# II – O Modelo de Programação Linear

## Exemplo 1

Um fazendeiro deseja otimizar as plantações de arroz e milho da sua quinta, ou seja, quer saber que áreas deve plantar de arroz e de milho de modo a ser máximo o lucro obtido das plantações.

O lucro por unidade de área plantada de arroz e de milho é de, respetivamente, 5 e 2 unidades monetárias (UM).

As áreas plantadas de arroz e milho não devem ser maiores que 3 e 4 unidades de área, respetivamente.

O consumo total de mão-de-obra (medido em homens/hora) nas duas plantações não deve ser maior do que 9. Cada unidade de área plantada de arroz necessita de 1 homem/hora e cada unidade de área plantada de milho necessita de 2 homens/hora.

**Variáveis de decisão**:

- nº de unidades de área a plantar de arroz;
- nº de unidades de área a plantar de milho.

**Função objetivo**:

- maximizar o lucro a obter das plantações.

**Restrições**:

- área dos terrenos;
- mão de obra disponível.

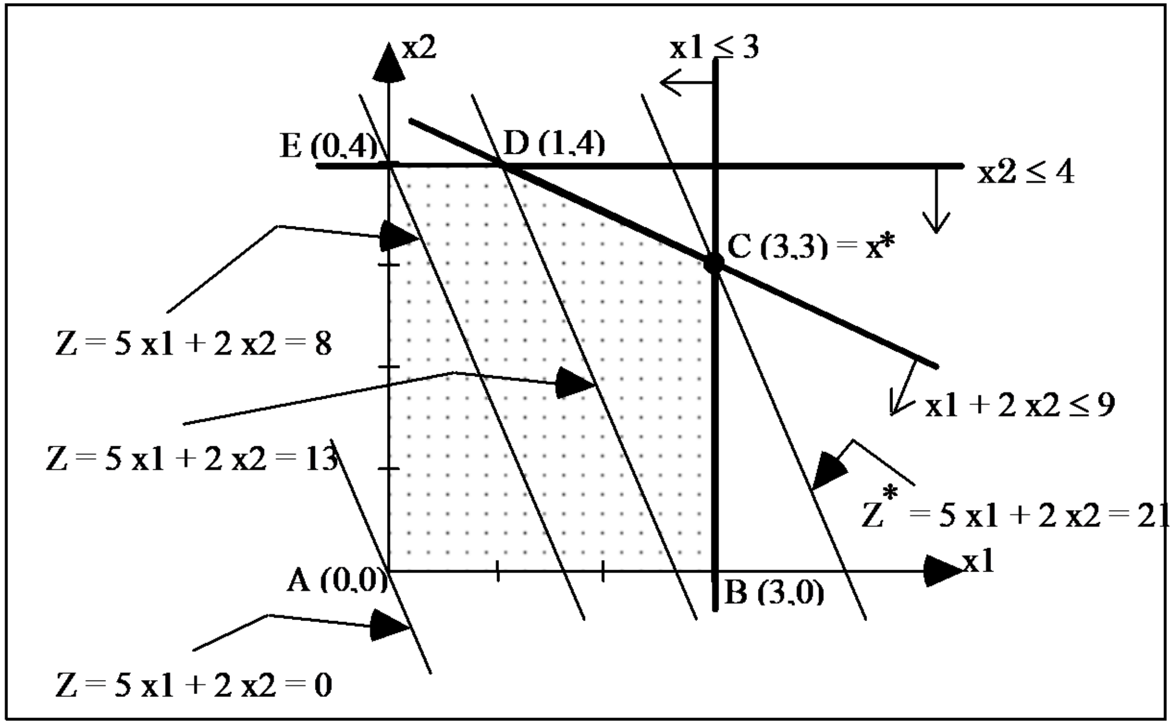
| | Arroz | Milho | Disponibilidades |
|---|---|---|---|
| **Área 1** | x | | 3 |
| **Área 2** | | x | 4 |
| **Mão-de-obra** | 1 | 2 | 9 |
| **Lucro** | 5 | 2 | *max* |

Ou seja, o problema consiste em:

Determinar
$x_1$ = nº de unidades de área a plantar de arroz
$x_2$ = nº de unidades de área a plantar de milho

de modo a
maximizar $z = 5\,x_1 + 2\,x_2$
sujeito a

$$x_1 \leq 3$$
$$x_2 \leq 4$$
$$x_1 + 2\,x_2 \leq 9$$
$$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$$



# Exemplo 2

Uma empresa de mobiliário de escritório pretende lançar um modelo de secretárias e de estantes.

