上海交通大學

学生课程报告

报告名称：DMC 算法设计

姓名：阮正鑫

学号：120032910012

邮箱：ruanzhengxin@sjtu.edu.cn

2021 年 3 月 30 日

1、设计要求

对于一个两输入两输出的多变量系统，其系统的输入输出关系如下

$$\begin{cases} Y_1(s) = G_{11}(s)U_1(s) + G_{12}(s)U_2(s) \\ Y_2(s) = G_{21}(s)U_1(s) + G_{22}(s)U_2(s) \end{cases}$$

针对该系统设计多变量 DMC 控制算法，实现队系统输出的控制。

2、多变量 DMC 原理

DMC 算法主要包括三个部分：预测模型、滚动优化和反馈校正

对于多输入多输出受控对象，若已测得每一输出y_i对每一输入u_i的单位阶跃响应$a_{ij}(t)$，则可由该阶跃相应的值组成模型向量

$$a_{\mathrm{ij}} = \left[a_{\mathrm{ij}}(1) \dots a_{\mathrm{ij}}(N)\right]^T, i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$$

其中 N 为模型时域长度。DMC 控制由出发，过对模型的阶跃响应的计算进行控制。

2.1 预测模型

DMC 的使用需要建立在预测模型的基础上。简单来说就是，DMC 控制器希望通过已有信息构造未来若干时刻的系统输入并预测系统的输出。由线性时不变（LTI）系统具备的比例叠加性质可知，在已知从 0 开始的系统 N 个采样点上的阶跃响应序列$\tilde{y}_0(k+1|k), \tilde{y}_0(k+2|k), \dots, \tilde{y}_0(k+N|k)$的情况下，在控制增量$\Delta u(k)$作用后系统的输出预测为

$$\tilde{y}_{N1}(\mathrm{k}) = \tilde{y}_{N0}(\mathrm{k}) + a\Delta u(k)$$

其中，$\tilde{y}_{N0}(\mathrm{k}) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_0(k+1|k) \\ \vdots \\ \tilde{y}_0(k+N|k) \end{bmatrix}$，表示无$\Delta u(k)$作用下未来 N 时刻系统输出，

$\tilde{y}_{N1}(\mathrm{k}) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_1(k+1|k) \\ \vdots \\ \tilde{y}_1(k+N|k) \end{bmatrix}$，表示有$\Delta u(k)$作用下未来 N 时刻系统输出。

同样，如果考虑到现在和未来M个时刻控制增量的变化，在$\mathrm{t} = \mathrm{kT}$时刻预测在控制增量$\Delta u(k), \dots \Delta u(k+M-1)$作用下系统在未来$\mathrm{P}$个时刻的输出为

$$\tilde{y}_{PM}(\mathrm{k}) = \tilde{y}_{P0}(\mathrm{k}) + A\Delta u_M(k)$$

其中，$\tilde{y}_{P0}(\mathrm{k}) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_0(k+1|k) \\ \vdots \\ \tilde{y}_0(k+P|k) \end{bmatrix}$，为$\mathrm{t} = \mathrm{kT}$时刻预测的无控制增量时未来$\mathrm{P}$个时刻的系统输出。

$\tilde{y}_{PM}(\mathrm{k})=\begin{bmatrix}\tilde{y}_M(k+1|k)\\ \vdots\\ \tilde{y}_M(k+P|k)\end{bmatrix}$，为为$\mathrm{t}=\mathrm{kT}$时刻预测的有控制增量时未来P个时刻的系统输出。

$\mathrm{A}=\begin{bmatrix}a_1 & 0 & & \cdots & 0\\ a_2 & a_1 & & \cdots & 0\\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots\\ a_p & a_{p-1} & \cdots & & a_{p-M+1}\end{bmatrix}$称为动态矩阵，其元素为描述系统动态特性的阶跃响应系数。

2.2 滚动优化

DMC 是以优化确定控制策略的算法。在采样时刻$\mathrm{t}=\mathrm{kT}$的优化性能指标可取为

$$\min J(k)=\sum_{i=1}^{P}q_i[\omega(k+i)-\tilde{y}_M(k+i|k)]^2+\sum_{j=1}^{M}r_j\Delta u^2(k+j-1)$$

通过选择该时刻起M个时刻的控制增量$\Delta u(k),\ldots,\Delta u(k+M-1)$，使系统在未来P个时刻的输出值$\tilde{y}_M(k+1|k),\ldots,\tilde{y}_M(k+P|k)$ 尽可能接近其期望值$\omega(k+1),\ldots,\omega(k+P)$。性能指标中的第二项是对控制增量的约束，即不允许控制量的变化过于剧烈。式中q_i,r_j为权系数， P和M分别称为优化时域长度和控制时域长度。

