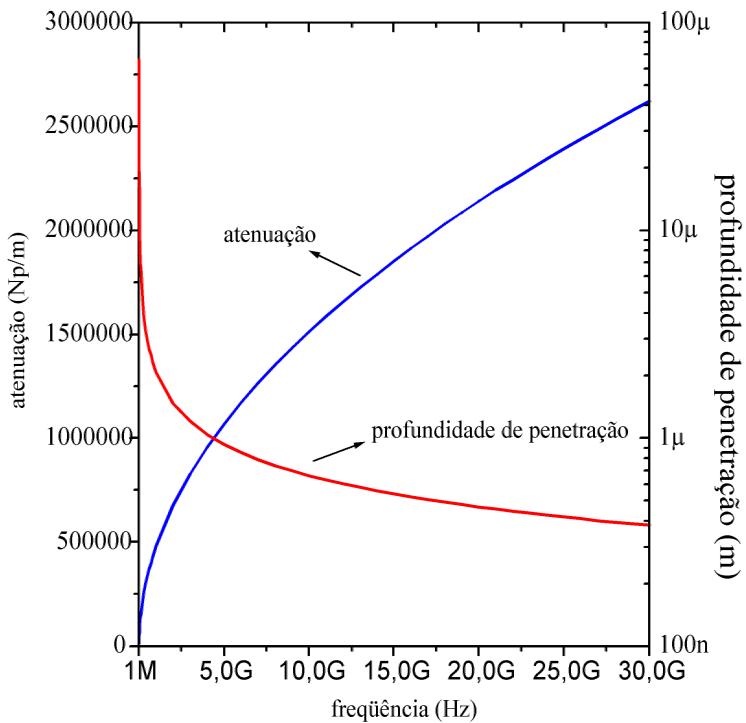


Figura 2.35: Atenuação e Profundidade de Penetração no cobre versus freqüência.

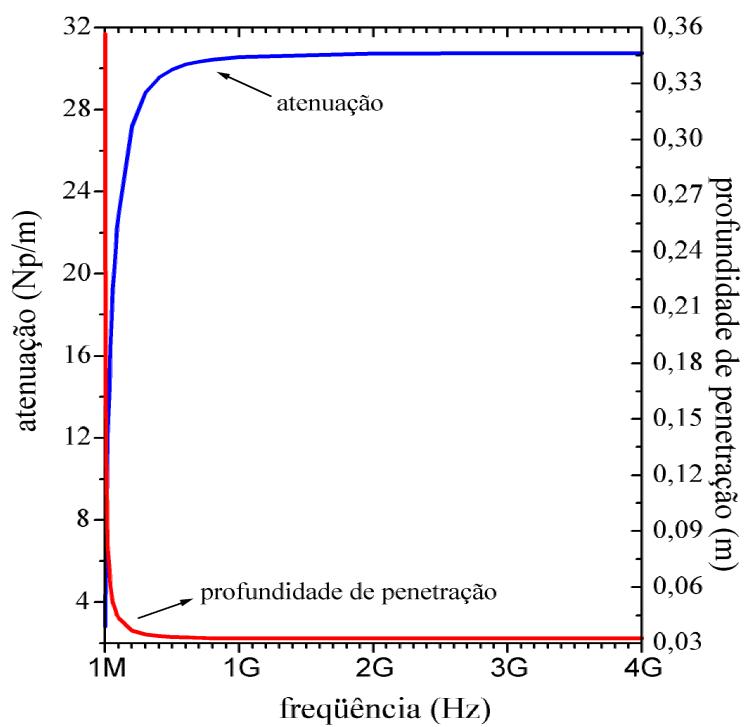


Figura 2.36: Atenuação e Profundidade de Penetração do solo bom versus freqüência.

2.8.1 Impedância dos meios condutores

Consideremos uma onda plana propagando num meio condutor, o seu campo elétrico é da seguinte forma

$$\mathbf{E} = E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \vec{a}_x, \quad (2.128)$$

o campo magnético associado é dado, da equação (1.74), por

$$\begin{aligned} \mathbf{H} &= \frac{-1}{j\omega\mu} \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{a}_y \\ \mathbf{H} &= \frac{\gamma}{j\omega\mu} E_0 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} \vec{a}_y. \end{aligned} \quad (2.129)$$

A impedância de onda, que no caso de uma onda plana, é igual a impedância do meio é dada, das equações (2.128) e (2.129) por

$$Z_c = \frac{E}{H} = \frac{j\omega\mu}{\gamma} \Omega. \quad (2.130)$$

Podemos expressar a impedância em outras formas, como segue

$$Z_c = \sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}} \Omega. \quad (2.131)$$

$$Z_c = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon - j\frac{\sigma}{\omega}}} \Omega. \quad (2.132)$$

$$Z_c = \frac{\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}}{\left[1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2\right]^{1/4}} e^{j(1/2)\tan^{-1}(\sigma/\omega\varepsilon)} \Omega. \quad (2.133)$$

As deduções das equações (2.131), (2.132) e (2.133) são deixadas como exercício. Observe que as equações para Z_c reduzem-se a equação para a impedância de um meio sem perdas quando $\sigma = 0$, assim estas expressões são para qualquer meio isotrópico.

Exemplo 2.24 Considere uma onda plana harmônica no tempo propagando na direção $+z$, cujo campo elétrico em $z = 0$ é $1000 e^{j0^\circ} \vec{a}_x V/m$ e oscila na freqüência de $10^8 Hz$. A onda propaga num meio com perdas cujos parâmetros elétricos são: $\sigma = 2/9 \times 10^{-1} S/m$, $\epsilon = 4\epsilon_0$ e $\mu = \mu_0$. Determine: a) α , β , Z ; b) a profundidade de penetração; c) o campo eletromagnético instantâneo; d) a classificação do meio; e) o vetor de Poynting instantâneo. Faça uma comparação entre a velocidade de fase e o comprimento de onda deste meio com um meio sem perdas e com os mesmos ϵ e μ .

Solução 2.24

a) as constantes de atenuação, fase e a impedância de onda são dados por

$$\begin{aligned}\alpha &= \frac{\omega \sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} - 1 \right]^{1/2} = \frac{\omega \sqrt{\mu_0 4\epsilon_0}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + 1^2} - 1 \right]^{1/2} \\ &= \frac{2\omega}{c\sqrt{2}} [0,414]^{1/2} \approx 1,91 Np/m \\ \beta &= \frac{\omega \sqrt{\mu\epsilon}}{\sqrt{2}} \left[\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\epsilon} \right)^2} + 1 \right]^{1/2} = \frac{2\omega}{c\sqrt{2}} [2,414]^{1/2} \approx 4,60 rad/m \\ Z &= \frac{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}}}{[1 + 1^2]^{1/4}} e^{j(1/2)\tan^{-1}(1)} \approx 158,51 |22,5^\circ| \approx (146,44 + j60,66) \Omega\end{aligned}$$

b) a profundidade de penetração é $\delta = 1/\alpha$

$$\delta = \frac{1}{1,91} \approx 0,52 m$$

c) como a onda plana está propagando na direção $+z$ e o campo elétrico tem componente \vec{a}_x , o campo magnético tem componente \vec{a}_y , assim, usando a definição de impedância de onda, equação (2.66), obtemos

$$\mathbf{H}_y = \frac{\mathbf{E}_x}{Z} = \frac{1000 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z}}{158,51 e^{j\pi/8}} \approx 6,31 e^{-1,9z} e^{-j[4,58z + (\pi/8)]},$$

os campos instantâneos são dados por

$$\begin{aligned}\vec{E} &= \Re[\mathbf{E} e^{j\omega t}] = \Re[1000 e^{-\alpha z} e^{-j\beta z} e^{i\omega t}] \\ &= 1000 e^{-1,9z} \cos(\omega t - 4,58z) \vec{a}_x V/m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\vec{H} &= \Re[\mathbf{H} e^{j\omega t}] \\ &= 6,31 e^{-1,9z} \cos(\omega t - 4,58z - \pi/8) \vec{a}_y A/m\end{aligned}$$

d) calculando $\sigma/\omega\epsilon$ obtemos

$$\frac{\sigma}{\omega\epsilon} = 1 \rightarrow \text{meio quase condutor}$$

e) o vetor de Poynting instantâneo é dado por $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$, assim temos

$$\begin{aligned}\vec{P} &= 1000 e^{-1,9z} \cos(\omega t - 4,58z) \vec{a}_x \times 6,31 e^{-1,9z} \cos(\omega t - 4,58z - \pi/8) \vec{a}_y \\ &= 3145 e^{-3,8z} [\cos(2\omega t - 9,16z - \pi/8) + \cos(\pi/8)] \vec{a}_z, W/m^2\end{aligned}$$

na figura 2.37 temos o gráfico desta onda propagando no meio, observe que em certas posições a potência retorna na direção $-z$, porque?

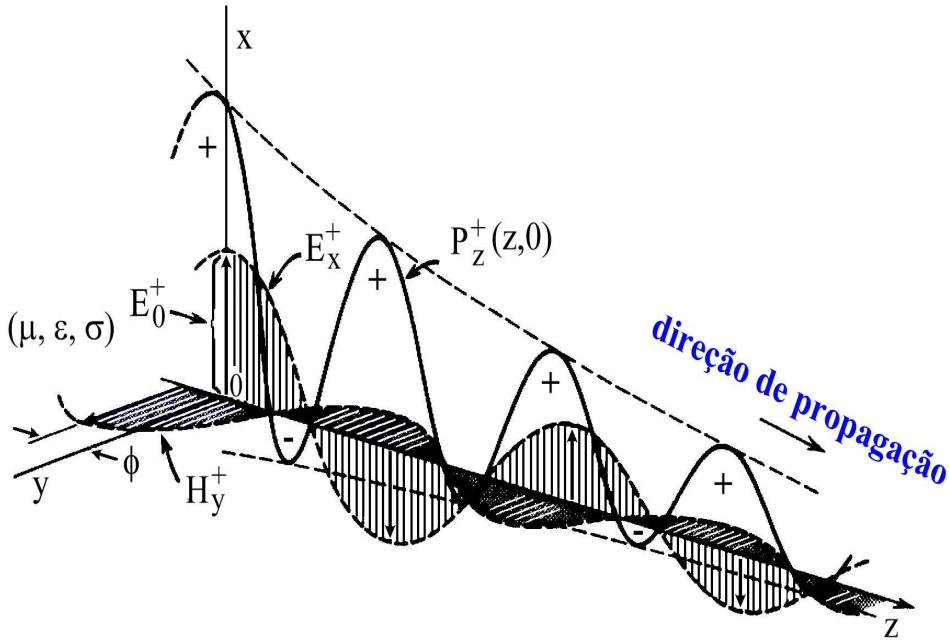


Figura 2.37: Onda propagando num meio com perdas.

Vamos calcular o comprimento de onda e a velocidade de fase considerando o meio com perdas e sem perdas (índice 0), temos

$$\begin{aligned}\lambda &= \frac{2\pi}{\beta} = \frac{2\pi}{4,58} = 1,37 \text{ m} \\ v_f &= \frac{\omega}{\beta} = \frac{2\pi \times 10^8}{4,58} = 1,37 \times 10^8 \text{ rad/s} \\ \lambda^0 &= \frac{2\pi}{k} = \frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu_0 4\epsilon_0}} = 1,5 \text{ m} \\ v_f^0 &= \frac{\omega}{k} = \frac{\omega}{\omega \sqrt{\mu_0 4\epsilon_0}} = 1,5 \times 10^8 \text{ rad/s}\end{aligned}$$

Comparando os valores vemos que a condutividade serve para diminuir a velocidade de fase que seria obtida se o meio fosse sem perdas, como podemos justificar este comportamento?

Exemplo 2.25 Determine os campos instantâneos \vec{E} e \vec{H} de uma onda plana e os parâmetros ϵ e σ do meio em que ela propaga sabendo que o meio é não magnético, que a freqüência da onda é de 30 MHz , que em $(x = 0 \text{ e } t = 0)$ $\mathbf{E} = 800 |25, 2^\circ| \text{ V/m}$ e que em $(x = 0,5 \text{ e } t = 6 \text{ ns})$ alcança o valor máximo positivo de 400 V/m .

Solução 2.25 Como o campo está propagando num meio com perdas a forma geral do campo é $\vec{E} = E_0 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + \phi_0) \vec{p}_e$, o vetor \vec{p}_e indica uma polarização genérica do campo. Em $(x = 0 \text{ e } t = 0)$ $\mathbf{E} = 800 |25, 2^\circ| \text{ V/m}$ assim temos que

$$\begin{aligned}E_0 &= 800 \\ \phi_0 &= 25, 2^\circ.\end{aligned}$$

Em $(x = 0,5 \text{ e } t = 6 \text{ ns})$ o campo alcança o valor máximo positivo de 400 V/m , assim temos

$$400 = 800 e^{-\alpha(0,5)} \cos(60\pi \times 10^6 \times 6 \times 10^{-9} - \beta(0,5) + 25, 2^\circ)$$

o que leva aos seguintes valores de α e β

$$\begin{aligned} \text{modulo} &\rightarrow 400 = 800 e^{-\alpha(0,5)} \rightarrow \alpha \approx 1,386 \text{ Np/m}, \\ \text{fase} &\rightarrow 360\pi \times 10^{-3} - \beta(0,5) + \pi/9 = 0 \rightarrow \beta = \pi \text{ rad/m} \end{aligned}$$

Substituindo os valores de α e β nas equações (2.117) e (2.118) obtemos

$$\begin{aligned} \varepsilon &\approx 1,78 \times 10^{-10} \text{ F/m} \\ \sigma &\approx 0,0368 \text{ S/m} \end{aligned}$$

Calculamos agora a impedância de onda, usando a equação (2.130) obtemos

$$Z = \frac{j\omega\mu}{\gamma} = \frac{j236,87}{1,386 + j\pi} = \frac{236,87 |90^\circ|}{3,4339 |66,196^\circ|} = 68,98 |23,805^\circ|.$$

Com os valores calculados os campos são dados por

$$\vec{E}_i = 800 e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + 25,2^\circ) \vec{p}_e \text{ V/m}$$

$$\vec{H}_i = \frac{800}{68,98} e^{-\alpha x} \cos(\omega t - \beta x + 1,4^\circ) \vec{p}_h \text{ A/m}$$

onde \vec{p}_e e \vec{p}_h atendem a seguinte condição $\vec{p}_e \times \vec{p}_h = \vec{a}_x$.

2.9 Aproximações para os parâmetros α , β , Z , λ , e v_f

Dependendo do valor da razão $\sigma/\omega\varepsilon$ de um meio, poderemos usar expressões aproximadas para calcular os parâmetros α , β , Z , λ e v_f . Na tabela 2.2 temos as expressões exatas e aproximadas para o cálculo dos parâmetros, as deduções são deixadas como exercício.

Parâmetros	Expressões exatas	Bom dielétrico $\sigma/\omega\varepsilon \ll 1$	Bom condutor $\sigma/\omega\varepsilon \gg 1$
atenuação α	$\omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} - 1 \right)}$	$\frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$
constante de fase β	$\omega \sqrt{\frac{\mu\varepsilon}{2} \left(\sqrt{1 + \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon}\right)^2} + 1 \right)}$	$\omega \sqrt{\mu\varepsilon} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2 \right]$ ou $\omega \sqrt{\mu\varepsilon}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu\sigma}{2}}$
impedância Z	$\sqrt{\frac{j\omega\mu}{\sigma + j\omega\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \left(1 + j \frac{\sigma}{2\omega\varepsilon} \right)$ ou $\sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} (1 + j)$
λ	$\frac{2\pi}{\beta}$	$\frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu\varepsilon} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2 \right]}$ ou $\frac{2\pi}{\omega \sqrt{\mu\varepsilon}}$	$2\pi \sqrt{\frac{2}{\omega\mu\sigma}}$
v_f	$\frac{\omega}{\beta}$	$\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon} \left[1 + \frac{1}{8} \left(\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} \right)^2 \right]}$ ou $\frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}}$	$\sqrt{\frac{2\omega}{\mu\sigma}}$

Tabela 2.2: Expressões para o cálculo dos parâmetros α , β , Z , λ e v_f

Exemplo 2.26 Uma onda plana linearmente polarizada na direção y , propaga na direção $+z$ na freqüência de 900 MHz , em um meio cujos parâmetros elétricos são $\mu = \mu_0$, $\varepsilon = 3\varepsilon_0$ e $\sigma = 0,01\text{ S/m}$. A magnitude do campo elétrico em $z = 0$ é 1 V/m . Determine: a) a impedância da onda; b) a magnitude do campo magnético em $z = 0$; c) a potência média disponível em $0,5\text{ m}^2$ de área perpendicular a direção de propagação em $z = 0$; d) o tempo que a onda leva para propagar 10 cm na direção $+z$; e) a distância na qual a intensidade de campo elétrico da onda cai a $1/10$ do seu valor inicial.

Solução 2.26 Calculando o valor de $\sigma/\omega\varepsilon$ obtemos

$$\frac{\sigma}{\omega\varepsilon} = \frac{0,01}{2\pi \times 900 \times 10^6 \times 3 \times \frac{10^{-9}}{36\pi}} \approx 0,07 \ll 1 \rightarrow \text{o meio é um bom dielétrico,}$$

assim, usaremos as expressões aproximadas da tabela 2.2.

a) para um dielétrico a impedância da onda é dada por

$$Z = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{120\pi}{\sqrt{3}} \approx 217,65$$

b) a magnitude do campo magnético é $H = E/Z$, assim temos

$$H = \frac{E}{Z} \approx 4,59 \times m\text{ A/m}$$

c) a potência média disponível em $0,5\text{ m}^2$ de área perpendicular a direção de propagação em $z = 0$ é a magnitude do vetor de Poynting (densidade de potência) vezes a área, assim temos

$$\mathbf{P}_m = \frac{1}{2} \Re e [E_{(z=0)} \vec{a}_y \times H_{(z=0)} (-\vec{a}_x)] = \frac{1}{2} \frac{E_{(z=0)}^2}{Z} \vec{a}_z \approx 2,3 \text{ mW/m}^2$$

$$P_m \approx 2,3 \times 0,5 = 1,15 \text{ mW}$$

d) a velocidade de propagação da onda é dada por $v = 1/\sqrt{\mu\varepsilon}$, o tempo gasto para percorrer 10 cm é

$$v = \frac{1}{\sqrt{\mu\varepsilon}} = \frac{3 \times 10^8}{\sqrt{3}} \approx 1,73 \times 10^8 \text{ m/s} \rightarrow t \approx \frac{0,1}{1,73 \times 10^8} = 0,58 \text{ ns}$$

e) a amplitude do campo elétrico é dada por $E = E_{(z=0)} e^{-\alpha z}$, a distância z em que o campo E vale um décimo do seu valor inicial ($z = 0$) é dada por

$$\begin{aligned} z &= -\frac{\ln\left(\frac{E_{(z=0)}/10}{E_{(z=0)}}\right)}{\alpha} = -\delta \ln\left(\frac{E_{(z=0)}/10}{E_{(z=0)}}\right) \\ \alpha &= \frac{\sigma}{2} \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} \approx 1,09 \text{ Np/m} \rightarrow z \approx 2,12 \text{ m} \end{aligned}$$

2.10 Onda plana incidência normal em interface

Consideremos um onda plana linearmente polarizada na direção x propagando na direção $+a_z$ incidindo normalmente em uma interface plana, isto é, seu vetor propagação $\vec{\gamma}$ faz um ângulo de 90° com a interface, como mostrado na figura 2.28.a. Na figura 2.38.b temos a representação no plano $y = 0$.

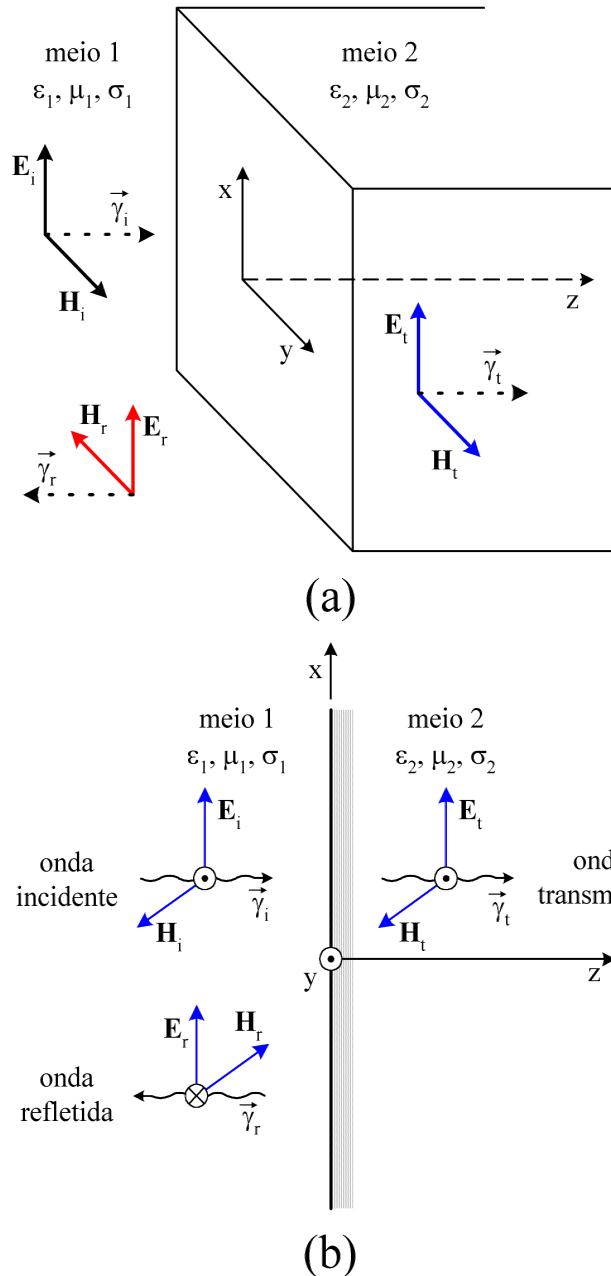


Figura 2.38: Onda plana incidindo normalmente em uma interface plana.

