

Apostila de Guias e Ondas

Volume I

Equações de Maxwell

Sérgio Antenor de Carvalho
©2007

Prefácio

Esta apostila foi preparada para facilitar o aluno no acompanhamento da aula, evitando o esforço feito para anotar os desenvolvimentos e discussões em sala de aula e, assim, permitir uma maior participação. Como ocorre em todo texto erros e omissões ocorrem e desde já agradeço as sugestões construtivas que cheguem dos alunos com a finalidade de melhorar o texto e a sua compreensão.

A apostila foi dividida em cinco volumes, cada um cobrindo um assunto da disciplina.

- **volume I - *Equações de Maxwell***
- **volume II - *Equação de Onda***
- **volume III - *Linhas de Transmissão***
- **volume IV - *Guias de Onda Retangulares e Cilíndricos***
- **volume V - *Fibras Ópticas***

No final de cada volume são propostos exercícios para que o estudante possa fixar conceitos e aplique-los na solução de problemas de interesse da engenharia elétrica e de telecomunicações.

Referências são dadas no final de cada volume para que o estudante possa complementar o seu estudo com a leitura de textos que apresentam o conteúdo da apostila com outra abordagem e/ou exemplos.

Conteúdo

| | |
|---|----------|
| 1 Equações de Maxwell | 5 |
| 1.1 Introdução | 5 |
| 1.2 Equações de Maxwell na forma integral | 5 |
| 1.2.1 Lei de Faraday | 6 |
| 1.2.2 Lei de Ampère | 8 |
| 1.2.3 Lei de Gauss para campos elétricos | 13 |
| 1.2.4 Lei de Gauss para campos magnéticos | 16 |
| 1.2.5 Lei da conservação da carga elétrica | 18 |
| 1.3 Equações de Maxwell na forma diferencial | 20 |
| 1.3.1 Teorema da Divergência | 21 |
| 1.3.2 Teorema de Stokes | 23 |
| 1.3.3 Lei de Faraday | 25 |
| 1.3.4 Lei de Ampère | 26 |
| 1.3.5 Lei de Gauss | 27 |
| 1.3.6 Lei da conservação da carga | 27 |
| 1.4 Relações e parâmetros constitutivos | 28 |
| 1.5 Condições de Fronteira | 31 |
| 1.5.1 Condição de fronteira para o campo \vec{E} tangencial | 31 |
| 1.5.2 Condição de fronteira para o campo \vec{H} tangencial | 32 |
| 1.5.3 Condição de fronteira para o campo \vec{D} normal | 33 |
| 1.5.4 Condição de fronteira para o campo \vec{B} normal | 35 |
| 1.6 Potência e Energia | 38 |
| 1.7 Campos Harmônicos no Tempo | 43 |
| 1.7.1 Equações integrais para campos harmônicos | 46 |
| 1.7.2 Equações diferenciais para campos harmônicos | 46 |
| 1.7.3 Condições de Fronteiras para campos harmônicos | 47 |
| 1.7.4 Vetor de Poynting complexo | 47 |
| 1.8 Exercícios | 50 |
| 1.9 Referências | 52 |

Listas de Figuras

| | | |
|------|--|----|
| 1.1 | Lei de Faraday | 6 |
| 1.2 | Geração de uma fem pela rotação de um laço sob um campo magnético constante | 7 |
| 1.3 | Geração de uma fem por uma barra condutora sob um campo magnético constante | 7 |
| 1.4 | Lei de Ampère | 8 |
| 1.5 | Capacitor Genérico | 9 |
| 1.6 | Tensão no capacitor genérico variando σ | 9 |
| 1.7 | Tensão no capacitor genérico variando ε | 10 |
| 1.8 | Linha de transmissão coaxial | 10 |
| 1.9 | Campo H_ϕ de uma linha de transmissão coaxial | 12 |
| 1.10 | Lei de Gauss para campos elétricos | 13 |
| 1.11 | Campo Elétrico gerado por uma distribuição de carga | 14 |
| 1.12 | Região no espaço onde $\vec{D} = 3\rho(z+1)\cos\phi\vec{a}_\rho - \rho(z+2)\sin\phi\vec{a}_\phi + \rho^3\cos\phi\vec{a}_z\mu C/m^2$ | 15 |
| 1.13 | Lei de Gauss para campos magnéticos | 16 |
| 1.14 | Fluxo magnético gerado por uma linha infinita | 17 |
| 1.15 | Fluxo magnético entre dois condutores infinitos | 17 |
| 1.16 | Geometria para dedução da lei da conservação da carga | 18 |
| 1.17 | Região em que foi introduzida uma carga q_0 | 19 |
| 1.18 | Fronteira entre dois meios | 20 |
| 1.19 | Geometria para aplicação do teorema da divergência | 21 |
| 1.20 | Região no espaço onde $\vec{D} = 2\rho(z+1)\cos\phi\vec{a}_\rho - \rho(z+2)\sin\phi\vec{a}_\phi + \rho^2\cos\phi\vec{a}_z\mu C/m^2$ | 22 |
| 1.21 | Geometria para aplicação do teorema de Stokes | 23 |
| 1.22 | Condutor cilíndrico onde $\vec{H} = 4,77 \times 10^4 \left(\frac{\rho}{2} - \frac{\rho^2}{3 \times 10^{-2}}\right) \vec{a}_\phi A/m$ | 24 |
| 1.23 | Caminho fechado englobando dois meios | 31 |
| 1.24 | Geometria para a dedução da condição de fronteira - componente tangencial | 32 |
| 1.25 | Geometria para a dedução da condição de fronteira - componente normal | 34 |
| 1.26 | Três regiões no espaço | 37 |
| 1.27 | Campos elétrico e magnético dentro de uma região com fonte | 38 |
| 1.28 | Interpretação do Teorema de Poynting | 40 |
| 1.29 | Volume retangular no espaço | 41 |
| 1.30 | Espectro de Fourier discreto | 44 |
| 1.31 | Espectro de Fourier contínuo | 45 |
| 1.32 | Antena dipolo na origem do sistema de coordenadas | 49 |

Lista de Tabelas

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Classificação pela densidade de corrente | 29 |
| 1.2 | Classificação pela variação dos parâmetros constitutivos | 30 |

Capítulo 1

Equações de Maxwell

1.1 Introdução

Em geral campos elétricos e magnéticos são quantidades vetoriais que possuem *magnitude* e *. As relações e variações dos campos elétrico e magnético, cargas e correntes associadas com ondas eletromagnéticas são governadas por leis físicas, as quais são conhecidas como as *Equações de Maxwell*. Essas equações podem ser escritas na forma integral ou na forma diferencial. Qual forma utilizar para modelar e solucionar um problema dependerá da geometria do problema e do comportamento dos campos e fontes.*

1.2 Equações de Maxwell na forma integral

Descrevem as relações dos vetores campo, densidades de cargas e densidade de corrente em uma *região do espaço*, são mais gerais que as equações de Maxwell na forma diferencial, porque não exigem que os campos sejam bem comportados, isto é, sejam funções contínuas e tenham derivadas contínuas, mas só podem ser resolvidas, com certa facilidade, em problemas que possuam simetria, ex. retangular, cilíndrica, esférica, etc. São aplicadas a qualquer fenômeno eletromagnético em *escala macroscópica*, isto é, dimensões grandes se comparadas as dimensões atômicas e magnitudes de carga grandes se comparadas as cargas atômicas.

1.2.1 Lei de Faraday

A lei de Faraday Estabelece que

"A força eletromotriz (fem) total induzida num circuito fechado é igual a taxa de decréscimo, em relação ao tempo, do fluxo magnético total que enlaça o circuito."

A sua forma matemática é

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad (1.1)$$

os elementos desta equação estão definidos na figura 1.1

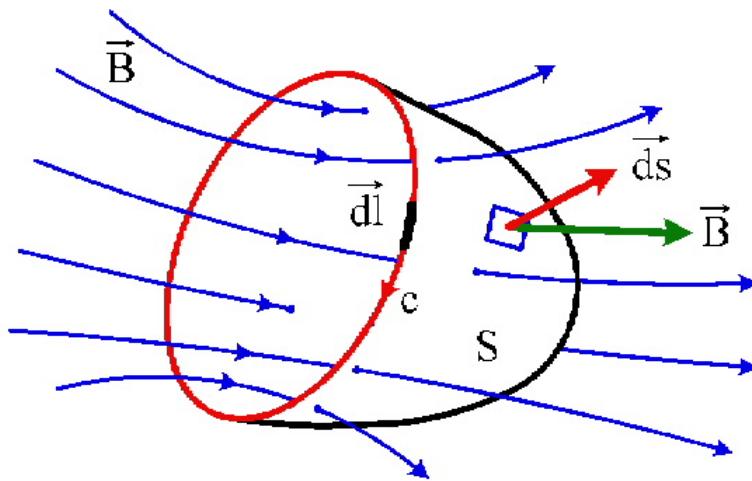


Figura 1.1: Lei de Faraday

No caso de campos estáticos , isto é, invariantes no tempo, temos $\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = 0$, o que implica que o campo \vec{E} é um campo conservativo , isto é, o trabalho realizado para deslocar uma carga elétrica num percurso fechado é nulo.

Exemplo 1.1 Um alternador básico consiste em um único laço girando em um campo magnético estático. Na figura 1.2 temos um laço condutor girando em torno do eixo y na velocidade de ω rad/s e sob um campo magnético constante na direção $+z$. Como mostrado na figura o vetor unitário normal \vec{n} ao plano do laço faz um ângulo ωt em relação a direção do campo \vec{B} . Se o fluxo magnético positivo é quando $\vec{B} \cdot \vec{n}$ é positivo e se fem positiva é como indicada na figura, a fem está aumentando quando o laço começa o seu giro. Aplicando a lei de Faraday, equação (1.1) temos

$$fem = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

como o campo \vec{B} é uniforme temos

$$\begin{aligned} fem &= -\frac{d}{dt} \vec{B} \cdot \vec{n} s = -\frac{d}{dt} [|\vec{B}| s \cos \omega t] \\ &= \omega B s \sin \omega t = V_0 \sin \omega t \text{ V}, \end{aligned}$$

sendo s é a área total do laço e V_0 é a amplitude da fem. Na figura 1.2 também temos a variação da fem com o giro do laço condutor.

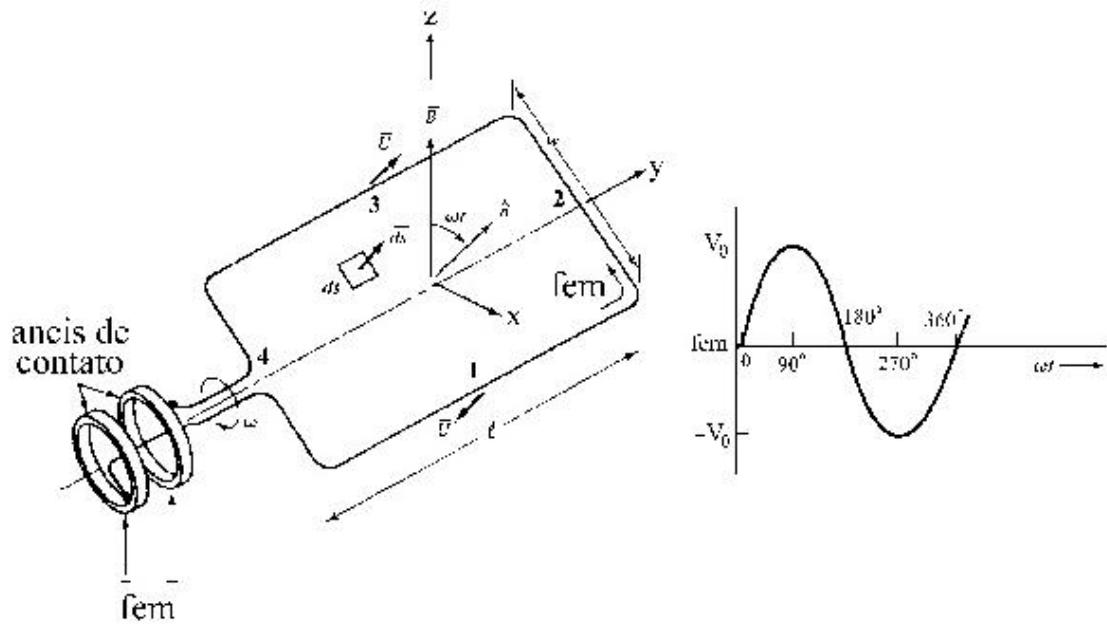


Figura 1.2: Geração de uma fem pela rotação de um laço sob um campo magnético constante

Exemplo 1.2 Determine a fem induzida no circuito da figura 1.3 sabendo que está sob a ação de um campo \vec{B} estático e que a barra condutora que fecha o circuito desliza numa velocidade \vec{v} .

Solução 1.2 O fluxo que atravessa a superfície dentro do circuito fechado pela barra condutora, em qualquer tempo t , é

$$\Phi = B y d,$$

a partir da equação (1.1) obtemos

$$\text{fem} = -\frac{d\Phi}{dt} = -B \frac{dy}{dt} d = -B v d \text{ V.}$$

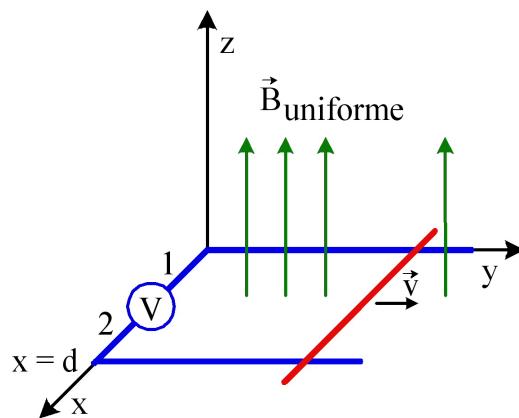


Figura 1.3: Geração de uma fem por uma barra condutora sob um campo magnético constante

1.2.2 Lei de Ampère

A lei de Ampère diz que

"A integral de linha de \vec{H} , ao longo de um único caminho fechado, força magneto-motriz, é igual a corrente envolvida pelo caminho."

A sua forma matemática é

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_s \vec{D} \cdot d\vec{S} + \int_s \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (1.2)$$

os elementos desta equação estão ilustrados na figura 1.4. O termo $\frac{d}{dt} \int_s \vec{D} \cdot d\vec{S}$ é a corrente de deslocamento, termo proposto por Maxwell para satisfazer a equação da conservação de carga, este termo implica na existência de uma onda eletromagnética.

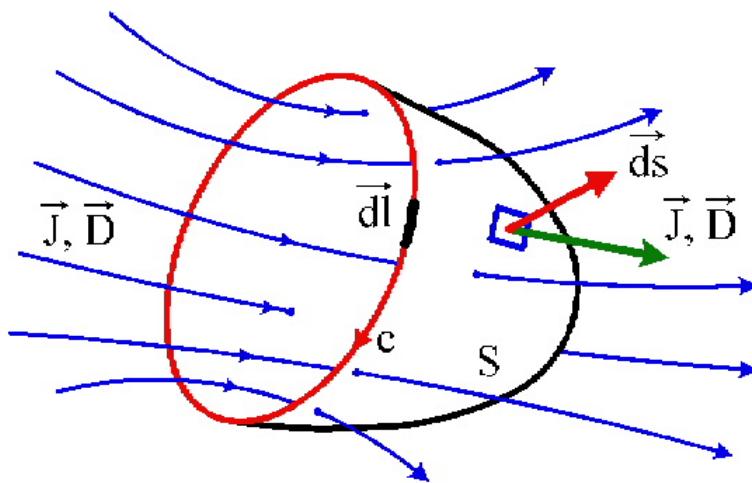


Figura 1.4: Lei de Ampère

Exemplo 1.3 Um capacitor genérico se descarrega através da sua resistência de fuga R , a partir da tensão inicial V_0 . Calcular a tensão $v(t)$, a corrente de condução i e a corrente de deslocamento i_d , sabendo que a permissividade do dielétrico vale ϵ e a condutividade σ .

Solução 1.3 Na figura 1.5 temos o capacitor genérico. A superfície gaussiana tracejada em torno do condutor com cargas positivas fornece

$$q = \int \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int \epsilon \vec{E} \cdot d\vec{S} = \int \epsilon \frac{\vec{J}}{\sigma} = \frac{\epsilon}{\sigma} \int \vec{J} \cdot d\vec{S} = \frac{\epsilon i}{\sigma},$$

onde usamos as relações constitutivas $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$, $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ que serão discutidas na seção 1.4. \vec{J} é o vetor densidade de corrente.

