Hoja de Trabajo No. 2

Repaso de Cálculo Multivariable

1. Determine si las siguientes proposiciones son verdaderas o falsas, en caso de ser falsas, justifique su respuesta.

   a) Dada un función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, si $f'(c) = 0$ entonces f tiene un máximo o mínimo local en $x = c$.

   b) Suponga que la función $T = f(x, y, t)$ modela la temperatura T (en °C) en un lugar del hemisferio norte que depende de la longitud x, latitud y y el tiempo t. La derivada parcial $\dfrac{\partial T}{\partial x}$ representa la tasa de cambio de T cuando x está fija.

   c) Considere la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ y $d \in \mathbb{R}^n$, si $\nabla f(x)^T d > 0$ entonces d es una dirección de descenso (i.e. una dirección en la cual f disminuye).

   d) Dada la función $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, el vector gradiente $\nabla f(x)$ indica la dirección del incremento más rápido de f.

   e) Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, el vector gradiente $\nabla f(x_0, y_0)$ es paralelo a la curva de nivel $f(x, y) = k$ que pasa por el punto $P(x_0, y_0)$.

   f) Una serie de Taylor aproxima una función f para valores cercanos a un número x_0 en el dominio de dicha función.

2. Dada la función:

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\ni} \quad f(x, y) = e^{-\frac{(x^2+y^2)}{3}} \left(\sin(x^2) + \cos(y^2)\right),$$

   utilice cualquier software para graficar dicha función y algunas *curvas de nivel* de la misma.

3. Dada la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\ni}$

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^4 - 2x_1^3 x_2 - 4x_1^2 x_2^2 + 5x_1 x_2^3 + 2x_2^4,$$

   calcular:

   a) $\nabla f(x_1, x_2)$,
   b) $\nabla^2 f(x_1, x_2)$,
   c) Indique la *dirección de máximo descenso* en el punto $P(1, -1)$.
   d) Indique la *tasa de máximo descenso* en el punto $P(1, -1)$.
   e) Calcule la *derivada direccional* de f en el punto $P(1, -1)$ y en dirección del vector $d = \dfrac{1}{\sqrt{2}}[1, -1]^T$.

4. Encontrar una *polinomio de Taylor* de grado 2 para la función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}_{\ni}$

$$f(x_1, x_2) = 3x_1^4 - 2x_1^3 x_2 - 4x_1^2 x_2^2 + 5x_1 x_2^3 + 2x_2^4,$$

   en el punto $x_0 = [1, -1]^T$. Evalúe dicho polinomio para $p = [0.1, 0.01]^T$ y compare su resultado con el valor de $f(x_0 + p)$.

Proyecto Final – Fase 0

El proyecto final consiste en la elaboración de una *librería* de los *algoritmos de optimización* más relevantes para ciencia de datos. El objetivo de esta asignación es que usted lleve a la práctica la teoría desarrollada en clase al implementar cada uno de los algoritmos estudiados, así como evaluar y analizar el desempeño de los mismos dentro del ámbito de la ciencia de datos.

Este proyecto se desarrollará en *R* y *Python*. Por un lado, se trabajará el *front-end* de la aplicación utilizando la librería *shiny* de *R*, la cual permite desarrollar aplicaciones web de forma rápida y orientadas al usuario. Por otro lado, el *back-end* se implementará en *Python* y cualquier otra dependencia que considere necesaria para facilitar la implementación (e.g. *numpy*, *scipy*, *pandas*, etc). Para la comunicación entre las dos entidades se utilizará la librería *reticulate* de *R*, la cual permite intercambiar información entre ambos lenguajes por medio de argumentos en funciones.

A continuación le damos una serie de recomendaciones importantes:

- Este proyecto se irá construyendo a lo largo de todo el curso y se estará trabajando por fases.
- El proyecto se trabajarán en grupos de 2 personas como máximo.
- Cada fase se describirá al final de cada hoja de trabajo y el contenido de la misma estará en línea con el tema tratado en clase.
- Es muy importante que usted vaya elaborando cada fase conforme se le presenten, de lo contrario se le acumulará todo el trabajo para el final del trimestre.
- Para medir el funcionamiento de sus algoritmos se utilizarán una serie de problemas similares a los que se plantean en las hojas de trabajo, de este modo usted se asegura que su programa reciba una entrada con un formato conocido.
- La entrega del proyecto final está programada para el **9 de Septiembre de 2020**.

En esta fase 0 del proyecto, el objetivo central es que usted se familiarice con las distintas herramientas a utilizar a lo largo del curso. Para ello, se iniciará con la implementación de algunos métodos numéricos para *diferenciación numérica*, estos son: diferencias finitas centradas y progresivas. A continuación se presentan los algoritmos de los tres métodos a implementar, cuyo objetivo es aproximar el valor de la derivada de una función de una variable real f en un número real x_0 dado. [1]

Algoritmo – Diferencias Finitas Centradas (2 puntos)

1. *Input:* la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, los números reales x_0 y h.
2. Calcular el valor de $f(x_0 + h)$.
3. Calcular el valor de $f(x_0 - h)$.
4. Calcular $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0 - h)}{2h}$.
5. *Output:* $f'(x_0)$.

[1] En toda la discusión, asumimos que f es diferenciable en x_0 y que x_0 pertenece al dominio de f.

Algoritmo – Diferencias Finitas Progresiva (3 puntos)

1. *Input:* la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, los números reales x_0 y h.
2. Calcular el valor de $f(x_0)$.
3. Calcular el valor de $f(x_0 + h)$.
4. Calcular el valor de $f(x_0 + 2h)$.
5. Calcular $f'(x_0) \approx \dfrac{-3f(x_0) + 4f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{2h}$.
6. *Output:* $f'(x_0)$.

Algoritmo – Diferencias Finitas Centradas (4 puntos)

1. *Input:* la función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, los números reales x_0 y h.
2. Calcular el valor de $f(x_0 + h)$ y $f(x_0 - h)$.
3. Calcular el valor de $f(x_0 + 2h)$ y $f(x_0 - 2h)$.
4. Calcular $f'(x_0) \approx \dfrac{f(x_0 - 2h) - 8f(x_0 - h) + 8f(x_0 + h) - f(x_0 + 2h)}{12h}$.
5. *Output:* $f'(x_0)$.

Implemente cada uno de los métodos anteriores y conteste a las preguntas: ¿cuál de los algoritmos anteriores funciona "mejor"? ¿por qué? ¿qué sucede cuando varía el valor de h? Para responder a estas preguntas, construya una tabla con el valor "exacto" de la derivada, su aproximación y el error.

Finalmente, deberá *extender* los métodos anteriores para calcular *numéricamente* el *gradiente* de una función $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ en un punto $P(x_0, y_0)$ dado. Es decir, su rutina recibirá una función f de dos variables, un punto P y el valor de h, y devolverá una aproximación del vector gradiente en dicho punto. Luego de esto conteste las preguntas: ¿cuál de los algoritmos anteriores funciona "mejor"? ¿por qué? ¿qué sucede cuando varía el valor de h? Para responder a estas preguntas y comparar los resultados de los distintos enfoques propuestos, deberá construir una tabla con el valor del gradiente "verdadero", su aproximación y la norma del error.