As componentes dos campo incidente são \mathbf{E}_i , \mathbf{H}_i , as do campo refletido são \mathbf{E}_r , \mathbf{H}_r e as do campo transmitido são \mathbf{E}_t , \mathbf{H}_t . Da aplicação das condições de fronteira, equações (1.78) e (1.79), com a consideração que não temos corrente na fronteira, obtemos

$$\vec{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0 \rightarrow \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_t, \quad (2.134)$$

$$\vec{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = 0 \rightarrow \mathbf{H}_i + \mathbf{H}_r = \mathbf{H}_t. \quad (2.135)$$

Temos duas equações e quatro incógnitas, precisamos de mais equações relacionando as incógnitas. Sabemos que o campo elétrico e o campo magnético estão relacionados pela impedância intrínseca do meio, assim, temos as seguintes equações

$$\frac{\mathbf{E}_i}{\mathbf{H}_i} = Z_1, \quad (2.136)$$

$$\frac{\mathbf{E}_r}{\mathbf{H}_r} = -Z_1, \quad (2.137)$$

$$\frac{\mathbf{E}_t}{\mathbf{H}_t} = Z_2, \quad (2.138)$$

observe que a impedância relacionando \mathbf{E}_r e \mathbf{H}_r é negativa porque a onda refletida está propagando na direção $-\vec{a}_z$.

Substituindo as equações (2.136), (2.137) e (2.138) na equação (2.135) obtemos

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_t &= \frac{\mathbf{E}_t}{Z_2} = \frac{\mathbf{E}_i}{Z_1} - \frac{\mathbf{E}_r}{Z_1}, \\ \mathbf{E}_t &= \frac{Z_2}{Z_1} \mathbf{E}_i - \frac{Z_2}{Z_1} \mathbf{E}_r. \end{aligned} \quad (2.139)$$

Multiplicando a equação (2.134) por Z_2/Z_1 encontramos

$$\frac{Z_2}{Z_1} \mathbf{E}_t = \frac{Z_2}{Z_1} \mathbf{E}_i + \frac{Z_2}{Z_1} \mathbf{E}_r, \quad (2.140)$$

somando as equações (2.139) e (2.140) obtemos

$$\mathbf{E}_t \left(1 + \frac{Z_2}{Z_1} \right) = 2 \frac{Z_2}{Z_1} \mathbf{E}_i. \quad (2.141)$$

Definimos um *coeficiente de transmissão* T , que relaciona as amplitudes do campo elétrico da onda transmitida e da onda incidente, da seguinte forma

$$T = \frac{\mathbf{E}_t}{\mathbf{E}_i} = \frac{2 Z_2}{Z_2 + Z_1}. \quad (2.142)$$

Subtraindo a equação (2.139) da equação (2.140) obtemos

$$\mathbf{E}_t \left(\frac{Z_2}{Z_1} - 1 \right) = 2 \frac{Z_2}{Z_1} \mathbf{E}_r, \quad (2.143)$$

substituindo a equação (2.142) na equação (2.143) encontramos

$$\mathbf{E}_i \left(\frac{Z_2 - Z_1}{Z_1} \right) \left(\frac{2 Z_2}{Z_2 + Z_1} \right) = 2 \frac{Z_2}{Z_1} \mathbf{E}_r. \quad (2.144)$$

Definimos um *coeficiente de reflexão* Γ , que relaciona as amplitudes do campo elétrico da onda refletida da onda incidente, da seguinte forma

$$\Gamma = \frac{\mathbf{E}_r}{\mathbf{E}_i} = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1}. \quad (2.145)$$

Das equações (2.142) e (2.145) obtemos a seguinte equação relacionando T e Γ

$$T = \Gamma + 1. \quad (2.146)$$

Caso 1: Suponha que o meio 1 é o ar e o meio 2 um condutor, a impedância do meio 1, Z_1 será muito maior que a do meio 2, Z_2 , assim, da equação (2.143) temos

$$\mathbf{E}_t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \mathbf{E}_i \rightarrow \mathbf{E}_t \approx \frac{2Z_2}{Z_1} \mathbf{E}_i$$

$$\mathbf{E}_t = Z_2 \mathbf{H}_t, \quad \mathbf{E}_i = Z_1 \mathbf{H}_i$$

$$\mathbf{H}_t \approx 2 \mathbf{H}_i \rightarrow \mathbf{H}_r \approx \mathbf{H}_i,$$

então o campo magnético dobra de intensidade na fronteira entre os meios e existirá uma onda estacionária quase pura no meio 1.

Caso 2: Considere a situação oposta, o meio 1 é um condutor e o meio 2 é o ar, assim $Z_1 \ll Z_2$, da equação (2.143) temos

$$\mathbf{E}_t = \frac{2Z_2}{Z_1 + Z_2} \mathbf{E}_i \rightarrow \mathbf{E}_t \approx 2 \mathbf{E}_i,$$

então o campo elétrico dobra de intensidade na fronteira entre os meios e existirá uma onda estacionária quase pura no meio 1.

Caso 3: Considere que o meio 2 é um condutor perfeito, assim, $\sigma = \infty \rightarrow Z_2 = 0$ e teremos das equações (2.143) e (2.146) que

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} = -1,$$

$$T = 0,$$

a onda será totalmente refletida, $\mathbf{E}_r = -\mathbf{E}_i \rightarrow \mathbf{H}_r = \mathbf{H}_i$, o campo magnético dobra de intensidade na fronteira entre os meios e existirá uma onda estacionária pura no meio 1.

Definidos os coeficientes de reflexão, Γ , e o de transmissão, T , temos condições de escrever as expressões para os campos eletromagnéticos refletidos e transmitidos. Consideremos o campo eletromagnético incidente da seguinte forma

$$\mathbf{E}_i = \mathbf{E}_0 \vec{a}_x e^{-\gamma_1 z}, \quad (2.147)$$

$$\mathbf{H}_i = \frac{\mathbf{E}_0}{Z_1} \vec{a}_y e^{-\gamma_1 z}, \quad (2.148)$$

então, os campos eletromagnéticos refletidos e transmitidos serão dados por

$$\mathbf{E}_r = \Gamma \mathbf{E}_0 \vec{a}_x e^{+\gamma_1 z}, \quad (2.149)$$

$$\mathbf{H}_r = \frac{-\Gamma \mathbf{E}_0}{Z_1} \vec{a}_y e^{+\gamma_1 z}, \quad (2.150)$$

$$\mathbf{E}_t = T \mathbf{E}_0 \vec{a}_x e^{-\gamma_2 z}, \quad (2.151)$$

$$\mathbf{H}_t = \frac{T \mathbf{E}_0}{Z_2} \vec{a}_y e^{-\gamma_2 z}. \quad (2.152)$$

As densidades de potência média associadas aos campos eletromagnéticos incidentes, refletidos e transmitidos são dadas, da definição do vetor de Poynting médio, equação (1.87), por

$$\vec{P}_m^i = \frac{1}{2} \Re e (\mathbf{E}_i \times \overline{\mathbf{H}}_i) = \Re e \left[\frac{1}{Z_1} \right] \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{2} \vec{a}_z e^{-2\alpha_1 z}, \quad (2.153)$$

$$\begin{aligned} \vec{P}_m^r &= \frac{1}{2} \Re e (\mathbf{E}_r \times \mathbf{H}_r) = \Re e \left[\frac{1}{Z_1} \right] \frac{-|\Gamma|^2 |\mathbf{E}_0|^2}{2} \vec{a}_z e^{+2\alpha_1 z} \\ &= -|\Gamma|^2 P_m^i \vec{a}_z e^{+2\alpha_1 z}, \end{aligned} \quad (2.154)$$

$$\begin{aligned} \vec{P}_m^t &= \frac{1}{2} \Re e (\mathbf{E}_t \times \mathbf{H}_t) = \Re e \left[\frac{1}{Z_2} \right] \frac{|T|^2 |\mathbf{E}_0|^2}{2} \vec{a}_z e^{-2\alpha_2 z} \\ &= \frac{\Re e \left[\frac{1}{Z_2} \right]}{\Re e \left[\frac{1}{Z_1} \right]} |T|^2 P_m^i \vec{a}_z e^{-2\alpha_2 z}. \end{aligned} \quad (2.155)$$

O campo total existente no meio 1 é a superposição do campo incidente e do campo refletido, assim temos

$$\begin{aligned}\mathbf{E}_1 &= \mathbf{E}_i + \mathbf{E}_r = \mathbf{E}_0 e^{-\gamma_1 z} (1 + \Gamma e^{2\gamma_1 z}) \vec{a}_x, \\ \mathbf{E}_1 &= \underbrace{\mathbf{E}_0 e^{-\alpha_1 z} e^{-j\beta_1 z}}_{\text{onda propagando}} \underbrace{(1 + \Gamma e^{2\alpha_1 z} e^{j2\beta_1 z})}_{\text{onda estacionária}}.\end{aligned}\quad (2.156)$$

O campo é formado pelo produto de uma onda propagando e de uma onda estacionária.

Exemplo 2.27 Uma onda plana na freqüência de 1 GHz, propagando no ar, incide normalmente sobre uma chapa de cobre ($\varepsilon = \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ e $\sigma = 58 \times 10^6 \text{ S/m}$). Sabendo que o módulo do campo elétrico da onda é de 1 V/m, determine a potência média absorvida pela chapa por metro quadrado de área.

Solução 2.27 O cobre na freqüência da onda incidente é um bom condutor, assim, usamos a expressão aproximada para o cálculo da impedância, da tabela 2.2, obtemos

$$Z_c = \sqrt{\frac{\omega \mu}{\sigma}} |45^\circ| \rightarrow \Re[Z_c] = 8,25 \text{ m}\Omega,$$

como vimos no caso 1 o campo magnético tangente a chapa de cobre será $H_t \approx 2 H_i$, assim temos

$$H_t = \frac{2 E_i}{\sqrt{\frac{\mu_0}{\varepsilon_0}}} = \frac{2}{120 \pi} A/m,$$

a potência média absorvida pela chapa é o módulo do vetor de Poynting médio, usando a equação (2.155), observando que partimos com o campo H_t , obtemos

$$\begin{aligned}\vec{P}_m^t &= \frac{1}{2} |H_t|^2 e^{-2\alpha z} \Re[Z_c], \\ P_m &= \frac{1}{2} \left(\frac{2}{120 \pi} \right)^2 8,25 = 116 \text{ nW/m}^2.\end{aligned}$$

Exemplo 2.28 Uma onda plana uniforme propagando no espaço livre, incide normalmente sobre a fronteira plana de um meio sem perdas, semi-infinito cujos parâmetros elétricos são ($\varepsilon = 2,56 \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ e $\sigma = 0$). Determine os coeficientes de reflexão e transmissão e as densidades de potência média incidente, refletida e transmitida. Assuma que a amplitude do campo elétrico incidente na interface é de 1 mV/m.

Solução 2.28 As impedâncias características dos dois meios são

$$Z_1 = 120 \pi \Omega, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\mu}{\varepsilon}} = \frac{120 \pi}{1,6} \Omega,$$

usando estes valores obtemos

$$\Gamma = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} = -0,231, \quad T = \frac{2 Z_2}{Z_2 + Z_1} = \frac{2}{2,6} = 0,769,$$

usando os valores calculados obtemos as seguintes densidades de potência média

$$P_m^i = \Re \left[\frac{1}{Z_1} \right] \frac{|\mathbf{E}_0|^2}{2} = \frac{(10^{-3})^2}{2 \cdot 120 \pi} = 1,326 \text{ nW/m}^2,$$

$$P_m^r = |\Gamma|^2 P_m^i = 0,071 \text{ nW/m}^2,$$

$$P_m^t = (1 - |\Gamma|^2) P_m^i = 1,255 \text{ nW/m}^2.$$

Exemplo 2.29 Uma onda plana uniforme propagando no espaço livre incide normalmente sob a fronteira plana de um meio caracterizado por $\varepsilon = 9\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ e $\sigma = 10^{-1} S/m$. Considerando que o campo elétrico incidente tem uma componente x com uma amplitude de $10^{-3} V/m$ na interface e oscila na freqüência de $1 MHz$, determine: a) a classificação do meio 2; b) os coeficientes de reflexão e transmissão; c) o campo elétrico total na interface; d) a variação da densidade de corrente de condução no meio 2.

Solução 2.29 Na freqüência de $1 MHz$ temos

$$\frac{\sigma_2}{\omega \varepsilon_2} = \frac{10^{-1}}{2\pi(1 \times 10^{-6})(9 \times 10^{-9}/36\pi)} = 2 \times 10^2 \gg 1$$

a) o meio 2 é um excelente condutor

b) as impedâncias características dos meios são

$$Z_1 = 120\pi, \quad Z_2 = \sqrt{\frac{\omega\mu}{\sigma}} \sqrt{2} |45^\circ| = 2\pi(1+j),$$

a partir destes valores calculamos os coeficientes de reflexão e transmissão

$$\Gamma = \frac{2\pi(1+j) - 120\pi}{2\pi(1+j) + 120\pi} = \frac{-118+2j}{122+2j} = \frac{118,017|179,03^\circ}{122,017|0,939^\circ} = 0,967|178,1^\circ$$

$$T = 1 + \Gamma = 1 - 0,9665 + j 0,03206 = 0,0335 + j 0,03206 = 0,0464|5,467^\circ$$

c) o campo elétrico total na interface é o campo \mathbf{E}_2 em $z=0$ então temos

$$\mathbf{E}_2|_{z=0} = 1 \times 10^{-3} |T| \vec{a}_x = 10^{-3} |0,0464|5,467^\circ| \vec{a}_x = 4,64 \times 10^{-5} \vec{a}_x V/m$$

d) a densidade de corrente de condução no meio 2 é obtida da relação $\mathbf{J} = \sigma \mathbf{E}$, assim, temos que a magnitude da corrente na interface é dada por

$$\mathbf{J}_c|_{z=0} = \mathbf{J}_0 \vec{a}_x = \sigma \mathbf{E}_2|_{z=0} \vec{a}_x = 1 \times 10^{-1} (4,64 \times 10^{-5}) \vec{a}_x \rightarrow J_0 = 4,64 \mu A/m^2$$

esta é a densidade de corrente na interface, ao longo do meio 2 o campo elétrico varia da seguinte forma

$$\mathbf{E}_2(z) = \mathbf{E}_2|_{z=0} e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z},$$

assim, a magnitude da densidade de corrente do meio 2 variará da seguinte forma

$$|\mathbf{J}_c| = |\mathbf{J}_o e^{-\alpha_2 z} e^{-j\beta_2 z}| = J_o e^{-\alpha_2 z},$$

a constante de atenuação, α_2 , é dada por

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega \mu \sigma}{2}} = \sqrt{\frac{2 \pi \times 10^6 (4 \pi \times 10^{-7}) \times 10^{-1}}{2}} = \frac{2 \pi}{10} \approx 0,62832 Np/m,$$

a profundidade de penetração é $\delta = 1/\alpha \approx 1,5915 m$, nesta profundidade a densidade de corrente vale

$$|\mathbf{J}_c| |_{z=\delta} = J_0 e^{-1} \approx 1,69 \mu A/m^2.$$

Na figura 2.39 temos um esboço do campo eletromagnético e da densidade de corrente no meio 2.

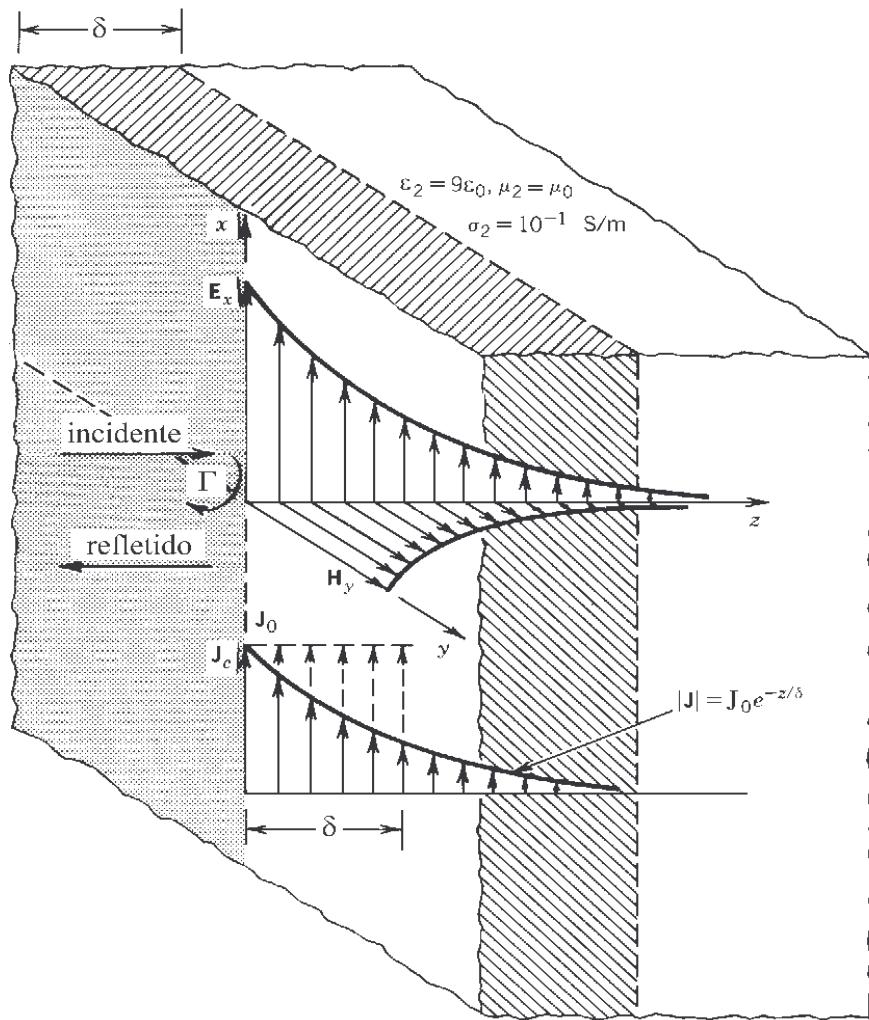


Figura 2.39: Campo eletromagnético e densidade de corrente de elétrica num meio com perdas.

2.11 Onda plana incidência normal em sistema com n regiões

Na seção anterior consideramos o caso de apenas uma interface no espaço, isto é, dois meios, um caso mais geral é considerar n regiões, o que leva a uma multiplicidade de ondas refletidas e transmitidas, que no estado harmônico estacionário resultam em ondas planas simples que viajam para frente e para trás em cada região. Suponha um sistema de três regiões como mostrado na figura 2.40.a, uma onda $\mathbf{E}_{xA}^+ = \mathbf{E}_{mA}^+ e^{-\gamma z}$ incide normalmente como mostrado. Depois que a onda incide dá origem a geração de uma seqüência infinita de ondas que viajam para frente e para trás no sistema, como mostrado na figura 2.40.b. Em consequência se estabelece ondas refletidas e transmitidas no meio 2 e só ondas transmitidas no meio 3, no meio 1 temos uma onda refletida e ondas transmitidas provenientes do meio 2.

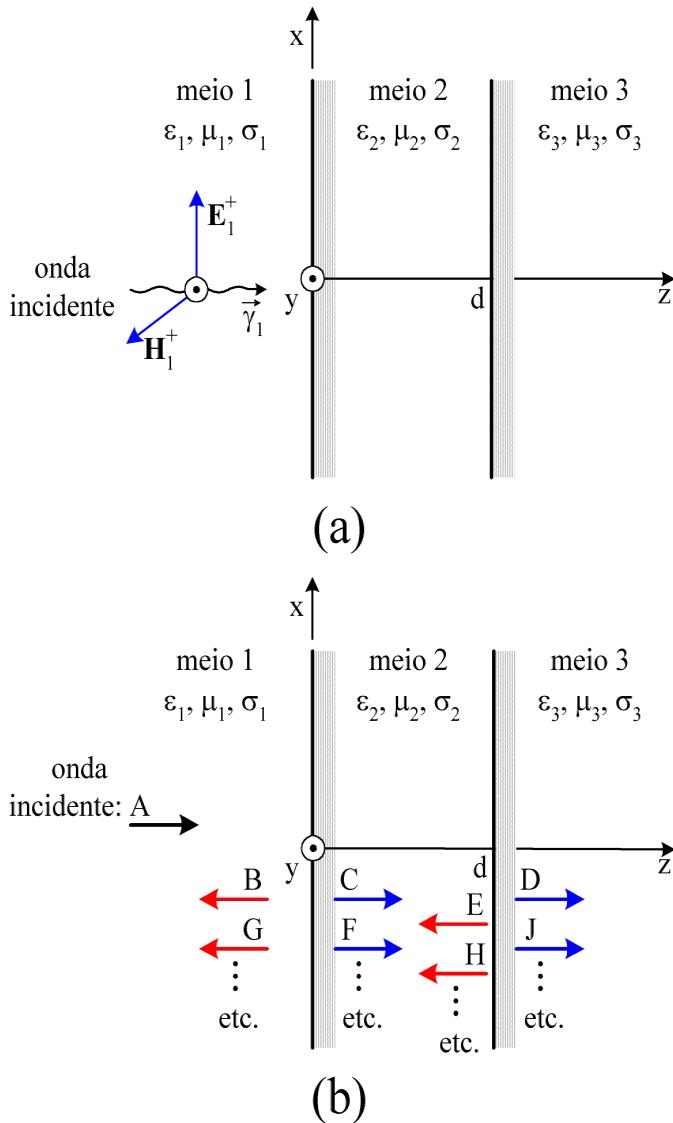


Figura 2.40: Formação das ondas planas num sistema de 3 regiões.

No estado harmônico estável temos que o campo elétrico líquido que propaga na direção $+z$ no meio 1, polarizado na direção x é

$$\mathbf{E}_{xA}^+(z) = \mathbf{E}_{mA}^+(z) e^{-\gamma_1 z},$$

a onda refletida nesta região consiste em uma seqüência infinita de contribuições da ondas B , G, \dots , mostradas na figura 2.40.b, assim

$$\mathbf{E}_{xB}^-(z) = \mathbf{E}_{mB}^-(z) e^{\gamma_1 z} \quad \mathbf{E}_{xG}^-(z) = \mathbf{E}_{mG}^-(z) e^{\gamma_1 z} \dots$$

Cada onda tem o fator $e^{\gamma_1 z}$, assim, a soma infinita no estado harmônico estável é

$$\mathbf{E}_{mB}^-(z) e^{\gamma_1 z} + \mathbf{E}_{mG}^-(z) e^{\gamma_1 z} + \dots = \left[\sum \mathbf{E}_{mi}^-(z) \right] e^{\gamma_1 z} = \mathbf{E}_{m1}^- e^{\gamma_1 z}, \quad (2.157)$$

que se reduz a uma onda líquida refletida na região 1 e denominada por

$$\mathbf{E}_{x1}^- = \mathbf{E}_{m1}^- e^{\gamma_1 z}. \quad (2.158)$$

Cada campo elétrico da equação (2.157) tem um campo magnético associado e relacionado pela impedância intrínseca do meio 1, assim temos

$$\mathbf{H}_{y1}^- = \frac{\mathbf{E}_{m1}^-}{Z_1} e^{\gamma_1 z}. \quad (2.159)$$

Com argumentos semelhantes definimos os campos eletromagnéticos nas outras regiões como.

$$\mathbf{E}_{x2}^+ = \mathbf{E}_{m2}^+ e^{-\gamma_2 z}, \quad \mathbf{H}_{y2}^+ = \frac{\mathbf{E}_{m2}^+}{Z_2} e^{-\gamma_2 z}. \quad (2.160)$$

$$\mathbf{E}_{x2}^- = \mathbf{E}_{m2}^- e^{\gamma_2 z}, \quad \mathbf{H}_{y2}^- = \frac{\mathbf{E}_{m2}^-}{Z_2} e^{\gamma_2 z}. \quad (2.161)$$

$$\mathbf{E}_{x3}^+ = \mathbf{E}_{m3}^+ e^{-\gamma_3 z}, \quad \mathbf{H}_{y3}^+ = \frac{\mathbf{E}_{m3}^+}{Z_3} e^{-\gamma_3 z}. \quad (2.162)$$

A solução de onda para o estado senoidal estável do problema de três regiões mostrado na figura 2.41, com uma amplitude de campo elétrico conhecida \mathbf{E}_1^+ , consiste em determinar as amplitudes \mathbf{E}_1^- , \mathbf{E}_2^+ , \mathbf{E}_2^- e \mathbf{E}_3^+ , um total de quatro incógnitas. As quatro condições de fronteira, que exigem a continuidade dos campos E e H nas interfaces, são suficientes para gerar as quatro equações lineares em funções destas amplitudes.