A corrente de deslocamento i_d e a corrente de condução i são obtidas fazendo-se

$$\begin{aligned} \frac{dq}{dt} &= \int \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \cdot d\vec{S} = \int \vec{J}_d \cdot d\vec{S} = i_d = \frac{\epsilon}{\sigma} \frac{di}{dt}, \\ i &= -\frac{dq}{dt} = -i_d = -\frac{\epsilon}{\sigma} \frac{di}{dt}. \end{aligned}$$

Resolvendo a equação diferencial para i obtemos

$$\frac{di}{i} = -\frac{\sigma}{\epsilon} dt \quad \therefore \quad \ln i = -\frac{\sigma}{\epsilon} t + cte,$$

considerando que em $t = 0$ temos uma corrente $I_0 = V_0/R$ determinamos o valor da constante, assim

$$i(t) = I_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} = \frac{V_0}{R} e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} A,$$

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{\sigma}{\epsilon} t} V.$$

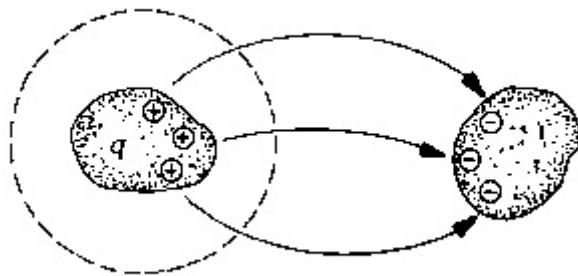


Figura 1.5: Capacitor Genérico

Nas figuras 1.6 e 1.7 temos a variação da tensão com o tempo para quatro valores de σ ($\epsilon = 20\epsilon_0$) e para quatro valores de ϵ ($\sigma = 10^{-6} S/m$), respectivamente, observamos que quando a condutividade aumenta o capacitor descarrega mais rapidamente e quando a constante dielétrica aumenta a descarga é mais lenta.

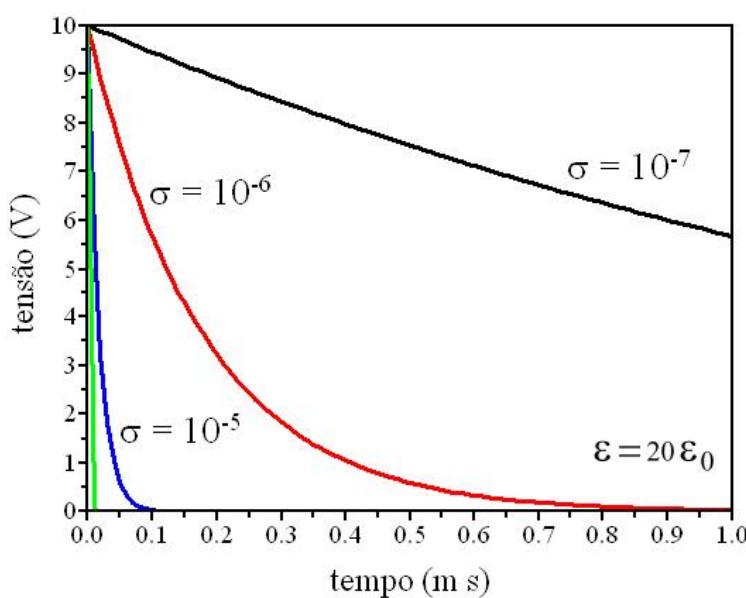
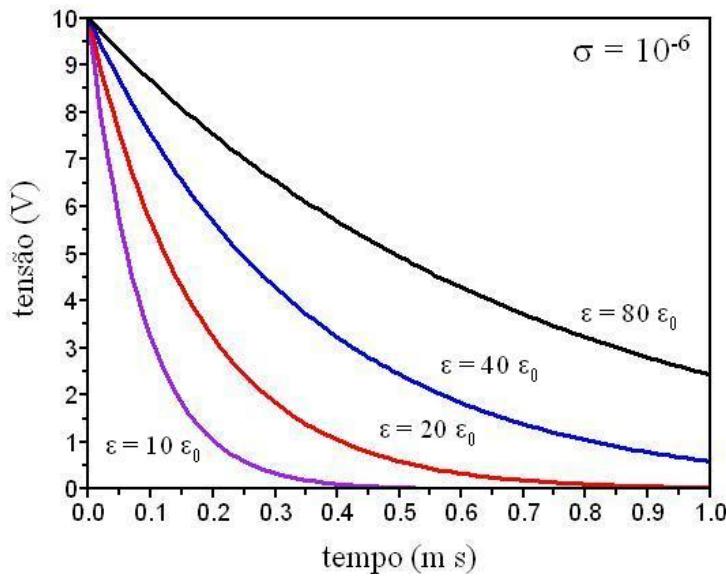


Figura 1.6: Tensão no capacitor genérico variando σ

Figura 1.7: Tensão no capacitor genérico variando ϵ

Exemplo 1.4 Uma linha de transmissão coaxial infinitamente longa é formada por dois cilindros concêntricos cujos eixos estão ao longo do eixo z . Na figura 1.8 temos a linha e a sua seção reta. O condutor interno tem raio a e é percorrido por uma corrente $I A$ e o condutor externo tem raio b e é percorrido por uma corrente $-I A$. Considerando que as correntes são uniformes determine o campo magnético \vec{H} em todas as regiões.

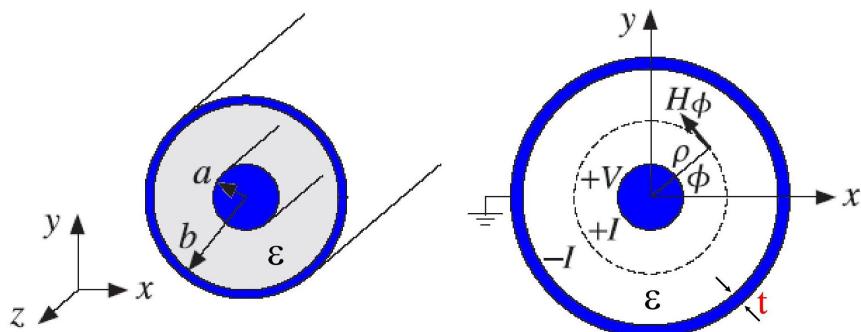


Figura 1.8: Linha de transmissão coaxial

Solução 1.4 Assumimos que a distribuição de corrente está uniformemente distribuída nos condutores. Aplicaremos a lei de Ampère ao longo de um caminho amperiano, que é uma circunferência em torno do eixo z , nas quatro regiões: interna ao condutor de raio a , $0 \leq \rho \leq a$; entre os condutores, $a \leq \rho \leq b$; interna ao condutor de raio b , $b \leq \rho \leq b + t$ e externa a linha, $\rho \geq b$. Na região $0 \leq \rho \leq a$ aplicamos a lei de Ampère na circunferência de raio ρ , temos então

$$\oint_c \vec{H} \cdot d\vec{l} = I_{env},$$

I_{env} é a corrente envolvida pelo caminho. Como a corrente está uniformemente distribuída sobre a seção reta temos que a densidade de corrente \vec{J} é igual a

$$\vec{J} = \frac{I}{\pi a^2} \vec{a}_z \text{ A/m}^2,$$

os elementos diferenciais de comprimento e área são dados, respectivamente, por

$$d\vec{l} = \rho d\phi \vec{a}_\phi \quad \text{e} \quad d\vec{s} = \rho d\phi d\rho \vec{a}_z,$$

foi obedecida a regra da mão direita na orientação de $d\vec{s}$ em relação a $d\vec{l}$. O campo magnético só possui a componente H_ϕ e é função da coordenada ρ . Com estas considerações e substituindo os elementos definidos anteriormente na equação da lei de Ampère, obtemos

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} H_\phi \vec{a}_\phi \cdot \rho d\phi \vec{a}_\phi &= \int_0^\rho \int_0^{2\pi} \frac{I}{\pi a^2} \vec{a}_z \cdot \rho d\phi d\rho \vec{a}_z, \\ H_\phi &= \frac{I \rho}{2 \pi a^2}. \end{aligned}$$

Na região $a \leq \rho \leq b$ o caminho amperiano envolve toda a corrente I , assim

$$\begin{aligned} H_\phi 2\pi \rho &= I, \\ H_\phi &= \frac{I}{2\pi\rho}. \end{aligned}$$

Na região $b \leq \rho \leq b+t$ a corrente envolvida I_{env} é dada por

$$I_{env} = I + \int \vec{J}_b \cdot d\vec{s},$$

\vec{J}_b é a densidade de corrente no condutor externo, definida por

$$\vec{J}_b = -\frac{I}{\pi [(b+t)^2 - b^2]} \vec{a}_z,$$

calculando a I_{env} obtemos

$$\begin{aligned} I_{env} &= I - \frac{I}{\pi [(b+t)^2 - b^2]} \int_o^{2\pi} \int_b^\rho \rho d\rho d\phi, \\ &= I \left[1 - \frac{\rho^2 - b^2}{t^2 + 2bt} \right], \end{aligned}$$

e o campo magnético é

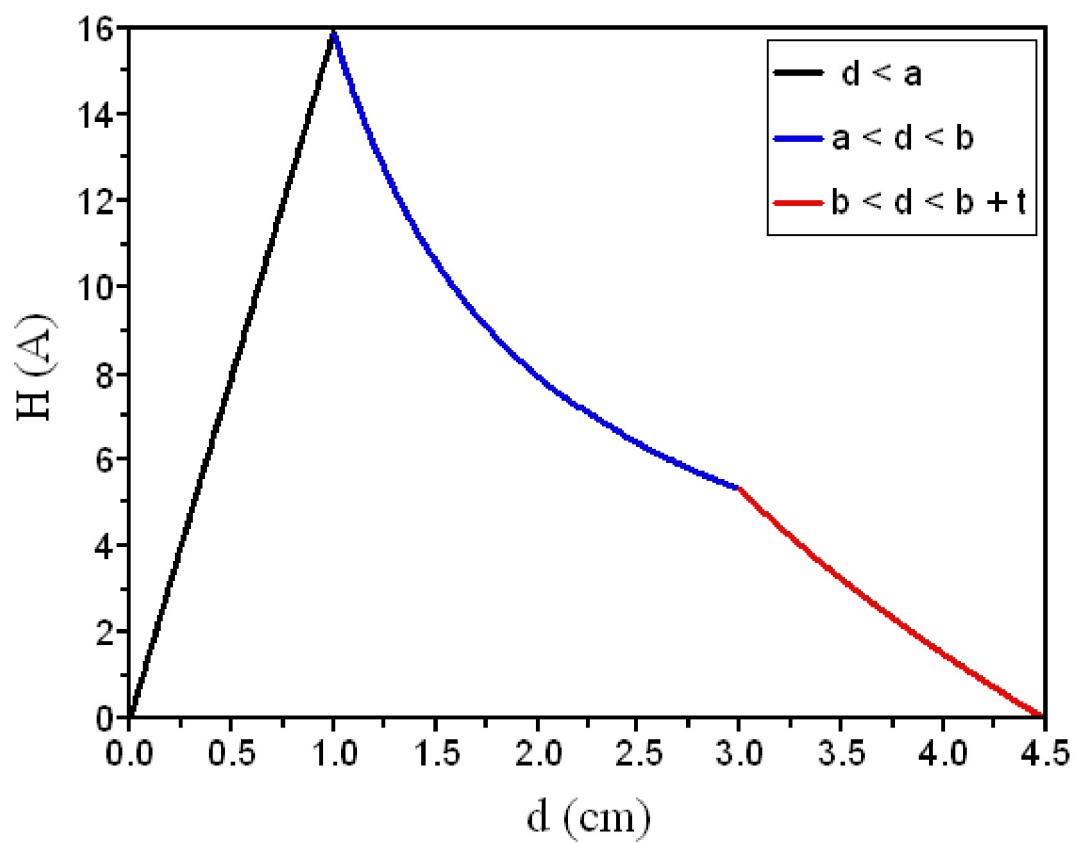
$$H_\phi = \frac{I}{2\pi\rho} \left[1 - \frac{\rho^2 - b^2}{t^2 + 2bt} \right]$$

Na região $\rho \geq b+t$ a corrente envolvida pelo caminho amperiano é nula, assim, o campo magnético na região externa é nulo.

Do exposto anteriormente o campo magnético é dado por

$$\vec{H} = \begin{cases} \frac{I\rho}{2\pi a^2} \vec{a}_\phi \text{ A/m}, & 0 \leq \rho \leq a \\ \frac{I}{2\pi\rho} \vec{a}_\phi \text{ A/m}, & a \leq \rho \leq b \\ \frac{I}{2\pi\rho} \left[1 - \frac{\rho^2 - b^2}{t^2 + 2bt} \right] \vec{a}_\phi \text{ A/m}, & b \leq \rho \leq b+t \\ 0 \text{ A/m}, & \rho \geq b+t. \end{cases}$$

Na figura 1.9 temos o campo H_ϕ em função da distância d da linha para os parâmetros $a = 1\text{ cm}$, $b = 3\text{ cm}$, $t = 1,5\text{ cm}$ e $I = 1\text{ A}$.

Figura 1.9: Campo H_ϕ de uma linha de transmissão coaxial

1.2.3 Lei de Gauss para campos elétricos

O enunciado da lei de Gauss para campos elétricos é

"A integral de superfície da componente normal da densidade de fluxo elétrico \vec{D} , sobre qualquer superfície fechada, é igual à carga englobada por esta superfície."

A forma matemática para esta proposição, contribuição do matemático Gauss, é

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_v \rho dv, \quad (1.3)$$

na figura 1.10 temos a geometria considerada.

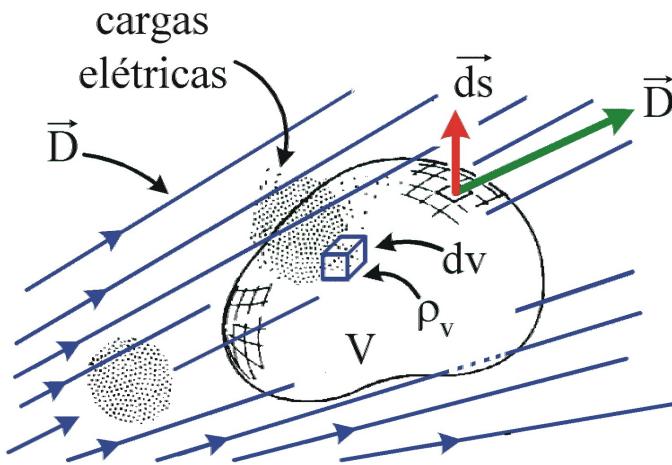


Figura 1.10: Lei de Gauss para campos elétricos

Exemplo 1.5 Uma nuvem esférica de raio a possui uma distribuição de carga dada por $\rho_v = \rho_0 (r/a)^{3/2} C/m^3$, ρ_0 é uma constante. Calcular a distribuição de campo elétrico em todo o espaço, justificando o comportamento do campo elétrico.

Solução 1.5 Podemos aplicar a lei de Gauss para resolver este problema porque a distribuição de cargas possui simetria esférica, assim, a superfície gaussiana é uma superfície esférica de raio r e o campo só possui componente \vec{a}_r . Como a fonte (distribuição de cargas) é uma função da coordenada r o campo elétrico também só será função desta coordenada. Do exposto temos

$$\begin{aligned} \vec{D} &= D_r \vec{a}_r, \quad D_r = f(r) \\ d\vec{S} &= r^2 \sin \theta d\theta d\phi \vec{a}_r \\ \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} &= D_r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin \theta d\theta d\phi = D_r 4\pi r^2 \end{aligned}$$

para $r \leq a$ (região interna)

$$\begin{aligned} \int_v \rho_v dv &= \int_0^r \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_0 (r/a)^{3/2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr = \frac{8\pi}{9} \frac{r^{9/2}}{a^{3/2}} \rho_0 \\ D_r &= \frac{2}{9} \rho_0 \sqrt{\frac{r^5}{a^3}} \\ \vec{E} &= \frac{2}{9\epsilon_0} \rho_0 \sqrt{\frac{r^5}{a^3}} \vec{a}_r V/m, \end{aligned}$$

para $r > a$ (região externa)

$$\begin{aligned} \text{a carga total é } \int_v \rho_v dv &= \int_0^a \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \rho_0 (r/a)^{3/2} r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr \\ &= \frac{8\pi}{9} \frac{a^{9/2}}{a^{3/2}} \rho_0 = \frac{8\pi}{9} \rho_0 a^3 C \end{aligned}$$

assim,

$$\begin{aligned} D_r 4\pi r^2 &= \frac{8\pi}{9} \rho_0 a^3 \rightarrow D_r = \frac{2}{9} \rho_0 \frac{a^3}{r^2} \\ \vec{E} &= \frac{2}{9\epsilon_0} \rho_0 \frac{a^3}{r^2} \vec{a}_r V/m. \end{aligned}$$

Na figura 1.11 temos o gráfico do módulo do campo \vec{E} para $2\rho_0/(9\epsilon_0) = 10$ e $a = 1$. A intensidade do campo aumenta dentro da nuvem porque quando aumentamos r envolvemos uma maior quantidade de carga, a partir de $r = a$ a quantidade de carga é a mesma e o campo decresce com o quadrado da distância r .