显然，在不同时刻，优化性能指标是不同的，但其相对形式却是一致的，都具有类似于(2-1)的形式，所谓“滚动优化”，就是指优化时域随时间不断地向前推移。

引入向量和矩阵记号

$$\omega_p(k)=\begin{bmatrix}\omega(k+1)\\ \vdots\\ \omega(k+P)\end{bmatrix},Q=diag(q_1,\ldots,q_P),\mathrm{R}=\mathrm{diag}(\mathrm{r}_1,\ldots,\mathrm{r}_\mathrm{M})$$

可将优化性能指标改写为：

$$\min J(k)=\left\|\omega_p(k)-\tilde{y}_{PM}(k)\right\|_Q^2+\|\Delta u_M(k)\|_R^2$$

通过极值条件可以获得控制量

$$\Delta u_M(k)=(A^TQA+R)^{-1}\mathrm{A}^\mathrm{T}Q[\omega_p(k)-\tilde{y}_{P0}(k)]$$

这就是 t=kT 时刻解得的最优控制增量序列。由于这一最优解完全是基于预测模型求得的因而是开环最优解。

2.3 反馈校正

由于模型误差、弱非线性特性及其它在实际过程中存在的不确定因素，按预测模型得到的开环最优控制规律式不一定能导致系统输出紧密地跟随期望值，它也不能顾及对象受到的扰动。为了纠正模型预测与实际的不一致，必须及时地利用过程的误差信息对输出预测值进行修正为此，在 t=kT 时刻首先实施$\Delta u_M(k)$中的第一个控制作用。

$$\Delta u(k) = c^T \Delta u_M(k) = c^T (A^T Q A + R)^{-1} \mathrm{A}^{\mathrm{T}} Q \left[\omega_p(k) - \tilde{y}_{P0}(k)\right]$$

$$= \mathrm{d}^{\mathrm{T}} \left[\omega_p(k) - \tilde{y}_{P0}(k)\right]$$

到下一个采样时刻 t=(k+1)T, 获得预测误差

$$e(k+1) = y(k+1) - \tilde{y}_1(k+1|k)$$

这一误差反映了模型中未包含的各种不确定因素，如模型失配、干扰等。由于预测误差的存在，以后各时刻输出值的预测也应在模型预测的基础上加以校正。

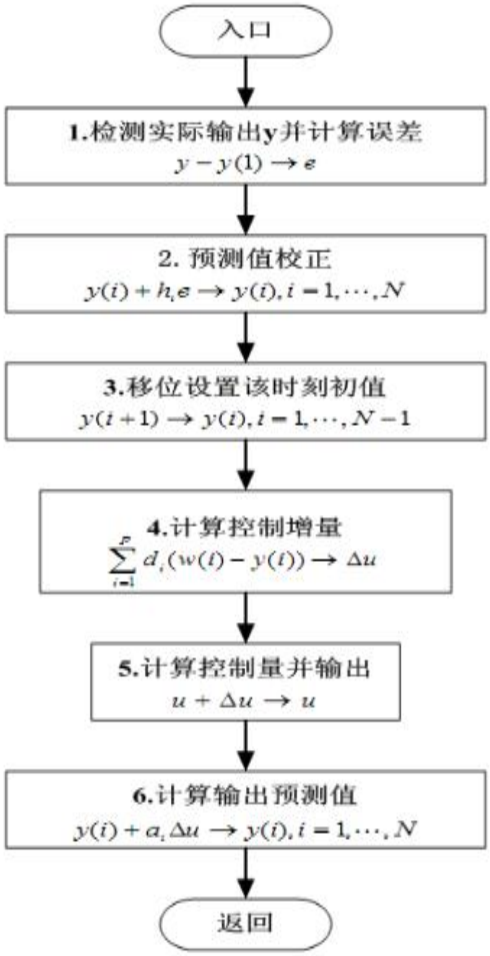
$$\tilde{y}_{cor}(k+1) = \tilde{y}_{N1}(k) + he(k+1)$$