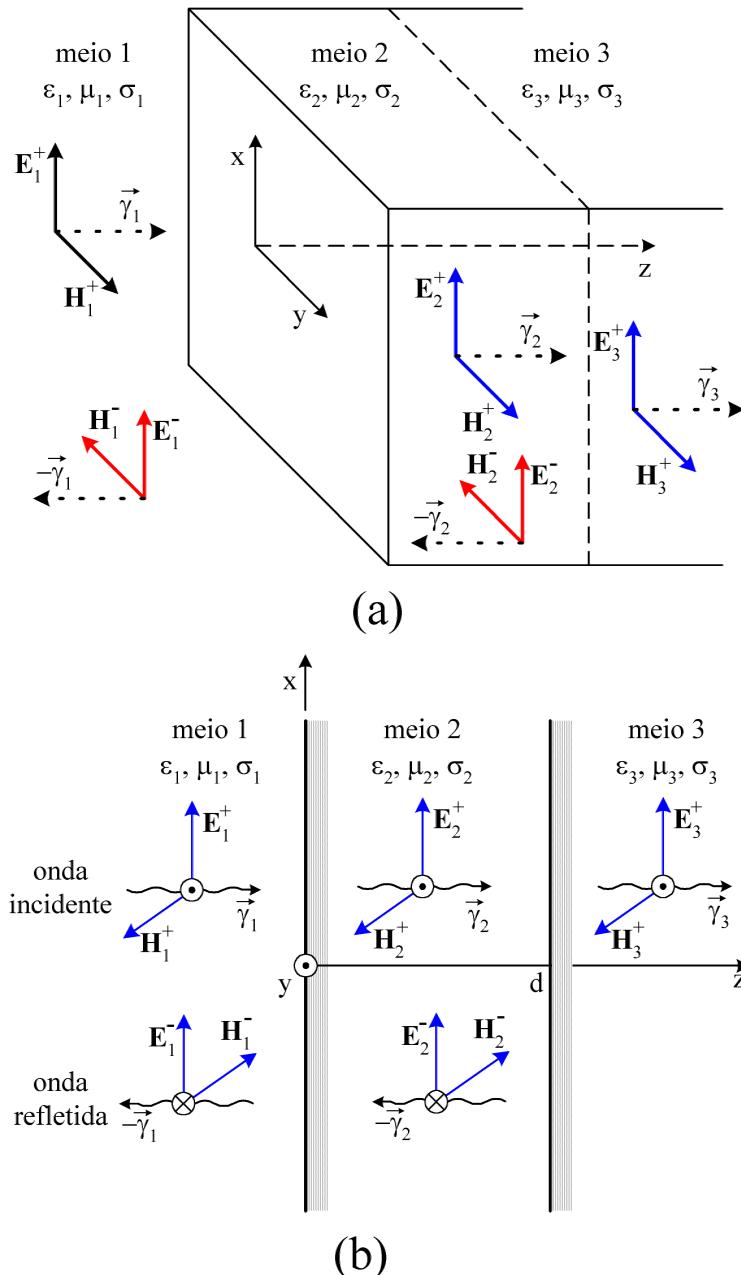


Figura 2.41: Onda plana incidindo num sistema com três regiões distintas.

O procedimento de análise é o mesmo feito na seção anterior, consideramos uma onda polarizada na direção x propagando na direção $+z$, incidindo normalmente na primeira interface, onde temos uma reflexão e transmissão, o campo transmitido propaga no meio dois e incide na segunda interface, onde ocorre nova reflexão e transmissão. Na figura 2.41.b temos a representação no plano $y = 0$. Podemos escrever para os campos nas três regiões as seguintes

equações

$$\mathbf{E}_1 = \mathbf{E}_1^+ + \mathbf{E}_1^- = [E_1^+ e^{-\gamma_1 z} + E_1^- e^{+\gamma_1 z}] \vec{a}_x \quad (2.163)$$

$$\mathbf{H}_1 = \mathbf{H}_1^+ + \mathbf{H}_1^- = \left[\frac{E_1^+}{Z_1} e^{-\gamma_1 z} - \frac{E_1^-}{Z_1} e^{+\gamma_1 z} \right] \vec{a}_y \quad (2.164)$$

$$\mathbf{E}_2 = \mathbf{E}_2^+ + \mathbf{E}_2^- = [E_2^+ e^{-\gamma_2 z} + E_2^- e^{+\gamma_2 z}] \vec{a}_x \quad (2.165)$$

$$\mathbf{H}_2 = \mathbf{H}_2^+ + \mathbf{H}_2^- = \left[\frac{E_2^+}{Z_2} e^{-\gamma_2 z} - \frac{E_2^-}{Z_2} e^{+\gamma_2 z} \right] \vec{a}_y \quad (2.166)$$

$$\mathbf{E}_3 = E_3^+ e^{-\gamma_3 z} \vec{a}_x \quad (2.167)$$

$$\mathbf{H}_3 = \frac{E_3^+}{Z_3} e^{-\gamma_3 z} \vec{a}_y, \quad (2.168)$$

observe que as amplitudes dos campos nestas equações são, em geral, complexas, isto é, podem ter um fator de fase relativa. As condições de fronteira, equações (1.78) e (1.79), são satisfeitas igualando-se as equações (2.163) com (2.165) e (2.164) com (2.166) em $z = 0$ e (2.165) com (2.167) e (2.166) com (2.168) em $z = d$. Fazendo-se isto e colocando o fator conhecido E_1^+ a direita das equações, obtemos o seguinte sistema de equações lineares

$$E_1^- - E_2^+ - E_2^- = -E_1^+ \quad (2.169)$$

$$\frac{E_1^-}{Z_1} + \frac{E_2^+}{Z_2} - \frac{E_2^-}{Z_2} = \frac{E_1^+}{Z_1} \quad (2.170)$$

$$E_2^+ e^{-\gamma_2 d} + E_2^- e^{\gamma_2 d} - E_3^+ e^{-\gamma_3 d} = 0 \quad (2.171)$$

$$\frac{E_2^+}{Z_2} e^{-\gamma_2 d} - \frac{E_2^-}{Z_2} e^{\gamma_2 d} - \frac{E_3^+}{Z_3} e^{-\gamma_3 d} = 0, \quad (2.172)$$

a solução deste sistema mediante determinantes de quarta ordem é um processo tedioso para ser feito a mão, mas que pode ser levado a contento usando os recursos de manipulação algébrica disponíveis em ferramentas matemáticas como o MatLab e o Mathematica. Usaremos agora um outro procedimento para resolver o problema, primeiro escrevemos a razão entre \mathbf{E}_{tan} e \mathbf{H}_{tan} nas duas interfaces. Na interface $z = 0$ esta razão é exatamente a equação (2.169) dividida pela equação (2.170), onde colocamos os termos de índice 1 a esquerda da igualdade e os de índice 2 a direita, assim obtemos

$$Z_1 \frac{E_1^+ + E_1^-}{E_1^+ - E_1^-} = Z_2 \frac{E_2^+ + E_2^-}{E_2^- - E_2^+}, \quad (2.173)$$

como $\Gamma_1 = E_1^- / E_1^+$ e $\Gamma_2 = E_2^- / E_2^+$ podemos escrever a equação anterior como

$$Z_1 \frac{1 + \Gamma_1}{1 - \Gamma_1} = Z_2 \frac{1 + \Gamma_2}{1 - \Gamma_2}. \quad (2.174)$$

Calculando a razão entre \mathbf{E}_{tan} e \mathbf{H}_{tan} na interface $z = d$, que é equação (2.171) dividida pela equação (2.172), onde colocamos o termo de índice 3 a direita da igualdade, obtemos

$$Z_2 \frac{E_2^+ e^{-\gamma_2 d} + E_2^- e^{+\gamma_2 d}}{E_2^+ e^{\gamma_2 d} - E_2^- e^{-\gamma_2 d}} = Z_3, \quad (2.175)$$

dividindo o lado esquerdo da equação anterior por $E_2^+ e^{-\gamma_2 d}$ e como $\Gamma_2 = E_2^-/E_2^+$ podemos escrever a equação anterior como

$$Z_2 \frac{1 + \Gamma_2 e^{+2\gamma_2 d}}{1 - \Gamma_2 e^{+2\gamma_2 d}} = Z_3, \quad (2.176)$$

colocando em uma forma explícita para Γ_2 , temos

$$\Gamma_2 = \frac{Z_3 - Z_2}{Z_3 + Z_2} e^{-2\gamma_2 d}. \quad (2.177)$$

Das equações (2.174) e (2.177) temos a solução do problema, primeiro calculamos Γ_2 usando a equação (2.177) e depois calculamos Γ_1 usando a equação (2.174).

Exemplo 2.30 Consideremos o problema da transmissão de uma onda que incide em uma chapa dielétrica com $\varepsilon = 4\varepsilon_0$ e espessura d , que divide o espaço livre em três regiões.

Solução 2.30 A impedância intrínseca da chapa é $Z_2 = \sqrt{\frac{\mu_0}{4\varepsilon_0}} = 60\pi\Omega$ e a constante de propagação é $\gamma_2 = jk_2$. A impedância intrínseca do espaço livre é $Z_1 = Z_3 = 120\pi\Omega$. Inserindo estes dados na equação (2.177) obtemos

$$\Gamma_2 = \frac{120\pi - 60\pi}{120\pi + 60\pi} e^{-j2k_2 d} = \frac{1}{3} e^{-j2k_2 d},$$

onde vemos que Γ_2 será, em geral, complexo, a menos que $e^{-j2k_2 d}$ seja um número real. Consideremos o caso em que Γ_2 é um número real, assim temos que $e^{-j2k_2 d} = 1$ ou $e^{-j2k_2 d} = -1$ o que implica em $2k_2 d = n\pi$ com n par ou $2k_2 d = n\pi$ com n ímpar, respectivamente. Com n par temos

$$\Gamma_2 = \frac{1}{3},$$

usando a equação (2.174) obtemos para Γ_1 o seguinte valor

$$\frac{1 + \Gamma_1}{1 - \Gamma_1} = \frac{1}{2} \frac{1 + 1/3}{1 - 1/3} = 1,$$

o que leva a $\Gamma_1 = 0$, assim não temos onda refletida, $E_1^- = 0$, quando n é par. Como $k_2 = 2\pi/\lambda_2$, temos que $2k_2 d = n\pi$ fornece

$$d = n \frac{\lambda_2}{4}, \quad 0, 2, 4, 6, \dots$$

nesta espessura da chapa teremos 100% de transmissão numa certa freqüência.

Quando o n é ímpar temos

$$\Gamma_2 = -\frac{1}{3},$$

usando a equação (2.174) obtemos para Γ_1 o seguinte valor

$$\frac{1 + \Gamma_1}{1 - \Gamma_1} = \frac{1}{2} \frac{1 - 1/3}{1 + 1/3} = \frac{1}{4},$$

o que leva a $\Gamma_1 = -3/5$. Da equação (2.154) temos que a razão entre a potência média refletida e a incidente é dada por

$$\frac{P_m^2}{P_m^1} = |\Gamma|^2 = \frac{9}{25},$$

logo, temos 36% de potência refletida e 64% de potência transmitida no caso de n ímpar.

Quando tivermos espessuras d diferentes de um número inteiro de $\lambda_2/4$ teremos Γ_1 complexo o que significa que a onda refletida não estará em fase com a onda incidente. A potência transmitida variará suavemente de 64% a 100%, isto pode ser verificado observando que para qualquer valor de n , neste caso no conjunto dos números reais, poderemos coloca-lo entre dois números inteiros consecutivos, um par e o outro ímpar.

Na figura 2.42 mostramos um sistema formado por n regiões distintas. O sistema é excitado por uma onda plana harmônica no tempo, que incide normalmente na região 1. Cada região contém campos propagando em sentidos contrários menos a última, $i = n$, em que só aparece o campo propagando na direção $+z$.

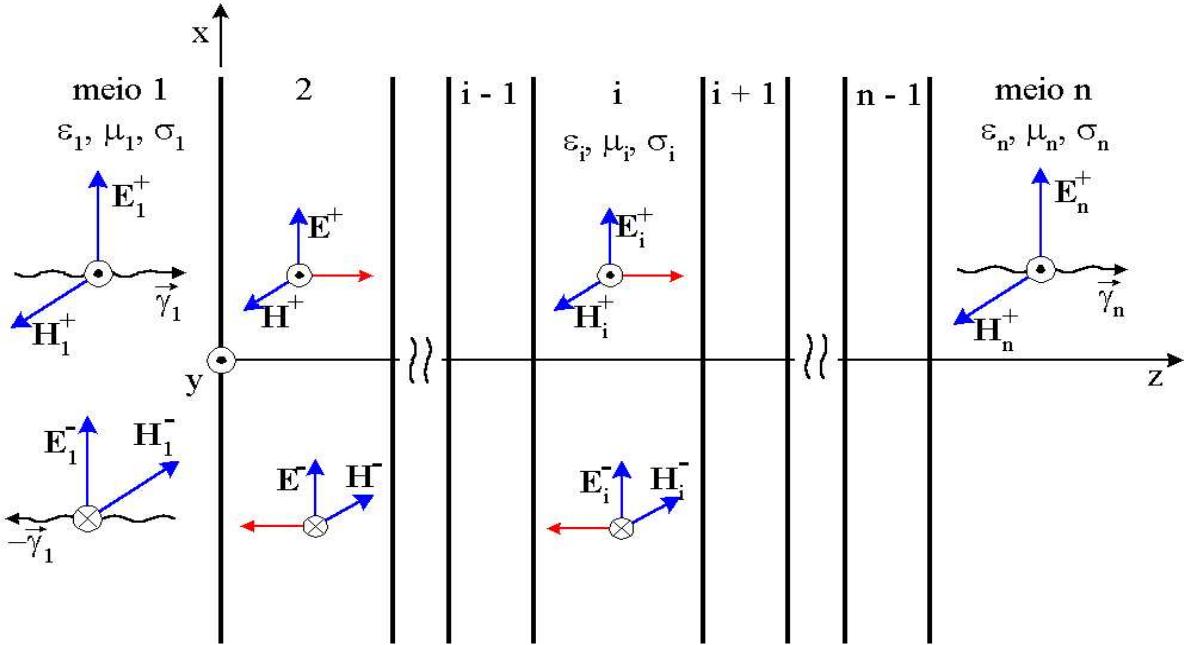


Figura 2.42: Onda plana incidência normal em sistema com n regiões.

O campo elétrico total em uma região i é dado por

$$\mathbf{E}_x(z) = \mathbf{E}_x^+ e^{-\gamma z} + \mathbf{E}_x^- e^{+\gamma z} = \mathbf{E}_x^+ e^{-\gamma z} \left[1 + \frac{\mathbf{E}_x^-}{\mathbf{E}_x^+} e^{+2\gamma z} \right] = \mathbf{E}_x^+ e^{-\gamma z} [1 + \Gamma(z)], \quad (2.178)$$

onde $\Gamma(z)$ é o coeficiente de reflexão em qualquer posição z na região, que se define como a relação complexa entre a onda refletida e a onda incidente, é dado por

$$\Gamma(z) \equiv \frac{\mathbf{E}_x^-}{\mathbf{E}_x^+} e^{+2\gamma z}, \quad (2.179)$$

o campo magnético total correspondente é dado por

$$\mathbf{H}_y(z) = \mathbf{H}_y^+ e^{-\gamma z} + \mathbf{H}_y^- e^{+\gamma z} = \frac{\mathbf{E}_x^+}{\eta} e^{-\gamma z} \left[1 - \frac{\mathbf{E}_x^-}{\mathbf{E}_x^+} e^{+2\gamma z} \right] = \frac{\mathbf{E}_x^+}{\eta} e^{-\gamma z} [1 - \Gamma(z)], \quad (2.180)$$

observe que denominamos a impedância intrínseca do meio por η para separar da impedância de campo total $Z(z)$, que é definida pela razão entre o campo elétrico total e o campo magnético total na região i , é obtida dividindo-se a equação (2.179) pela equação (2.180), que resulta em

$$Z(z) = \frac{\mathbf{E}_x(z)}{\mathbf{H}_y(z)} = \eta \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)} \Omega, \quad (2.181)$$

a partir desta equação obtemos a seguinte expressão para $\Gamma(z)$ em termos de $Z(z)$

$$\Gamma(z) = \frac{Z(z) - \eta}{Z(z) + \eta}, \quad (2.182)$$

que é útil quando conhecemos $Z(z)$ e queremos calcular $\Gamma(z)$.

Uma outra expressão bastante útil é relacionar o coeficiente de reflexão $\Gamma(z)$ em uma posição $z = z_1$ com o $\Gamma(z)$ em outra posição $z = z_2$, aplicando a definição de $\Gamma(z)$, equação (2.179), para estas duas posições, e dividindo uma pela outra, o que elimina as amplitudes \mathbf{E}_x^+ e \mathbf{E}_x^- , encontramos

$$\Gamma(z_1) = \Gamma(z_2) e^{2\gamma(z_1 - z_2)}. \quad (2.183)$$

Na aplicação das equações (2.178) a (2.183), para analisar o sistema mostrado na figura 2.41, devemos notar as seguintes propriedades de $\Gamma(z)$ e $Z(z)$ em qualquer interação que separe duas regiões:

- a impedância total do campo, $Z(z)$ é contínua através da interface, isto é, $Z(z = a^+) = Z(z = a^-)$, porque os campos elétrico e magnético tangenciais são contínuos na interface;
- o coeficiente de reflexão $\Gamma(z)$ é descontínuo através de uma interface, já que $Z(z)$ é contínua através da interface e as impedâncias características são diferentes nas regiões adjacentes.

Exemplo 2.31 Uma onda plana polarizada na direção \vec{a}_x propaga na direção $+z$ na freqüência de 1 MHz e com amplitude de campo elétrico $\mathbf{E}_{x1}^+ = 100 e^{j0^\circ} \text{ V/m}$. Esta onda incide numa interface formada por dois meios, o 1º é um meio caracterizado por $\varepsilon = 2\varepsilon_0$ e $\mu = \mu_0$ com espessura $d_2 = \lambda_2/8$ e o 2º é um meio caracterizado por $\varepsilon = 4\varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ e $\sigma = \frac{2}{9} \times 10^{-3} \text{ S/m}$ com espessura $d_3 = \lambda_3/4$. Na figura 2.42 temos o sistema. Determine o campo total na região 1.

Solução 2.31 Começamos calculando os parâmetros de onda para cada meio, na tabela 2.3 temos os resultados dos cálculos.