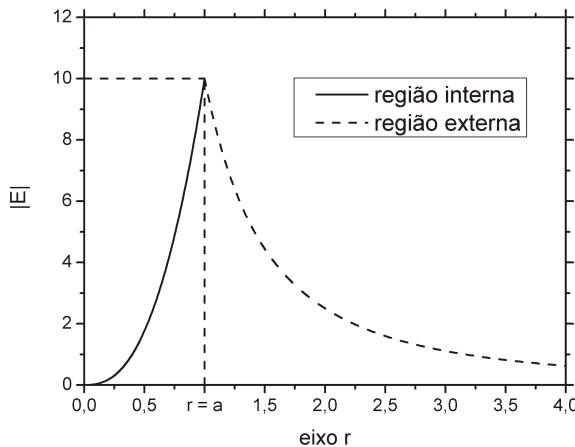


Figura 1.11: Campo Elétrico gerado por uma distribuição de carga

Exemplo 1.6 Na região definida por $0 < \rho < 3\text{ m}$, $0 < \phi < \pi/2$ e $0 < z < 4\text{ m}$ temos o campo $\vec{D} = 3\rho(z+2)\cos\phi\vec{a}_\rho - \rho(z+2)\sin\phi\vec{a}_\phi + \rho^3\cos\phi\vec{a}_z \mu\text{C}/\text{m}^2$. Determine a carga elétrica dentro desta região.

Solução 1.6 Calculando o lado esquerdo da equação 1.3, que representa o fluxo elétrico pela superfície fechada, obteremos a carga elétrica líquida na região. Na figura 1.12 temos a região e a superfície que a limita, com os fluxos elétricos assinalados. Expandindo o lado esquerdo da equação 1.3 obtemos

$$\Psi = \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 + \Psi_5,$$

os fluxos elétricos por cada parte da superfície são dados por:

- região 1 - $d\vec{s}_1 = \rho d\phi dz \vec{a}_\rho$

$$\Psi_1 = \int_0^{z=4} \int_0^{\phi=\pi/2} \vec{D} \cdot d\vec{s}_1 = \int_0^{z=4} \int_0^{\phi=\pi/2} 3(\rho=3)^2(z+2)\cos\phi d\phi dz = 432 \mu\text{C};$$

- região 2 - $\vec{ds}_2 = d\rho dz (-\vec{a}_x)$

$$\begin{aligned}\Psi_2 &= \int_0^{\rho=3} \int_0^{z=4} \vec{D} \cdot \vec{ds}_2 = \int_0^{\rho=3} \int_0^{z=4} [-3\rho(z+2) \cos^2 \phi + \rho(z+2) \sin^2 \phi]_{|\phi=\pi/2} d\rho dz \\ &= \left[\frac{\rho^2}{2} \right]_0^3 \left[\frac{z^2}{2} + 2z \right]_0^4 = -72 \mu C;\end{aligned}$$

- região 3 - $\vec{ds}_3 = \rho d\rho d\phi \vec{a}_z$

$$\begin{aligned}\Psi_3 &= \int_0^{\rho=3} \int_0^{\phi=\pi/2} \vec{D} \cdot \vec{ds}_3 = \int_0^{\rho=3} \int_0^{\phi=\pi/2} \rho^3 \cos \phi \rho d\rho d\phi \\ &= \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^3 [\sin \phi]_0^{\pi/2} = \frac{243}{5} \mu C;\end{aligned}$$

- região 4 - $\vec{ds}_4 = d\rho dz (-\vec{a}_y)$

$$\begin{aligned}\Psi_4 &= \int_0^{\rho=3} \int_0^{z=4} \vec{D} \cdot \vec{ds}_2 \\ &= \int_0^{\rho=3} \int_0^{z=4} [-3\rho(z+2) \cos \phi \sin \phi + \rho(z+2) \sin \phi \cos \phi]_{|\phi=0} d\rho dz = 0;\end{aligned}$$

- região 5 - $\vec{ds}_5 = \rho d\rho d\phi (-\vec{a}_z)$

$$\begin{aligned}\Psi_5 &= \int_0^{\rho=3} \int_0^{\phi=\pi/2} \vec{D} \cdot \vec{ds}_3 = \int_0^{\rho=3} \int_0^{\phi=\pi/2} -\rho^3 \cos \phi \rho d\rho d\phi \\ &= \left[\frac{\rho^5}{5} \right]_0^3 [\sin \phi]_0^{\pi/2} = -\frac{243}{5} \mu C.\end{aligned}$$

A carga elétrica líquida dentro da região será $q = \Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \Psi_3 + \Psi_4 + \Psi_5 = 360 \mu C$.

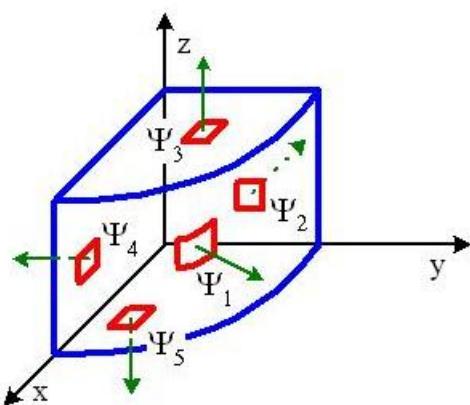


Figura 1.12: Região no espaço onde $\vec{D} = 3\rho(z+1) \cos \phi \vec{a}_\rho - \rho(z+2) \sin \phi \vec{a}_\phi + \rho^3 \cos \phi \vec{a}_z \mu C/m^2$

1.2.4 Lei de Gauss para campos magnéticos

Estabelece que o fluxo magnético líquido (positivo ou negativo) que emana de qualquer superfície fechada s , no espaço, é sempre zero, isto é, o fluxo magnético não tem fonte, as linhas do campo \vec{B} não podem ter início ou fim, figura 1.13, na forma matemática temos

$$\oint_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = 0, \quad (1.4)$$

o que implica que, até agora, não foi observado a existência de fonte (cargas ou corrente magnética) de campo magnético.

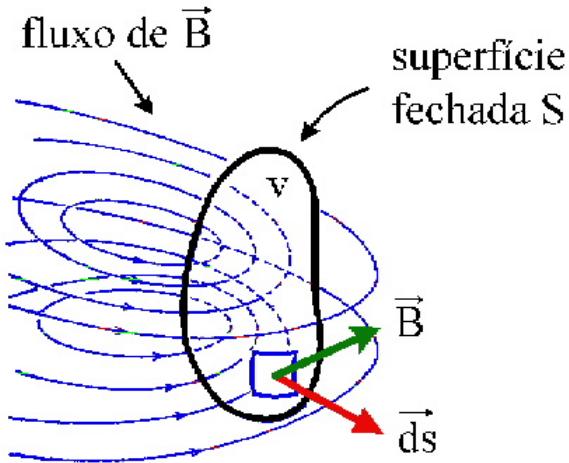


Figura 1.13: Lei de Gauss para campos magnéticos

Exemplo 1.7 Para o campo magnético $\vec{H} = 10^3 \vec{a}_\phi \text{ A/m}$ gerado por uma linha infinita de corrente posicionada no eixo z , encontre o fluxo magnético que passa através da superfície plana definida por $s : (2 \leq y \leq 4 \text{ m}), (-2 \leq z \leq 2)$.

Solução 1.7 Na figura 1.14 temos a linha infinita e a superfície plana. O fluxo magnético é obtido pela integração do vetor densidade de fluxo magnético \vec{B} na área assinalada, usando a relação constitutiva $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$, que será discutida na seção 1.4, encontramos

$$\begin{aligned} \Phi_s &= \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S}, \quad d\vec{S} = dy dz (-\vec{a}_x) \text{ e } \vec{B} = 10^3 \mu_0 (-\vec{a}_x) \\ &= \int_{-2}^2 \int_2^4 \mu_0 10^3 dy dz = 8 \times 10^3 \mu_0 \text{ Wb.} \end{aligned}$$

Exemplo 1.8 Dois condutores infinitos, de seção transversal circular com 2 mm de raio tem seus eixos localizados no plano $x = 0$ nas coordenadas $y = -2 \text{ cm}$ e $y = 2 \text{ cm}$, nestes condutores flui uma corrente uniformemente distribuída de $5 \vec{a}_z \text{ A}$ e $-5 \vec{a}_z \text{ A}$, respectivamente. Determine o fluxo magnético total por unidade de comprimento passando entre os condutores.

Solução 1.8 Na figura 1.15 temos os dois condutores infinitos. O fluxo magnético total é obtido pela integração do vetor densidade de fluxo magnético \vec{B} na região entre os condutores. Uma linha infinita no eixo z gera um campo magnético $\vec{H} = \frac{I}{2\pi\rho} \vec{a}_\phi \text{ A/m}$, com a corrente na direção \vec{a}_z , assim cada condutor gera, na região entre eles, os seguintes campos magnéticos

$$\vec{H}_1 = \frac{-5}{2\pi(0,02+y)} \vec{a}_x, \quad \vec{H}_2 = \frac{-5}{2\pi(0,02-y)} \vec{a}_x,$$

a coordenada y é em relação a origem do sistema de coordenadas. Como $\vec{B} = \mu_0 \vec{H}$ temos que o fluxo magnético total é dado por

$$\begin{aligned}\phi &= \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S} = \int_{z=-l/2}^{z=l/2} \int_{-0.018}^{0.018} 4\pi \times 10^{-7} \left(\frac{-5 \vec{a}_x}{2\pi(0,02+y)} + \frac{-5 \vec{a}_x}{2\pi(0,02-y)} \right) \cdot dy dz (-\vec{a}_x) \\ &= l \int_{-0.018}^{0.018} 10^{-6} \left(\frac{5}{0,02+y} + \frac{5}{0,02-y} \right) dy \\ &= l 10^{-6} \left[\ln(0,02+y) \right]_{-0.018}^{0.018} - \left[\ln(0,02-y) \right]_{-0.018}^{0.018} = l 10^{-6} (\ln 19 - \ln 1/19) \\ \phi &= 5,89 \mu Wb/m,\end{aligned}$$

onde dividimos por l para obtermos o fluxo total por metro.

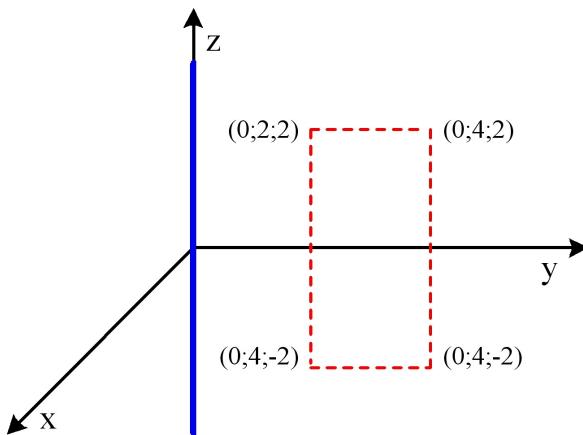


Figura 1.14: Fluxo magnético gerado por uma linha infinita

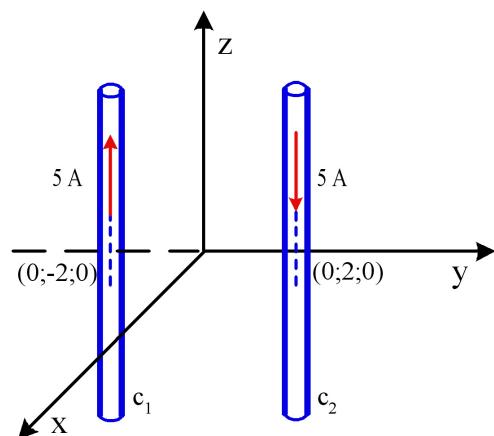


Figura 1.15: Fluxo magnético entre dois condutores infinitos

1.2.5 Lei da conservação da carga elétrica

A lei da conservação da carga elétrica estabelece que

"A corrente líquida devida ao fluxo de cargas emanando de uma superfície fechada s , é igual a taxa de decréscimo, em relação ao tempo, da carga dentro do volume v limitado por s ."

ou

"A carga elétrica total num sistema isolado, isto é, a soma algébrica das cargas positivas e negativas, em qualquer instante, é constante."

Vamos deduzir a sua forma matemática, a partir das equações de Maxwell, com a ressalva que ela foi estabelecida independentemente e que foi para satisfazê-la que Maxwell introduziu o termo da corrente de deslocamento.

Consideremos dois caminhos fechados, c_1 e c_2 , tocando-se e limitando as superfícies s_1 e s_2 , que juntas formam uma superfície fechada s , como mostrado na figura 1.16.

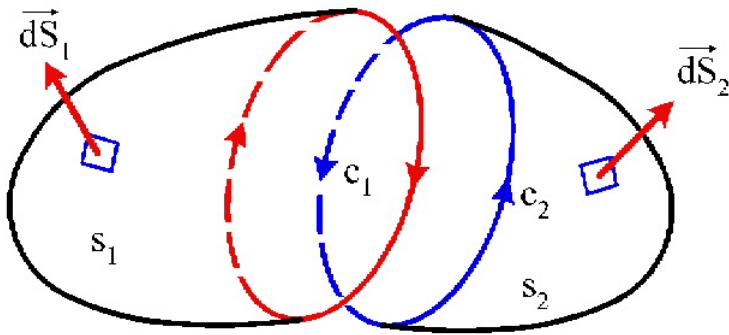


Figura 1.16: Geometria para dedução da lei da conservação da carga

Aplicando a lei de Ampère, equação (1.2) a c_1 e s_1 obtemos

$$\oint_{c_1} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_{s_1} \vec{D} \cdot d\vec{S}_1 + \int_{s_1} \vec{J} \cdot d\vec{S}_1, \quad (1.5)$$

similarmente para c_2 e s_2 temos

$$\oint_{c_2} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \frac{d}{dt} \int_{s_2} \vec{D} \cdot d\vec{S}_2 + \int_{s_2} \vec{J} \cdot d\vec{S}_2, \quad (1.6)$$

Somando-se as equações (1.5) e (1.6), levando em conta os sentidos de integração de c_1 e c_2 encontramos

$$0 = \frac{d}{dt} \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} + \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S},$$

o que leva a

$$\frac{d}{dt} \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{S} = - \oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S}, \quad (1.7)$$

usando a lei de Gauss, equação (1.3), na equação (1.7) obtemos a forma matemática da lei da conservação da carga, dada por

$$\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = - \frac{d}{dt} \int_v \rho dv, \quad (1.8)$$

A integral do vetor densidade de corrente \vec{J} pela superfície fechada s , lado esquerdo da equação 1.8, é igual a corrente pela superfície s e a integral de volume da distribuição de carga ρ , lado direito da equação 1.8, é igual a carga líquida no volume, assim a equação 1.8 torna-se

$$I = -\frac{dq}{dt}, \quad (1.9)$$

que é a expressão matemática da primeira definição da lei de conservação da carga.

Exemplo 1.9 Uma certa quantidade de carga $q_0 C$ é colocada dentro de uma região condutora, figura 1.17. Determine a expressão de variação da carga no ponto em que foi posicionada. A região possui condutividade σ e permissividade dielétrica ε .

Solução 1.9 Das equações 1.8 e 1.9 temos

$$\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = -\frac{dq}{dt},$$

agora usamos as relações constitutivas $\vec{J} = \sigma \vec{E}$ e $\vec{D} = \varepsilon \vec{E}$, que serão discutidas na seção 1.4, para obter

$$\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = \oint_s \sigma \vec{E} \cdot d\vec{S} = \oint_s \sigma \frac{\vec{D}}{\varepsilon} \cdot d\vec{S} = \frac{\sigma}{\varepsilon} \oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \frac{\sigma}{\varepsilon} q,$$

substituindo na equação anterior temos a seguinte equação diferencial

$$\frac{dq}{dt} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} q \rightarrow \frac{dq}{q} = -\frac{\sigma}{\varepsilon} dt \rightarrow \ln q = -\frac{\sigma}{\varepsilon} t + k,$$

em $t = 0$ temos a carga q_0 , assim a constante de integração é $k = \ln q_0$ e obtemos

$$q = q_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t} C,$$

a razão ε/σ é denominada de constante de tempo de relaxação, neste tempo a carga cai a $1/e$ do seu valor inicial, aproximadamente 36,78%.

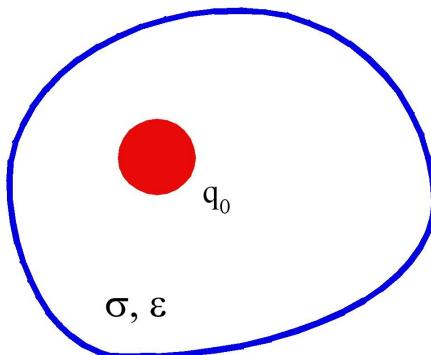


Figura 1.17: Região em que foi introduzida uma carga q_0

1.3 Equações de Maxwell na forma diferencial

Descrevem as relações dos vetores campo, densidades de carga e densidades de corrente em um ponto no espaço e num instante de tempo, são mais usadas para resolver problemas eletromagnéticos com condições de fronteira. Para serem válidas é assumido que os vetores campo são funções contínuas, limitadas, de valor único da posição e tempo, com derivadas contínuas. Os vetores campo associados com ondas eletromagnéticas possuem estas características.

Quando existem interfaces, isto é, transição entre meios, figura 1.18, as equações de Maxwell diferenciais não são válidas porque os campos serão descontínuos e distribuições descontínuas de cargas e corrente podem ocorrer. Neste caso há necessidade das *condições de fronteira* para relacionar os campos $(\vec{E}_1, \vec{H}_1, \vec{D}_1, \vec{B}_1) \leftrightarrow (\vec{E}_2, \vec{H}_2, \vec{D}_2, \vec{B}_2)$, estas condições são deduzidas aplicando-se as equações de Maxwell na forma integral, serão discutidas na seção 1.5.