其中$\tilde{y}_{cor}(k+1) = \begin{bmatrix} \tilde{y}_{cor}(k+1|k+1) \\ \vdots \\ \tilde{y}_{cor}(k+N|k+1) \end{bmatrix}$为经误差校正后所预测的系统在$\mathrm{t} = (\mathrm{k}+\mathrm{i})\mathrm{T}, \mathrm{i} = 1, \dots., \mathrm{N}$时刻的输出。$\mathrm{h} = \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_N \end{bmatrix}$为误差校正向量。

$$\tilde{y}_0(k+1+i|k+1) = \tilde{y}_{cor}(k+1+i|k+1), i = 1, \dots, N-1$$

对于$\tilde{y}_{N0}(k+1)$ 中的最后一个分量，可由$\tilde{y}_0(k+N|k+1)$来近似。在$\mathrm{t} = (\mathrm{k}+1)\mathrm{T}$ 时刻进行新的预测优化，整个控制就是在这样推移的过程中滚动进行。

3、多变量DMC实现



根据以上思路，在 MATLAB 中实现该多变量 DMC 控制算法。

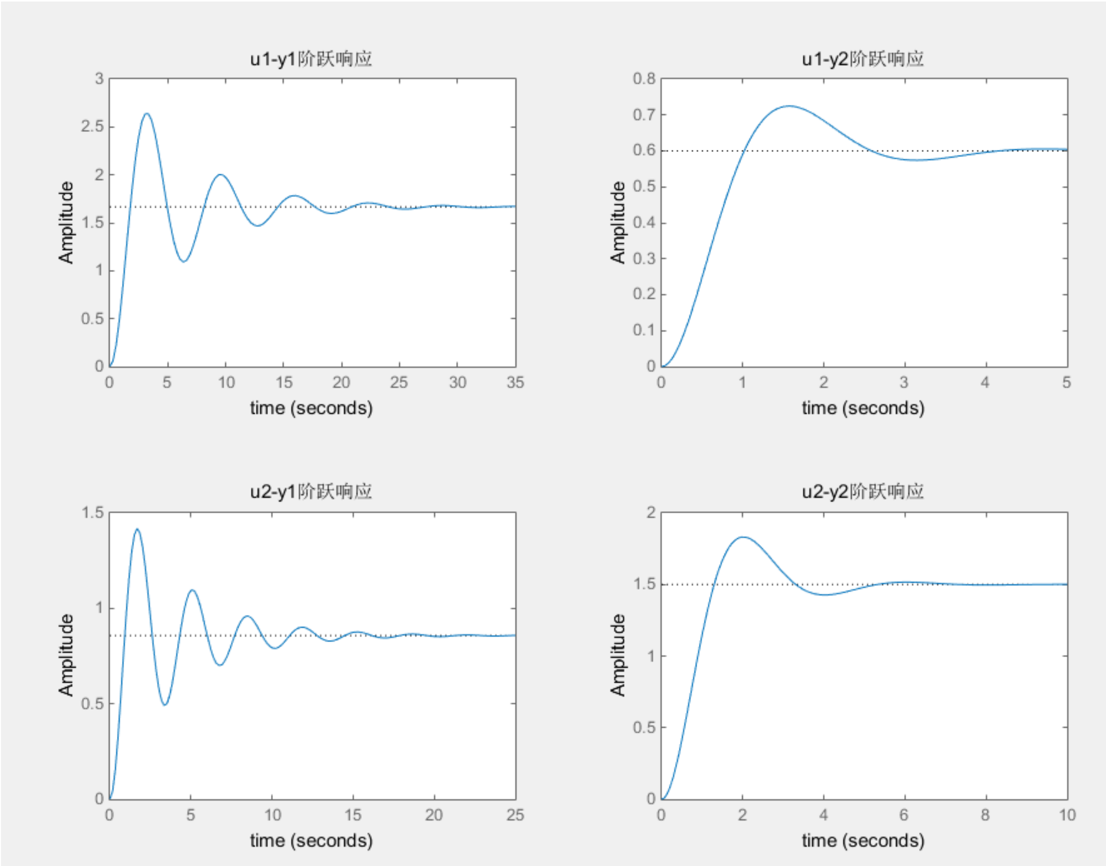
由前文可知，系统输入输出可写为：

$$\begin{bmatrix} Y_1(s) \\ Y_2(s) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} G_{11}(s) & G_{12}(s) \\ G_{21}(s) & G_{22}(s) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1(s) \\ U_2(s) \end{bmatrix}$$

本次设计的系统，传递函数矩阵为：

$$\mathrm{G} = \begin{bmatrix} \dfrac{5}{3s^2 + s + 3} & \dfrac{3}{s^2 + 2s + 5} \\ \dfrac{5}{2s^2 + s + 7} & \dfrac{5}{2s^2 + 3s + 6} \end{bmatrix}$$