Região	μ_r	ε_r	$\sigma (\text{S/m})$	$\alpha (\text{Np/m})$	$\beta (\text{rad/m})$	$\lambda (\text{m})$	$\eta (\Omega)$
1	1	1	0	0	0,0209	300	377
2	1	2	0	0	0,0296	212,13	266,58
3	1	4	$\frac{2}{9} \times 10^{-3}$	0,0191	0,0460	136,53	$158,51 e^{j22,5^\circ}$
4	1	1	0	0	0,0209	300	377

Tabela 2.3: Parâmetros α , β , Z , λ e η de cada meio

Na região 4 não temos onda refletida, assim, da equação (2.173), temos que $\Gamma_4(z = 0) = 0$, observe que a coordenada z é relativa a posição na região 4 em relação a interface. Da equação (2.175) segue que $Z_4(z = 0) = \eta_4 = 120\pi\Omega = Z_3(z = 0)$ da equação (2.176) obtemos

$$\Gamma_3(z = 0) = \frac{120\pi - 158,51 e^{j22,5^\circ}}{120\pi + 158,51 e^{j22,5^\circ}} \approx 0,451 e^{-j21,40^\circ},$$

para obter a impedância no plano de entrada do meio 3, usamos a equação (2.177), obtendo

$$\begin{aligned} \Gamma_3(z = -d_3) &= \Gamma_3(z = 0) e^{2\gamma_3(-d_3 - 0)} = \Gamma_3(z = 0) e^{-2\alpha_3 d_3} e^{-j2\beta_3 d_3} \\ &= (0,451 e^{-j21,40^\circ})(e^{-2(0,0191)34,13}) e^{-j180^\circ} = 0,12245 e^{-j201,40^\circ}. \end{aligned}$$

Repetimos o procedimento para encontrar Z e Γ na interface entre o meio 1 e o meio 2. Usando (2.175) obtemos

$$Z_3(z = -d_3) = \eta_3 \frac{1 + \Gamma_3(-d_3)}{1 - \Gamma_3(-d_3)} = 158,51 e^{j22,5^\circ} \frac{1 + 0,12245 e^{-j201,40^\circ}}{1 - 0,12245 e^{-j201,40^\circ}} = 126,2 e^{j27,9^\circ},$$

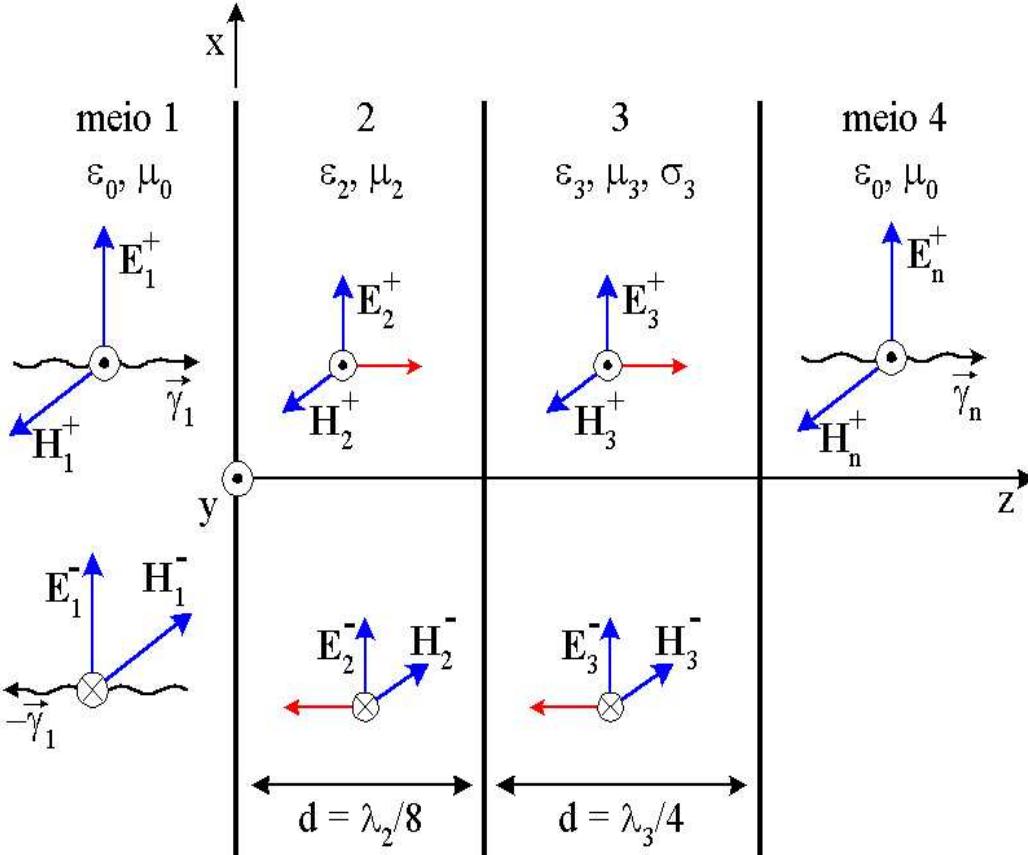


Figura 2.43: Onda plana incidindo num sistema de 4 regiões.

usando agora (2.176) e sabendo que $Z_3(z = -d_3) = Z_2(0)$ encontramos para $\Gamma_2(0)$

$$\Gamma_2(0) = \frac{Z_2(0) - \eta_2}{Z_2(0) + \eta_2} = \frac{126,2 e^{j27,9^\circ} - 266,58}{126,2 e^{j27,9^\circ} + 266,58} = 0,434 e^{j150,3^\circ},$$

usando a equação (2.177) na interface entre o meio 1 e o meio 2 obtemos

$$\Gamma_2(-d_2) = \Gamma_2(0) e^{2\gamma_2(-d_2-0)} = (0,434 e^{j150,3^\circ}) e^{2(j2\pi/\lambda_2)(-\lambda_2/8)} = 0,434 e^{j60,3^\circ},$$

da equação (2.175), a impedância total do campo é

$$Z_2(-d_2) = \eta_2 \frac{1 + \Gamma_2(-d_2)}{1 - \Gamma_2(-d_2)} = 266,58 \frac{1 + 0,434 e^{j60,3^\circ}}{1 - 0,434 e^{j60,3^\circ}} = 390 e^{j42,9^\circ} \Omega,$$

que pela continuidade através da interface fornece que $Z_1(0) = 390 e^{j42,9^\circ} \Omega$, assim, da equação (2.176), obtemos

$$\Gamma_1(0) = \frac{Z_1(0) - \eta_1}{Z_1(0) + \eta_1} = \frac{390 e^{j42,9^\circ} - 120\pi}{390 e^{j42,9^\circ} + 120\pi} = 0,393 e^{j87,1^\circ}.$$

A amplitude da onda refletida no meio é obtida usando a equação (2.179) em $z = 0$, assim temos

$$E_1^- = E_1^+ \Gamma_1(0) = (100 e^{j0^\circ}) (0,393 e^{j87,1^\circ}) = 39,3 e^{j87,1^\circ},$$

assim os campos totais na região 1 são, das equações (2.178) e (2.180), dados por

$$\mathbf{E}_{x1}(z) = 100 e^{-j\beta_1 z} + 39,3 e^{j(\beta_1 z + 87,1^\circ)} V/m$$

$$\mathbf{H}_{y1}(z) = \frac{100}{120\pi} e^{-j\beta_1 z} - \frac{39,3}{120\pi} e^{j(\beta_1 z + 87,1^\circ)} A/m$$

2.12 Onda plana incidência oblíqua em interface

Na seção 2.10 estudamos o caso de uma onda plana incidindo normalmente em uma interface, isto é, o vetor propagação da onda incidente, $\vec{\gamma}_i$, é perpendicular a interface entre os dois meios, figura 2.44.a. Agora consideraremos que o vetor propagação faz um ângulo com a normal a interface, \vec{a}_n , como mostrado na figura 2.44.b.

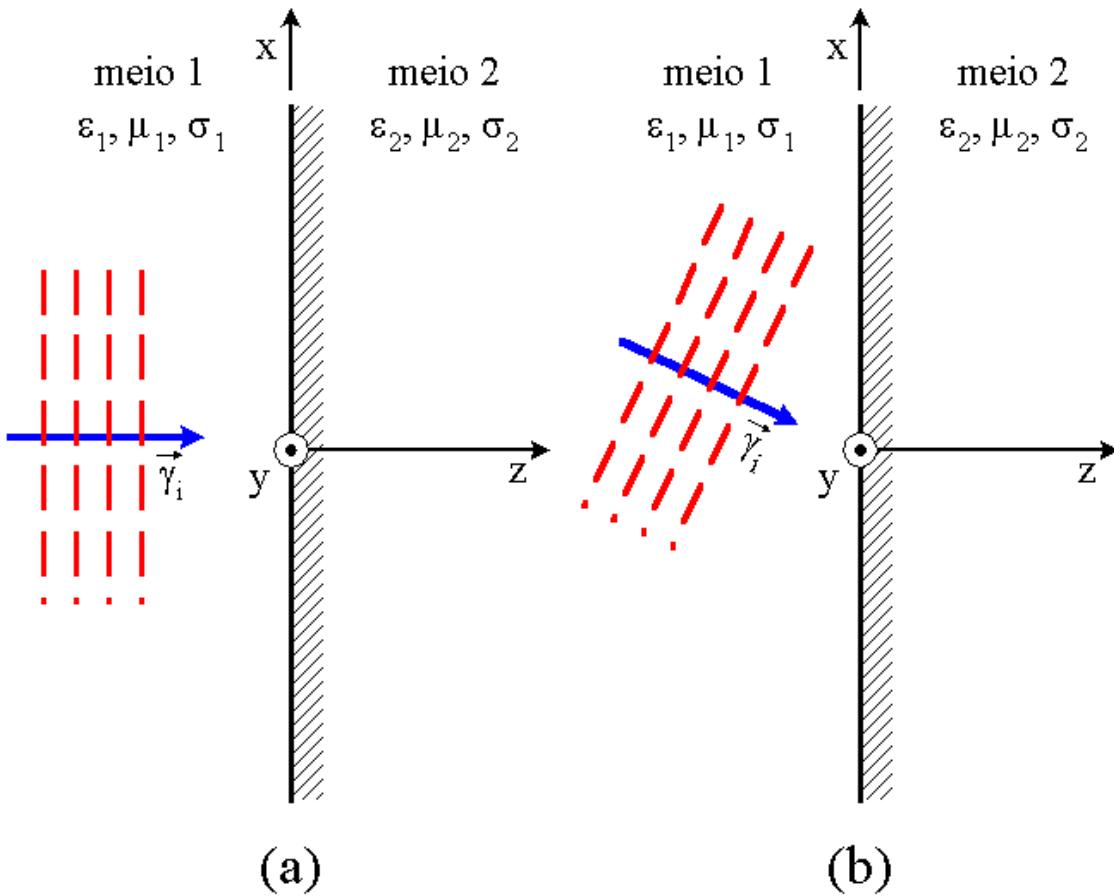


Figura 2.44: Tipos de incidência: (a) incidência normal, (b) incidência oblíqua.

Para podermos analisar as reflexões e transmissões no caso da incidência oblíqua é necessário introduzir o conceito de **plano de incidência**, que é o plano formado pelo vetor normal a interface, \vec{a}_n , e o vetor propagação da onda incidente, $\vec{\gamma}_i$, como ilustrado na figura 2.45

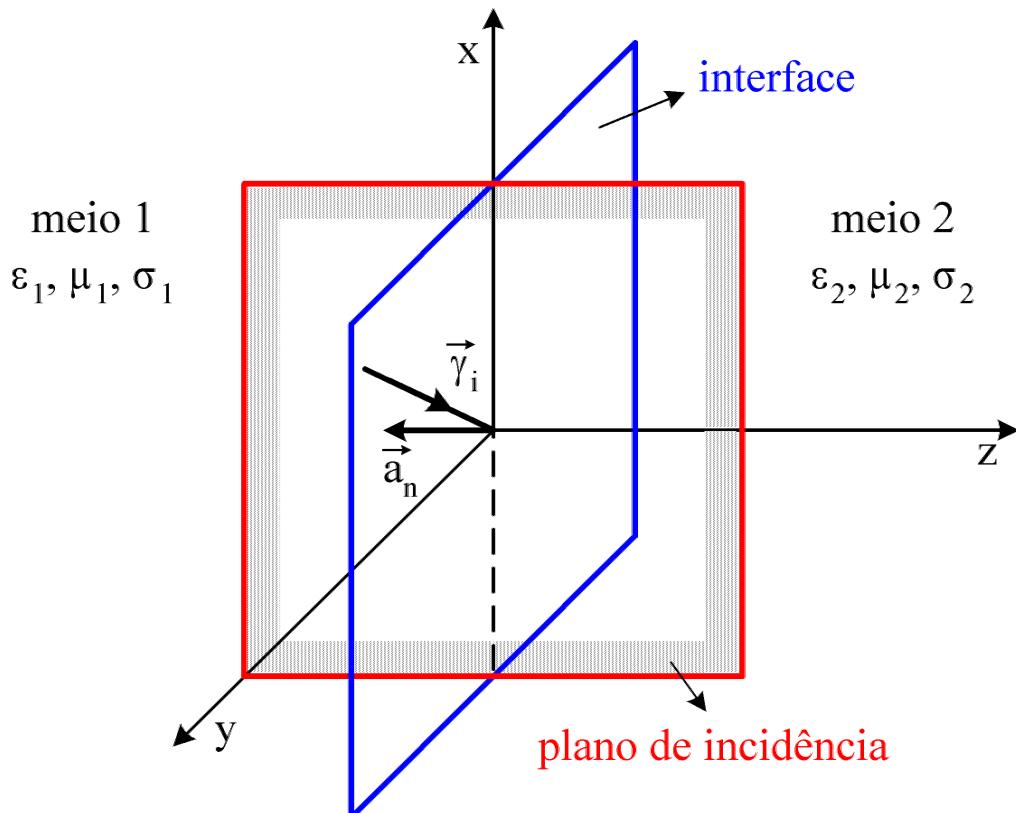


Figura 2.45: Plano de incidência.

A definição do plano de incidência foi feita com o objetivo de decompor o campo eletromagnético incidente em componentes perpendiculares e paralelas em relação a este plano. A decomposição é necessária porque só assim poderemos definir os coeficientes de reflexão e de transmissão.

Polarização perpendicular

O campo eletromagnético é dito ter **polarização perpendicular** quando a componente de campo elétrico é perpendicular ao plano de incidência, na figura 2.46.a mostramos uma onda incidente com polarização perpendicular. O par de campos leva o índice \perp para indicar esta polarização, que também é denominada de **polarização horizontal** porque, quando incidindo num plano terra (interface entre o ar e a Terra), o campo elétrico é sempre horizontal a este plano, figura 2.46.b.

Polarização paralela

O campo eletromagnético é dito ter **polarização paralela** quando a componente de campo elétrico é paralela ao plano de incidência, na figura 2.47.a mostramos uma onda incidente com polarização paralela. O par de campos leva o índice \parallel para indicar esta polarização que também é denominada de **polarização vertical** porque, quando incidindo num plano terra, o campo elétrico apresenta uma componente vertical a este plano, figura 2.47.b.

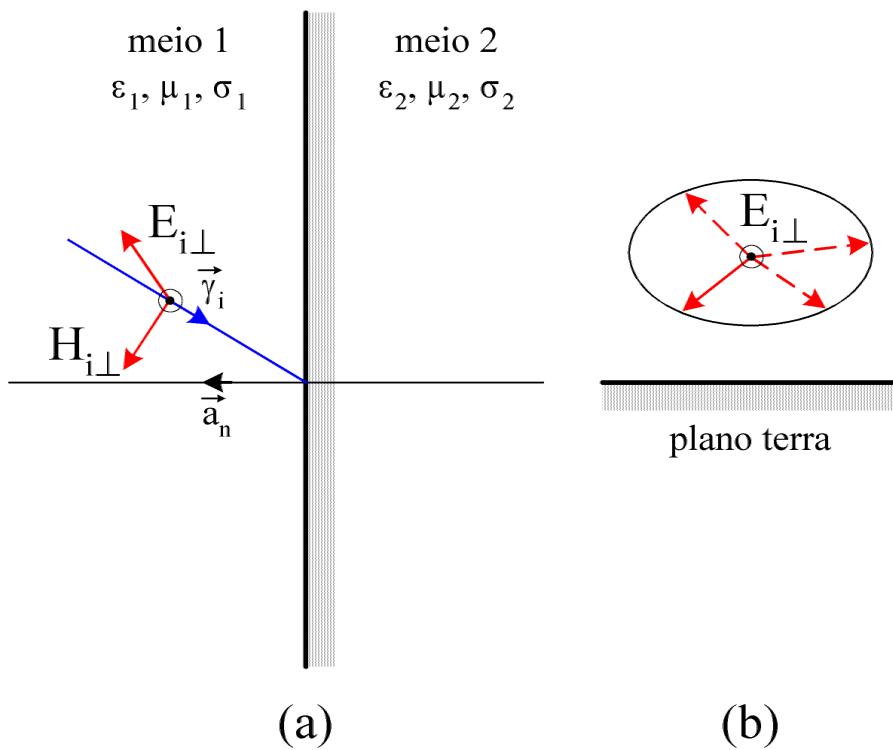


Figura 2.46: Campo incidente na polarização perpendicular.

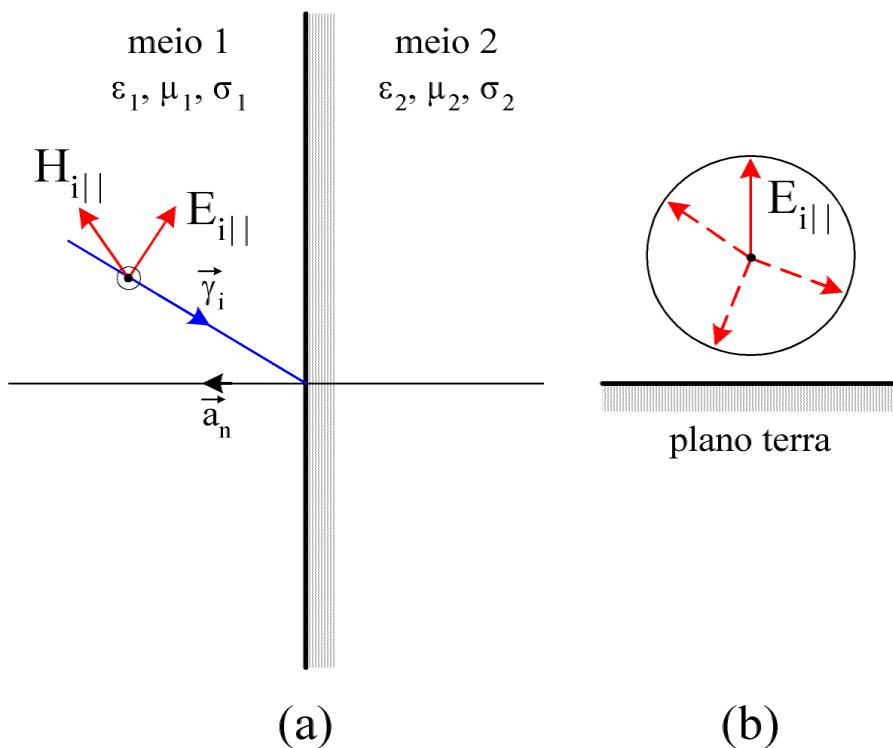


Figura 2.47: Campo incidente na polarização paralela.

Como podemos observar das figuras 2.46 e 2.47, os campos com polarização perpendicular e polarização paralela são linearmente independentes, assim, podemos decompor qualquer campo elétrico nestas duas polarizações, temos então

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_\perp + \mathbf{E}_\parallel \quad (2.184)$$

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}_\perp + \mathbf{H}_\parallel \quad (2.185)$$

Consideremos que uma onda plana incide numa interface plana de separação entre dois meios, como mostrado na figura 2.48

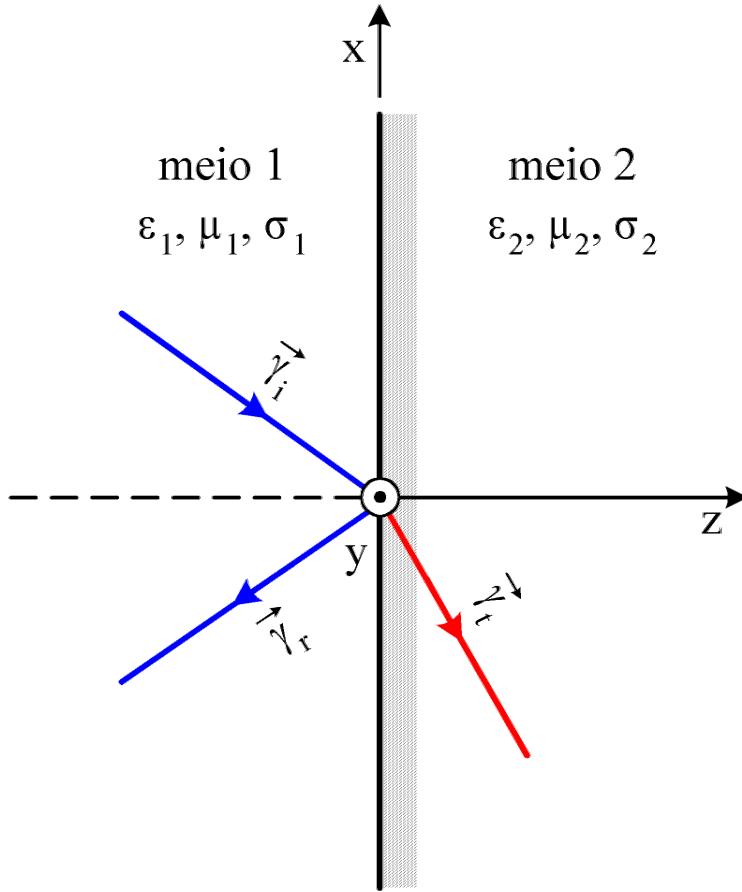


Figura 2.48: Onda plana incidindo obliquamente em uma interface.

Assumimos que a amplitude dos campos elétricos incidente, refletido e transmitido seja dada por \mathbf{A}_i , \mathbf{A}_r e \mathbf{A}_t , respectivamente, e que os respectivos vetores propagação são $\vec{\gamma}_i$, $\vec{\gamma}_r$ e $\vec{\gamma}_t$, então, os campos podem ser escritos como

$$\mathbf{E}_i(\vec{r}) = \mathbf{A}_i e^{\vec{\gamma}_i \cdot \vec{r}}, \quad (2.186)$$

$$\mathbf{E}_r(\vec{r}) = \mathbf{A}_r e^{\vec{\gamma}_r \cdot \vec{r}}, \quad (2.187)$$

$$\mathbf{E}_t(\vec{r}) = \mathbf{A}_t e^{\vec{\gamma}_t \cdot \vec{r}}. \quad (2.188)$$

A condição de fronteira na interface requer que os campos elétricos tangenciais a interface

sejam contínuos nela, assim

$$\mathbf{E}_1^{tan} = \mathbf{E}_2^{tan},$$

$$[\mathbf{E}_i(x, y, 0^-) + \mathbf{E}_r(x, y, 0^-)]_{tan} = [\mathbf{E}_t(x, y, 0^+)] \quad (2.189)$$

o sinal $(+, -)$ indica que nos aproximamos da interface pela região positiva ou negativa, respectivamente. Aplicando a equação (2.189) e substituindo os vetores propagação, obtemos

$$[\mathbf{A}_i e^{-\gamma_{ix}x} e^{-\gamma_{iy}y} + \mathbf{A}_r e^{-\gamma_{rx}x} e^{-\gamma_{ry}y}]_{tan} = [\mathbf{A}_t e^{-\gamma_{tx}x} e^{-\gamma_{ty}y}], \quad (2.190)$$

observe que definimos os vetores propagação possuindo as três componentes, isto é, um vetor em uma direção genérica no espaço. A equação (2.190) deve ser satisfeita para todos os pontos sobre a interface x, y . Cada ponto (x, y) leva a uma equação em termos das incógnitas \mathbf{A}_r , \mathbf{A}_t , γ_{rx} , γ_{ry} , γ_{tx} e γ_{ty} . Temos mais equações do que incógnitas, assim, a única solução não trivial é exigir que

$$\gamma_{ix} = \gamma_{rx} = \gamma_{tx} = \gamma_x, \quad (2.191)$$

$$\gamma_{iy} = \gamma_{ry} = \gamma_{ty} = \gamma_y, \quad (2.192)$$

o que faz a equação (2.190) não depender da escolha do ponto (x, y) . Fisicamente as equações (2.191) e (2.192) significam que os vetores propagação $\vec{\gamma}_i$, $\vec{\gamma}_r$ e $\vec{\gamma}_t$ estão no mesmo plano, isto justifica a definição do plano de incidência. Quando os dois meios são sem perdas, as equações (2.191) e (2.192) tornam-se

$$k_{ix} = k_{rx} = k_{tx} = k_x, \quad (2.193)$$

$$k_{iy} = k_{ry} = k_{ty} = k_y, \quad (2.194)$$

e são denominadas de *condições de fase*.