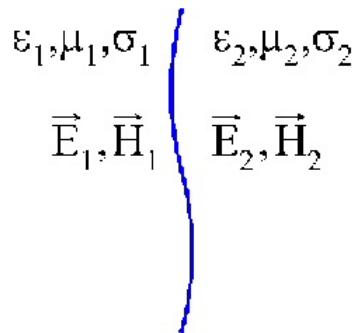


Figura 1.18: Fronteira entre dois meios

Para se obter as equações diferenciais de Maxwell, a partir das equações integrais de Maxwell que são mais gerais, dois teoremas são necessários:

- teorema da divergência
- teorema de Stokes

1.3.1 Teorema da Divergência

O teorema da divergência estabelece que, se v é um volume limitado por uma superfície s , e se \vec{V} é um campo vetorial com derivadas parciais contínuas na região definida pela superfície s , então

"A integral da componente normal de qualquer campo vetorial, sobre uma superfície fechada, é igual à integral da divergência desse campo através do volume envolvido pela superfície fechada."

na forma matemática temos

$$\oint_s \vec{V} \cdot d\vec{s} = \int_v \nabla \cdot \vec{V} dv. \quad (1.10)$$

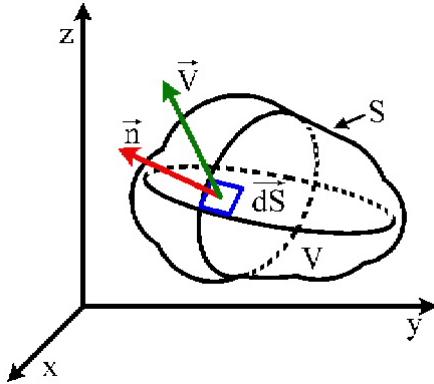


Figura 1.19: Geometria para aplicação do teorema da divergência

Exemplo 1.10 Na região definida por $0 < \rho < 2m$, $0 < \phi < \pi/2$ e $0 < z < 4m$, $\vec{D} = 2\rho(z+1) \cos \phi \vec{a}_\rho - \rho(z+1) \sin \phi \vec{a}_\phi + \rho^2 \cos \phi \vec{a}_z \mu C/m^2$. Calcule ambos os lados do teorema da divergência nesta região.

Solução 1.10 Na figura 1.20 temos a região de interesse. Começamos calculando o divergente do vetor densidade de fluxo elétrico, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \vec{D} &= \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho D_\rho) + \frac{1}{\rho} \frac{\partial D_\phi}{\partial \phi} + \frac{\partial D_z}{\partial z} \\ &= 4(z+1) \cos \phi - (z+1) \cos \phi + 0 = 3(z+1) \cos \phi \mu C/m^3, \end{aligned}$$

substituindo no lado direito da equação 1.10 obtemos

$$\begin{aligned} \int_v \nabla \cdot \vec{D} dv &= \int_0^2 \int_0^4 \int_0^{\pi/2} 3(z+1) \cos \phi 10^{-6} \rho d\phi d\rho dz = 3 \frac{\rho^2}{2} \Big|_0^4 \left(\frac{z^2}{2} + z \right)_0^4 \sin \phi \Big|_0^{\pi/2} 10^{-6} \\ &= 6(8+4)(1-0) 10^{-6} = 72 \mu C. \end{aligned}$$

Para avaliar o lado esquerdo da equação 1.10 assinalamos todas as superfícies que limitam a região, figura 1.20, obtemos então

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = \int_{s_1} \vec{D}_1 \cdot d\vec{s}_1 + \int_{s_2} \vec{D}_2 \cdot d\vec{s}_2 + \int_{s_3} \vec{D}_3 \cdot d\vec{s}_3 + \int_{s_4} \vec{D}_4 \cdot d\vec{s}_4 + \int_{s_5} \vec{D}_5 \cdot d\vec{s}_5,$$

avaliando cada integral obtemos

- região 1 - $\vec{ds}_1 = \rho d\phi dz \vec{a}_\rho$

$$R_1 = \int_0^{z=4} \int_0^{\phi=\pi/2} 2(\rho=2)^2(z+1) \cos \phi d\phi dz = 8 \left(\frac{z^2}{2} + z \right)_0^4 (\sin \phi)_0^{\pi/2} = 96 \mu C;$$

- região 2 - $\vec{ds}_2 = \rho d\phi d\rho (-\vec{a}_z)$

$$R_2 = - \int_0^{\rho=2} \int_0^{\phi=\pi/2} \rho^3 \cos \phi d\phi d\rho = - \left(\frac{\rho^4}{4} \right)_0^2 (\sin \phi)_0^{\pi/2} = -4 \mu C;$$

- região 3 - $\vec{ds}_3 = \rho d\phi d\rho \vec{a}_z$

$$R_3 = \int_0^{\rho=3} \int_0^{\phi=\pi/2} \rho^3 \cos \phi d\phi d\rho = \left(\frac{\rho^4}{4} \right)_0^2 (\sin \phi)_0^{\pi/2} = 4 \mu C;$$

- região 4 - $\vec{ds}_4 = d\rho dz (-\vec{a}_x)$

$$R_4 = - \int_0^{\rho=2} \int_0^{z=4} \rho(z+1) \sin^2(\pi/2) 10^{-6} d\rho dz = -\frac{\rho^2}{2} \Big|_0^2 \left(\frac{z^2}{2} + z \right)_0^4 = -24 \mu C;$$

- região 5 - $\vec{ds}_5 = d\rho dz (-\vec{a}_y)$

$$R_5 = \int_0^{\rho=2} \int_0^{z=4} \rho(z+1) \sin(\phi = 0^\circ) d\rho dz = 0,$$

somando a contribuição de cada região obtemos

$$\oint_s \vec{D} \cdot d\vec{s} = 96 \mu - 4 \mu + 4 \mu - 24 \mu + 0 = 72 \mu C,$$

igual, como esperado, ao valor do lado direito da equação 1.10.

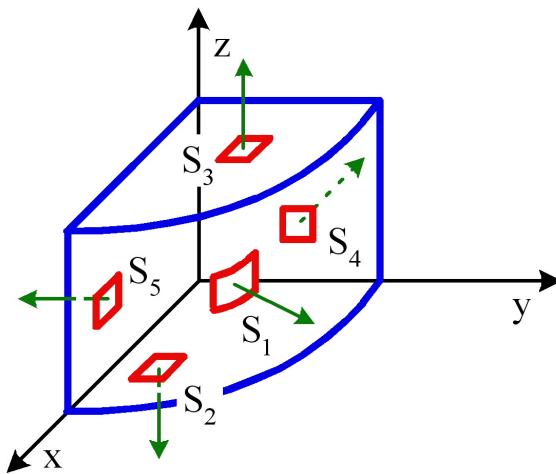


Figura 1.20: Região no espaço onde $\vec{D} = 2\rho(z+1)\cos\phi\vec{a}_\rho - \rho(z+2)\sin\phi\vec{a}_\phi + \rho^2\cos\phi\vec{a}_z \mu C/m^2$

1.3.2 Teorema de Stokes

O teorema de Stokes estabelece que

"A integral da componente tangente de qualquer campo vetorial, sobre uma linha fechada, é igual à integral da componente normal do rotacional do campo vetorial sobre a superfície." na forma matemática temos

$$\oint_c \vec{V} \cdot d\vec{l} = \int_s (\nabla \times \vec{V}) \cdot \vec{ds}. \quad (1.11)$$

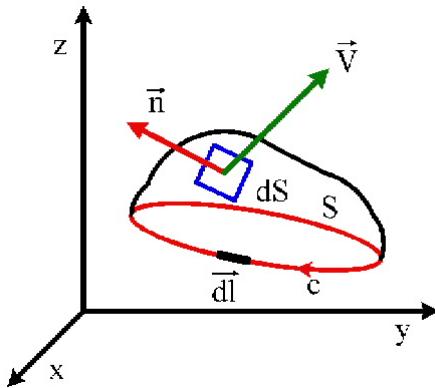


Figura 1.21: Geometria para aplicação do teorema de Stokes

Exemplo 1.11 Um condutor cilíndrico com $10^{-2}m$ de raio possui um campo magnético interno dado por $\vec{H} = 4,77 \times 10^4 \left(\frac{\rho}{2} - \frac{\rho^2}{3 \times 10^{-2}} \right) \vec{a}_\phi A/m$. Calcule ambos os lados do teorema da Stokes nesta região.

Solução 1.11 Na figura 1.22 temos a região de interesse. Começamos calculando o rotacional do campo magnético, obtemos

$$\nabla \times \vec{H} = \frac{1}{\rho} \left[\frac{\partial(\rho H_\phi)}{\partial \rho} \right] \vec{a}_z = \frac{1}{\rho} (4,77 \times 10^4) \left[\rho - \frac{\rho^2}{10^{-2}} \right] \vec{a}_z = 4,77 \times 10^4 \left[1 - \frac{\rho}{10^{-2}} \right] \vec{a}_z,$$

usando este resultado para avaliar o lado direito da equação 1.11, na seção transversa do condutor ($0 < \rho < 10^{-2}, 0 < \pi < 2\pi$), encontramos

$$\int_0^{10^{-2}} \int_0^{2\pi} 4,77 \times 10^4 \left[1 - \frac{\rho}{10^{-2}} \right] \vec{a}_z \cdot \rho d\phi d\rho \vec{a}_z = 4,77 \times 10^4 (2\pi) \left[\frac{\rho^2}{2} - \frac{\rho^3}{3 \times 10^{-2}} \right]_0^{10^{-2}} \approx 5 A.$$

Para avaliar o lado esquerdo da equação 1.11 escolhemos o percurso que envolve todo o condutor ($\rho = 10^{-2}, 0 < \pi < 2\pi$), figura 1.22, obtemos então

$$\int_0^{2\pi} 4,77 \times 10^4 \left(\frac{\rho}{2} - \frac{\rho^2}{3 \times 10^{-2}} \right) \vec{a}_\phi \cdot \rho d\phi \vec{a}_\phi = 4,77 \times 10^4 (2\pi) 10^{-2} \left(\frac{10^{-2}}{2} - \frac{10^{-4}}{3 \times 10^{-2}} \right) \approx 5 A.$$

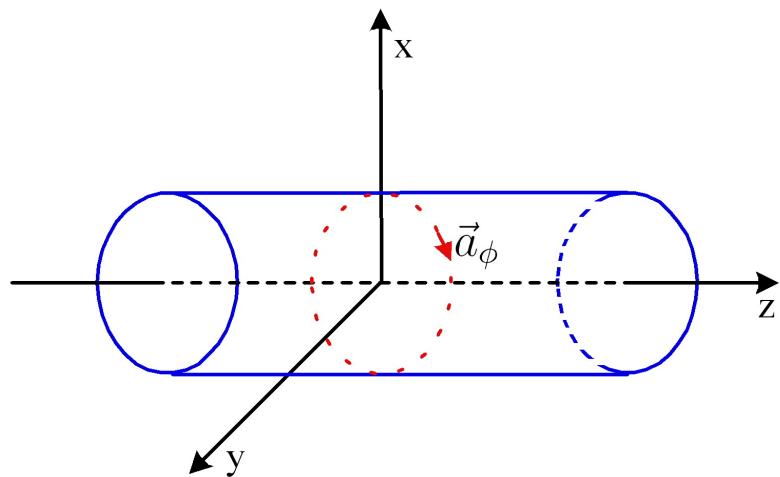


Figura 1.22: Condutor cilíndrico onde $\vec{H} = 4,77 \times 10^4 \left(\frac{\rho}{2} - \frac{\rho^2}{3 \times 10^{-2}} \right) \vec{a}_\phi A/m$

1.3.3 Lei de Faraday

Aplicando o teorema de Stokes, equação (1.11), na equação (1.1), obtemos

$$\oint_c \vec{E} \cdot d\vec{l} = \int_s (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = -\frac{d}{dt} \int_s \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

considerando que a superfície s não varia com o tempo, podemos levar a derivada para dentro da integral, tornando-a derivada parcial, assim temos

$$\int_s (\nabla \times \vec{E}) \cdot d\vec{S} = - \int_s \frac{\partial}{\partial t} \vec{B} \cdot d\vec{S},$$

o que leva a

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}. \quad (1.12)$$

Exemplo 1.12 Numa região do espaço temos um campo elétrico variante no tempo dado por $\vec{E} = 10 \cos(\omega t - 100 z) \vec{a}_x \text{ V/m}$, determine o vetor densidade de fluxo magnético \vec{B} associado com este campo elétrico.

Solução 1.12 O campo \vec{B} é obtido usando-se a equação 1.12, observando que o campo elétrico só tem a componente \vec{a}_x , o lado esquerdo da equação 1.12 torna-se

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{E} &= \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z \\ &= \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{a}_y - \underbrace{\frac{\partial E_x}{\partial y}}_0 \vec{a}_z = \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{a}_y, \end{aligned}$$

porque a componente x do campo \vec{E} só depende da coordenada z , substituindo a componente E_x , obtemos

$$\nabla \times \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial z} \vec{a}_y = 1000 \sin(\omega t - 100 z) \vec{a}_y,$$

integrando em relação ao tempo e observando que se o lado esquerdo da equação 1.12 só possui a componente y o lado direito também só possui esta componente, obtemos

$$1000 \sin(\omega t - 100 z) = -\frac{\partial B_y}{\partial t} \rightarrow B_y = \frac{1000}{\omega} \cos(\omega t - 100 z),$$

assim o campo \vec{B} associado com o campo elétrico $\vec{E} = 10 \cos(\omega t - 100 z) \vec{a}_x \text{ V/m}$ é

$$\vec{B} = \frac{1000}{\omega} \cos(\omega t - 100 z) \vec{a}_y \text{ Wb/m}^2.$$

1.3.4 Lei de Ampère

Aplicando o teorema de Stokes, equação (1.11), na equação (1.2) e fazendo as mesmas considerações feitas para se obter a equação (1.12), encontramos

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1.13)$$

Exemplo 1.13 No espaço livre temos um campo magnético variante no tempo por $\vec{H} = 10 \cos(\omega t - 100z) \vec{a}_y A/m$, determine o campo elétrico associado com este campo magnético.

Solução 1.13 No espaço livre não temos elétrons livres, assim a condutividade $\sigma = 0$ de forma que $\vec{J} = 0$. Neste espaço a relação entre \vec{D} e \vec{E} , que será discutida na seção 1.4, é dada por $\vec{D} = \epsilon_0 \vec{E}$. Com estas considerações partimos calculando o lado direito da equação 1.13, obtemos

$$\begin{aligned} \nabla \times \vec{H} &= \left(\frac{\partial H_z}{\partial y} - \frac{\partial H_y}{\partial z} \right) \vec{a}_x + \left(\frac{\partial H_x}{\partial z} - \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) \vec{a}_y + \left(\frac{\partial H_y}{\partial x} - \frac{\partial H_x}{\partial y} \right) \vec{a}_z \\ &= -\frac{\partial H_y}{\partial z} \vec{a}_x + \underbrace{\frac{\partial H_y}{\partial x}}_0 \vec{a}_z = -\frac{\partial H_y}{\partial z} \vec{a}_x, \end{aligned}$$

porque a componente y do campo \vec{H} só depende da coordenada z , substituindo a componente H_y , obtemos

$$-1000 \sin(\omega t - 100z) = \epsilon_0 \frac{\partial E_x}{\partial t} \rightarrow E_x = \frac{1000}{\omega \epsilon_0} \cos(\omega t - 100z),$$

assim o campo \vec{E} associado com o campo magnético $\vec{H} = 10 \cos(\omega t - 100z) \vec{a}_y A/m$ é

$$\vec{E} = \frac{1000}{\omega \epsilon_0} \cos(\omega t - 100z) \vec{a}_x V/m.$$

1.3.5 Lei de Gauss

Aplicando o teorema da divergência, equação (1.10), nas equações (1.3) e (1.4), obtemos

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho, \quad (1.14)$$

$$\nabla \cdot \vec{B} = 0 \quad (1.15)$$

1.3.6 Lei da conservação da carga

Usando a forma integral da lei da conservação da carga, equação (1.8), e o teorema da divergência, equação (1.10), obtemos

$$\oint_s \vec{J} \cdot d\vec{S} = \int_v \nabla \cdot \vec{J} = -\frac{d}{dt} \int_v \rho dv,$$

considerando que o volume v não varia com o tempo, podemos levar a derivada para dentro da integral, tornando-a derivada parcial, assim temos

$$\nabla \cdot \vec{J} = -\frac{\partial \rho}{\partial t}. \quad (1.16)$$

Esta equação também pode ser deduzida usando as equações (1.13) e (1.14).

1.4 Relações e parâmetros constitutivos

Toda matéria é composta de cargas elétricas discretas, ***elétrons*** e ***prótons***, os elétrons podem se movimentar e os prótons estão presos no núcleo do átomo. Quando aplicamos um campo eletromagnético (elétrico e/ou magnético) as cargas elétricas interagem produzindo distribuições de cargas e correntes, que serão fontes de outros campos que se somarão ao campo aplicado.