该系统阶跃响应如下图所示：



3.1 参数调整

（1）建模时域 N

观察以上四个输入输出的阶跃响应，因为采样周期为$T = 0.5s$，因此可以取$N = 40$，可以使得a_N达到阶跃相应稳态值。

（2）优化时域 P

观察以上四个输入输出的阶跃响应，当$T = 6s$时动态过程都经历了一个周期震荡，因此选择$P = 12$。

（3）控制时域 M

该系统是一个包含了振荡的比较复杂的对象，经过调整选择$M = 6$。

（4）误差权矩阵 Q

经过参数调整，选择 Q 如下：

$$Q = block - diag(Q_1, Q_2)$$

$$Q_1 = 3I_p$$

$$Q_2 = I_P$$

（5）控制权矩阵 R

经过参数调整，选择 R 如下：

$$R = block - diag(R_1, R_2)$$

$$\mathrm{R}_1 = 400I_M$$

$$\mathrm{R}_2 = 300I_M$$

（6）校正参数矩阵 H

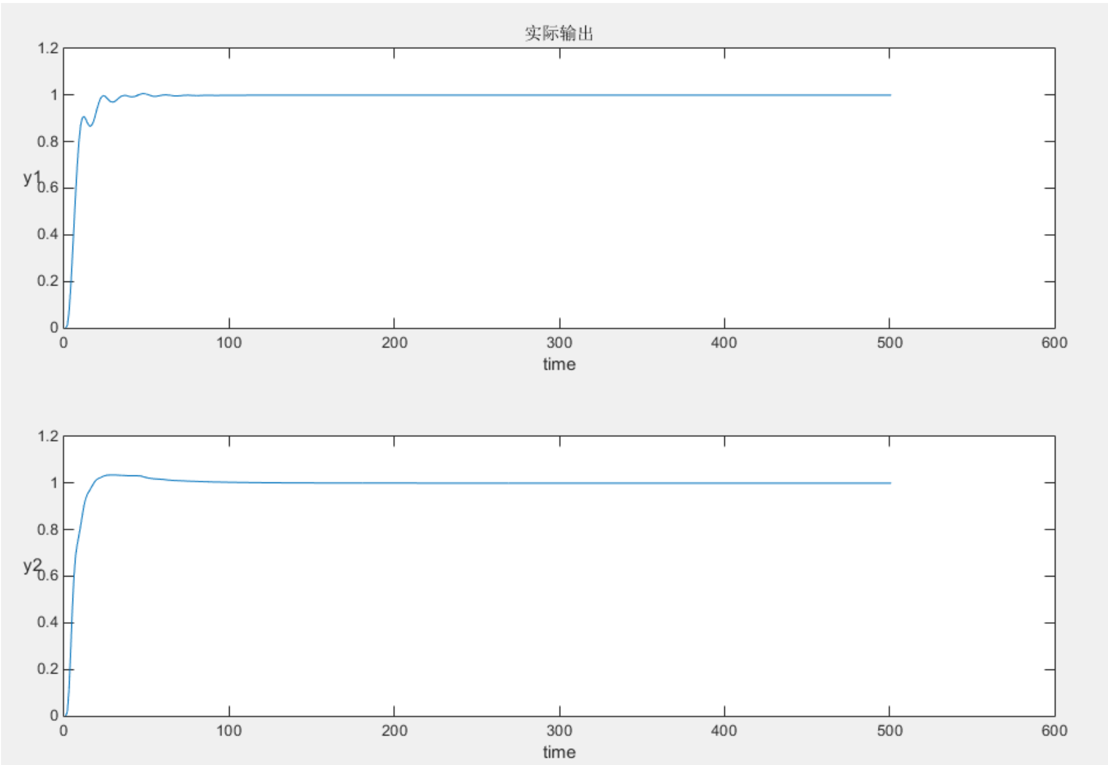
$$\mathrm{H} = \begin{bmatrix} H_! \\ H_2 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{H}_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & 0 \end{bmatrix}_{40\times 2}$$

$$\mathrm{H}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{40\times 2}$$

3.2 算法结果

根据 DMC 控制算法原理，我们在 MATLAB 中设计了针对该对象的 DMC 控制算法。MATLAB 代码如附件所示。运行控制结果如下图所示：



如图所示，模型的控制结果比较理想，基本能近似阶跃响应。输出有抖动的情况存在，在尝试了多组 Q\R 参数的选择之后，最大程度消除抖动。