Agora que sabemos que os vetores propagação estão no mesmo plano consideremos a geometria mostrada na figura 2.49, em que o plano de incidência é o plano $y = 0$, estamos interessados em relacionar as direções de propagação da onda refletida e transmitida com a direção da onda incidente. Na figura 2.49 os ângulos θ_i , θ_r e θ_t são os ângulos que os vetores propagação fazem com a normal \vec{a}_n .

Da figura 2.49 vemos que os vetores propagação são dados por

$$\vec{\gamma}_i = \underbrace{-\gamma_1 \operatorname{sen} \theta_i}_{\gamma_{ix}} \vec{a}_x + \underbrace{\gamma_1 \cos \theta_i}_{\gamma_{iz}} \vec{a}_z, \quad (2.195)$$

$$\vec{\gamma}_r = \underbrace{-\gamma_1 \operatorname{sen} \theta_r}_{\gamma_{rx}} \vec{a}_x - \underbrace{\gamma_1 \cos \theta_r}_{\gamma_{rz}} \vec{a}_z, \quad (2.196)$$

$$\vec{\gamma}_t = \underbrace{-\gamma_2 \operatorname{sen} \theta_t}_{\gamma_{tx}} \vec{a}_x + \underbrace{\gamma_2 \cos \theta_t}_{\gamma_{tz}} \vec{a}_z, \quad (2.197)$$

com $\gamma_1 = \alpha_1 + j\beta_1$ e $\gamma_2 = \alpha_2 + j\beta_2$. Aplicando as condições dadas pelas equações (2.191) e (2.192), em $z = 0$, obtemos

$$\gamma_{ix} = \gamma_{rx} \rightarrow \gamma_1 \operatorname{sen} \theta_i = \gamma_1 \operatorname{sen} \theta_r \rightarrow \theta_i = \theta_r, \quad (2.198)$$

$$\gamma_{ix} = \gamma_{tx} \rightarrow \gamma_1 \operatorname{sen} \theta_i = \gamma_2 \operatorname{sen} \theta_t \rightarrow \frac{\operatorname{sen} \theta_i}{\operatorname{sen} \theta_t} = \frac{\gamma_2}{\gamma_1}. \quad (2.199)$$

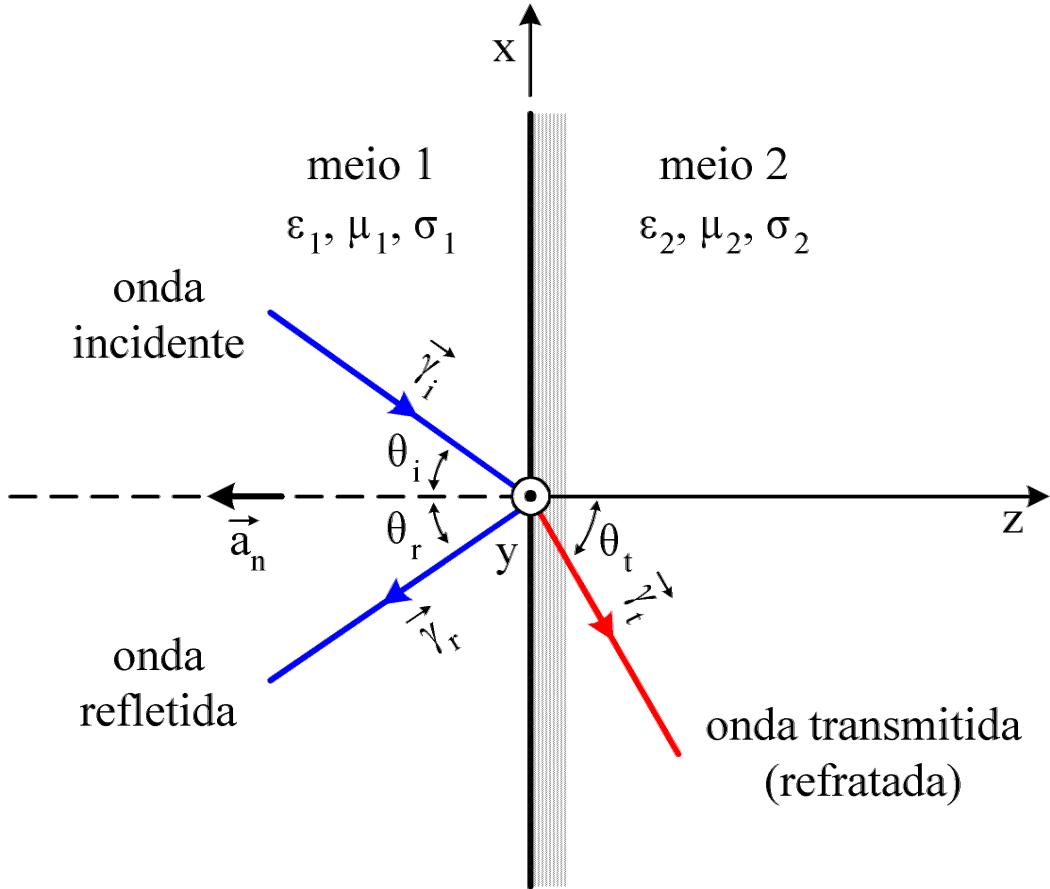


Figura 2.49: Onda plana na incidência oblíqua.

Considerando os dois meios sem perdas, as equações (2.198) e (2.199), tornam-se

$$\theta_i = \theta_r, \quad (2.200)$$

$$\frac{\sin\theta_i}{\sin\theta_t} = \frac{k_2}{k_1} = \sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\mu_1 \varepsilon_1}}. \quad (2.201)$$

Quando ambas as regiões são sem perdas e não magnéticas ($\mu_1 = \mu_2 = \mu_0$) as equações (2.200) e (2.201) são conhecidas como a *lei de Snell da reflexão e da refracção*, respectivamente.

Exemplo 2.32 Uma onda plana incide, da região do espaço livre, para uma região com $\mu = \mu_0$ e $\varepsilon = 2\varepsilon_0$. O vetor propagação é $\vec{k}_i = -(2\pi/3)\vec{a}_x + (4\pi/3)\vec{a}_z$. A interface é definida pelo plano $z = 0$. Determine: a) a forma da variação espacial da onda incidente em relação a x e z ; b) o vetor propagação da onda transmitida; c) os ângulos de incidência θ_i e transmitido θ_t .

Solução 2.32 Como a interface entre as regiões é definida pelo plano $z = 0$, a interface é o plano xy e o plano de incidência é o plano xz .

a) a amplitude da onda incidente é proporcional ao fator $e^{-j\vec{k}_i \cdot \vec{r}}$, então, a variação espacial é dada por

$$\exp \left\{ -j \left[\left(-\frac{2\pi}{3}\vec{a}_x + \frac{4\pi}{3}\vec{a}_z \right) \cdot (x\vec{a}_x + z\vec{a}_z) \right] \right\};$$

b) das condições de contorno para $z = 0$ temos

$$k_{ix} = k_{tx} \rightarrow k_{tx} = -\frac{2\pi}{3},$$

$$|\vec{k}_t| = \omega \sqrt{\mu_0 2 \varepsilon_0} = \sqrt{k_{tx}^2 + k_{tz}^2},$$

precisamos calcular a freqüência ω , como $|\vec{k}_i| = \omega \sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}$ temos

$$|\vec{k}_i| = \sqrt{(2\pi/3)^2 + (4\pi/3)^2} = \frac{2\pi}{3}\sqrt{5},$$

$$\omega = \frac{2}{3}\pi \frac{\sqrt{5}}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}} = 2\pi\sqrt{5}10^8,$$

o que leva a

$$\begin{aligned} |\vec{k}_t| &= \frac{2\pi}{3}\sqrt{10}, \\ k_{tz} &= \sqrt{\left(\frac{2\pi}{3}\right)^2 10 - \left(\frac{2\pi}{3}\right)^2} = 2\pi. \end{aligned}$$

O vetor propagação da onda transmitida é, portanto, dado por

$$\vec{k}_t = -\frac{2\pi}{3}\vec{a}_x + 2\pi\vec{a}_z.$$

c) o ângulo de incidência é dado por $\theta_i = 180^\circ - \cos^{-1} \left[\frac{\vec{k}_i \cdot \vec{a}_n}{|\vec{k}_i|} \right] \approx 26,56^\circ$ usando a equação (2.201) obtemos para θ_t

$$\theta_t = \sin^{-1} \left[\sin \theta_i \sqrt{\frac{\varepsilon_0}{2\varepsilon_0}} \right] \approx 18,43^\circ.$$

2.12.1 Incidência oblíqua - polarização perpendicular

Consideremos uma onda plana incidindo obliquamente em uma interface, com o seu campo elétrico na polarização perpendicular, na figura 2.50 temos a configuração do sistema. Para o

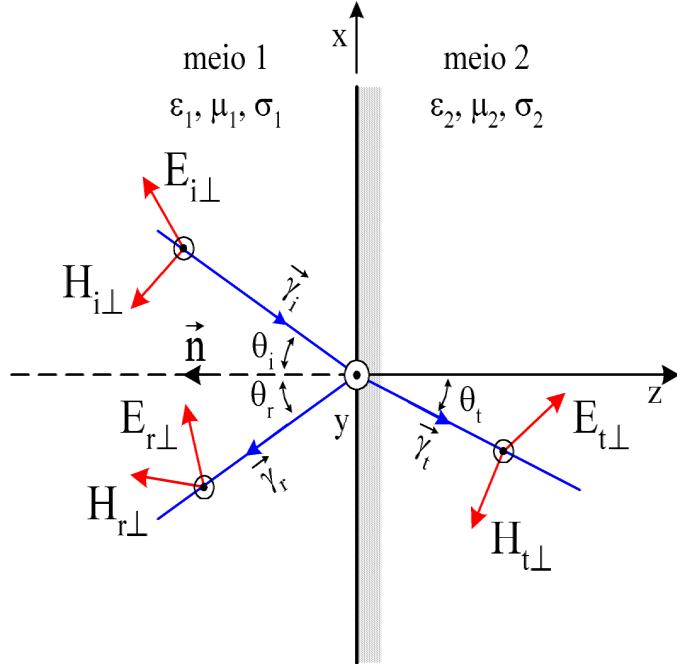


Figura 2.50: Incidência oblíqua - campo elétrico na polarização perpendicular.

campo eletromagnético incidente temos as seguintes expressões

$$\mathbf{E}_\perp^i = \mathbf{E}_o e^{+\gamma_1 x \operatorname{sen} \theta_i} e^{-\gamma_1 z \cos \theta_i} \vec{a}_y, \quad (2.202)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}_\perp^i &= \mathbf{H}_o e^{+\gamma_1 x \operatorname{sen} \theta_i} e^{-\gamma_1 z \cos \theta_i} (-\vec{a}_x \cos \theta_i - \vec{a}_z \operatorname{sen} \theta_i) \\ &= \frac{\mathbf{E}_o}{Z_1} e^{+\gamma_1 x \operatorname{sen} \theta_i} e^{-\gamma_1 z \cos \theta_i} (-\vec{a}_x \cos \theta_i - \vec{a}_z \operatorname{sen} \theta_i). \end{aligned} \quad (2.203)$$

Para o campo eletromagnético refletido escrevemos as seguintes expressões

$$\mathbf{E}_\perp^r = \mathbf{E}_o \Gamma_\perp e^{+\gamma_1 x \operatorname{sen} \theta_r} e^{+\gamma_1 z \cos \theta_r} \vec{a}_y, \quad (2.204)$$

$$\mathbf{H}_\perp^r = \frac{\mathbf{E}_o \Gamma_\perp}{Z_1} e^{+\gamma_1 x \operatorname{sen} \theta_r} e^{+\gamma_1 z \cos \theta_r} (\vec{a}_x \cos \theta_r - \vec{a}_z \operatorname{sen} \theta_r), \quad (2.205)$$

observe que escrevemos as suas amplitudes em função das amplitudes do campo incidente na interface.

No caso do campo eletromagnético transmitido escrevemos as seguintes expressões

$$\mathbf{E}_\perp^t = \mathbf{E}_o T_\perp e^{+\gamma_2 x \operatorname{sen} \theta_t} e^{-\gamma_2 z \cos \theta_t} \vec{a}_y, \quad (2.206)$$

$$\mathbf{H}_\perp^t = \frac{\mathbf{E}_o T_\perp}{Z_2} e^{+\gamma_2 x \operatorname{sen} \theta_t} e^{-\gamma_2 z \cos \theta_t} (-\vec{a}_x \cos \theta_t - \vec{a}_z \operatorname{sen} \theta_t), \quad (2.207)$$

e, da mesma forma que a feita para o campo refletido, escrevemos as suas amplitudes em função das amplitudes do campo incidente na interface.

Os coeficientes de reflexão Γ_{\perp} e de transmissão T_{\perp} são obtidos aplicando-se as condições de fronteira, equações (1.78) e (1.79), na interface $z = 0$, temos então

$$(\mathbf{E}_{\perp}^i + \mathbf{E}_{\perp}^r)_{z=0}^{tan} = (\mathbf{E}_{\perp}^t)_{z=0}^{tan}, \quad (2.208)$$

$$(\mathbf{H}_{\perp}^i + \mathbf{H}_{\perp}^r)_{z=0}^{tan} = (\mathbf{H}_{\perp}^t)_{z=0}^{tan}, \quad (2.209)$$

substituindo os campos nas equações anteriores encontramos

$$e^{\gamma_1 x \operatorname{sen}\theta_i} + \Gamma_{\perp} e^{\gamma_1 x \operatorname{sen}\theta_r} = T_{\perp} e^{\gamma_2 x \operatorname{sen}\theta_t},$$

$$\frac{1}{Z_1} (-\cos\theta_i e^{\gamma_1 x \operatorname{sen}\theta_i} + \Gamma_{\perp} \cos\theta_r e^{\gamma_1 x \operatorname{sen}\theta_r}) = -\frac{T_{\perp}}{Z_2} \cos\theta_t e^{\gamma_2 x \operatorname{sen}\theta_t},$$

das equações (2.198) e (2.199) temos que $\gamma_1 \operatorname{sen}\theta_i = \gamma_1 \operatorname{sen}\theta_r = \gamma_2 \operatorname{sen}\theta_t$, assim, o sistema anterior reduz-se a

$$(1 + \Gamma_{\perp}) = T_{\perp}, \quad (2.210)$$

$$\frac{1}{Z_1} (-1 + \Gamma_{\perp}) \cos\theta_i = -\frac{\cos\theta_t}{Z_2} T_{\perp}, \quad (2.211)$$

resolvendo este sistema obtemos

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp}^r}{\mathbf{E}_{\perp}^i} = \frac{Z_2 \cos\theta_i - Z_1 \cos\theta_t}{Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_t}, \quad (2.212)$$

$$T_{\perp} = \frac{\mathbf{E}_{\perp}^t}{\mathbf{E}_{\perp}^i} = \frac{2 Z_2 \cos\theta_i}{Z_2 \cos\theta_i + Z_1 \cos\theta_t}. \quad (2.213)$$

Que definem os coeficientes de reflexão e transmissão para a polarização perpendicular. Quando $\theta_i = 0$, isto é, no caso de incidência normal, as equações (2.212) e (2.213) reduzem-se as já definidas, equações (2.146) e (2.143), respectivamente.

Se ambos os meios são sem perdas, as equações (2.212) e (2.213) tornam-se

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_i - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_t}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_i + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_t}, \quad (2.214)$$

$$T_{\perp} = \frac{2 \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_i}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_i + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_t}, \quad (2.215)$$

No caso em que os meios são sem perdas e não magnéticos, as equações (2.212) e (2.213) reduzem-se a

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\cos\theta_i - \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \operatorname{sen}^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \operatorname{sen}^2\theta_i}}, \quad (2.216)$$

$$T_{\perp} = \frac{2 \cos\theta_i}{\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \operatorname{sen}^2\theta_i}}, \quad (2.217)$$

Vamos analisar as equações (2.216) e (2.217) em termos da razão $\varepsilon_2/\varepsilon_1$, considerando $\varepsilon_2/\varepsilon_1 > 1$ temos que ambos coeficientes, Γ_\perp e T_\perp serão reais, com Γ_\perp negativo, isto é, fase igual a 180° e T_\perp positivo, fase igual a 0° , na figura 2.51 temos os módulos dos coeficientes em função do ângulo de incidência para vários valores da razão $\varepsilon_2/\varepsilon_1 > 1$

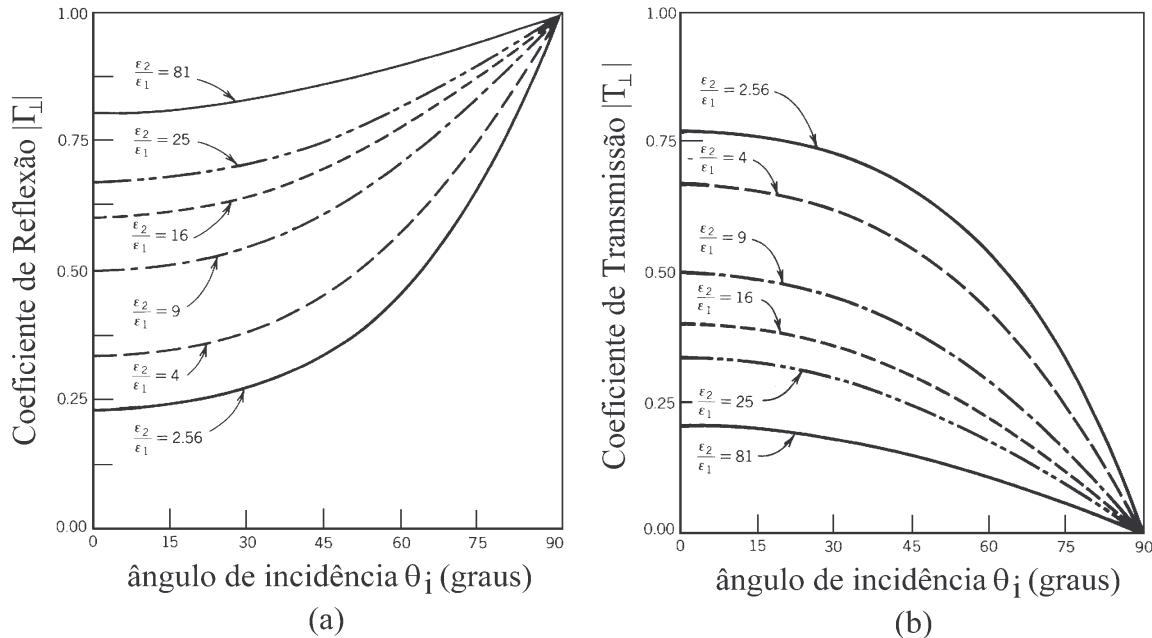


Figura 2.51: Módulos do coeficientes Γ_\perp e T_\perp no caso que $\varepsilon_2/\varepsilon_1 > 1$.

Quando $\varepsilon_2/\varepsilon_1 = 1$ temos que $\Gamma_\perp = 0$ e $T_\perp = 1$, se os meios são iguais não temos reflexão nem refração da onda incidente.

No caso em que $\varepsilon_2/\varepsilon_1 < 1$ temos que Γ_\perp e T_\perp serão reais até um certo ângulo $\theta_i = \theta_c$, denominado de **ângulo crítico**, neste ângulo $|\Gamma_\perp| = 1$ e temos reflexão total (definiremos mais adiante este ângulo), para $\theta_i > \theta_c$ Γ_\perp e T_\perp serão complexos.

Exemplo 2.33 Uma onda plana uniforme propagando no ar incide num meio não magnético e sem perdas com $\varepsilon = 3\varepsilon_0$ num ângulo de incidência de 60° . A onda incidente possui um campo elétrico com intensidade de $100 \mu V/m$ e polarizado perpendicularmente em relação ao plano de incidência. Determine: a) o ângulo de transmissão; b) a intensidade do campo elétrico refletido e do transmitido.

Solução 2.33

a) usando a equação (2.201) obtemos

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} = \sqrt{3} \rightarrow \theta_t = 30^\circ;$$

b) usando as expressões para Γ_\perp e T_\perp , dadas pelas equações (2.216) e (2.217), obtemos

$$\Gamma_\perp = \frac{\cos(60^\circ) - \sqrt{3}\sqrt{1 - (1/3)\sin^2(60^\circ)}}{\cos(60^\circ) + \sqrt{3}\sqrt{1 - (1/3)\sin^2(60^\circ)}} = -0,5,$$

$$T_\perp = \frac{2\cos(60^\circ)}{\cos(60^\circ) + \sqrt{3}\sqrt{1 - (1/3)\sin^2(60^\circ)}} = 0,5,$$

assim, as intensidades dos campos serão $|E_r| = |E_i|\|\Gamma_\perp\| = 50 \mu V/m$ e $|E_t| = |E_i|\|T_\perp\| = 50 \mu V/m$.

2.12.2 Incidência oblíqua - polarização paralela

Consideremos uma onda plana incidindo obliquamente em uma interface, com o seu campo elétrico na polarização paralela, na figura 2.52 temos a configuração do sistema. Para o campo

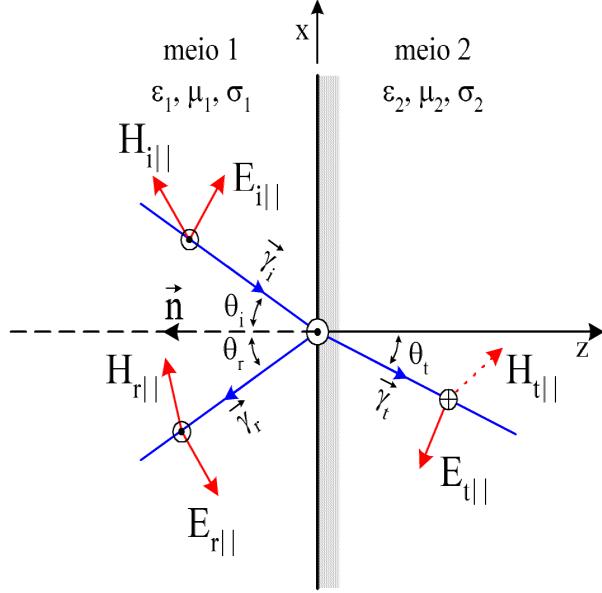


Figura 2.52: Incidência oblíqua - campo elétrico na polarização paralela.

eletromagnético incidente temos as seguintes expressões

$$\mathbf{E}_{||}^i = \mathbf{E}_o e^{+\gamma_1 x \operatorname{sen}\theta_i} e^{-\gamma_1 z \operatorname{cos}\theta_i} (\vec{a}_x \operatorname{cos}\theta_i + \vec{a}_z \operatorname{sen}\theta_i), \quad (2.218)$$

$$\mathbf{H}_{||}^i = \frac{\mathbf{E}_o}{Z_1} e^{+\gamma_1 x \operatorname{sen}\theta_i} e^{-\gamma_1 z \operatorname{cos}\theta_i} \vec{a}_y. \quad (2.219)$$

Para o campo eletromagnético refletido escrevemos as seguintes expressões

$$\mathbf{E}_r^r = \mathbf{E}_o \Gamma_{||} e^{+\gamma_1 x \operatorname{sen}\theta_r} e^{+\gamma_1 z \operatorname{cos}\theta_r} (\vec{a}_x \operatorname{cos}\theta_r - \vec{a}_z \operatorname{sen}\theta_r), \quad (2.220)$$

$$\mathbf{H}_r^r = \frac{\mathbf{E}_o \Gamma_{||}}{Z_1} e^{+\gamma_1 x \operatorname{sen}\theta_r} e^{+\gamma_1 z \operatorname{cos}\theta_r} \vec{a}_y, \quad (2.221)$$

observe que escrevemos as suas amplitudes em função das amplitudes do campo incidente na interface.