Para considerar, em escala macroscópica, a presença e comportamento das cargas elétricas, temos um grupo de três expressões que relacionam \vec{E} com \vec{D} , \vec{H} com \vec{B} e \vec{E} com \vec{J} , estas expressões são denominadas ***relações constitutivas***.

A expressão que relaciona o vetor densidade de fluxo elétrico \vec{D} com o vetor campo elétrico \vec{E} é dada por

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E}, \quad (1.17)$$

ϵ é a permissividade do meio, indica que o campo elétrico aplicado irá orientar dipolos elétricos, isto é, polarizar o meio. Para o espaço livre, que não tem dipolos elétricos, o seu valor é

$$\epsilon = \epsilon_0 \approx 8,854 \times 10^{-12} \approx \frac{10^9}{36\pi} F/m \text{ (farads/metro).} \quad (1.18)$$

O relacionamento entre o vetor densidade de fluxo magnético \vec{B} e o vetor campo magnético \vec{H} é expresso por

$$\vec{B} = \mu \vec{H}, \quad (1.19)$$

μ é a permeabilidade do meio, indica que o campo magnético aplicado irá orientar dipolos magnéticos (laços de corrente), isto é, magnetizar o meio. Para o espaço livre, que não tem dipolos magnéticos, o seu valor é

$$\mu = \mu_0 \approx 4\pi \times 10^{-7} H/m \text{ (henries/metro).} \quad (1.20)$$

O vetor densidade de corrente \vec{J} e o vetor campo elétrico \vec{E} estão relacionados pela equação

$$\vec{J} = \sigma \vec{E}, \quad (1.21)$$

σ é a condutividade do meio, indica que o campo elétrico aplicado irá movimentar os elétrons livres do material, isto é, formar a corrente de condução. Para o espaço livre, que não possui cargas elétricas, o seu valor é

$$\sigma = \sigma_0 = 0 S/m \text{ (siemens/metro).} \quad (1.22)$$

As equações (1.17), (1.19) e (1.21) são denominadas de ***relações constitutivas*** e, ϵ , μ e σ são denominados de ***parâmetros constitutivos***. Estes parâmetros são, em geral, funções da intensidade do campo aplicado, a posição dentro do material, a direção do campo aplicado, e a freqüência de operação.

Os parâmetros constitutivos são usados para caracterizar as propriedades elétricas de um material. Em geral, os materiais são classificados como ***dielétricos***, ***magnéticos*** e ***condutores***, dependendo se o fenômeno de polarização (densidade de corrente de deslocamento), de magnetização (densidade de corrente de deslocamento magnético), ou condução (densidade de corrente de condução) é predominante. Uma outra classe de material é a dos semicondutores, os quais ocupam o espaço entre condutores e dielétricos, já que nem a corrente de condução ou a corrente de deslocamento são, em geral, predominante. Na tabela 1.1 temos esta classificação.

Os materiais são classificados como *linear* × *não linear*, *homogêneos* × *não homogêneos*, *isotrópicos* × *não isotrópicos (anisotrópicos)*, e *dispersivo* × *não dispersivo* de acordo com a sua estrutura e comportamento. Se os parâmetros constitutivos de um dado material (meio) não são funções da intensidade do campo aplicado, o material é conhecido como linear. Meios em que os parâmetros constitutivos não são funções da posição são denominados homogêneos. Materiais isotrópicos são aqueles cujos parâmetros constitutivos não são funções da direção do campo aplicado. Quando os parâmetros constitutivos são funções da freqüência o meio é denominado de dispersivo, todos os materiais usados em nosso dia a dia exibem algum grau de dispersão, embora as variações para alguns possam ser desprezadas e, para outros, é significativa. Um exemplo de aplicação de um meio dispersivo e não linear e a fibra óptica, neste meio, sob certas condições, os efeitos da dispersão são compensados pelos efeitos da não linearidade, e uma onda de luz, denominada *sóliton*, pode propagar sobre distâncias extremamente longas (centenas de quilômetros) sem qualquer distorção. Na tabela 1.2 temos esta classificação.

| Fenômeno que predomina no material | Classificação |
|--|---------------|
| polarização densidade de corrente de deslocamento elétrico | dielétrico |
| magnetização densidade de corrente de deslocamento magnético | magnético |
| condução densidade de corrente de condução | condutor |
| não há predominância de nenhuma densidade de corrente | semicondutor |

Tabela 1.1: Classificação pela densidade de corrente

| Parâmetros constitutivos ϵ , μ e σ | Classificação |
|--|------------------------------|
| não funções da intensidade do campo sim | linear não linear |
| não funções da posição sim | homogêneo não homogêneo |
| não funções da direção do campo sim | isotrópico não isotrópico |
| não funções da freqüência sim | não dispersivo dispersivo |

Tabela 1.2: Classificação pela variação dos parâmetros constitutivos

1.5 Condições de Fronteira

As equações de Maxwell na forma diferencial requerem que os campos sejam quantidades de valor único, limitadas e possuam (junto com as suas derivadas) distribuições contínuas. Em fronteiras, onde o meio envolvido exibe descontinuidades nas propriedades elétricas, ou existam fontes ao longo destas fronteiras, os vetores campo são também descontínuos e seu comportamento transverso às fronteiras é governado pelo que chamamos de **condições de fronteiras**. Estas condições são um conjunto de equações que relacionam as componentes do campo em um ponto adjacente e sobre um lado da fronteira com as componentes do campo no correspondente ponto adjacente e sobre o outro lado da fronteira, figura 1.18.

As condições de fronteiras decorrem do fato que as equações integrais de Maxwell envolvem caminhos fechados e superfícies. As equações devem ser satisfeitas para todos os possíveis caminhos fechados e superfícies, estando estes inteiramente em um meio ou englobando uma parte da fronteira entre dois diferentes meios, figura 1.23. No último caso devem ser satisfeitas pelos campos em ambos os lados da fronteira, resultando nas condições de fronteira.

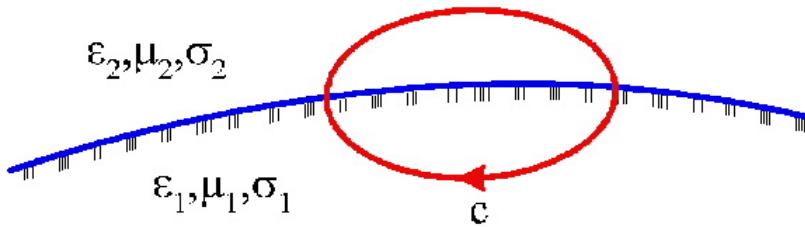


Figura 1.23: Caminho fechado englobando dois meios

1.5.1 Condição de fronteira para o campo \vec{E} tangencial

Aplicando a lei de Faraday, equação (2.1) ao caminho $abcd a$, mostrado na figura 1.24 obtemos

$$\lim_{\substack{ad \rightarrow 0 \\ bc \rightarrow 0}} \left\{ \oint_{abcd} \vec{E} \cdot d\vec{l} = - \frac{d}{dt} \int_{\text{área } abcd} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right\}, \quad (1.23)$$

para a integral de linha temos

$$\lim_{\substack{ad \rightarrow 0 \\ bc \rightarrow 0}} \oint_{abcd} \vec{E} \cdot d\vec{l} = (\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \Delta x \vec{a}_x, \quad (1.24)$$

e para o termo a direita da equação (1.23) encontramos

$$\lim_{\substack{ad \rightarrow 0 \\ bc \rightarrow 0}} \left\{ \frac{d}{dt} \int_{\text{área } abcd} \vec{B} \cdot d\vec{S} \right\} = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} \left\{ \frac{d}{dt} \int_{\text{área } abcd} \vec{B} \cdot dS \vec{a}_z \right\} = 0, \quad (1.25)$$

substituindo (1.24) e (1.25) na equação 1.23) obtemos

$$(\vec{E}_1 - \vec{E}_2) \cdot \vec{a}_x = 0, \quad (1.26)$$

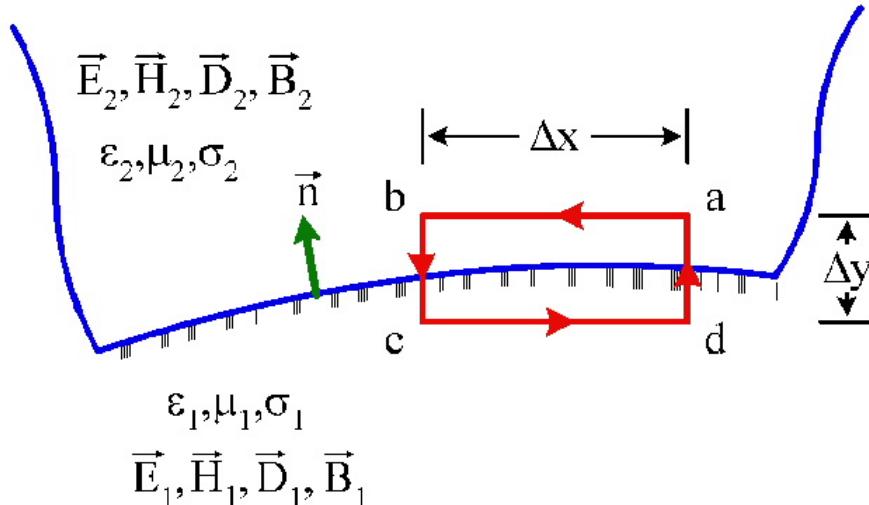


Figura 1.24: Geometria para a dedução da condição de fronteira - componente tangencial

\vec{a}_x é o vetor unitário tangencial a fronteira, assim

$$\vec{E}_1^t = \vec{E}_2^t, \quad (1.27)$$

a forma geral da equação (1.27) é escrita, em termos da normal \vec{n} a fronteira, como

$$\vec{n} \times (\vec{E}_2 - \vec{E}_1) = 0 \quad (1.28)$$

1.5.2 Condição de fronteira para o campo \vec{H} tangencial

Da mesma forma que a feita para obter a condição de fronteira para o campo \vec{E} tangencial, usamos a geometria definida na figura 1.24. Aplicando a lei de Ampère, equação (1.2), ao caminho abcda mostrado na figura 1.24 obtemos

$$\lim_{\substack{ad \rightarrow 0 \\ bc \rightarrow 0}} \left\{ \oint_{abcta} \vec{H} \cdot d\vec{l} = \iint_{área abcta} \vec{J} \cdot d\vec{S} - \frac{d}{dt} \iint_{área abcta} \vec{D} \cdot d\vec{S} \right\}, \quad (1.29)$$

O lado esquerdo da equação (1.29) reduz-se a

$$\lim_{\substack{ad \rightarrow 0 \\ bc \rightarrow 0}} \left\{ \oint_{abcta} \vec{H} \cdot d\vec{l} \right\} = (\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \vec{a}_x \Delta x, \quad (1.30)$$

Como a densidade de corrente elétrica \vec{J} está confinada sobre uma camada muito fina ao longo da interface, o primeiro termo do lado direito da equação (1.29) pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \lim_{\substack{ad \rightarrow 0 \\ bc \rightarrow 0}} \iint_{área abcta} \vec{J} \cdot d\vec{S} &= \lim_{\Delta y \rightarrow 0} [\vec{J} \cdot \vec{a}_z \Delta x \Delta y] = \lim_{\Delta y \rightarrow 0} [(\vec{J} \Delta y) \cdot \vec{a}_z \Delta x] \\ &= \vec{J}_s \cdot \vec{a}_z \Delta x, \end{aligned} \quad (1.31)$$

\vec{J}_s é o vetor densidade de corrente elétrica de superfície.

O segundo termo do lado direito da equação (1.29) é nulo porque o fluxo elétrico cruzando a área $abcd$ a tende a zero quando a área tende a zero, na forma matemática temos

$$\lim_{\substack{ad \rightarrow 0 \\ bc \rightarrow 0}} \frac{d}{dt} \iint_{área abcd} \vec{D} \cdot \vec{dS} = \lim_{\substack{ad \rightarrow 0 \\ bc \rightarrow 0}} \frac{d}{dt} \iint_{área abcd} \vec{D} \cdot \vec{a}_z dS = 0. \quad (1.32)$$

Substituindo as equações (1.30), (1.31)e (1.32) na equação (1.29) obtemos

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot \vec{a}_x - \vec{J}_s \cdot \vec{a}_z = 0,$$

como $\vec{a}_x = \vec{a}_y \times \vec{a}_z$, a equação anterior pode ser escrita como

$$(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \cdot (\vec{a}_y \times \vec{a}_z) - \vec{J}_s \cdot \vec{a}_z = 0,$$

usando a identidade vetorial $\vec{A} \cdot \vec{B} \times \vec{C} = \vec{C} \cdot \vec{A} \times \vec{B}$ no primeiro termo da equação anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \vec{a}_z \cdot [(\vec{H}_1 - \vec{H}_2) \times \vec{a}_y] - \vec{J}_s \cdot \vec{a}_z &= 0 \\ [\vec{a}_y \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1)] - \vec{J}_s \cdot \vec{a}_z &= 0, \end{aligned}$$

esta equação é satisfeita quando

$$\vec{a}_y \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s, \quad (1.33)$$

da geometria da figura 1.10 podemos escrever (1.33) como

$$\vec{n} \times (\vec{H}_2 - \vec{H}_1) = \vec{J}_s, \quad (1.34)$$

\vec{n} é a normal a interface entre os meios 1 e 2, na forma escalar temos

$$\vec{H}_2^t - \vec{H}_1^t = J_s \quad (1.35)$$

As equações (1.34) e (1.35) estabelecem que em qualquer ponto da fronteira entre os meios 1 e 2, as componentes tangenciais do campo magnético são descontínuas por uma quantidade igual a densidade de corrente elétrica de superfície.

1.5.3 Condição de fronteira para o campo \vec{D} normal

Consideremos um paralelepípedo $abcdefgh$ de volume infinitesimal, com as superfícies fechadas $abcd$ a e $efghe$ paralelas a fronteira entre dois meios, como mostrado na figura 1.25. Aplicando-se a lei de Gauss, equação (1.3) a este paralelepípedo, no caso limite em que as suas superfícies laterais S_l tendem a zero, mas com os lados $abcd$ a e $efghe$ permanecendo em ambos os lados da fronteira, nós temos

$$\lim_{S_l \rightarrow 0} \left\{ \oint_{S_l} \vec{D} \cdot \vec{ds} \right\} = \int_v \rho dv. \quad (1.36)$$

No limite as contribuições das superfícies laterais do paralelepípedo (*abefa*, *adgfa*, *bcheb*, *dchgd*) para a integral de superfície são nulas. Para a soma das contribuições das superfícies *abcda*, *efghe* temos

$$\lim_{S_l \rightarrow 0} \oint_{S_l} \vec{D} \cdot d\vec{s} = \vec{D}_2 \cdot \vec{a}_y A_0 - \vec{D}_1 \cdot \vec{a}_y A_0 = (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{a}_y A_0, \quad (1.37)$$

A_0 é a área dos lados *abcda* e *efghe*.

O lado direito da equação (1.36) não será nulo, porque, fazendo o volume do paralelepípedo tender a zero, com os lados *abcda* e *efghe* permanecendo em ambos os lados da fronteira, existirá uma contribuição de carga elétrica de superfície, isto é, a contribuição de uma densidade superficial de carga, ρ_s , assim temos

$$\lim_{S_l \rightarrow 0} \int_v \rho dv = \int_s \rho_s ds = \rho_s A_0. \quad (1.38)$$

Substituindo as equações (1.37) e (1.38) na equação (1.36)

$$(\vec{D}_2 - \vec{D}_1) \cdot \vec{a}_y = \rho_s, \quad (1.39)$$

da figura 1.25, podemos escrever a equação anterior como

$$\vec{n} \cdot (\vec{D}_2 - \vec{D}_1) = \rho_s, \quad (1.40)$$

ou, na forma escalar, como

$$D_2^n - D_1^n = \rho_s. \quad (1.41)$$

As equações (1.40) e (1.41) estabelecem que, em qualquer ponto na fronteira, as componentes normais de \vec{D} são descontínuas por uma quantidade igual a densidade superficial de carga elétrica.

