Sistemas Digitales

M. en C. Karina Y. Sosa González

AGENDA

1. Introducción
2. Propiedades
3. Suma de productos
4. Producto de sumas
5. Compuertas lógicas
6. Simplificación usando algebra de boole
7. Simplificación usando mapas de Karnaugh

Introducción

- Operadores lógicos: Pueden ser completamente descriptos usando su tabla de verdad.
  - AND, OR, NOT $\longrightarrow$ Operadores básicos
  - NAND, NOR $\longrightarrow$ Operadores universales
- Expresiones booleanas:
  - Combinación de operadores lógicos y variables booleanas. Ej. $F(X,Y,Z) = X + \overline{Y}Z$.
  - Orden de precedencia en la evaluación $NOT > AND > OR$.
  - Dos expresiones son iguales sii tienen la misma tabla de verdad.
  - Identidades booleanas: Reducciones utilizando propiedades o leyes.

$$\overline{X}YZ + \overline{X}Y\overline{Z} + XZ == \overline{X}Y + XZ$$

Propiedades

Identidad	$1.A = A$	$0 + A = A$
Nulo	$0.A = 0$	$1 + A = 1$
Idempotencia	$A.A = A$	$A + A = A$
Inverso	$A.\overline{A} = 0$	$A + \overline{A} = 1$
Conmutatividad	$A.B = B.A$	$A + B = B + A$
Asociatividad	$(A.B).C = A.(B.C)$	$(A + B) + C = A + (B + C)$
Distributividad	$A + B.C = (A + B).(A + C)$	$A.(B + C) = A.B + A.C$
Absorción	$A.(A + B) = A$	$A + A.B = A$
De Morgan	$\overline{(A.B)} = \overline{A} + \overline{B}$	$\overline{(A + B)} = \overline{A}.\overline{B}$

- No existe una forma mecánica y facil para reducir una función, hay que practicar.
- De esto se deduce que no hay una única forma de escribir una función lógica, surge la necesidad de las formas canónicas.

Propiedades

Forma canónica

- La idea es, dada una tabla de verdad escribir una expresión booleana que la represente.
- Las dos técnicas que vamos a ver son Suma de Productos y Producto de Sumas.
- No necesariamente vamos a obtener la expresión "Óptima" (o sea la que use menos operadores).

Suma de productos

- Por cada valor de la función que sea 1 escribimos un término utilizando todas las variables unidas por operadores AND, de forma tal que el término también valga 1. Luego combinamos todo con operadores OR.
- Probemos con un ejemplo sencillo:

A	B	F(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$F(A, B) = \overline{A}B + A\overline{B}$$

(Es el operador OR-Excusivo o XOR)

Producto de Sumas

- Por cada valor de la función que sea 0 escribimos un término utilizando todas las variables unidas por operadores OR, de forma tal que el término también valga 0. Luego combinamos todo con operadores AND.
- Usando el ejemplo anterior:

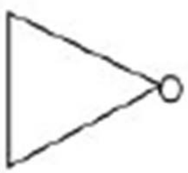
A	B	F(A,B)
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

$$F(A,B) = (A+B)(\overline{A}+\overline{B})$$

Compuertas Lógicas

- Una compuerta es un dispositivo electrónico que produce un resultado en base a un conjunto de valores de entrada.
- Se corresponden exactamente con los operadores que vimos antes.