Pensa-se que o mercado pode absorver toda a produção de estantes, mas aconselha-se a que a produção mensal de secretárias não ultrapasse as 160 unidades.

Ambos os produtos são processados em duas unidades diferentes: unidade de estampagem (UE) e unidade de montagem e acabamento (UMA). A disponibilidade mensal em cada uma destas unidades é de 720 horas/máquina na UE e de 880 horas/máquina na UMA. Cada secretária necessita de 2 horas/máquina na UE e 4 horas/máquina na UMA; cada estante necessita de 4 horas/máquina na UE e 4 horas/máquina na UMA.

O lucro obtido por cada secretária produzida é de 6 unidades monetárias (UM) e por cada estante produzida é de 3 unidades monetárias (UM).

Pretende-se saber qual o plano de produção mensal de secretárias e de estantes que maximiza o lucro.

**Variáveis de decisão**:

- número de secretárias a produzir por mês;
- número de estantes a produzir por mês.

**Função objetivo**:

- maximizar o lucro mensal.

**Restrições**:

- disponibilidades das UE e UMA;
- mercado.

Logo, o problema consiste em:

Determinar

$x_1$ = número de secretárias
a produzir por mês

$x_2$ = número de estantes
a produzir por mês

de modo a

maximizar $z = 6\ x_1 + 3\ x_2$

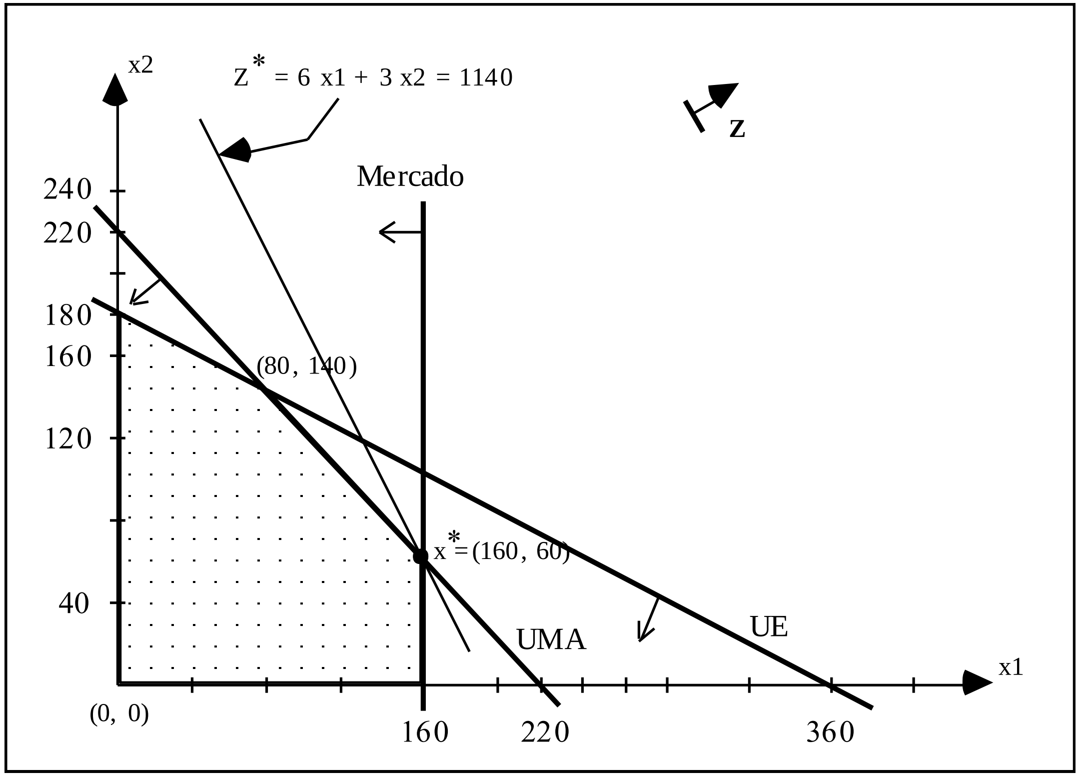
sujeito a

$2\ x_1 + 4\ x_2 \leq 720$

$4\ x_1 + 4\ x_2 \leq 880$

$x_1 \leq 160$

$x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0$




# Exemplo 3

Uma companhia de navegação possui um navio com três porões de carga: à proa, ao centro e à ré.

Os limites de capacidade dos porões são de:

| Porão | Tonelagem (toneladas) | Volume ($m^3$) |
|---|---|---|
| Proa | 2.000 | 100.000 |
| Centro | 3.200 | 14.000 |
| Ré | 1.800 | 80.000 |

À empresa são oferecidas duas cargas (A e B), cada uma das quais pode aceitar total ou parcialmente.