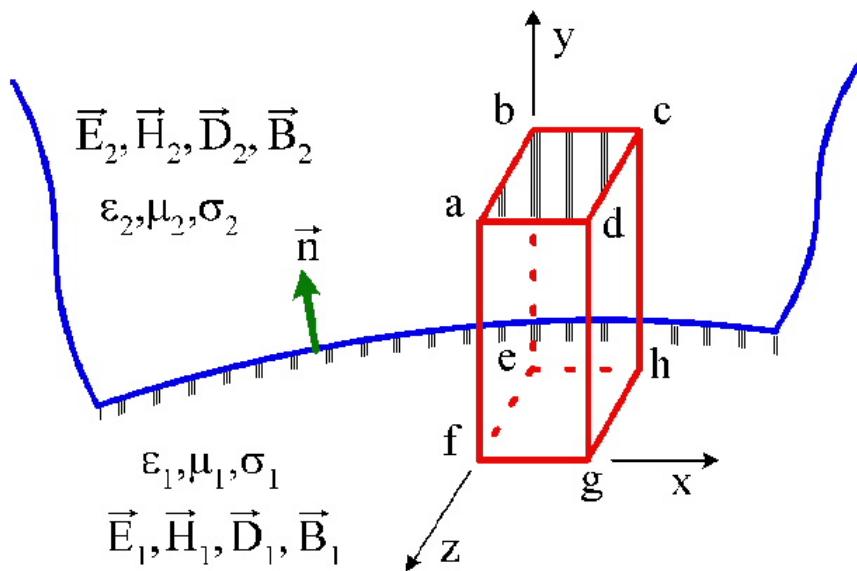


Figura 1.25: Geometria para a dedução da condição de fronteira - componente normal

1.5.4 Condição de fronteira para o campo \vec{B} normal

Aplicando a lei de Gauss para campo magnético na mesma geometria mostrada na figura 1.25 e com o mesmo procedimento feito para o caso \vec{D} tangencial, obtemos

$$\vec{n} \cdot (\vec{B}_2 - \vec{B}_1) = 0 \quad (1.42)$$

$$B_2^n = B_1^n \quad (1.43)$$

As equações (1.42) e (1.43) estabelecem que as componentes normais de \vec{B} são sempre contínuas nas interfaces, isto é consequência da não existência de cargas magnéticas.

Exemplo 1.14 Considere que o meio 1 da figura 1.23 é um condutor perfeito, isto é, possua uma condutividade elétrica infinita $\sigma = \infty$ assim temos

$$\begin{aligned}\sigma_1 = \infty \rightarrow \vec{E}_1 &= 0 \rightarrow \vec{D}_1 = 0 \\ \nabla \times \vec{E}_1 &= 0 = -\frac{\partial \vec{B}_1}{\partial t} \rightarrow \vec{B}_1 = 0 \rightarrow \vec{H}_1 = 0\end{aligned}$$

As condições de fronteira tornam-se

$$\begin{aligned}\vec{n} \times \vec{E}_2 &= 0 \\ \vec{n} \times \vec{H}_2 &= \vec{J}_s \\ \vec{n} \cdot \vec{D}_2 &= \rho_s \\ \vec{n} \cdot \vec{B}_2 &= 0\end{aligned}$$

estas equações fornecem a densidade de carga na fronteira ρ_s e a corrente superficial \vec{J}_s , induzidas pela presença dos campos eletromagnéticos e estabelecem que na fronteira o campo elétrico é normal. Num problema de campos variantes no tempo a condição $\vec{n} \times \vec{E}_2 = 0$ é a única exigida num condutor perfeito, a condição $\vec{n} \cdot \vec{B}_2 = 0$ serve como verificação.

Exemplo 1.15 Na figura 1.26, a região $x < 0$ é um condutor perfeito, a região $0 < x < d$ é um dielétrico perfeito com $\epsilon = 2\epsilon_0$ e $\mu = \mu_0$, e a região $x > d$ é o espaço livre. Os campos elétrico e magnético na região $0 < x < d$ são dados em um instante de tempo particular por

$$\begin{aligned}\vec{E} &= E_2 \cos \pi x \sin 2\pi z \vec{a}_x + E_1 \sin \pi x \cos 2\pi z \vec{a}_z \text{ V/m} \\ \vec{H} &= H_2 \cos \pi x \sin 2\pi z \vec{a}_y \text{ A/m}.\end{aligned}$$

Queremos determinar: a) ρ_s e \vec{J}_s na superfície $x = 0$; b) os campos \vec{E} e \vec{H} para $d+$, isto é, imediatamente adjacente ao plano $x = d$ e no lado do espaço livre.

Solução 1.15

a) denominando o meio dielétrico perfeito de meio 2 e o condutor perfeito de meio 1, nós temos que $\vec{n} = \vec{a}_x$ e todos os campos no meio 1 são nulos, assim temos

$$\begin{aligned}[\rho_s]_{x=0} &= \vec{n} \cdot [\vec{D}_2]_{x=0} = \vec{a}_x \cdot 2\epsilon_0 E_2 \sin 2\pi z \vec{a}_x \\ &= 2\epsilon_0 E_2 \sin 2\pi z\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}[\vec{J}_s]_{x=0} &= \vec{n} \times [\vec{H}_2]_{x=0} = \vec{a}_x \times H_2 \sin 2\pi z \vec{a}_y \\ &= H_2 \sin 2\pi z \vec{a}_z\end{aligned}$$

b) denominando o meio dielétrico perfeito de meio 1 e o espaço livre de meio 2, e como $\rho_s = 0$ nós obtemos, das equações (1.27) e (1.41), que

$$\begin{aligned}[E_y]_{x=d^+} &= [E_y]_{x=d^-} = 0 \\ [E_z]_{x=d^+} &= [E_z]_{x=d^-} = E_1 \sin \pi d \cos 2\pi z \\ [D_x]_{x=d^+} &= [D_x]_{x=d^-} = 2\epsilon_0 [E_x]_{x=d^-} \\ &= 2\epsilon_0 E_2 \cos \pi d \sin 2\pi z \\ [E_x]_{x=d^+} &= \frac{1}{\epsilon_0} [D_x]_{x=d^+} = 2E_2 \cos \pi d \sin 2\pi z,\end{aligned}$$

então

$$[E]_{x=d^+} = 2E_2 \cos \pi d \sin 2\pi z \vec{a}_x + E_1 \sin \pi d \cos 2\pi z \vec{a}_z.$$

Fazendo $\vec{J}_s = 0$ e usando as equações (1.35) e (1.43), nós obtemos

$$\begin{aligned}[H_y]_{x=d^+} &= [H_y]_{x=d^-} = H_2 \cos\pi d \sin 2\pi z \\ [H_z]_{x=d^+} &= [H_z]_{x=d^-} = 0 \\ [B_x]_{x=d^+} &= [B_x]_{x=d^-} = 0\end{aligned}$$

então

$$[H]_{x=d^+} = H_2 \cos\pi d \sin 2\pi z \vec{a}_y.$$

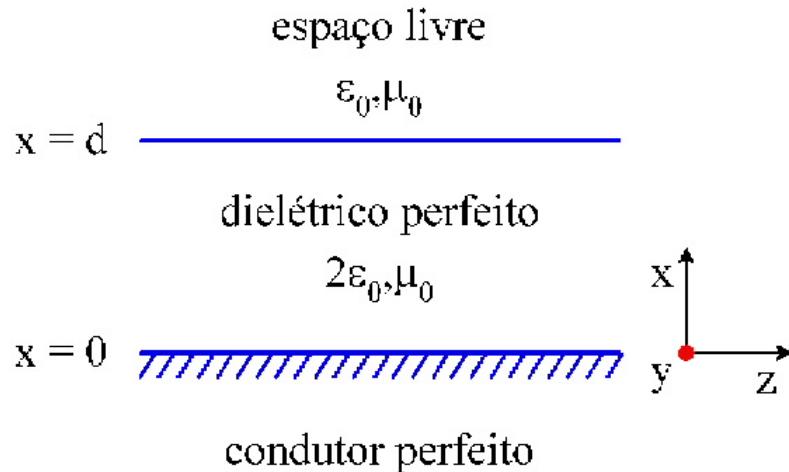


Figura 1.26: Três regiões no espaço

1.6 Potência e Energia

As ondas eletromagnéticas transportam energia através de qualquer meio (espaço livre, água, terra, etc.) ou através de estruturas (guias de onda, linha de transmissão, fibra óptica, etc.). O fluxo de potência através de uma superfície fechada, na região em que propaga a onda eletromagnética, é obtido de uma integral de superfície de um vetor $\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}$, conhecido como ***vetor de Poynting***. O procedimento descrito é justificado por um teorema devido a J. H. Poynting, demonstrado em 1884, e denominado de ***Teorema de Poynting***.

Para derivar as equações que indicam que energia está associada com ondas eletromagnéticas, vamos considerar uma região de volume V caracterizada por ϵ , μ , σ e definida pela superfície S , figura 1.27. Dentro da região existe fonte, representada pela densidade de corrente \vec{J} . Os campos elétrico e magnético, dentro de S , são gerados pela fonte \vec{J} e obedecem as equações de Maxwell (1.12) e (1.13), então temos

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.44)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1.45)$$

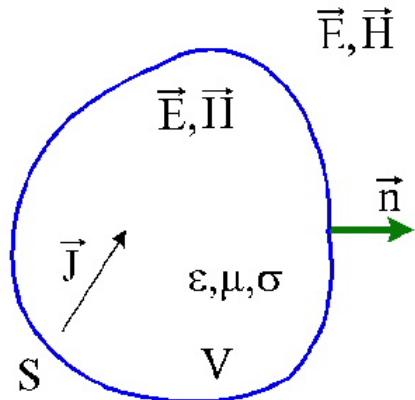


Figura 1.27: Campos elétrico e magnético dentro de uma região com fonte

Fazendo a multiplicação escalar da equação (1.44) por \vec{H} e da equação (1.45) por \vec{E} obtemos

$$\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}, \quad (1.46)$$

$$\vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = \vec{J} \cdot \vec{E} + \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1.47)$$

Subtraindo a equação (1.46) da (1.47) encontramos

$$\vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{J} \cdot \vec{E} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}, \quad (1.48)$$

usando a identidade vetorial $\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B})$ podemos escrever a equação (1.48) como

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{J} \cdot \vec{E} - \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t}. \quad (1.49)$$

Substituindo as relações constitutivas, dadas pelas equações (1.17), (1.19) e (1.21), na equação (1.49) encontramos

$$\nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) = -\mu \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} - \vec{J} \cdot \vec{E} - \epsilon \vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \quad (1.50)$$

integrando esta equação no volume V, figura 1.13, obtemos

$$\int_V \nabla \cdot (\vec{E} \times \vec{H}) dv = - \int_V \left\{ \vec{H} \cdot \left[\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] + \vec{E} \cdot \left[\vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \right\} dv. \quad (1.51)$$

Aplicando o teorema da divergência, equação (1.10), no lado esquerdo da equação (1.51), separando os termos e considerando que o volume V não varia com o tempo, obtemos

$$\begin{aligned} \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} &= - \int_V \left\{ \vec{H} \cdot \left[\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t} \right] + \vec{E} \cdot \left[\vec{J} + \epsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t} \right] \right\} dv \\ \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} &= - \int_V [\vec{E} \cdot \vec{J}] dv - \frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\frac{\mu}{2} \vec{H}^2 + \frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2 \right] dv. \end{aligned} \quad (1.52)$$

As equações (1.50) e (1.52) podem ser interpretadas como as formas diferencial e integral, respectivamente, para a conservação da energia. Para entender isto, vamos considerar cada termo da equação (1.52).

O integrando do lado direito da equação (1.52) é um vetor da forma

$$\vec{P} = \vec{E} \times \vec{H}, \quad (1.53)$$

o qual tem unidades de densidade de potência (*watts/m²*), desde que \vec{E} (V/m) e \vec{H} (A/m). O vetor \vec{P} é denominado de ***vetor de Poynting*** e define o fluxo instantâneo de energia, a direção do fluxo é perpendicular a \vec{E} e a \vec{H} . A sua integração representa a potência total deixando a região definida pela superfície, S , potência evadida, P_e , assim

$$P_e = \oint_S (\vec{E} \times \vec{H}) \cdot d\vec{s} = \oint_S \vec{P} \cdot d\vec{s}. \quad (1.54)$$

A primeira integral do lado direito da equação (1.52) pode ser escrita como

$$-\int_V [\vec{E} \cdot \vec{J}] dv = -\int_V [\vec{E} \cdot (\vec{J}_i + \vec{J}_c)] dv = P_f + P_d, \quad (1.55)$$

sendo

$$P_f = - \int_V [\vec{E} \cdot \vec{J}_i] dv, \quad (1.56)$$

a potência gerada pela fonte, que impõe um vetor densidade de corrente \vec{J}_i no meio, e

$$P_d = \int_V [\vec{E} \cdot \vec{J}_c] dv, \quad (1.57)$$

a potência dissipada dentro da região devido a existência de cargas livres, que sob a ação do campo elétrico geram o vetor densidade de corrente de condução \vec{J}_c no meio. A segunda integral do lado direito da equação (1.52) é escrita como

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_V \left[\frac{\mu}{2} \vec{H}^2 + \frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2 \right] dv = \frac{\partial W_e}{\partial t} + \frac{\partial W_m}{\partial t},$$

sendo

$$W_e = \int_V \frac{\epsilon}{2} \vec{E}^2 dv, \quad (1.58)$$

a energia armazenada no campo elétrico, e

$$W_m = \int_V \frac{\mu}{2} \vec{H}^2 dv, \quad (1.59)$$

a energia armazenada no campo magnético. Substituindo as equações (1.56), (1.57), (1.58) e (1.59) na equação (1.52) nós obtemos

$$P_e = P_f - P_d - \frac{\partial(W_e + W_m)}{\partial t}, \quad (1.60)$$

ou

$$P_f = P_e + P_d + \frac{\partial(W_e + W_m)}{\partial t}, \quad (1.61)$$

a qual é a lei de conservação da potência, estabelece que dentro de uma região V limitada por uma superfície S , a potência fornecida pela fonte P_f é igual a potência evadida da região P_e , mas a potência dissipada dentro da região P_d , mais a taxa de variação (positiva se aumenta) das energias elétrica W_e e magnética W_m armazenadas dentro desta região. Na figura 1.28 temos a interpretação dos termos que aparecem no teorema de Poynting, ressaltamos que esta interpretação é arbitrária, mas, baseada em casos estudados na teoria eletromagnética.

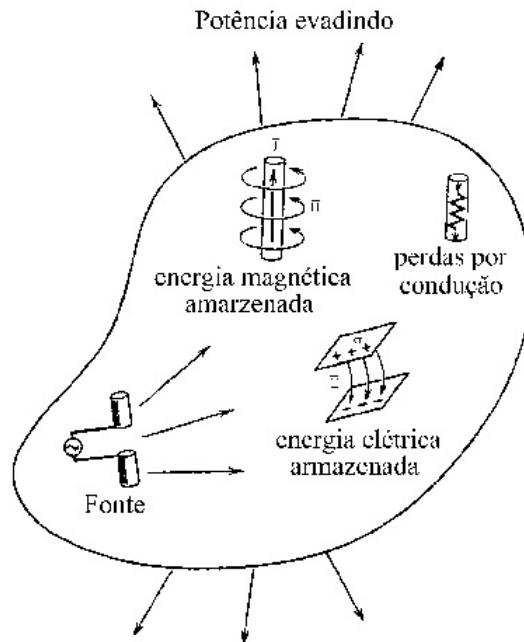


Figura 1.28: Interpretação do Teorema de Poynting

Exemplo 1.16 Uma onda eletromagnética é constituída pelos seguintes campos

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = E_0 \cos(\omega t - kz) \vec{a}_x \text{ V/m}, \quad k = \omega\sqrt{\mu\epsilon},$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \frac{E_0}{\eta} \cos(\omega t - kz) \vec{a}_y \text{ A/m}, \quad \eta = \sqrt{\mu/\epsilon},$$

- a) determine o vetor de Poynting e as densidades de energia elétrica e magnética armazenadas na região, w_e e w_m ;
- b) assumindo um volume retangular V de dimensões a , b e c , figura 1.29, verifique o teorema de Poynting.

