Señales y Sistemas

Práctica 3

La transformada de Fourier
en tiempo continuo

ÍNDICE

1. Introducción teórica
2. Ejercicios

1. Introducción teórica

En esta práctica se va a hacer uso de la Transformada de Fourier. MATLAB, como ya se ha visto, trabaja con vectores, en definitiva con un conjunto finito de muestras de las señales a utilizar. Sin entrar en detalles de representación de señales muestreadas, su problemática, etc., vamos a ver la relación existente entre la transformada de una señal continua y el resultado que MATLAB proporciona.

La transformada de Fourier de una señal continua $x(t)$ real de duración finita de t_{min} a t_{max} segundos viene dada por la expresión:

$$X(f) = \int_{t_{min}}^{t_{max}} x(t) \cdot e^{-j2\pi ft} \, \mathrm{d}t \tag{1}$$

Una aproximación a la integral (figura 1) puede hacerse mediante una suma del área de M rectángulos de duración Δt:

$$X(f) \cong \sum_{n=0}^{M-1} x(t_n) \cdot e^{-j2\pi f t_n} \cdot \Delta t = \\ = \sum_{n=0}^{M-1} x(t_n) \cdot \cos(2\pi f t_n) \cdot \Delta t - j \cdot \sum_{n=0}^{M-1} x(t_n) \cdot \mathrm{sen}(2\pi f t_n) \cdot \Delta t \tag{2}$$

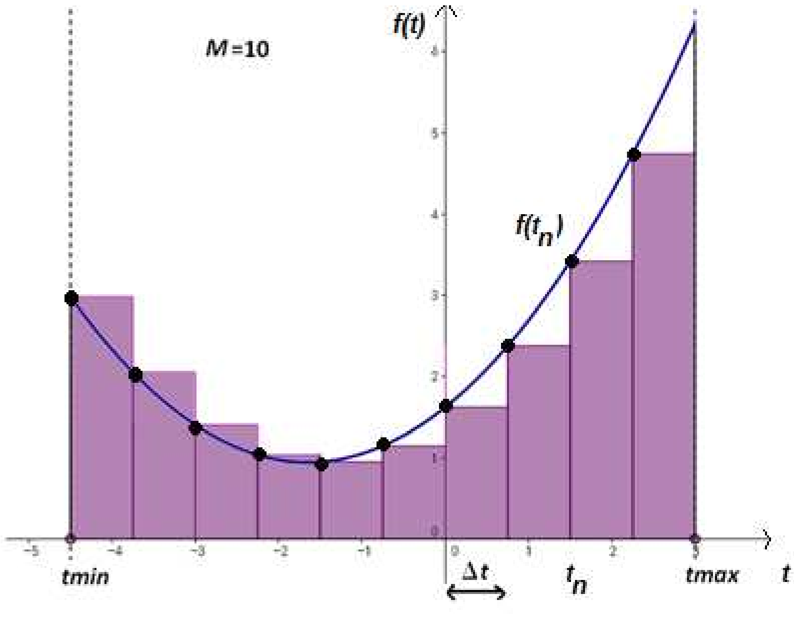

Figura 1. Ejemplo de aproximación de una integral por suma de áreas de rectángulos.

El parámetro Δt indica la separación temporal entre muestras y juega un papel importante en la exactitud de la aproximación. Cuanto menor sea Δt, mejor será esta aproximación.

La aproximación de la integral por la suma depende también de la frecuencia concreta que se esté calculando. Suponga que quiere calcular $X(f)$ en $f = f_k$. Deberá elegir un Δt suficientemente pequeño para que las sinusoides de (2) estén muestreadas con un número suficiente de muestras en cada periodo de manera que permita la aproximación de la integral por la suma.

Si se parte de un Δt dado para aproximar (2), conforme se incrementa el valor f el número de puntos por periodo con que se representan las sinusoides es cada vez menor. El límite ocurrirá a la frecuencia $f = F_{max}$ siendo:

$$F_{max} = \frac{1}{2 \cdot \Delta t} \tag{3}$$

donde en cada sinusoide de (2) se han tomado únicamente dos muestras por periodo. Para una frecuencia mayor que F_{max}, la aproximación de $X(f)$ no resulta válida.

Si se desea obtener N puntos de la transformada de Fourier en el rango de frecuencias $-F_{max} < f < F_{max}$, resulta un espaciado en frecuencia Δf de valor

$$\Delta f = \frac{2F_{max}}{N} \tag{4}$$

Esto lleva a calcular $X(f)|_{f=f_k}$ obteniéndose,

$$X(f_k) \cong \sum_{n=0}^{M-1} x(t_n) \cdot e^{-j2\pi f_k t_n} \cdot \Delta t \tag{5}$$

con,

$$f_k = k\Delta f, \qquad k = -\frac{N}{2}, \dots, \frac{N}{2} - 1 \tag{6}$$

El número de puntos N a hallar de la transformada de Fourier debe ser mayor que el número de muestras de $x(t)$ en el tiempo, esto es, se tiene que cumplir $N \geq M$. Además, es conveniente que N sea una potencia de 2.

El cálculo de la ecuación (5) puede realizarse MATLAB mediante una función que calcule la **Tr**ansformada de **F**ourier **A**proximada. Su estructura será:

```
[X,f] = trfa (x, t, N)
```

Respecto a las entradas de la función, el vector de entrada `x` contendrá las muestras de la señal analógica $x(t)$, y el vector `t` indicará los instantes del eje temporal en que se han tomado las muestras.

La salida X será un vector que contendrá los valores aproximados de la función compleja $X(f)$ y, análogamente, el vector `f` indicará los valores de frecuencia f_k a los que corresponden las muestras $X(f_k)$ contenidas en el vector X.

Para evitar errores numéricos en el cálculo de la fase de la Transformada de Fourier es conveniente que $x(t)$, definida para $t_{min} \leq t \leq t_{max}$, tome valores distintos de cero tan cerca de t_{min} como sea posible y que, además, t_{min} sea de valor cero o próximo a cero.

2. Ejercicios

1) Programe la función **Transformada de Fourier Aproximada** comentada previamente:

```
[X,f] = trfa (x, t, N)
```

2) Calcule la transformada de Fourier de la función,

$$x(t) = \prod\left(\frac{t}{T}\right)$$

Considere $T = 20$ ms. Utilice $N = 1024$ y $\Delta t = 1$ ms.

- ¿Cuál es la Transformada de Fourier teórica de $x(t)$?
- ¿Coincide la Transformada de Fourier Aproximada obtenida con la Transformada de Fourier teórica?
- Evalúe **(a)** la anchura del lóbulo principal de $X(f)$, **(b)** el valor máximo de $X(f)$ y **(c)** el nivel de lóbulo principal a secundario en decibelios.

3) Repita el apartado anterior para la función:

$$x(t) = \cos\left(2\pi f_0\left(t - \frac{T}{2}\right)\right) \cdot \prod\left(\frac{t - T/2}{T}\right)$$

Siendo $f_0 = 280$ Hz y $T = 20$ ms. Utilice $N = 4096$ y $\Delta t = 1/6$ ms.

Responda a las mismas cuestiones del ejercicio **2)**.