No caso do campo eletromagnético transmitido escrevemos as seguintes expressões

$$\mathbf{E}_{||}^t = \mathbf{E}_o T_{||} e^{+\gamma_2 x \operatorname{sen}\theta_t} e^{-\gamma_2 z \operatorname{cos}\theta_t} (\vec{a}_x \operatorname{cos}\theta_t + \vec{a}_z \operatorname{sen}\theta_t), \quad (2.222)$$

$$\mathbf{H}_{||}^t = \frac{\mathbf{E}_o T_{||}}{Z_2} e^{+\gamma_2 x \operatorname{sen}\theta_t} e^{-\gamma_2 z \operatorname{cos}\theta_t} \vec{a}_y, \quad (2.223)$$

e, da mesma forma que a feita para o campo refletido, escrevemos as suas amplitudes em função das amplitudes do campo incidente na interface.

Os coeficientes de reflexão $\Gamma_{||}$ e de transmissão $T_{||}$ são obtidos aplicando-se as condições de fronteira, equações (1.78) e (1.79), na interface $z = 0$, temos então

$$(\mathbf{E}_r^r + \mathbf{E}_{||}^i)_{z=0}^{\tan} = (\mathbf{E}_{||}^t)_{z=0}^{\tan}, \quad (2.224)$$

$$(\mathbf{H}_r^r + \mathbf{H}_{||}^i)_{z=0}^{\tan} = (\mathbf{H}_{||}^t)_{z=0}^{\tan}, \quad (2.225)$$

substituindo os campos nas equações anteriores encontramos

$$\cos\theta_i e^{\gamma_1 x \operatorname{sen}\theta_i} + \Gamma_{\perp} \cos\theta_r e^{\gamma_1 x \operatorname{sen}\theta_r} = T_{\perp} \cos\theta_t e^{\gamma_2 x \operatorname{sen}\theta_t},$$

$$\frac{1}{Z_1} (e^{\gamma_1 x \operatorname{sen}\theta_i} - \Gamma_{\perp} e^{\gamma_1 x \operatorname{sen}\theta_r}) = \frac{T_{\parallel}}{Z_2} e^{\gamma_2 x \operatorname{sen}\theta_t},$$

das equações (2.198) e (2.199) temos que $\gamma_1 \operatorname{sen}\theta_i = \gamma_1 \operatorname{sen}\theta_r = \gamma_2 \operatorname{sen}\theta_t$, assim, o sistema anterior reduz-se a

$$\cos\theta_i (1 + \Gamma_{\parallel}) = T_{\perp} \cos\theta_t, \quad (2.226)$$

$$\frac{1}{Z_1} (1 - \Gamma_{\parallel}) = \frac{T_{\parallel}}{Z_2}, \quad (2.227)$$

resolvendo este sistema obtemos

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{\mathbf{E}_{\perp}^r}{\mathbf{E}_{\perp}^i} = \frac{-Z_1 \cos\theta_i + Z_2 \cos\theta_t}{Z_1 \cos\theta_i + Z_2 \cos\theta_t}, \quad (2.228)$$

$$T_{\parallel} = \frac{\mathbf{E}_{\perp}^t}{\mathbf{E}_{\perp}^i} = \frac{2 Z_2 \cos\theta_i}{Z_1 \cos\theta_i + Z_2 \cos\theta_t}. \quad (2.229)$$

Que definem os coeficientes de reflexão e transmissão para a polarização paralela. Quando $\theta_i = 0$, isto é, no caso de incidência normal, as equações (2.228) e (2.229) reduzem-se as já definidas, equações (2.146) e (2.143), respectivamente.

Se ambos os meios são sem perdas, as equações (2.228) e (2.229) tornam-se

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{-\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_i + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_t}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_i + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_t}, \quad (2.230)$$

$$T_{\parallel} = \frac{2 \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_i}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_i + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_t}. \quad (2.231)$$

No caso em que os meios são sem perdas e não magnéticos, as equações (2.228) e (2.229) reduzem-se a

$$\Gamma_{\perp} = \frac{-\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \operatorname{sen}^2\theta_i}}{\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \operatorname{sen}^2\theta_i}}, \quad (2.232)$$

$$T_{\parallel} = \frac{2 \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \cos\theta_i}{\cos\theta_i + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \sqrt{1 - \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}\right) \operatorname{sen}^2\theta_i}}, \quad (2.233)$$

Considerando $\varepsilon_2/\varepsilon_1 > 1$ temos que ambos coeficientes, Γ_{\perp} e T_{\parallel} serão reais, para $\theta_i < \theta_B$, θ_B é o ângulo em que $\Gamma_{\perp} = 0$, denominado de **ângulo de Brewster**, Γ_{\parallel} é negativo, isto é, fase

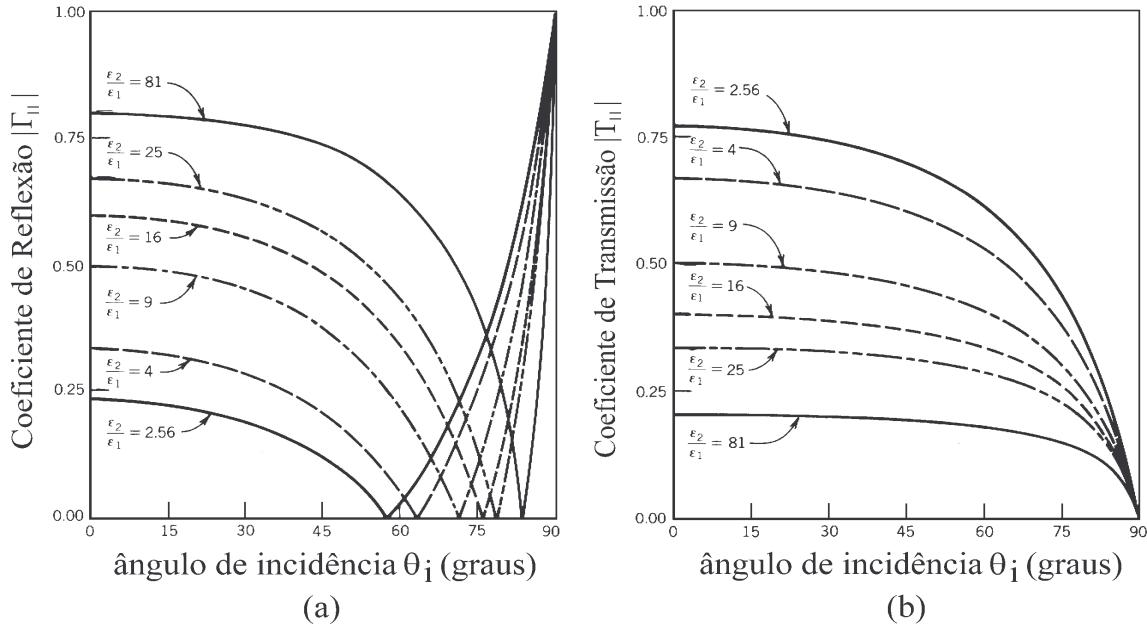


Figura 2.53: Módulos do coeficientes $\Gamma_{||}$ e $T_{||}$ no caso que $\epsilon_2/\epsilon_1 > 1$.

igual a 180° , para $\theta_i > \theta_B$, $\Gamma_{||}$ é positivo, fase igual a 0° . $T_{||}$ é positivo para todos os valores de θ_i . Na figura 2.53 temos os módulos dos coeficientes em função do ângulo de incidência para vários valores da razão $\epsilon_2/\epsilon_1 > 1$

Quando $\epsilon_2/\epsilon_1 = 1$ temos que $\Gamma_{||} = 0$ e $T_{||} = 1$, se os meios são iguais não temos reflexão nem refração da onda incidente.

No caso em que $\epsilon_2/\epsilon_1 < 1$ temos que $\Gamma_{||}$ e $T_{||}$ serão reais até um certo ângulo $\theta_i = \theta_c$, neste ângulo $\Gamma_{||} = 1$ e temos reflexão total (definiremos mais adiante este ângulo), para $\theta_i > \theta_c$ $\Gamma_{||}$ e $T_{||}$ serão complexos.

Exemplo 2.34 Uma onda plana uniforme propagando no ar incide num meio não magnético e sem perdas com $\epsilon = 4\epsilon_0$ num ângulo de incidência de 35° . A onda incidente possui um campo elétrico com intensidade de $100 \mu V/m$ e polarizado paralelamente ao plano de incidência. Determine: a) o ângulo de transmissão; b) a intensidade do campo elétrico refletido e do transmitido.

Solução 2.34

a) usando a equação (2.201) obtemos

$$\frac{\sin \theta_i}{\sin \theta_t} = \sqrt{\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1}} = \sqrt{4} = 2 \rightarrow \theta_t \approx 16,6658^\circ;$$

b) usando as expressões para $\Gamma_{||}$ e $T_{||}$, dadas pelas equações (2.232) e (2.233), obtemos

$$\Gamma_{||} = \frac{-\cos(35^\circ) - 0,5\sqrt{1 - 0,25 \sin^2(35^\circ)}}{\cos(35^\circ) + 0,5\sqrt{1 - 0,25 \sin^2(35^\circ)}} \approx -0,262031,$$

$$T_{||} = \frac{2 \cos(35^\circ) 0,5}{\cos(35^\circ) + 0,5\sqrt{1 - 0,25 \sin^2(35^\circ)}} \approx 0,6310154,$$

assim, as intensidades dos campos serão $|E_r| = |E_i||\Gamma_{||}| = 26,2031 \mu V/m$ e $|E_t| = |E_i||T_{||}| = 63,1015 \mu V/m$.

2.12.3 Condição para transmissão total - ângulo de Brewster

Das expressões para os coeficientes de reflexão e transmissão nas polarizações perpendicular e paralela vemos que eles são funções de:

- dos parâmetros constitutivos dos dois meios;
- do ângulo de incidência $\theta_i \rightarrow \theta_r$ e θ_t ;

Poderemos fazer a seguinte pergunta: dado um conjunto de parâmetros constitutivos, existe um ângulo de incidência em que $\Gamma = 0$, isto é, a onda seja totalmente transmitida? Para determinar em que condições isto ocorre devemos analisar as expressões dos coeficientes Γ_{\perp} e Γ_{\parallel} .

Análise do Γ para polarização perpendicular

Considerando os dois meios sem perdas temos, da equação (2.214), que

$$\Gamma_{\perp} = \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \theta_t}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \theta_t} = 0, \quad (2.234)$$

que implica em

$$\cos \theta_i = \sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right)} \cos \theta_t, \quad (2.235)$$

usando a lei de Snell, $\operatorname{sen} \theta_i = \operatorname{sen} \theta_t \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2 / \mu_1 \varepsilon_1}$, podemos escrever a equação (2.235) como

$$\begin{aligned} (1 - \operatorname{sen}^2 \theta_i) &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) (1 - \operatorname{sen}^2 \theta_t) \\ (1 - \operatorname{sen}^2 \theta_i) &= \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \left[1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \operatorname{sen}^2 \theta_i \right], \end{aligned} \quad (2.236)$$

ou

$$\operatorname{sen} \theta_i = \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon_2 - \mu_2}{\varepsilon_1 - \mu_1}}{\frac{\mu_1 - \mu_2}{\mu_2 - \mu_1}}}, \quad (2.237)$$

como $\operatorname{sen} \theta_i \leq 1$ temos, da equação (2.237), que

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\mu_2}{\mu_1} &\leq \frac{\mu_1}{\mu_2} - \frac{\mu_2}{\mu_1} \\ \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} &\leq \frac{\mu_1}{\mu_2}. \end{aligned} \quad (2.238)$$

A equação (2.238) fornece a condição para $\Gamma_{\perp} = 0$, se $\mu_1 = \mu_2$ a equação (2.237) implica em

$$\operatorname{sen} \theta_i|_{\mu_1=\mu_2} = \infty, \quad (2.239)$$

assim não existe ângulo real θ_i que reduz $\Gamma_{\perp} = 0$ para materiais dielétricos.

Análise do Γ para polarização paralela

Considerando os dois meios sem perdas temos, da equação (2.230), que

$$\Gamma_{\parallel} = \frac{-\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_i + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_t}{\sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos\theta_i + \sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos\theta_t} = 0, \quad (2.240)$$

que implica em

$$\cos\theta_i = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right)} \cos\theta_t, \quad (2.241)$$

usando a lei de Snell, $\sin\theta_i = \sin\theta_t \sqrt{\mu_2\varepsilon_2/\mu_1\varepsilon_1}$, podemos escrever a equação (2.241) como

$$\begin{aligned} (1 - \sin^2\theta_i) &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) (1 - \sin^2\theta_t) \\ (1 - \sin^2\theta_i) &= \frac{\mu_2}{\mu_1} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \left[1 - \frac{\mu_1}{\mu_2} \left(\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \right) \sin^2\theta_i \right], \end{aligned} \quad (2.242)$$

ou

$$\sin\theta_i = \sqrt{\frac{\frac{\varepsilon_2 - \mu_2}{\varepsilon_1 - \mu_1}}{\frac{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}{\varepsilon_1 - \varepsilon_2}}}, \quad (2.243)$$

como $\sin\theta_i \leq 1$ temos, da equação (2.243), que

$$\begin{aligned} \frac{\varepsilon_2 - \mu_2}{\varepsilon_1 - \mu_1} &\leq \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} - \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \\ \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} &\leq \frac{\mu_2}{\mu_1}. \end{aligned} \quad (2.244)$$

A equação (2.244) fornece a condição para $\Gamma_{\parallel} = 0$, se $\mu_1 = \mu_2$ a equação (2.243) implica em

$$\theta_i = \theta_B = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \right), \quad (2.245)$$

então existe θ_i no qual $\Gamma_{\parallel} = 0$, outras formas para a equação (2.245) são

$$\theta_i = \theta_B = \cos^{-1} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}} \right), \quad (2.246)$$

$$\theta_i = \theta_B = \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \right), \quad (2.247)$$

Exemplo 2.35 Uma onda eletromagnética emitida de um submarino incide na interface plana água-ar. Assumindo que a onda possui polarização paralela e que a constante dielétrica da água é 81, determine ângulo de incidência que permite a transmissão completa da energia.

Solução 2.35 Como a polarização da onda é paralela existirá um ângulo de incidência em que a onda será totalmente transmitida, usando a equação (2.247) obtemos o ângulo de Brewster

$$\theta_B = \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{81\varepsilon_0}} \right) \approx 6,34^\circ,$$

vemos que temos um ângulo muito pequeno.

Exemplo 2.36 Uma onda plana incide num ângulo θ do ar para um meio dielétrico. Sabemos que na polarização perpendicular 80% da potência incidente é transmitida e que na polarização paralela 100% é transmitida. Determine o ângulo θ e a permissividade ε do dielétrico.

Solução 2.36 Como na polarização paralela 100% é transmitido temos que o ângulo de incidência é igual ao ângulo de Brewster, assim temos

$$\theta_i = \theta_B = \tan^{-1} \left(\sqrt{\frac{\epsilon}{\epsilon_0}} \right) \rightarrow \tan \theta_i = \tan \theta_B = \sqrt{\epsilon_r}.$$

A lei da refração, equação (2.201), e o resultado anterior, implicam em

$$\begin{aligned} k_1 \sin \theta_i &= k_2 \sin \theta_t \\ \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_0} \sin \theta_i &= \omega \sqrt{\mu_0 \epsilon_r \epsilon_0} \sin \theta_t \rightarrow \sin \theta_i = \sqrt{\epsilon_r} \sin \theta_t \rightarrow \cos \theta_t = \sin \theta_i. \end{aligned}$$

Na polarização perpendicular temos 80% de potência transmitida, portanto, temos 20% de potência refletida o que implica que $|\Gamma_{\perp}|^2 = 0,2$. Usando a expressão para Γ_{\perp} , equação (2.216), obtemos

$$\begin{aligned} \Gamma_{\perp} &= \frac{\sqrt{\mu_0/\varepsilon} \cos \theta_i - 120 \pi \sin \theta_i}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon} \cos \theta_i + 120 \pi \sin \theta_i} = \frac{\sqrt{\mu_0/\varepsilon} - 120 \pi \tan \theta_i}{\sqrt{\mu_0/\varepsilon} + 120 \pi \tan \theta_i} \\ \Gamma_{\perp} &= \frac{120 \pi / \sqrt{\epsilon_r} - 120 \pi \sqrt{\epsilon_r}}{120 \pi / \sqrt{\epsilon_r} + 120 \pi \sqrt{\epsilon_r}} = \frac{1 - \epsilon_r}{1 + \epsilon_r}. \end{aligned}$$

Como temos o valor do módulo fazemos a inversão no numerador da expressão de Γ_{\perp} , já que ϵ_r é sempre maior que 1, assim temos

$$|\Gamma_{\perp}| = \sqrt{0,2} = \frac{\epsilon_r - 1}{1 + \epsilon_r} \rightarrow \epsilon_r = 2,618 \rightarrow \approx 2,618 \epsilon_0 \text{ e } \theta_i \approx 58,28^\circ$$

2.12.4 Condição para reflexão total - ângulo crítico

Na seção anterior calculamos o ângulo que permite transmissão total, agora determinaremos o ângulo de incidência em que a energia é totalmente refletida, isto é, $|\Gamma| = 1$. Este ângulo é denominado de **ângulo crítico**. Faremos a dedução para o caso da polarização perpendicular e deixaremos o caso da polarização paralela como exercício, já que fornece o mesmo resultado.

Análise do I' para polarização perpendicular

Para que tenhamos reflexão total temos, da equação (2.214), que

$$|\Gamma_{\perp}| = \left| \frac{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \theta_i - \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \theta_t}{\sqrt{\frac{\mu_2}{\varepsilon_2}} \cos \theta_i + \sqrt{\frac{\mu_1}{\varepsilon_1}} \cos \theta_t} \right| = 1. \quad (2.248)$$

Como é possível atender a equação (2.248) se no numerador temos uma diferença entre duas parcelas e no denominador temos a soma destas duas parcelas? Só temos liberdade em impor uma condição sobre o termo $\cos \theta_t$, assim, se ele for um número imaginário, poderemos ter $|\Gamma_{\perp}| = 1$. Da lei de Snell temos $\sin \theta_i = \sin \theta_t \sqrt{\mu_2 \varepsilon_2 / \mu_1 \varepsilon_1}$, assim

$$\cos \theta_t = \sqrt{1 - \sin^2 \theta_i \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2}}, \quad (2.249)$$

para que $\cos \theta_t$ seja um número imaginário a seguinte condição tem que ser satisfeita

$$\sin^2 \theta_i \frac{\mu_1 \varepsilon_1}{\mu_2 \varepsilon_2} \geq 1, \quad (2.250)$$

o que implica em

$$\theta_i \geq \theta_c = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{\mu_2 \varepsilon_2}{\mu_1 \varepsilon_1}} \right), \quad (2.251)$$

onde θ_c é o ângulo crítico, a partir do qual temos reflexão total. Como o argumento da função seno não pode exceder a unidade, temos a seguinte condição

$$\mu_2 \varepsilon_2 \leq \mu_1 \varepsilon_1, \quad (2.252)$$

e o ângulo crítico é fisicamente realizável. Considerando dois dielétricos de mesma permeabilidade magnética ($\mu_1 = \mu_2$) temos

$$\theta_c = \sin^{-1} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}} \right), \quad (2.253)$$

o que implica em

$$\varepsilon_2 \leq \varepsilon_1. \quad (2.254)$$

Da equação (2.254) vemos que com dois meios de mesma permeabilidade magnética, só existe ângulo crítico se a onda propaga do meio mais denso ($\varepsilon_1 > \varepsilon_2$) para o meio de menor densidade ε_2 .

Exemplo 2.37 Uma onda eletromagnética emitida de um submarino incide na interface plana água-ar. Assumindo que a onda possui polarização paralela e que a constante dielétrica da água é 81, determine ângulo crítico a partir do qual toda a energia é refletida pela interface.

Solução 2.37 Calculamos o ângulo crítico usando a equação (2.253), obtemos

$$\theta_c = \operatorname{sen}^{-1} \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_0}{81 \varepsilon_0}} \right) \approx 6,38^\circ,$$

e vemos que é muito próximo da valor do ângulo de Brewster. Quando a diferença entre as permissividades dos dois meios é grande, o ângulo crítico é muito próximo do ângulo de Brewster.