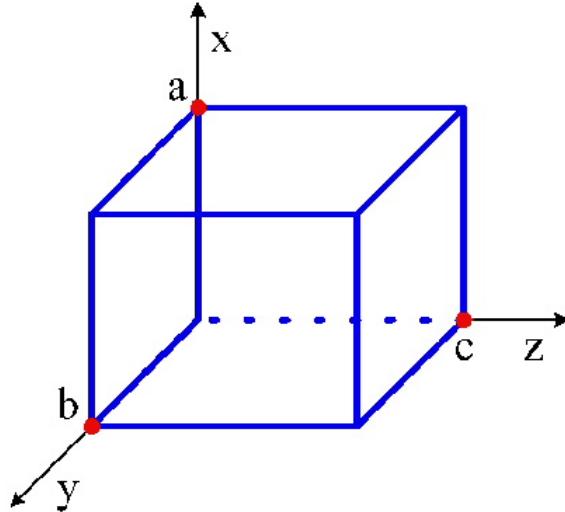


Figura 1.29: Volume retangular no espaço

Solução 1.16 dos campos dados obtemos

a) calculando \vec{P} , w_e e w_m obtemos

$$\begin{aligned}\vec{P} &= \vec{E} \times \vec{H} = (\vec{a}_x \times \vec{a}_y) \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - kz) = \frac{E_0^2}{\eta} \cos^2(\omega t - kz) \vec{a}_z \text{ W/m}^2 \\ w_e &= \frac{\epsilon}{2} |\vec{E}|^2 = \frac{\epsilon}{2} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \text{ W/m}^3 \\ w_m &= \frac{\mu}{2} |\vec{H}|^2 = \frac{\mu}{2} \frac{E_0^2}{\eta^2} \cos^2(\omega t - kz) = \frac{\epsilon}{2} E_0^2 \cos^2(\omega t - kz) \text{ W/m}^3\end{aligned}$$

b) como não há fontes ou perdas não temos P_f e P_d , integrando o vetor de Poynting \vec{P} na superfície que define a região, obtemos a potência que evade da região, como a direção de \vec{P} é constante e igual a \vec{a}_z , só teremos os termos relativos as faces em $z = 0$ e $z = c$, figura 1.29, assim obtemos

$$\begin{aligned}\int_S \vec{P} \cdot d\vec{s} &= \left\{ \int_0^a \int_0^b \vec{P}(z=0) \cdot (\vec{a}_z) dx dy + \int_0^a \int_0^b \vec{P}(z=c) \cdot (\vec{a}_z) dx dy \right\} \\ &= \frac{-E_0^2}{\eta} a b [\cos^2 \omega t - \cos^2(\omega t - kc)], \text{ como } \cos 2x = 2\cos^2 x - 1 \\ P_e &= \frac{-E_0^2}{2\eta} a b [\cos 2\omega t - \cos 2(\omega t - kc)] \text{ W}\end{aligned}$$

a energia armazenada na região é

$$\begin{aligned}
 \int_V (w_e + w_m) dv &= \frac{E_0^2}{2} \int_0^a dx \int_0^b dy \int_0^c dz \left(\epsilon + \frac{\mu}{\eta^2} \right) \cos^2(\omega t - kz) \\
 &= \frac{\epsilon E_0^2}{2} ab \int_0^c [1 + \cos 2(\omega t - kz)] dz \\
 \frac{\partial}{\partial t} (W_e + W_m) dv &= \frac{E_0^2}{2} ab \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \frac{\sin 2(\omega t - kz)}{2(-k)} \Big|_0^c \right\} \\
 &= \frac{-E_0^2}{2k} ab \omega [\cos 2(\omega t - kc) - \cos 2\omega t] \\
 &= \frac{E_0^2}{2\eta} ab [\cos 2\omega t - \cos 2(\omega t - kc)] W
 \end{aligned}$$

substituindo as parcelas calculadas na equação (1.60) vemos que ela é satisfeita.

Exemplo 1.17 Uma onda eletromagnética propagando na água do mar ($\epsilon = 80\epsilon_0$, $\sigma = 4 S/m$, $\mu = \mu_0$) possui os seguintes campos

$$\vec{E} = 1 e^{-0,628z} \cos(5 \times 10^4 \pi t - 0,628z) \vec{a}_x \text{ V/m},$$

$$\vec{H} = 4,502 e^{-0,628z} \cos(5 \times 10^4 \pi t - 0,628z - \pi/4) \vec{a}_y \text{ A/m}.$$

Determine o fluxo de potência instantânea por unidade de área normal a direção z .

Solução 1.17 O fluxo de potência instantânea por unidade de área normal a direção z é dado pela componente z do vetor de Poynting. O vetor de Poynting é dado por

$$\begin{aligned}
 \vec{P} &= \vec{E} \times \vec{H} \\
 &= 4,502 e^{-1,256z} \cos(5 \times 10^4 \pi t - 0,628z) \cos(5 \times 10^4 \pi t - 0,628z - \pi/4) \vec{a}_z \text{ W/m}^2,
 \end{aligned}$$

assim

$$P_z = 2,251 e^{-1,256z} [\cos(\pi/4) + \cos(10^5 \pi t - 1,256z - \pi/4)] \text{ W/m}^2,$$

observe que este fluxo decresce na medida que a onda propaga, por que?

1.7 Campos Harmônicos no Tempo

Nas seções 1.2 e 1.3 as formas integral e diferencial das equações de Maxwell foram apresentadas para campos eletromagnéticos com variações no tempo genéricas, entretanto, na maioria das aplicações, a função fonte $\vec{J}(x, y, z)$ é periódica no tempo, figura 1.30.a. Tal função possui um espectro de freqüências de Fourier discreto, isto é, podem ser representadas por um somatório de funções senoidais, figura 1.30.b. No caso de uma função fonte não periódica, figura 1.31.a, temos um espectro de freqüência de Fourier contínuo, figura 1.31.b, isto é, podem ser representadas por uma soma contínua (integral) de funções senoidais. Como as equações de Maxwell são lineares, no caso de meios lineares, podemos aplicar ***superposição de soluções***, isto é, a soma de cada solução devida a uma fonte individual (ex. pulso periódico ou pulso não periódico) é igual a solução correspondente a uma combinação das funções individuais presentes na fonte (ex. somatório ou integração das funções senoidais). Chegamos a conclusão que para estudar um campo eletromagnético genérico, podemos aplicar o teorema de Fourier para decompor o campo em termos de funções harmônicas simples (monocromáticas) e, pela aplicação da superposição de soluções, é suficiente considerar a solução das equações de Maxwell para uma fonte harmônica simples. Por exemplo, considerando duas fontes \vec{J}_1 e \vec{J}_2 nas freqüências f_1 e f_2 , respectivamente, teríamos

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{J}_1 \rightarrow \vec{E}_1, \vec{H}_1 \\ \vec{J}_2 \rightarrow \vec{E}_2, \vec{H}_2 \end{array} \right\} \Rightarrow \vec{J} = \vec{J}_1 + \vec{J}_2 \rightarrow \vec{E} = \vec{E}_1 + \vec{E}_2, \vec{H} = \vec{H}_1 + \vec{H}_2$$

Considerando que o campo eletromagnético possa ser transformado para o domínio da freqüência, usaremos os seguintes pares de transformadas de Fourier

$$\mathbf{E}(\vec{r}, \omega) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{E}(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt \quad \mathbf{H}(\vec{r}, t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \vec{H}(\vec{r}, t) e^{-j\omega t} dt, \quad (1.62)$$

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega \quad \vec{H}(\vec{r}, t) = \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega. \quad (1.63)$$

Passando a equação (1.12) para o domínio da freqüência, usando o par dado na equação (1.63), encontramos

$$\begin{aligned} \nabla \times \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{E}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega \right\} &= -\frac{\partial}{\partial t} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \mu \mathbf{H}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega \right\}, \\ \int_{-\infty}^{\infty} \nabla \times \mathbf{E}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega &= -j\omega \mu \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{H}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t} d\omega, \end{aligned}$$

então, temos que a primeira equação de Maxwell está operando sobre os campos complexos $\mathbf{E}(\vec{r}, \omega)$ e $\mathbf{H}(\vec{r}, \omega)$, e torna-se

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j\omega \mu \mathbf{H} = -j\omega \mathbf{B}. \quad (1.64)$$

Usar a transformada de Fourier para estabelecer as equações de Maxwell sobre campos e fontes complexos é maneira mais geral, já que obtemos equações para

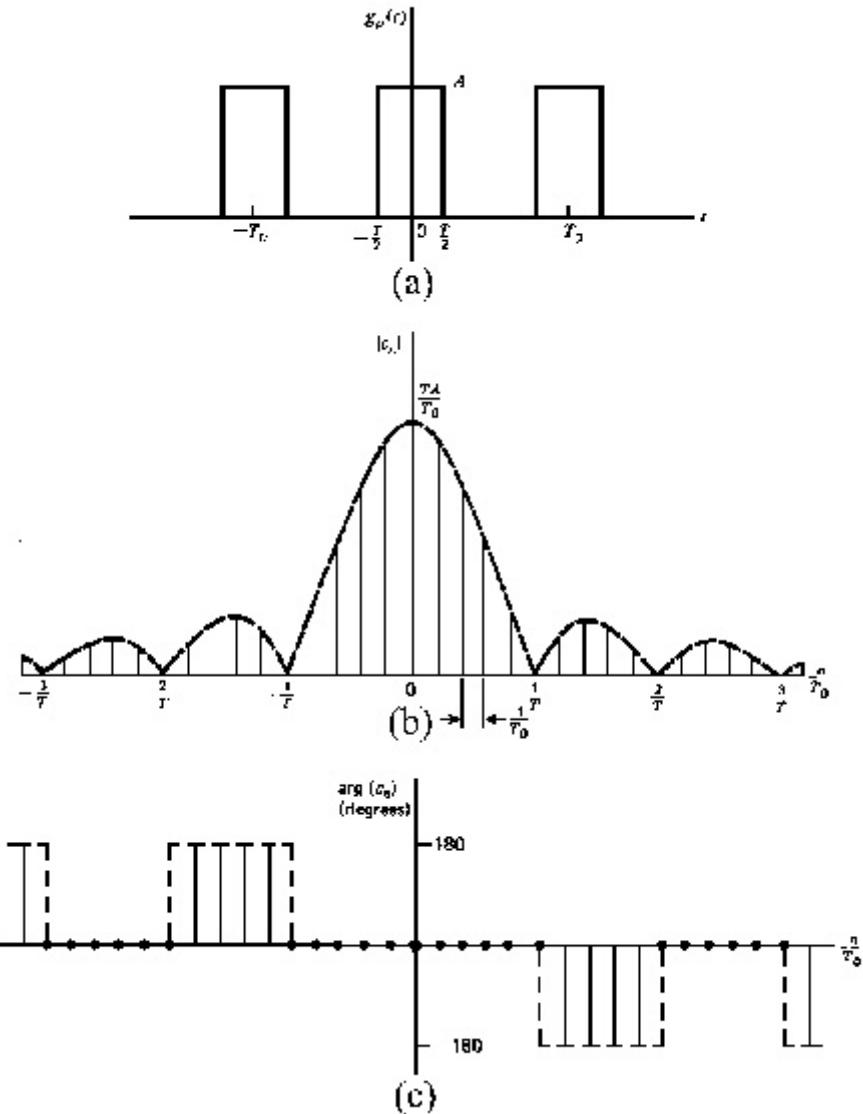


Figura 1.30: Espectro de Fourier discreto

qualquer campo e fonte em que seja possível definir os seus espectros de Fourier. Uma maneira mais particular é estabelecer que os campos e fontes possuem variação temporal da forma $\cos \omega t$, dessa forma definimos que os campos instantâneos são dados por

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \Re \{ \mathbf{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \}, \quad (1.65)$$

$$\vec{H}(\vec{r}, t) = \Re \{ \mathbf{H}(\vec{r}) e^{j\omega t} \}, \quad (1.66)$$

$$\vec{D}(\vec{r}, t) = \Re \{ \mathbf{D}(\vec{r}) e^{j\omega t} \}, \quad (1.67)$$

$$\vec{B}(\vec{r}, t) = \Re \{ \mathbf{B}(\vec{r}) e^{j\omega t} \}, \quad (1.68)$$

$$\vec{J}(\vec{r}, t) = \Re \{ \mathbf{J}(\vec{r}) e^{j\omega t} \}, \quad (1.69)$$

$$\rho(\vec{r}, t) = \Re \{ q_e(\vec{r}) e^{j\omega t} \}, \quad (1.70)$$

$e^{j\omega t} = \cos \omega t + j \sin \omega t$. Os termos entre $\{ \}$ são os campos e fontes na forma fasorial. Destas definições segue que o operador $\partial / \partial t$ que aparece nas equações de Maxwell será substituído por $j\omega$.

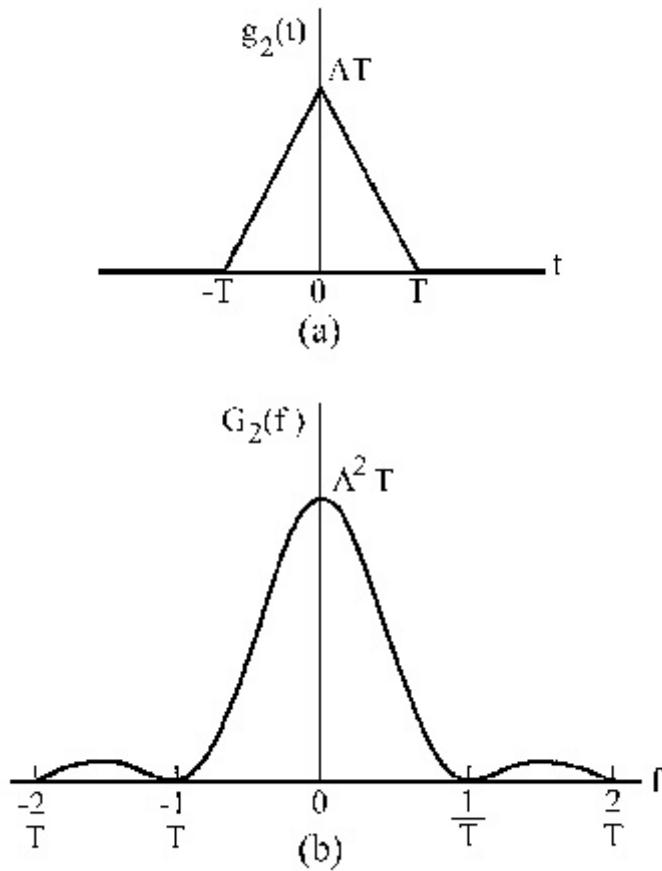


Figura 1.31: Espectro de Fourier contínuo

Exemplo 1.18 Determine as formas fasoriais dos seguintes campos instantâneos:

(a) $\vec{E}(\vec{r}, t) = 2 \operatorname{sen} \omega t \vec{a}_y$; (b) $\vec{E}(\vec{r}, t) = \cos(\omega t - kz) \vec{a}_x + 2 \operatorname{sen}(\omega t - kz) \vec{a}_y$.

Solução 1.18

(a) para usar a convenção adotada temos que escrever o campo como

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = 2 \operatorname{sen} \omega t \vec{a}_y = 2 \cos(\omega t - \pi/2) \vec{a}_y,$$

assim,

$$\begin{aligned} \vec{E}(\vec{r}, t) &= \Re \{ \mathbf{E}(\vec{r}) e^{j\omega t} \} = 2 \cos(\omega t - \pi/2) \vec{a}_y = \Re \{ 2 e^{-j\pi/2} e^{j\omega t} \vec{a}_y \} \\ \mathbf{E}(\vec{r}) &= 2 e^{-j\pi/2} \vec{a}_y = -2 j \vec{a}_y, \end{aligned}$$

observe que o termo $e^{j\omega t}$ fica implícito na resposta e que a defasagem inicial de $-\pi/2$ é representada pelo termo $-j$ na notação fasorial

(b) da mesma forma que no caso (a) escrevemos o campo na seguinte forma

$$\vec{E}(\vec{r}, t) = \cos(\omega t - kz) \vec{a}_x + 2 \cos(\omega t - kz - \pi/2) \vec{a}_y$$

assim,

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \Re \left\{ [e^{-jkz} \vec{a}_x + 2 e^{-j\pi/2} e^{-jkz} \vec{a}_y] e^{j\omega t} \right\} \\ \mathbf{E}(\vec{r}) &= (\vec{a}_x - 2 j \vec{a}_y) e^{-jkz}.\end{aligned}$$

observe que o termo $e^{j\omega t}$ fica implícito na resposta e que a defasagem de $-\pi/2$ da componente \vec{a}_y em relação a componente \vec{a}_x é representada pelo termo $-j$ na componente \vec{a}_y , o que dá origem a um vetor complexo.

Exemplo 1.19 Determine as formas instantâneas dos seguintes campos fasoriais: (a) $\mathbf{E}(\vec{r}, \omega) = (\vec{a}_x + 2 e^{j\pi/4} \vec{a}_y) e^{-jkz}$; (b) $\mathbf{E}(\vec{r}, \omega) = (1 - j) \vec{a}_y e^{-jkx}$.

Solução 1.19 O processo de recuperar a forma instantânea é aplicar a operação $\vec{A}(\vec{r}, t) = \Re \{\mathbf{A}(\vec{r}, \omega) e^{j\omega t}\}$.

(a)

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \Re \left\{ [(\vec{a}_x + 2 e^{j\pi/4} \vec{a}_y) e^{-jkz}] e^{j\omega t} \right\} \\ &= \cos(\omega t - k z) \vec{a}_x + 2 \cos(\omega t - k z + \pi/4) \vec{a}_y;\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\vec{E}(\vec{r}, t) &= \Re \left\{ [(1 - j) \vec{a}_y e^{-jkx}] e^{j\omega t} \right\} = [\cos(\omega t - k x) + \cos(\omega t - k x - \pi/2)] \vec{a}_y \\ &= \sqrt{2} \cos(\omega t - k x - \pi/4) \vec{a}_y \text{ ou} \\ &= \Re \left\{ [\sqrt{2} e^{-j\pi/4} \vec{a}_y e^{-jkx}] e^{j\omega t} \right\} = \sqrt{2} \cos(\omega t - k x - \pi/4) \vec{a}_y,\end{aligned}$$

observe que o segundo procedimento é mais direto que o primeiro. Um vetor complexo significa uma fase inicial diferente de zero na forma instantânea.