Compuertas Lógicas

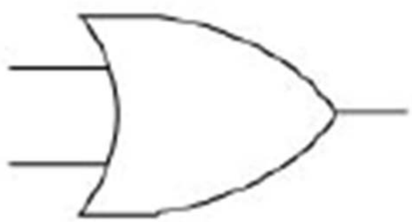


A	NOT A
0	1
1	0

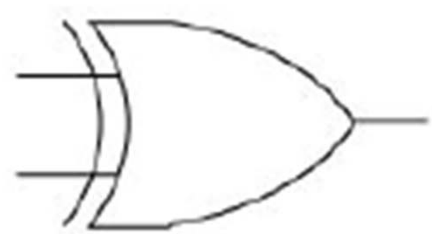
A	B	A AND B
0	0	0
0	1	0
1	0	0
1	1	1

M. en C. Karina Y. Sosa González

Compuertas Lógicas

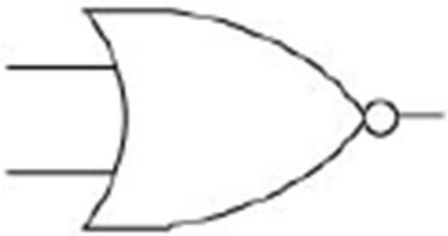


A	B	A OR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	1

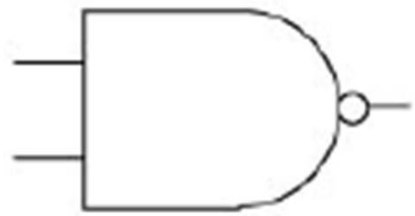


A	B	A XOR B
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Compuertas Lógicas



A	B	A NOR B
0	0	1
0	1	0
1	0	0
1	1	0



A	B	A NAND B
0	0	1
0	1	1
1	0	1
1	1	0

M. en C. Karina Y. Sosa González

Cosas que se debieron haber entendido:

- Operadores y expresiones booleanas, reducciones utilizando propiedades.
- Dada una tabla de verdad escribir una expresión booleana que la represente.
- Implementar las expresiones utilizando compuertas lógicas.

RECOMENDACIONES Sean cuidadosos cuando dibujan circuitos:

- Que quede claro cuando un cable esta conectado a otro y cuando lo saltea (pongan un circulito en la unión o una curva cuando no quieren que lo toque).

Algebra de Boole: Ejercicio 1

Demostrar si la siguiente igualdad entre expresiones booleanas es verdadera o falsa:

$$(X+\overline{Y}) = \overline{(\overline{X}.Y)}.Z + X.\overline{Z} + \overline{(Y+Z)}$$

Una solución:

$\overline{(\overline{X}.Y)}.Z + X.\overline{Z} + \overline{(Y+Z)} \longleftarrow$ De Morgan

$\overline{(\overline{X}.Y)}.Z + X.\overline{Z} + \overline{Y}.\overline{Z} \longleftarrow$ Distributiva

$\overline{(\overline{X}.Y)}.Z + (X+\overline{Y}).\overline{Z} \longleftarrow$ De Morgan

$(X+\overline{Y}).Z + (X+\overline{Y}).\overline{Z} \longleftarrow$ Distributiva

$(X+\overline{Y}).(Z+\overline{Z}) \longleftarrow$ Inverso

$(X+\overline{Y}).1 \longleftarrow$ Identidad

$X+\overline{Y} \longleftarrow$ Listo!, probamos que es igual

Algebra de Boole: Ejemplo 2

Dada la siguiente tabla de verdad:

A	B	C	F
0	0	0	0
0	0	1	1
0	1	0	0
0	1	1	1
1	0	0	0
1	0	1	0
1	1	0	0
1	1	1	1

- Escribir una expresión booleana que la represente.
- Implementarla utilizando a lo sumo una compuerta AND, una compuerta OR y una compuerta NOT.

Algebra de Boole: Ejemplo 2

- Expresamos como una suma de productos:

$$(\overline{A}.\overline{B}.C) + (\overline{A}.B.C) + (A.B.C)$$

- Como nos restringen la cantidad de compuertas tenemos que simplificar.

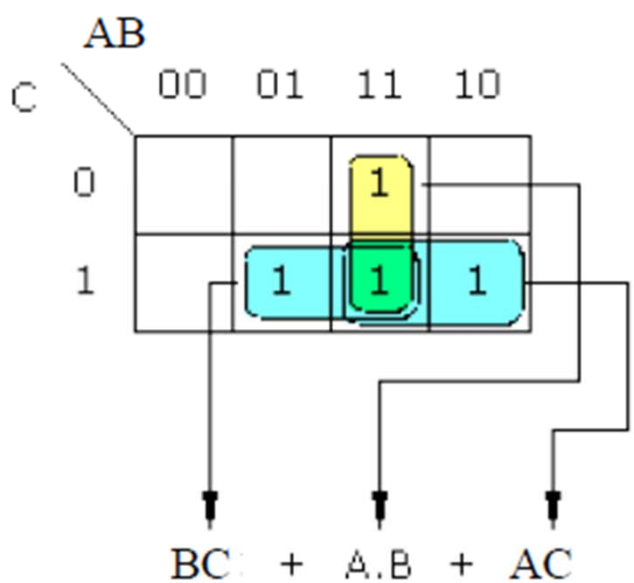
$(\overline{A}.\overline{B}.C) + (\overline{A}.B.C) + (A.B.C) \longrightarrow$ Distributiva
$((\overline{A}.\overline{B}) + (\overline{A}.B) + (A.B)).C \longrightarrow$ Distributiva
$((\overline{A}.\overline{B}) + (\overline{A} + A).B).C \longrightarrow$ Inverso
$((\overline{A}.\overline{B}) + 1.B).C \longrightarrow$ Identidad
$((\overline{A}.\overline{B}) + B).C \longrightarrow$ Distributiva
$((\overline{A} + B).(\overline{B} + B)).C \longrightarrow$ Inverso
$((\overline{A} + B).1).C \longrightarrow$ Identidad
$(\overline{A} + B).C \longrightarrow$ Bingo!