O que acontece com os campos quando $\theta_i \geq \theta_c$? Para responder a pergunta começemos analisando o caso em que $\theta_i = \theta_c$, neste caso temos, da equação (2.251), que

$$\operatorname{sen}\theta_i = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1} \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1}}, \quad (2.255)$$

usando esta equação e a lei de Snell, obtemos

$$\theta_t = \operatorname{sen}^{-1} \left(\sqrt{\frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \operatorname{sen}\theta_i \right) |_{\theta_i=\theta_c} = \operatorname{sen}^{-1}(1) = 90^\circ, \quad (2.256)$$

e os coeficientes de reflexão e transmissão reduzem-se a

$$\Gamma_\perp |_{\theta_i=\theta_c} = 1, \quad (2.257)$$

$$T_\perp |_{\theta_i=\theta_c} = 2. \quad (2.258)$$

Os campos transmitidos são dados, das equações (2.206) e (2.207), por

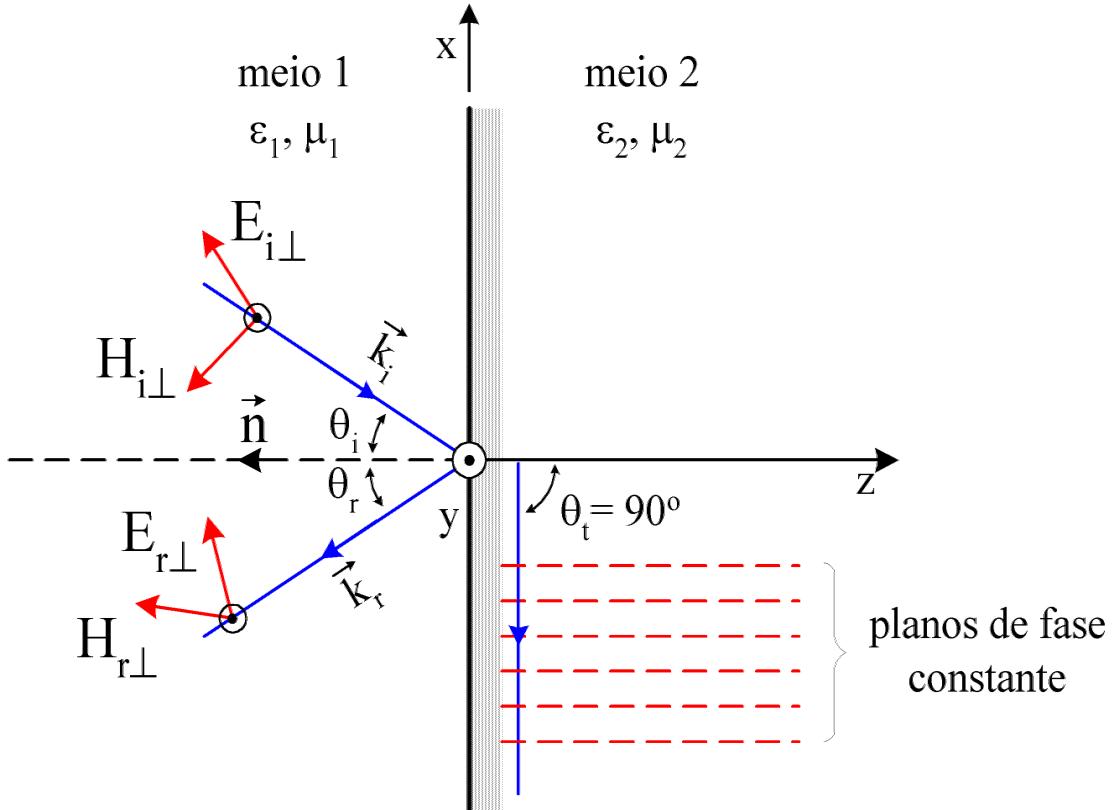
$$\mathbf{E}_\perp^t = 2 \mathbf{E}_o e^{j k_2 x} \vec{a}_y, \quad (2.259)$$

$$\mathbf{H}_\perp^t = \frac{-2 \mathbf{E}_o}{Z_2} e^{j k_2 x} \vec{a}_z, \quad (2.260)$$

e representam uma onda propagando paralela a interface na direção $-x$, os planos de fase constante são paralelos ao eixo z , esta onda é denominada de **onda de superfície**, e esta ilustrada na figura 2.54.

A densidade de potência média associada com os campos transmitidos é dada por

$$\vec{P}_m^t = \frac{1}{2} \Re e \left\{ \mathbf{E}_\perp^t \times \overline{\mathbf{H}}_\perp^t \right\} |_{\theta_i=\theta_c} = -\Re e \left[\frac{1}{Z_2} \right] 2 |\mathbf{E}_o|^2 \vec{a}_x, \quad (2.261)$$

Figura 2.54: Onda de superfície gerada quando $\theta_i = \theta_c$.

A equação (2.261) mostra que não temos qualquer componente do vetor de Poynting médio normal a interface, assim, nenhuma potência real é transferida para o meio 2.

Quando $\theta_i > \theta_c$ temos que $\cos\theta_t$ será um número imaginário e dado por

$$\cos\theta_t = \pm j \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2} \sin^2\theta_i - 1} \text{ quando } \theta_i > \theta_c, \quad (2.262)$$

assim, θ_t é um ângulo complexo e portanto não é um ângulo realizável fisicamente, é escrito como $\theta_t = \theta_R + j\theta_X$, onde θ_R e θ_X , são definidos pelos parâmetros constitutivos, a dedução das expressões é deixada como exercício.

O campo elétrico transmitido é dado, da equação (2.206), por

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t^\perp &= \mathbf{E}_o T_\perp e^{j k_2 x \sin\theta_t} e^{-j k_2 z \cos\theta_t} \vec{a}_y \\ &= \mathbf{E}_o T_\perp \exp\left\{j k_2 x \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} \sin\theta_i\right\} \exp\{-j k_2 z \cos\theta_t\} \vec{a}_y. \end{aligned} \quad (2.263)$$

Definimos uma constante de fase $\beta_e = k_2 \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2}} \sin\theta_i$ e usando a equação (2.262) podemos escrever a equação anterior como

$$\mathbf{E}_t^\perp = \mathbf{E}_o T_\perp e^{j \beta_e x} \exp\left\{-j k_2 z (\pm j) \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2} \sin^2\theta_i - 1}\right\} \vec{a}_y,$$

o sinal da raiz é escolhido como $-$ porque é um fator de atenuação, definimos agora uma constante de atenuação $\alpha_e = k_2 \sqrt{\frac{\mu_1 \epsilon_1}{\mu_2 \epsilon_2} \sin^2\theta_i - 1}$ e a expressão final para os campos transmitidos

é dada por

$$\mathbf{E}_\perp^t = \mathbf{E}_o T_\perp e^{j\beta_e x} e^{-\alpha_e z} \vec{a}_y, \quad (2.264)$$

$$\mathbf{H}_\perp^t = \frac{\mathbf{E}_o T_\perp}{Z_2 k_2} e^{j \beta_e x} e^{-\alpha_e z} (-j \alpha_e \vec{a}_x - \beta_e \vec{a}_z), \quad (2.265)$$

que representam uma onda plana não uniforme em que, a medida que penetra no meio 2, é atenuada. Na figura 2.55 temos a ilustração desta onda, observe que os planos de mesma fase não coincidem com os planos de amplitude constante.

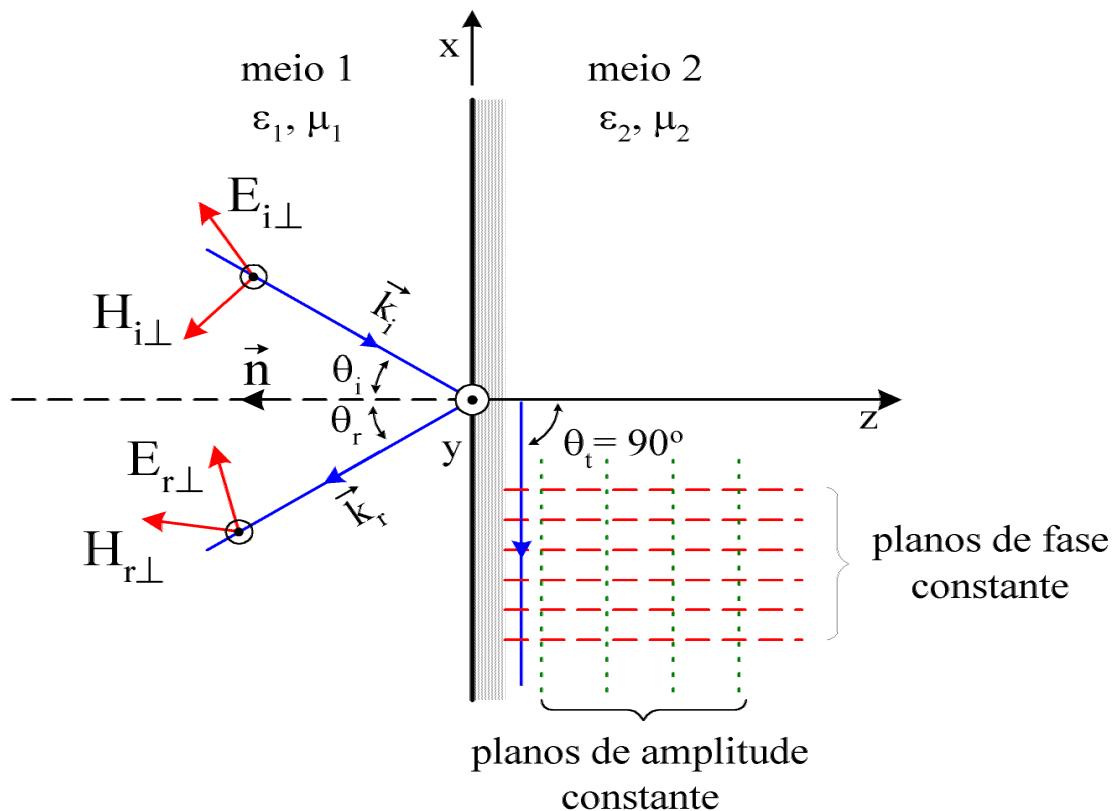


Figura 2.55: Onda plana não uniforme gerada quando $\theta_i > \theta_c$.

2.13 Exercícios

Introdução

1. Deduzir a equação de onda para o campo \vec{H} , equação (2.8).
2. Converter a função $g(\xi) = 3/(2\xi^2 + 1)$ em uma onda $g(x, y, z, t)$ que propaga na velocidade 2m/s na direção positiva do eixo y . Faça um gráfico mostrando esta onda nos tempos $t = 0\text{s}$, $t = 1\text{s}$, $t = 2\text{s}$ e $t = 4\text{s}$. Resp. $g(y, t) = \frac{3}{2(y-2t)^2+1}$.
3. Qual é a velocidade v e a direção \vec{n} da onda $f(x, y, z, t) = \operatorname{sech}^2(x + y + z + t)$? Resp. $v = 1/\sqrt{3}$, $\vec{n} = (\vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z)/\sqrt{3}$.
4. Converter a função $f(\xi) = 5e^{-(3\xi)^2}$ em uma onda $f(x, y, z, t)$ que propaga na velocidade 2m/s na direção do vetor $\vec{b} = 3\vec{a}_x + 4\vec{a}_y - 12\vec{a}_z$.
Resp. $f(x, y, z, t) = 5e^{-9(3x+4y-12z-26t)^2/169}$.
5. Um transmissor localizado em $z = 0$ gera um sinal $f(t) = (t/T)^3 e^{-t/T}$, com $T = 4\text{s}$, partindo do instante $t = 0$. O sinal propaga como uma onda ao longo do eixo z , na velocidade $v = 6\text{ m/s}$. Determine: (a) onde é o pico da onda depois de $t = 20\text{s}$ propagando?
(b) em que tempo um observador estacionado na posição $z = 20\text{m}$, veria o pico da onda?
Resp. (a) $z = 48\text{ m}$ e (b) $15, 33\text{ s}$.
6. Prove que $f(z, t) = A \operatorname{sen}^2 4\pi(z + t)$ é uma solução da equação de onda.
7. Prove que a função $E = e^{-\alpha z} \operatorname{sen} \frac{\omega}{v}(z - vt)$ satisfaz a equação de onda (2.16) providenciando que a velocidade da onda, v , seja dada por $v = c \left(1 + \frac{\alpha^2 c^2}{\omega^2}\right)^{-1/2}$
8. Os campos elétrico e magnético devidos a um fio condutor infinito, com distribuições lineares de carga e corrente contínuas, são $\vec{E} = \rho_l \vec{a}_\rho / 2\pi\varepsilon\rho$ e $\vec{H} = I \vec{a}_\phi / 2\pi\rho$ onde ρ_l e I são a densidade de carga e a corrente no fio, respectivamente. Mostrar que: a) no caso de variação senoidal no tempo, os campos $\vec{E} = \rho_l \vec{a}_\rho \cos(\omega t) / 2\pi\varepsilon\rho$ e $\vec{H} = I \vec{a}_\phi \cos(\omega t) / 2\pi\rho$ não são soluções compatíveis com as equações de Maxwell; b) mostrar que as soluções compatíveis com as equações de Maxwell são dadas por $\vec{E} = \rho_l \vec{a}_\rho \cos(\omega t - kz) / 2\pi\varepsilon\rho$ e $\vec{H} = I \vec{a}_\phi \cos(\omega t - kz) / 2\pi\rho$.

Equação de Onda para Campos Harmônicos no Tempo

9. Deduza as equações (2.21) e (2.22) usando o par de transformadas de Fourier, equações (1.61) e (1.62), nas equações de onda para \vec{E} e \vec{H} .
10. Deduza as equações (2.21) e (2.22) a partir das equações diferenciais de Maxwell para campos harmônicos no tempo.

Ondas Planas Uniformes

11. O campo magnético de uma onda plana uniforme propagando no espaço livre é dado por $\vec{H} = H_0 \cos(6\pi \times 10^8 t - 2\pi y) \vec{a}_z A/m$. Encontre os vetores unitários nas direções: a) de propagação da onda; b) do campo magnético em $t = 0$ e $y = 0$; c) do campo elétrico em $t = 0$ e $y = 0$. Resp. a) \vec{a}_y ; b) \vec{a}_z ; c) $-\vec{a}_x$.
12. Uma onda plana oscilando na freqüência de $f = 3 \times 10^{14} Hz$ está propagando no espaço livre e tem um campo elétrico dado por $\vec{E} = e^{-j k_x x} e^{-j k_z z} \vec{a}_y V/m$. Sabendo que o vetor propagação faz um ângulo de 60° com o eixo z , determine k_x e k_z . Resp. $k_x = \sqrt{3} \pi \times 10^6$ e $k_z = \pi \times 10^6$.
13. Duas ondas eletromagnéticas de mesma freqüência são superpostas no espaço livre, os campos elétricos são dados por $\vec{E}_1 = E_1 \cos(\omega t - kz) \vec{a}_x V/m$ e $\vec{E}_2 = E_2 \cos(\omega t - kz) \vec{a}_x V/m$. Calcular a densidade de potência média de cada onda e a densidade de potência média da onda resultante. Analise os resultados. Resp. $P_{m1} = E_1^2 / 240\pi$, $P_{m2} = E_2^2 / 240\pi$ e $P_m = (E_1 + E_2)^2 / 240\pi$ e $P_m \neq P_1 + P_2$.
14. Repita o problema anterior considerando que $\vec{E}_2 = E_2 \cos(\omega t - kz) \vec{a}_y$, qual foi a diferença?
15. Uma onda plana propagando no espaço livre tem o campo elétrico dado por $\vec{E} = 100 \cos(9 \times 10^8 t - kx) \vec{a}_y V/m$, determine o campo magnético desta onda.
Resp. $\vec{H} = 0,265 \cos(9 \times 10^8 t - 3x) \vec{a}_z A/m$.
16. Uma onda plana propagando no espaço livre tem o campo magnético dado por $\vec{H} = 10 \sin(3 \times 10^8 t + ky) \vec{a}_x A/m$, determine o campo elétrico desta onda.
Resp. $\vec{E} = -3770 \sin(3 \times 10^8 t - 1 y) \vec{a}_z V/m$.
17. Deduza a *fem* induzida na antena retangular do exemplo 2.7 usando o fluxo magnético incidente.
18. Qual deve ser a dimensão b da antena retangular do exemplo 2.7 para que não exista *fem* induzida? Justifique a sua resposta. Resp. $b = n \lambda$, $n = 1, 2, 3, \dots$
19. A antena retangular do exemplo 2.7 está colocada no plano xz , qual deve ser a rotação da antena, em relação ao eixo z , de forma que a *fem* induzida seja nula? Justifique a sua resposta. Resp. $\phi = \pm \pi/2$.

Parâmetros da Onda Eletromagnética

20. Determinar a constante dielétrica de um meio não magnético ($\mu = \mu_0$) no qual uma onda plana propaga nos seguintes casos: a) a impedância intrínseca do meio é de 180Ω ; b) o comprimento de onda na freqüência de $10 GHz$ é de $2 cm$; c) o campo elétrico da onda é $\vec{E} = (2 \vec{a}_x + j3 \vec{a}_y) e^{-j0,001z} V/m$ e $f = 25 kHz$. Resp. a) $\varepsilon = 4,4 \varepsilon_0$; b) $\varepsilon = 2,25 \varepsilon_0$; c) $\varepsilon = 3,65 \varepsilon_0$.
21. Determine o módulo do campo magnético de uma onda que propaga no ar, para $z = 10 m$ e $t = 10^{-6} s$, sendo: a) $\vec{E} = 500 \sin(\omega t - z/300) \vec{a}_x V/m$; b) $\vec{E} = 300 \sin(\omega t - z/300) \vec{a}_x + 200 \sin(\omega t - z/300) \vec{a}_y V/m$. Resp. a) $H = 1,1 A/m$; b) $H = 0,79 A/m$
22. Para ondas planas uniformes propagando no espaço livre determine: a) a freqüência f , se em um ponto do espaço a fase do campo muda a uma taxa de $2\pi rad$ em $2/3 \mu s$; b) o comprimento de onda λ , se em um valor particular de tempo (t_1) a fase do campo muda de $0,02\pi$ numa distância de $1 m$ ao longo da direção de propagação da onda; c) a

freqüência f , se o comprimento de onda é de 150 m ; d) o comprimento de onda λ , se a freqüência é de 5 MHz . Resp. a) $1,5\text{ MHz}$; b) 100 m ; c) 2 MHz ; d) 60 m .

23. Determine a expressão do campo elétrico que deve ser superposto ao campo $\vec{E} = 10 \cos(\omega t - kz) \vec{a}_x \text{ V/m}$ para obtermos: a) polarização linear num ângulo de 30° ; b) polarização circular à esquerda. Resp. a) $\vec{E} = 5,77 \cos(\omega t - kz) \vec{a}_y \text{ V/m}$; b) $\vec{E} = -10 \sin(\omega t - kz) \vec{a}_y \text{ V/m}$.
24. O campo elétrico de uma onda plana uniforme é dado por $\vec{E} = 10 \sin(3\pi \times 10^8 t - \pi z) \vec{a}_x + 10 \cos(3\pi \times 10^8 t - \pi z) \vec{a}_y \text{ V/m}$. Determine: a) k e ω ; b) o campo magnético correspondente; c) a polarização da onda. Resp. a) $k = \pi \text{ rad/m}$ e $\omega = 3\pi \times 10^8 \text{ rad/s}$; b) $\vec{H} = -\frac{10}{120\pi} \cos(3\pi \times 10^8 t - \pi z) \vec{a}_x + \frac{10}{120\pi} \sin(3\pi \times 10^8 t - \pi z) \vec{a}_y \text{ A/m}$; c) onda polarizada circularmente à esquerda.
25. Uma onda plana propagando no ar possui um campo elétrico dado por $\vec{E} = 3 \cos(\omega t - kz) \vec{a}_x + 6 \cos(\omega t - kz + 75^\circ) \vec{a}_y \text{ V/m}$. Determine: a) o campo magnético; b) a potência média por unidade de área que a onda transporta; c) a polarização da onda. Resp. a) $\vec{H} = 3/120\pi [-2 \cos(\omega t - kz + 75^\circ) \vec{a}_x + \cos(\omega t - kz) \vec{a}_y] \text{ A/m}$; b) $P_m = 59,68 \text{ mW/m}^2$; c) polarização elíptica à esquerda.

Ondas eletromagnéticas em meios sem perdas

26. O campo elétrico de uma onda plana propagando no vácuo é dado por $\vec{E} = 100 \sin(\omega t - 2z) \vec{a}_x$, determine ω , \vec{H} e o vetor densidade de potência média. Resp. $\omega = 6 \times 10^8 \text{ rad/s}$, $\vec{H} = \frac{200}{\omega \mu_0} \sin(\omega t - 2z) \vec{a}_y$ e $\vec{P}_m = 13,26 \vec{a}_z \text{ W/m}^2$.
27. Seja uma onda plana de 300 MHz cuja amplitude do campo elétrico é de 1 V propagando na água. Considerando que o meio não apresenta perdas significativas e é caracterizado por $\epsilon = 78\epsilon_0$ e $\mu = \mu_0$, pede-se: a) a velocidade de propagação da onda; b) o comprimento de onda na água; c) a constante de propagação; d) a impedância intrínseca do meio; e) o campo eletromagnético instantâneo supondo uma variação senoidal no tempo, com o campo elétrico na direção \vec{a}_x e que a onda propague na direção \vec{a}_z . Resp. a) $v = 340 \times 10^5 \text{ m/s}$; b) $\lambda = 0,113 \text{ m}$; c) $k = 55,4 \text{ rad/m}$; d) $Z = 42,7 \Omega$; e) $\vec{E} = \sin(6\pi \times 10^8 t - 55,4z) \vec{a}_x \text{ V/m}$ e $\vec{H} = 2,34 \times 10^{-2} \sin(6\pi \times 10^8 t - 55,4z) \vec{a}_y \text{ A/m}$.
28. Uma onda eletromagnética propaga no espaço livre com uma constante de fase de $k = 0,524 \text{ rad/m}$. Penetrandoo em um dielétrico sem perdas, essa mesma onda passa a ter uma constante de fase de $1,81 \text{ rad/m}$. Supondo que este dielétrico tenha $\mu = \mu_0$ determine ϵ e a velocidade de propagação no dielétrico. Resp. $\epsilon = 11,95\epsilon_0$ e $v = 8,68 \times 10^7 \text{ m/s}$.

Ondas Estacionárias

29. Deduza o relacionamento entre TOE e Γ , equação (2.110).

Ondas eletromagnéticas em meios com perdas

30. Deduza as equações (2.119) e (2.120). Sugestão: faça $\gamma = \sqrt{A} + j\sqrt{B}$.
31. Deduza as equações de Maxwell para ondas planas propagando em um meio com perdas. Sugestão: considere os campos na forma $\mathbf{E}(\vec{r}) = \mathbf{E}_0 e^{\pm\tilde{\gamma}\cdot\vec{r}}$ e $\mathbf{H}(\vec{r}) = \mathbf{H}_0 e^{\pm\tilde{\gamma}\cdot\vec{r}}$ e aplique o procedimento feito na seção 2.4.1.
32. Determine a constante de atenuação para uma onda plana uniforme propagando em um meio não magnético na freqüência de $\omega = 10^7 \text{ rad/s}$, se: a) $\sigma/\epsilon = 10^7 \text{ s}^{-1}$ e $\epsilon_r = 4$; b) a

tangente de perdas for 0,04 e a constante de fase $\beta = 0,1 \text{ rad}/m$. Resp. a) $0,0303 \text{ Np}/m$; b) $0,002 \text{ Np}/m$.

