1.6. (a) 最初に分子を t で表す。

$$
\begin{aligned}
a+b\cos\theta+c\sin\theta &= a+b(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)+2c\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} \\
&= \left(\frac{a-b}{\cos^2\frac{\theta}{2}}+2c\cdot\frac{\sin\frac{\theta}{2}}{\cos\frac{\theta}{2}}+2b\right)\cdot\cos^2\frac{\theta}{2} \\
&= (a-b)+2c\cdot\frac{t}{1+t^2}+2b\cdot\frac{1}{1+t^2} \\
&= \left\{(a-b)(1+t^2)+2c\cdot t+2b\right\}\frac{1}{1+t^2} \\
&= \left\{(a-b)t^2+2c\cdot t+a+b\right\}\frac{1}{1+t^2}
\end{aligned}
$$

次にこれを用いてもとの積分を t で表す。

$$
\begin{aligned}
\int\frac{a+b\cos\theta+c\sin\theta}{d+e\cos\theta+f\sin\theta}d\theta &= \int\frac{a+b(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)+2c\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}{d+e(2\cos^2\frac{\theta}{2}-1)+2f\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}}d\theta \\
&= \int\frac{(a-b)t^2+2c\cdot t+a+b}{(d-e)t^2+2f\cdot t+d+e}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt
\end{aligned}
$$

(b) 計算をする前に 2 つの公式の紹介と導出をする。
(x, t のどちらか一方で表そうとしたが疲れた。)

$$\int x\log x dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2 \tag{1}$$
$$\int \frac{t^2}{1+t}dt = \log|1+t| - \frac{1}{2}(t-3)(t+1) \tag{2}$$

(1) の式を求める。

$$\int x\log x dx = x(x\log x - x) - \int (x\log x - x)dx$$
$$2\int x\log x dx = x(x\log x - x) + \frac{1}{2}x^2$$
$$\int x\log x dx = \frac{1}{2}x^2\log x - \frac{1}{4}x^2$$

(2) の式を求める。

$$\begin{aligned}\int \frac{t^2}{1+t}dt &= \int t^2\left(\log|1+t|\right)' dt \\ &= t^2\log|1+t| - \int 2t\log|1+t|dt \\ &= t^2\log|1+t| - 2\int \left\{(1+t)\log|1+t| - \log|1+t|\right\}dt \\ &= t^2\log|1+t| - \left\{(1+t)^2\log|1+t| - \frac{1}{2}(1+t)^2\right\} + 2\left\{(1+t)\log|1+t| - (1+t)\right\} \\ &= \log|1+t| - \frac{1}{2}(t-3)(t+1)\end{aligned}$$

$$\int\{(t-1)+\frac{1}{1+t}\}$$

で計算すれば楽になると後から気づいた。定数項は各々が好きにするといい。

最初に分母を t で表す。((**a**) で求めた分子の式に $a=1, b=1, c=1$ を代入すればいい事に見直し気づいたが、せっかくなので残した。)

$$
\begin{aligned}
1+\cos x+\sin x &= 1+(2\cos^2\frac{x}{2}-1)+2\cos\frac{x}{2}\sin\frac{x}{2} \\
&= \frac{(1+t^2)+(1-t^2)+2t}{1+t^2} \\
&= 2\cdot\frac{1+t}{1+t^2}
\end{aligned}
$$

(**a**) で求めた分子の式と先ほどの公式 (2) を用いる。

$$
\begin{aligned}
\int\frac{a+b\cos\theta+c\sin\theta}{1+\cos\theta+\sin\theta}d\theta &= \int\{(a-b)t^2+2c\cdot t+(a+b)\}\cdot\frac{1+t^2}{2(1+t)}\cdot\frac{2}{1+t^2}dt \\
&= \int\left\{(a-b)\cdot\frac{t^2}{(1+t)}+2c\cdot\frac{t}{(1+t)}+(a+b)\cdot\frac{1}{(1+t)}\right\}dt \\
&= (a-b)\left\{\log|1+t|-\frac{1}{2}(t-3)(t+1)\right\} \\
&\quad +2c\,(t-\log|1+t|)+(a+b)\log|1+t| \\
&= 2(a-c)\log|1+t|-\frac{1}{2}(a-b)(t-3)(t+1)+2c\cdot t
\end{aligned}
$$

1.13. (a)

$$
\begin{aligned}
\alpha &= u^3+v^3 \\
&= (u+v)\{(u+v)^2-3uv\} \qquad (1) \\
&= (u+v)\{(u-v)^2+uv\} \qquad (2)
\end{aligned}
$$

(1),(2) から uv の項を除去する。すると次の式が得られる。

$$4\alpha=(u+v)\{(u+v)^2+3(u-v)^2\}$$

式変形をして

$$
\begin{aligned}
4\alpha &= (u+v)\{(u+v)^2+3(u-v)^2\} \\
\frac{4\alpha}{(u+v)^3} &= 1+3\frac{(u-v)^2}{(u+v)^2}
\end{aligned}
$$

4 と 3 の最小公倍数が 12 であるから 12 の倍数であたりをつけた。
あとは素因数分解で両辺の 2 と 3 の指数を合わせる。

$$
\begin{aligned}
4\alpha\left(\frac{x}{12\alpha}\right)^3 &= 1+3\left(\frac{y}{36\alpha}\right)^2 \\
y^2 &= x^3-432\alpha^2
\end{aligned}
$$

1.16. (a)

$$\begin{aligned}
L &= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\{\alpha\sin\theta)'\}^2 + \{(\beta\cos\theta)'\}^2} \cdot d\theta \\
&= 4\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{(\alpha\cos\theta)^2 + (\beta\sin\theta)^2} \cdot d\theta \\
&= 4\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{\cos^2\theta + \left(\frac{\beta}{\alpha}\right)^2 \sin^2\theta} \cdot d\theta \\
&= 4\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - \left(1 - \frac{\beta^2}{\alpha^2}\right)\sin^2\theta} \cdot d\theta \\
&= 4\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sqrt{1 - k^2\sin^2\theta} \cdot d\theta
\end{aligned}$$

(b) $\alpha = \beta$

$$\begin{aligned}
L &= 4\alpha\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\theta \\
&= 4\alpha\left[\frac{\pi}{2} - 0\right] \\
&= 2\alpha\pi
\end{aligned}$$

(c)

$$4\alpha\int_0^1 \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}}dt = 4\alpha\int_0^1 \frac{1-k^2t^2}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2t^2)}}dt$$