| Carga | Peso (toneladas) | Volume ($m^3$/tonelada) | Lucro (UM/tonelada) |
|---|---|---|---|
| A | 7.000 | 60 | 20 |
| B | 4.000 | 25 | 16 |

De modo a preservar-se o equilíbrio do navio, deve manter-se a proporção entre o peso em cada um dos porões e as tonelagens respetivas.

A empresa pretende saber qual é a melhor maneira de carregar o navio de modo a maximizar o lucro.

Determinar

$x_{ij}$ = nº de toneladas da carga i (i = A, B) a transportar no porão j (j = 1 (→ proa), 2 (→ centro), 3 (→ ré))

de modo a

maximizar $z = 20(x_{A1}+x_{A2}+x_{A3}) + 16(x_{B1}+x_{B2}+x_{B3})$

sujeito a

$$x_{A1} + x_{B1} \leq 2000$$

$$x_{A2} + x_{B2} \leq 3200$$

$$x_{A3} + x_{B3} \leq 1800$$

$$60\ x_{A1} + 25\ x_{B1} \leq 100000$$

$$60\ x_{A2} + 25\ x_{B2} \leq 14000$$

$$60\ x_{A3} + 25\ x_{B3} \leq 80000$$

$$\frac{x_{A1}+x_{B1}}{2000} = \frac{x_{A2}+x_{B2}}{3200} = \frac{x_{A3}+x_{B3}}{1800}$$

$$x_{A1} + x_{A2} + x_{A3} \leq 7000$$

$$x_{B1} + x_{B2} + x_{B3} \leq 4000$$

$x_{ij} \geq 0$ para todo o i e todo o j

# Modelo de Programação Linear

Genericamente pode formular-se um problema de programação linear como se segue:

## *a) Forma Cartesiana*

Determinar

$$x_1, x_2, \ldots, x_j, \ldots, x_n \geq 0$$

de modo a

$$\text{maximizar } z = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \ldots + c_j x_j + \ldots + c_n x_n$$

sujeito a

$$\begin{array}{lllllllll}
a_{11} x_1 & + a_{12} x_2 & + \ldots & + a_{1j} x_j & + \ldots & + a_{1n} x_n & \leq b_1 \\
a_{21} x_1 & + a_{22} x_2 & + \ldots & + a_{2j} x_j & + \ldots & + a_{2n} x_n & \leq b_2 \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
a_{i1} x_1 & + a_{i2} x_2 & + \ldots & + a_{ij} x_j & + \ldots & + a_{in} x_n & \leq b_i \\
 & \vdots & & \vdots & & \vdots & \\
a_{m1} x_1 & + a_{m2} x_2 & + \ldots & + a_{mj} x_j & + \ldots & + a_{mn} x_n & \leq b_m
\end{array}$$