Mapas de Karnaugh

Mapa de Karnaugh de 3 variables

Aquí está la tabla de verdad para un sistema de votación por mayoría de 3 personas

La tabla de verdad se convierte en un mapa de Karnaugh como sigue:



A	B	C	salida
0	0	0	**0**
0	0	1	**0**
0	1	0	**0**
0	1	1	**1**
1	0	0	**0**
1	0	1	**1**
1	1	0	**1**
1	1	1	**1**

M. en C. Karina Y. Sosa González

Mapas de Karnaugh

Mapa de Karnaugh de 4 variables

Un mapa de 4 variables (A, B, C y D) contiene $2^4 = 16$ celdas. Es importante escribir los valores de las variables en las filas y columnas respetando el código Grey.

Para simplificar la expresión:

$$x = A.B.\overline{C}.\overline{D} + A.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + A.B.C.D + A.B.C.\overline{D} + A.\overline{B}.C.D + A.\overline{B}.C.\overline{D}$$

Esta expresión puede simplificarse un poco usando el álgebra de Boole y agrupando los minitérminos resaltados con el mismo color:

color: $x = A.B.\overline{C}.\overline{D} + A.\overline{B}.\overline{C}.\overline{D} + A.B.C + A.\overline{B}.C$

CD \ AB	00	01	11	10
00				
01				
11				
10				

M. en C. Karina Y. Sosa González

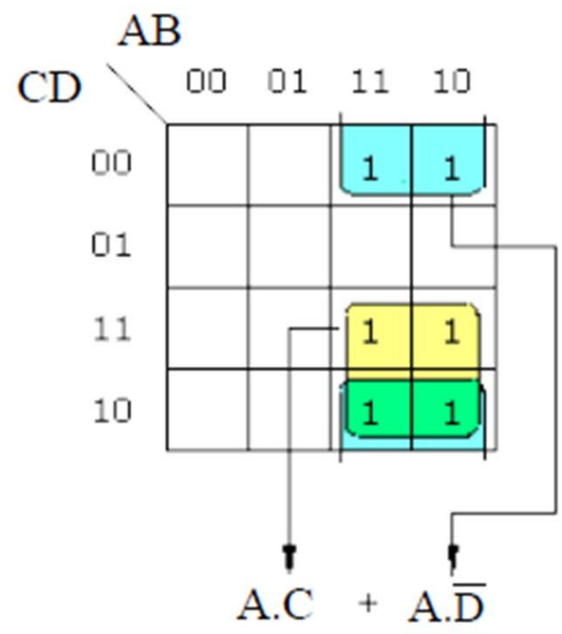
Mapas de Karnaugh

El mapa de Karnaugh de dicha expresión es el de la derecha:

Para dar la expresión booleana más simple deberías agrupar el mayor número de términos o de celdas, en lo posible de a 4.

En este caso se han redondeado y agrupado dos grupos de 4 "1s", uno de los cuales lo hace con dos "1s" de la parte superior y otros dos en la parte inferior del mapa. Debes identificar qué variables de cada grupo se mantienen constantes, sin cambiar de "1" a "0" o viceversa, y eliminas aquellas variables que sí cambian. En nuestro caso hay 2 que cambian y otras 2 que no cambian. La expresión final simplificada será:

$$x = A.C + A.\overline{D}$$



BIENVENID@S AL CURSO!

DUDAS, QUEJAS O SUGERENCIAS…