1.7.1 Equações integrais para campos harmônicos

São obtidas usando as transformadas de Fourier ou, de forma mais direta, usando-se as definições dos campos e fontes instantâneos em termos dos respectivos fasores, nas equações integrais de Maxwell, equações (1.1), (1.2), (1.3) e (1.4), assim obtemos

$$\oint_c \mathbf{E} \cdot d\vec{l} = -j \omega \int_s \mathbf{B} \cdot d\vec{S}, \quad (1.71)$$

$$\oint_c \mathbf{H} \cdot d\vec{l} = j \omega \int_s \mathbf{D} \cdot d\vec{S} + \int_s \mathbf{J} \cdot d\vec{S}, \quad (1.72)$$

$$\oint_s \mathbf{D} \cdot d\vec{S} = \int_v q_e dv, \quad (1.73)$$

$$\oint_s \mathbf{B} \cdot d\vec{S} = 0. \quad (1.74)$$

1.7.2 Equações diferenciais para campos harmônicos

São obtidas da mesma forma que a feita para as equações integrais, assim, das equações diferenciais de Maxwell, equações (1.12), (1.13), (1.14) e (1.15), encontramos

$$\nabla \times \mathbf{E} = -j \omega \mathbf{B}, \quad (1.75)$$

$$\nabla \times \mathbf{H} = j \omega \mathbf{D} + \mathbf{J}, \quad (1.76)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{D} = q_e, \quad (1.77)$$

$$\nabla \cdot \mathbf{B} = 0. \quad (1.78)$$

1.7.3 Condições de Fronteiras para campos harmônicos

As condições de fronteira para campos harmônicos no tempo, são obtidas da mesma forma que a feita para as equações de Maxwell, e, das equações 1.28, 1.34, 1.40 e 1.42, são dadas por

$$\vec{n} \times (\mathbf{E}_2 - \mathbf{E}_1) = 0, \quad (1.79)$$

$$\vec{n} \times (\mathbf{H}_2 - \mathbf{H}_1) = \mathbf{J}_s, \quad (1.80)$$

$$\vec{n} \cdot (\mathbf{D}_2 - \mathbf{D}_1) = q_e, \quad (1.81)$$

$$\vec{n} \cdot (\mathbf{B}_2 - \mathbf{B}_1) = 0. \quad (1.82)$$

1.7.4 Vetor de Poynting complexo

Na seção 1.6 foi mostrado que potência e energia estão associadas a campos eletromagnéticos variantes no tempo. A equação da conservação da energia, na forma diferencial e integral, foi estabelecida nas equações (1.50) e (1.52), respectivamente. Equações similares podem ser deduzidas para campos harmônicos no tempo, primeiro escreveremos o vetor de Poynting instantâneo \vec{P} em termos dos vetores campo eletromagnético complexo, das equações (1.65) e (1.66) temos

$$\vec{E}(x, y, z; t) = \frac{1}{2} [\mathbf{E} e^{j\omega t} + \overline{\mathbf{E}} e^{-j\omega t}], \quad (1.83)$$

$$\vec{H}(x, y, z; t) = \frac{1}{2} [\mathbf{H} e^{j\omega t} + \overline{\mathbf{H}} e^{-j\omega t}], \quad (1.84)$$

assim o vetor de Poynting é dado por

$$\vec{P} = \frac{1}{2} [\mathbf{E} e^{j\omega t} + \overline{\mathbf{E}} e^{-j\omega t}] \times \frac{1}{2} [\mathbf{H} e^{j\omega t} + \overline{\mathbf{H}} e^{-j\omega t}], \quad (1.85)$$

desenvolvendo a equação (1.85) chegamos a

$$\vec{P} = \frac{1}{2} \left\{ \frac{1}{2} [\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}} + \overline{(\mathbf{E} \times \mathbf{H})}] + \frac{1}{2} [\mathbf{E} \times \mathbf{H} e^{j2\omega t} + \overline{(\mathbf{E} \times \mathbf{H})} e^{-j2\omega t}] \right\},$$

que pode ser escrita como

$$\vec{P} = \frac{1}{2} [\Re e(\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}}) + \Re e(\mathbf{E} \times \mathbf{H} e^{j2\omega t})]. \quad (1.86)$$

Analizando a equação (1.86) vemos que a primeira parcela não é função do tempo, e a segunda varia com o dobro da freqüência dos campos, isto significa que a primeira parcela representa a densidade de potência real, **potência média**, associada com os campos eletromagnéticos e a segunda parcela representa a potência armazenada, **potência reativa**. Usando a definição de valor médio de uma função

$$\langle f(t) \rangle = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt, \quad (1.87)$$

na equação (1.86), reconhecemos que o seu primeiro termo é o vetor de Poynting médio, isto é, o vetor densidade cuja integração fornece a densidade de potência média, é dado por

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \Re e(\mathbf{E} \times \overline{\mathbf{H}}). \quad (1.88)$$

Exemplo 1.20 Obter o valor médio no tempo de $|\vec{E}|^2$ com $\vec{E} = E_1 \cos \omega t \vec{a}_x + E_2 \cos \omega t \vec{a}_y + E_3 \cos \omega t \vec{a}_z$.

Solução 1.20 Aplicando a definição de valor médio de uma função obtemos.

$$\begin{aligned} \langle |\vec{E}|^2 \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T [(E_1 \cos \omega t)^2 + (E_2 \cos \omega t)^2 + (E_3 \cos \omega t)^2] dt \\ &= \frac{1}{2} (E_1^2 + E_2^2 + E_3^2) \end{aligned}$$

Exemplo 1.21 Os campos eletromagnéticos de uma onda eletromagnética são dados por $\vec{E} = 100 \sin(\omega t - 2z) \vec{a}_x$ e $\vec{H} = 0,265 \sin(\omega t - 2z) \vec{a}_y$. Calcule a densidade de potência média.

Solução 1.21 Usando campos fasoriais poderemos aplicar a equação (1.88), eles são dados por $\mathbf{E} = 100 e^{-j2z} \vec{a}_x$ e $\mathbf{H} = 0,265 e^{-j2z} \vec{a}_y$, assim obtemos

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}}) = \frac{100}{2} e^{-j2z} \vec{a}_x \times 0,265 e^{j2z} \vec{a}_y = 13,25 \vec{a}_z (W/m^2).$$

a densidade de potência média é o módulo do vetor \vec{P}_m , então, $13,25 (W/m^2)$.

Exemplo 1.22 Os campos eletromagnéticos distantes emitidos por uma antena dipolo são dados, em coordenadas esféricas, por

$$\vec{E} = \frac{I_0 \omega \mu}{4\pi r} \cos(\omega t - kr + \pi/2) \sin\theta \vec{a}_\theta \quad e \quad \vec{H} = \frac{I_0 k}{4\pi r} \cos(\omega t - kr + \pi/2) \sin\theta \vec{a}_\phi.$$

Calcule a potência media emitida por esta antena.

Solução 1.22 A potência média emitida pela antena é a integração do vetor de Poynting médio numa esfera de raio r que envolve a antena, figura 1.32. Novamente usamos campos fasoriais (caminho mais fácil), eles são dados por

$$\mathbf{E} = j I_0 \omega \mu \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sin\theta \vec{a}_\theta \quad e \quad \mathbf{H} = j I_0 k \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sin\theta \vec{a}_\phi,$$

assim obtemos

$$\vec{P}_m = \frac{1}{2} \Re(\mathbf{E} \times \bar{\mathbf{H}}) = \frac{1}{2} I_0^2 \frac{\omega \mu k}{16\pi^2 r^2} \sin^2\theta \vec{a}_r (W/m^2),$$

integrando o vetor de Poynting obtemos

$$P_m = \frac{1}{2} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \left(I_0^2 \frac{\omega \mu k}{16\pi^2 r^2} \sin^2\theta \vec{a}_r \cdot r^2 \sin\theta d\theta d\phi \vec{a}_r \right) = \frac{\omega \mu k}{12\pi} I_0^2 (W)$$

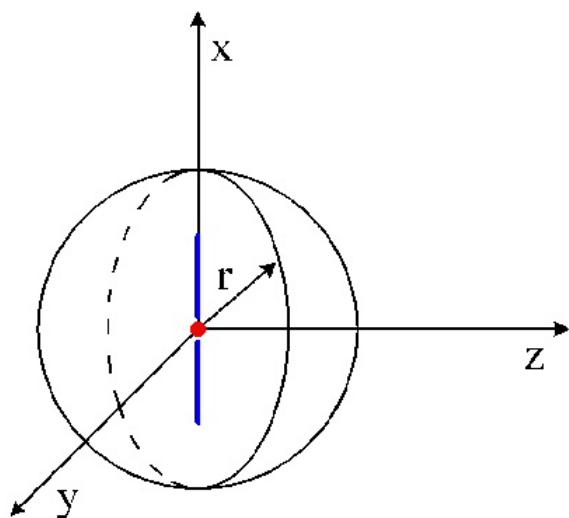


Figura 1.32: Antena dipolo na origem do sistema de coordenadas

1.8 Exercícios

Equações de Maxwell

1. Leia a seção 2.5 da referência [1] e escreva um resumo das experiências que fundamentam a teoria eletromagnética, associando com as equações de Maxwell.
2. Para cada equação de Maxwell, nas formas integral e diferencial, escolha e resolva dois problemas. Sugestão: escolha problemas propostos nas referências.
3. Obter a lei de Ampère e a lei de Gauss, nas suas formas diferenciais, a partir das equações integrais de Maxwell.
4. Obter a lei de conservação da carga na sua forma diferencial, a partir das equações diferenciais de Maxwell.
5. Em uma região do espaço livre (ϵ_0, μ_0) o campo elétrico vale $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kx) \vec{a}_z$. Determine o campo magnético nesta região.
Resp. $\vec{H} = \frac{-E_0 k}{\omega \mu_0} \cos(\omega t - kx) \vec{a}_y$.

Condições de Fronteira

6. Na interface plana de dois dielétricos, um campo elétrico tem a intensidade $E_1 = 10 \text{ V/m}$ e faz um ângulo $\theta_1 = 30^\circ$ com a normal da interface. Se $\epsilon_2 = \epsilon_1/2$, calcule E_2 e θ_2 , campo na região 2 e o ângulo que faz com a normal. Resp. $E_2 = 18 \text{ V/m}$ e $\theta_2 = 16,1^\circ$.
7. O plano $y + z = 1$ divide o espaço em duas regiões. A região 1, que contém a origem do sistema de coordenadas, possui $\mu_{r1} = 4$. Na região 2 $\mu_{r2} = 6$. Sabendo que $\vec{B}_1 = 2\vec{a}_x + 1\vec{a}_y T$, encontre \vec{B}_2 e \vec{H}_2 . Resp. $\vec{B}_2 = 3\vec{a}_x + 1,25\vec{a}_y - 0,25\vec{a}_z T$ e $\vec{H}_2 = 1/\mu_0 (0,5\vec{a}_x + 0,21\vec{a}_y - 0,04\vec{a}_z) A/m$.
8. A região $x > 0$ é um dielétrico perfeito com permissividade $2\epsilon_0$, e a região $x < 0$ é um dielétrico perfeito com permissividade $4\epsilon_0$. Considere que as componentes de campo num ponto sobre o lado da fronteira x^+ são de índice 1 e sobre o lado x^- são de índice 2. Se $\vec{E}_1 = E_0 (2\vec{a}_x + \vec{a}_y + \vec{a}_z)$, determine: (a) E_{x1}/E_{x2} ; (b) E_1/E_2 ; e (c) D_1/D_2 . Resp. 2; $\sqrt{2}$; $1/\sqrt{2}$.
9. O plano $x = 0$ forma a fronteira entre o espaço livre ($x > 0$) e um outro meio. Determine:
(a) \vec{J}_s se $x < 0$ é um condutor perfeito e $\vec{H}(0^+, 0, 0) = H_0 (3\vec{a}_y - 4\vec{a}_z)$; (b) $\vec{H}(0^+, 0, 0)$ se $x < 0$ é um material magnético com $\mu = 10\mu_0$ e $\vec{H}(0^-, 0, 0) = H_0 (\vec{a}_x + 10\vec{a}_y)$; (c) a razão $B(0^-, 0, 0)/B(0^+, 0, 0)$ se $x < 0$ é um material magnético com $\mu = 10\mu_0$ e $\vec{H}(0^-, 0, 0) = H_0 (\vec{a}_x + 10\vec{a}_y)$. Resp. (a) $H_0 (4\vec{a}_y + 3\vec{a}_z)$; (b) $10H_0 (\vec{a}_x + \vec{a}_y)$; (c) 7,1063.
10. Uma película plana de corrente, $\vec{K} = 6,5\vec{a}_z A/m$, flui no plano $x = 0$ que separa as regiões 1, $x > 0$, onde $\vec{H}_1 = 10\vec{a}_y A/m$, e a região 2, $x < 0$. Determine \vec{H}_2 em $x = 0^+$.
Resp. $\vec{H}_2 = 16,5\vec{a}_y A/m$.

Campos Harmônicos no Tempo

11. Deduza as equações de Maxwell para campos harmônicos no tempo.
12. Determine os vetor de Poynting médio para os seguintes pares de campos:
(a) $\vec{E} = 5 \operatorname{sen}(\omega t + 50^\circ) \vec{a}_z$ e $\vec{H} = 3 \operatorname{sen}(\omega t + 30^\circ) \vec{a}_x$;
(b) $\vec{E} = 10 \operatorname{sen}(\omega t) \vec{a}_x$ e $\vec{H} = 2 \operatorname{cos}(\omega t) \vec{a}_y$. Resp. (a) $7,05\vec{a}_y$; (b) 0

13. Em um guia retangular temos que o campo eletromagnético é dado por $E_y = (C \omega \mu_0 a)/\pi \operatorname{sen}(\pi x/a) \operatorname{sen}(\omega t - kz)$, $H_x = -C \beta a/\pi \operatorname{sen}(\pi x/a) \operatorname{sen}(\omega t - kz)$ e $H_z = C \cos(\pi x/a) \cos(\omega t - kz)$. Expressse estes campos na forma fasorial. Resp. $\mathbf{E}_y = (C \omega \mu_0 a)/\pi \operatorname{sen}(\pi x/a) e^{-j\beta z}$, $\mathbf{H}_x = j C \beta a/\pi \operatorname{sen}(\pi x/a) e^{-j\beta z}$, $\mathbf{H}_z = C \cos(\pi x/a) e^{-j\beta z}$.
14. Encontre os valores médios no tempo das seguintes funções: (a) $A \cos 3\omega t$; (b) $A(\cos^2 \omega t + \cos^2 2\omega t)$; e (c) $A \cos^6 \omega t$. Resp. (a) 0; (b) A; (c) $\frac{5}{16}A$.
15. Determine o vetor de Poynting médio do exemplo 1.4.
Resp. $\vec{P}_m = 1,59 e^{-1,256z} \vec{a}_z$
16. O campo eletromagnético distante de uma antena dipolo que está no espaço livre e colocada na origem do sistema de coordenadas é dado por $\vec{E} = 100/r \operatorname{sen}\theta \cos(\omega t - kr) \vec{a}_\theta V/m$ e $\vec{H} = 0,265/r \operatorname{sen}\theta \cos(\omega t - kr) \vec{a}_\phi A/m$. Calcule a potência média que atravessa uma casca hemisférica definida por $r = 1Km$, $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Compare com a potência total emitida pela antena. Resp. $P_m \approx 55,5W$, $P_m/P_m^t = 1/2$.
17. Supondo que uma lâmpada de 100W emita toda a sua energia em forma de luz (desprezamos as outras perdas), uniformemente em todas as direções, estime os valores médios quadráticos dos campos $|\vec{E}|$ e $|\vec{H}|$ a uma distância de 1m da lâmpada. Resp. $|\vec{E}|^2 \approx 54,4V/m$ e $|\vec{H}|^2 \approx 0,15A/m$.
18. O campo magnético de uma onda eletromagnética propagando na direção $+z$ em um meio não magnético ($\mu = \mu_0$) é dado por $\vec{H} = 0,1 e^{-z} \cos(6\pi \times 10^7 t - \sqrt{3}z) \vec{a}_y A/m$. Determine: (a) o fluxo de potência instantâneo e o fluxo de potência média cruzando uma superfície de $1m^2$ de área no plano $z = 0$; (b) o fluxo de potência média cruzando uma superfície de $1m^2$ de área no plano $z = 1$. Resp. (a) $1,026W$, $0,513W$; (b) $0,069W$.
19. O campo eletromagnético de uma onda plana na forma fasorial é definido por $\mathbf{E} = 50 e^{j(\omega t - \beta z)} \vec{a}_x V/m$ e $\mathbf{H} = (5/12\pi) e^{j(\omega t - \beta z)} \vec{a}_y A/m$. Determine a potência média que atravessa uma área circular de $2,5 m$ de raio pertencente a um plano $z = \text{constante}$. Resp. $P_m = 65,1 W$.
20. No espaço livre temos $\vec{E}(z, t) = 150 \operatorname{sen}(\omega t - \beta z) \vec{a}_x V/m$. Calcule a potência média que atravessa uma área retangular de lados $30 mm$ e $15 mm$ situada no plano $z = 0$. Resp. $P_m = 13,4 mW$.

1.9 Referências

1. Paris Paris, D. T. e Hurd, F. K., "Teoria Eletromagnética Básica", Guanabara Dois, 1984.
2. Kraus Kraus, D. e Carver, K.R., "Eletromagnetismo", Guanabara Dois, 1978.
3. Hayt Hayt, William H. Jr., "Eletromagnetismo", 4^a Ed., Livros Técnicos e Científicos.