## *b) Forma Matricial*

Determinar

$$\mathbf{x} \geq \mathbf{0}$$

de modo a

$$\text{maximizar } z = \mathbf{c}'\mathbf{x}$$

sujeito a

$$\mathbf{Ax} \leq \mathbf{b}$$

Para um problema com **n** variáveis e **m** restrições verifica-se que:

| | |
|---|---|
| **x** | é um vetor $n \times 1$ |
| **0** | é um vetor $n \times 1$ |
| z | é um escalar |
| **c** | é um vetor $n \times 1$ |
| **A** | é uma matriz $m \times n$ |
| **b** | é um vetor $m \times 1$ |

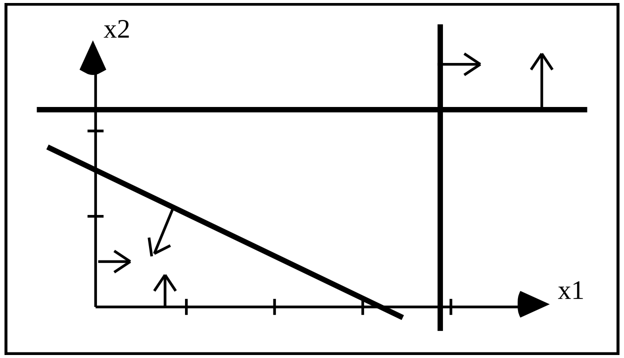
**Notar que**:

- a operação de otimização pode ser uma *minimização*;
- as restrições podem ser do tipo "≥" ou "=";
- algumas das variáveis de decisão podem não ser *não negativas*.

# Casos particulares

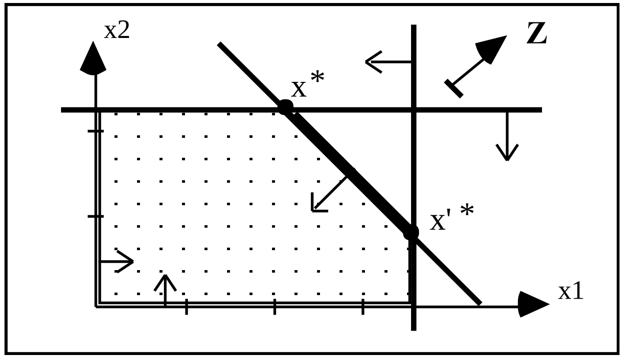
- **Solução inexistente**

  (não existe região admissível)



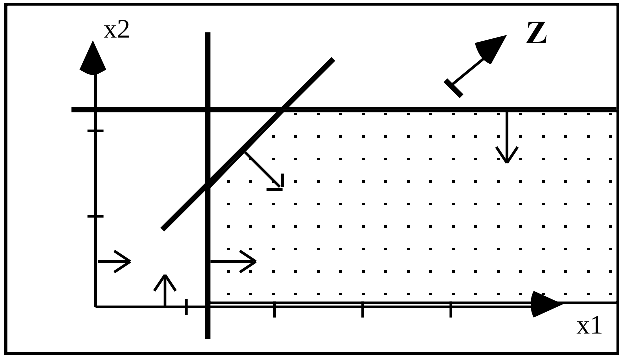

- **Ótimos alternativos**

  (o valor ótimo da função objetivo pode ser obtido através de múltiplas combinações de recursos)



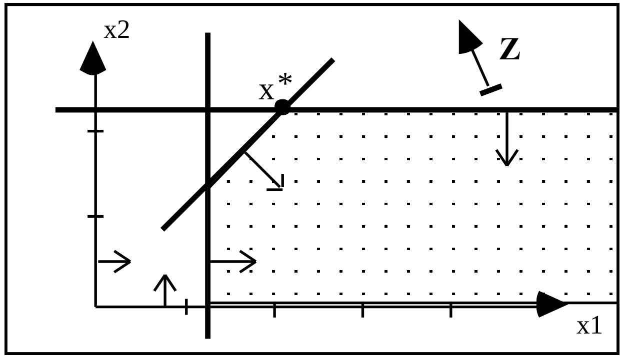
## ➢ Solução não limitada

(valor ótimo não finito)




## ➢ Solução ótima

(embora região admissível não limitada)



## ➢ Solução ótima finita

(com variáveis a poderem assumir valores arbitrariamente grandes)