33. A água na freqüência de $15,9 \text{ GHz}$ possui os seguintes parâmetros elétricos: $\varepsilon = 50 \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ e $\sigma = 20 \text{ S}/m$. Para uma onda plana propagando neste meio determine: a) o fator de atenuação; b) o fator de fase; c) a impedância intrínseca de meio; d) o comprimento de onda; e) a diferença de fase entre o campo elétrico e o campo magnético. Resp. a) $\alpha = 522 \text{ Np}/m$; b) $\beta = 2420 \text{ rad}/m$; c) $Z = 49,6 + j10,7 = 51|12,2^\circ \Omega$; d) $\lambda = 2,6 \times 10^{-3}$; e) argumento de Z , $12,2^\circ$
34. Um campo elétrico $\mathbf{E} = 100 e^{-\gamma z}$ está propagando num meio caracterizado por $\varepsilon = 4 \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ e $\sigma = 0,1 \text{ S}/m$ na freqüência de $2,45 \text{ GHz}$. Determine as constantes de atenuação e fase e calcule a atenuação em dB/m ($\text{dB} = 10 \log_{10}(P_1/P_2)$). Resp. $\gamma = \alpha + j\beta = 9,37 \text{ Np}/m + j103 \text{ rad}/s$, $81,39 \text{ dB}/m$.
35. Considere um meio que apresenta uma tangente de perdas de 10^{-3} . Por quantos comprimentos de onda pode uma onda plana propagar neste meio antes que a amplitude caia a metade?. Resp. 221.
36. Deduza as equações (2.131), (2.132) e (2.133).
37. O campo magnético de uma onda plana propagando em um meio caracterizado por $\varepsilon = 9 \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ e $\sigma = 10^{-4} \text{ S}/m$ é dado por $\mathbf{H} = H_0 (\vec{a}_y + j 2 \vec{a}_z) e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$ com $H_0 = 1 \mu\text{A}/m$, a freqüência de operação é de 1 GHz . Determine: a) o vetor campo elétrico; b) o vetor densidade de potência média; c) a constante de fase e a velocidade de fase; d) a constante de atenuação e a profundidade de penetração.
Resp. a) $\mathbf{E} = (251,156 \times 10^{-6} \vec{a}_y + j 125,578 \times 10^{-6} \vec{a}_z) e^{-\alpha x} e^{-j\beta x}$; b) $\vec{P}_m = 313,95 \times 10^{-12} e^{-2\alpha x} \vec{a}_x \text{ W}/m^2$; c) $\beta \approx 62,874709 \text{ rad}/m$, $v_f \approx 9,99 \times 10^7 \text{ m}/s$; d) $\lambda = 99,93 \times 10^{-3} \text{ m}$; e) $\alpha = 6,27803 \times 10^{-3} \text{ Np}/m$, $\delta = 159,2856 \text{ m}$.
38. Os parâmetros constitutivos da terra úmida, na freqüência de 1 MHz são $\varepsilon = 4 \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ e $\sigma = 0,1 \text{ S}/m$. Assumindo que a intensidade de campo elétrico da onda plana incidindo sobre a terra úmida é de $1 \times 10^{-2} \text{ V}/m$, determine: a) a distância da interface que a onda deve propagar para que a magnitude do campo elétrico reduza-se a $1,104 \times 10^{-2} \text{ V}/m$; b) a atenuação em dB que o campo sofreu para chegar ao nível especificado no item a; c) o comprimento de onda dentro da terra úmida; d) a velocidade de fase da onda dentro da terra úmida; e) a impedância intrínseca da terra úmida. Resp. a) $dist = 0,1578 \text{ m}$; b) atenuação = $8,67 \text{ dB}$; c) $\lambda = 10 \text{ m}$; d) $v_f \approx 10^7 \text{ m}/s$; e) $Z = 8,88|45^\circ$.
39. O oceano é um meio de comunicação entre submarinos submersos e submarinos e estações localizadas acima da superfície do mar. Assumindo que os parâmetros constitutivos do oceano sejam $\varepsilon = 81 \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ e $\sigma = 4 \text{ S}/m$ na freqüência de $f = 10^4 \text{ Hz}$, determine para este meio: a) a constante de propagação; b) a velocidade de fase; c) a profundidade de penetração. Resp $\gamma = 0,397 + j 0,397$; b) $v_f \approx 1,583 \times 10^5 \text{ m}/s$; c) $\delta = 2,516 \text{ m}$.
40. A água na freqüência de $15,9 \text{ GHz}$ possui os seguintes parâmetros elétricos: $\varepsilon = 50 \varepsilon_0$, $\mu = \mu_0$ e $\sigma = 20 \text{ S}/m$. Para uma onda plana propagando neste meio determine: a) fator de atenuação; b) fator de fase; c) impedância intrínseca do meio; d) comprimento de onda; e) ângulo de fase entre o campo elétrico e o campo magnético. Resp. a) $\alpha = 522 \text{ Np}/m$; b) $\beta = 2420 \text{ rad}/m$; c) $Z = 49,6 + j10,7 = 51|12,2^\circ \Omega$; d) $2,6 \times 10^{-3} \text{ m}$; e) argumento de $Z = 12,2^\circ$.

41. O campo elétrico de uma onda plana propagando num meio caracterizado por $\epsilon = 18,5\epsilon_0$, $\mu = 800\mu_0$ e $\sigma = 1 S/m$ é dado por $\vec{E}(z, t) = 50e^{-\alpha z} \cos(\omega t - \beta z) \vec{a}_y V/m$. Sabendo que a freqüência do campo é de $1 GHz$ determine: a) α ; b) β ; c) Z ; d) v_f ; e) v ; f) o campo magnético. Resp. a) $1,13 \times 10^3 Np/m$; b) $\beta = 2,78 \times 10^3 rad/m$; c) $Z = 2099|22,09^\circ \Omega$; d) $v_f = 2,26 \times 10^6 m/s$; e) $v = 2,466 \times 10^6 m/s$; f) $\vec{H}(z, t) = -2,38 \times 10^{-2} e^{-\alpha z} \cos(\omega t - 0,386 - \beta z) \vec{a}_x A/m$.

Aproximações para os parâmetros α , β , Z , λ , $e v_f$

42. Deduza as expressões aproximadas para a atenuação, constante de fase e impedância intrínseca de um meio bom dielétrico. Sugestão: use a expansão $(1+n)^n = 1+nx+n(n-1)x^2/2!+n(n-1)(n-2)x^3/3!+\dots$
43. Classifique o meio de propagação do exercício 34 e calcule a impedância intrínseca e a constante de propagação usando as expressões exatas e as aproximadas. Faça uma comparação calculando o erro relativo percentual para as partes reais e imaginárias das constantes e o erro relativo percentual para o módulo e a fase das constantes. Resp. $Z = 186,2+j16,96\Omega$, $Z_{aprox} = 188,5+17,29\Omega$ e $\gamma_{aprox} = 9,43+j102,6$.

Onda plana incidência normal em interface

44. Demonstre que no caso de dois meios sem perdas, a expressão para o vetor de Poynting médio da potência transmitida pode ser escrita, da equação (2.155), da forma $\vec{P}_m^t = (1 - |\Gamma|^2) P_m^i \vec{a}_z$. Interprete o resultado obtido.
45. Encontre a fase e a amplitude do campo elétrico na profundidade de $0,1 mm$, em uma chapa de cobre com os parâmetros constitutivos $\epsilon = \epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma = 5,8 \times 10^7 S/m$. Considere que a amplitude do campo elétrico na superfície da placa é de $1 V/m$ e a sua freqüência é de $1Ghz$. Resp. $E = 1,575 \times 10^{-21} V/m$, $fase = 47,9 rad = 224,468^\circ$.
46. Uma onda plana incide normalmente na interface entre dois meios, o meio 1 é caracterizado por $\epsilon_1 = 2\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma_1 = 0,2 S/m$, o meio 2 por $\epsilon_1 = 4\epsilon_0$, $\mu = \mu_0$, $\sigma_1 = 0,1 S/m$. Encontre γ_1 , γ_2 , Z_1 , Z_2 e as amplitudes dos campos E_r , H_r , E_t e H_t , considerando o campo incidente da forma $\vec{E}_i = E_0 e^{-\alpha_1 z} \cos(\omega t - \beta_1 z) \vec{a}_z$, $E_0 = 1 V/m$ na freqüência de $10 GHz$. Resp. $\gamma_1 = 299|84,9^\circ$, $\gamma_2 = 419,4|88,59^\circ$, $Z_1 = 264,46|5,10^\circ$, $Z_2 = 188,26|1,43^\circ$, $E_r = 0,17 V/m$, $H_r = 0,64 mA/m$, $E_t = 0,8321 V/m$ e $H_t = 0,00442 A/m$.
47. Repita o problema anterior na freqüência de $1 GHz$. Resp. $\gamma_1 = 42,5|59,53^\circ$, $\gamma_2 = 43,87|77,88^\circ$, $Z_1 = 185,77|30,47^\circ$, $Z_2 = 180,0|12,11^\circ$, $E_r = 0,16 V/m$, $H_r = 8,6 mA/m$, $E_t = 1,0 V/m$ e $H_t = 0,00555 A/m$
48. Uma onda plana está propagando em um meio não magnético e sem perdas, seu campo elétrico é dado por $E_i = 20e^{-j0,1\pi z} \vec{a}_x V/m$ e oscila na freqüência de $10 MHz$. Esta onda incide num condutor perfeito colocado na posição $z = 0$. Determine: a) o campo total \mathbf{E} em $z = -2m$; b) o campo total \mathbf{H} em $z = -2m$; c) o vetor densidade superficial de corrente no condutor. Resp. a) $-23,5 \sin(2\pi \times 10^7 t) \vec{a}_x V/m$; b) $0,1288 \cos(2\pi \times 10^7 t) \vec{a}_y A/m$; c) $0,1592 \cos(2\pi \times 10^7 t) \vec{a}_x A/m$;
49. Uma onda plana tem o seu campo elétrico dado por $\mathbf{E}_i = 250e^{-jk_1 z} \vec{a}_x V/m$ oscilando na freqüência de $300 MHz$. Esta propagando no meio 1 caracterizado por $\epsilon_1 = 2,25\epsilon_0$, $\mu_1 = \mu_0$ e $\sigma_1 = 0$ e incide normalmente a interface $z = 0$ com o meio 2, que é caracterizado

por $\varepsilon_2 = 4\varepsilon_0$, $\mu_2 = 4\mu_0$ e $\sigma_2 = 0$. Determine: a) o campo elétrico refletido; b) o campo elétrico transmitido; c) a razão entre a potência média refletida e a incidente. Resp. a) $\mathbf{E}_r = 50 e^{j3\pi z} \vec{a}_x V/m$; b) $\mathbf{E}_t = 300 e^{-j8\pi z} \vec{a}_x V/m$; c) 0,04.

50. Uma onda plana uniforme incide normalmente de um meio 1 caracterizado por $\varepsilon_1 = 8\varepsilon_0$, $\mu_1 = 4\mu_0$ e $\sigma_1 = 0$ em um meio 2 caracterizado por $\varepsilon_2 = 2\varepsilon_0$, $\mu_1 = 2\mu_0$ e $\sigma_2 = 0$. A superfície da fronteira entre os meios é o plano $z = 0$, com o meio 1 no lado $z < 0$. Se a freqüência de operação é $2500 MHz$, determine: a) Γ ; b) o coeficiente de onda estacionária. Resp. a) $\Gamma = 0,17$; b) $TOE = 1,41$.
51. Um onda plana na freqüência de $20 MHz$ está propagando no ar e incide normalmente em um material caracterizado por $\varepsilon = 2,25\varepsilon_0$, $\mu = 6,25\mu_0$ e $\sigma_1 = 0$. Sabendo que o campo elétrico tem uma amplitude de $30000 V/m$ na interface determine a amplitude máxima do campo magnético total no ar e a menor distância a partir da interface. Resp. $H_{mx} = 99,47 A/m$ e $d = \lambda/4 = 3,75 m$ porque o mínimo ocorre na interface.
52. Uma onda plana propagando no ar (meio 1) com um campo magnético H_1 incide normalmente sobre a fronteira plana de um grande meio condutor (meio 2) que possui impedância intrínseca $Z_2 = (10 + j10) m\Omega$. Determine: a) sem usar aproximação, a grandeza do campo magnético H_2 na fronteira do meio 2; b) compare este resultado com a aproximação $H_2 \approx 2H_1$ e o erro percentual cometido nesta aproximação. Resp. a) $H_2/H_1 = 1,99995$; b) 0,0026 %.
53. Uma onda plana uniforme com densidade de potência média de $100 W/m^2$ e freqüência de $500 MHz$, incide normalmente, do espaço livre, na superfície do mar ($\varepsilon = 80\varepsilon_0$ e $\sigma = 5 S/m$). O campo elétrico aponta para a direção \vec{a}_x e a propagação se dá na direção $+z$. Pede-se: a) os campos incidentes instantâneos \vec{E}_i e \vec{H}_i ; b) os campos refletidos \vec{E}_r e \vec{H}_r ; c) os campos transmitidos \vec{E}_t e \vec{H}_t ; d) a potência transmitida para o mar em $z = 0$. Resp. a) $\vec{E}_i = 274,59 \cos(\pi \times 10^9 t - 10,47 z) \vec{a}_x$, $\vec{H}_i = 0,7283 \cos(\pi \times 10^9 t - 10,47 z) \vec{a}_y$; b) $\vec{E}_r = 243,67 \cos(\pi \times 10^9 t + 10,47 z + 175,54^\circ) \vec{a}_x$, $\vec{H}_r = -0,6464 \cos(\pi \times 10^9 t + 10,47 z + 175,54^\circ) \vec{a}_y$; c) $\vec{E}_t = 36,89 e^{-\alpha z} \cos(\pi \times 10^9 t - 123,27 z + 30,91^\circ) \vec{a}_x$, $\vec{H}_t = 1,37 e^{-\alpha z} \cos(\pi \times 10^9 t - 123,27 z - 2,098^\circ) \vec{a}_y$; d) $P_m^t = 21,25 W/m^2$.

Onda plana incidência oblíqua em interface

54. Uma onda plana incide sobre a interface plana de dois meios dielétricos num ângulo $\theta_i = 36,87^\circ$. As permissividades dos meios são $\varepsilon_1 = 6,25\varepsilon_0$ e $\varepsilon_2 = 15,21\varepsilon_0$. Obtenha os coeficientes de reflexão e transmissão para as polarizações perpendicular e paralela, compare os resultados para o caso de incidência normal e determine o ângulo θ_t . Resp. $\Gamma_\perp = -0,28571$, $T_\perp = 0,71429$, $\Gamma_\parallel = -0,14966$, $T_\parallel = 0,73697$, $\Gamma_n = 0,21875$, $T_n = 0,78125$ e $\theta_t = 22,62^\circ$.
55. Uma onda plana incide obliquamente na interface entre dois meios sem perdas e não magnéticos. Sabendo que o ângulo de incidência é de $\theta_i = 30^\circ$, sua polarização é a perpendicular, que no meio 1 a velocidade de propagação da energia é $v_1 = c/2$ e no meio 2 é $v_2 = 2c/3$, determine os coeficientes de reflexão e transmissão. Resp. $\Gamma_\perp = 0,21554$ e $T_\perp = 1,21544$.
56. Uma onda plana incide obliquamente na interface entre dois meios sem perdas e não magnéticos. Sabendo que o ângulo de incidência é de $\theta_i = 30^\circ$, sua polarização é a paralela, que no meio 1 a velocidade de propagação da energia é $v_1 = c/2$ e no meio 2 é $v_2 = 2c/3$, determine os coeficientes de reflexão e transmissão. Resp. $\Gamma_\parallel = 0,0687$ e $T_\parallel = 1,2417$.

57. Uma onda plana de 100 kHz propagando no ar incide num ângulo de $\theta_i = 45^\circ$ sobre o mar ($\varepsilon = 80\varepsilon_0$, $\sigma = 3\text{ S/m}$). Calcular as amplitudes das ondas refletidas e transmitidas (E_r , H_r , E_t , H_t) considerando que $E_i = 500\text{ }\mu\text{V/m}$ e a sua polarização é paralela. Resp. $E_r = 498,5\text{ }\mu\text{V/m}$, $H_r = 1,3223\text{ }\mu\text{A/m}$, $E_t = 1,06\text{ }\mu\text{V/m}$ e $H_t = 2,0675\text{ }\mu\text{A/m}$.
58. Uma onda plana propagando no ar incide sobre o poliestireno ($\varepsilon = 2\varepsilon_0$) segundo um ângulo de incidência de $\theta_i = 45^\circ$. A onda incidente possui um campo elétrico com $E_i = 100\text{ }\mu\text{V/m}$ e polarizado perpendicularmente. Calcular: a) o ângulo de transmissão; b) as ondas refletidas e transmitidas (E_r , H_r , E_t , H_t); c) o coeficiente de transmissão de energia, isto é, a razão P_m^t/P_m^i . Resp. a) $\theta_t = 30^\circ$; b) $E_r = 26,79\text{ }\mu\text{V/m}$ e $E_t = 73,21\text{ }\mu\text{V/m}$; c) $P_m^t/P_m^i = 0,928$.
59. Uma onda plana propagando no ar incide sobre o poliestireno ($\varepsilon = 2\varepsilon_0$) segundo um ângulo de incidência de $\theta_i = 30^\circ$. A onda incidente possui um campo elétrico com $E_i = 80\text{ }\mu\text{V/m}$ e polarizado paralelamente. Calcular: a) o ângulo de transmissão; b) as ondas refletidas e transmitidas (E_r , H_r , E_t , H_t); c) o coeficiente de transmissão de energia, isto é, a razão P_m^t/P_m^i . Resp. a) $\theta_t = 20,70^\circ$; b) $E_r = 10,715\text{ }\mu\text{V/m}$ e $E_t = 64,144\text{ }\mu\text{V/m}$; c) $P_m^t/P_m^i = 0,7216$.
60. Uma onda plana incide num ângulo θ do ar para um meio dielétrico. Sabemos que na polarização perpendicular 70% da potência incidente é transmitida e que na polarização paralela 100% é transmitida. Determine o ângulo θ e a permissividade ε do dielétrico.
61. Para um ângulo de incidência maior que o ângulo crítico ($\theta_i > \theta_c$), o ângulo de refração é complexo ($\theta_t = \theta_R + j\theta_X$). Determine as expressões para θ_R e θ_X , em termos dos parâmetros constitutivos dos dois meios (ε_1 , μ_1 , ε_2 e μ_2). Resp. $\theta_R = \pi/2$ e $\theta_X = \cosh^{-1} \left[\sqrt{(\varepsilon_1 \mu_1)/(\varepsilon_2 \mu_2)} \sin \theta_i \right]$.
62. Um projetista quer transmitir uma onda plana através de uma interface entre dois meios dielétricos não magnéticos. Porque somente 50% da potência é transmitida numa incidência normal, ele decide usar uma incidência oblíqua no ângulo de Brewster, que permite uma transmissão perfeita para uma onda na polarização paralela. Por um erro ele transmite uma onda com polarização perpendicular, que fração da potência incidente é transmitida neste caso. Resp. 1/9.
63. Determine a faixa de valores da constante dielétrica de uma barra dielétrica de espessura t , figura 1, de modo que, quando uma onda incide sobre a barra, num ângulo oblíquo, $0^\circ \leq \theta_i \leq 90^\circ$, a energia da onda fique contida dentro da barra. De um exemplo de material que possa ser usado.
Resp. $\varepsilon_r \geq 1 + \sin^2 \theta_i \Rightarrow \varepsilon_r \geq 2$.
64. Uma antena transmissora de um sistema de comunicação terra-ar, está colocada a 10 m de altura acima da água, como mostrado na figura 2. Para uma separação de 10 Km entre o transmissor e o receptor, este colocado no avião, encontre a altura h_2 , acima da água, do sistema receptor, de modo que a onda refletida pela água não possua componente com polarização paralela. Assuma que a superfície da água é plana. Resp. $h_2 \approx 1101,111\text{ m}$.
65. As alturas acima da terra, de um transmissor e de um receptor são, respectivamente, $h_t = 100\text{ m}$ e $h_r = 10\text{ m}$, como mostrado na figura 3. Assumindo que o transmissor emite onda nas duas polarizações (\perp e \parallel), qual a distância s , em metros, entre o transmissor e o receptor, para que a onda refletida não tenha polarização paralela? Assuma que o meio

refletor é uma terra plana sem perdas com uma constante dielétrica de $\varepsilon = 16 \varepsilon_0$. Resp. 440 m.

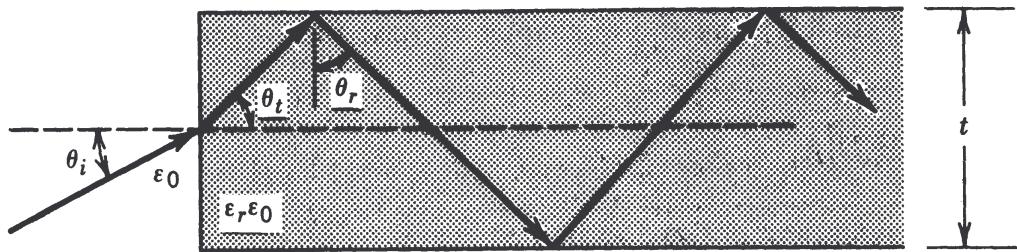


Figura 1

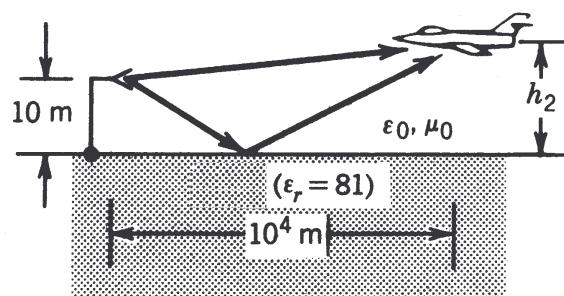


Figura 2

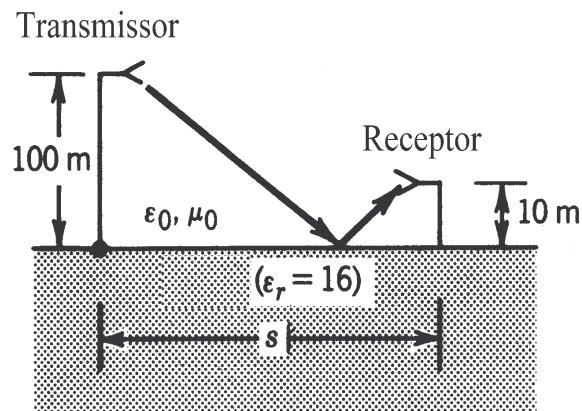


Figura 3

2.14 Referências

1. Paris, D. T. e Hurd, F. K., "Teoria Eletromagnética Básica", Guanabara Dois, 1984.
2. Kraus, D. e Carver, K.R., "Eletromagnetismo", Guanabara Dois, 1978.
3. William H. Hayt Jr., "Eletromagnetismo", 4^a Ed., Livros Técnicos e Científicos.