Solución de Ecuaciones No Lineales

Dr. Víctor de la Cueva

vcueva@itesm.mx

¿Solucionar una ecuación?

- Uno de los problemas más frecuentes en ingeniería es encontrar las raíces de ecuaciones de la forma f(x) = 0, donde f(x) es una función real de una variable.
- Las raíces son también llamados ceros debido a que son los valores de x donde f(x) se hace 0.
- Hay varios algoritmos para encontrar esos ceros pero ninguno es general, es decir, no hay un algoritmo que funcione con todas las ecuaciones.
- El prototipo de todos los algoritmo es el llamado Método de Punto Fijo.

Método del punto fijo

Método de Punto Fijo

- Sea la ecuación general f(x) = 0, de la cual se desea encontrar la raíz real $\bar{x}$.
- Paso 1. Transformar algebraicamente la ecuación f(x)=0 a una equivalente de forma x = g(x).
- Paso 2. Por medio de la observación (al tanteo), seleccionar un número que esté cerca de una raíz, el cual se conoce como valor de inicio x_0.
- Paso 3. Evaluar x_0 en g(x) y el resultado será x_1.
  - Caso 1. $x_1 = x_0$
    - x_0 es la raíz y FIN.
  - Caso 2. $x_1 \neq x_0$
    - Es el más frecuente e indica que ni x_0, ni x_1 son raíces $\bar{x}$.
    - Hacer una segunda evaluación de g(x), ahora en x_1, el resultado es x_2.
- Paso 4. Repetir el proceso.
- FIN

32

Converge o Diverge

- Si un método se acerca cada vez más a la solución en cada paso se dice que el método converge.
- Si se aleja, diverge.
- El que un método converja depende básicamente de dos factores:
  - g(x)
  - El valor inicial x_0.

Criterio de convergencia

- ¿Cómo sabemos si estamos en camino a la solución o no?
- ¿Nos faltará mucho para llegar?
- Las respuestas a estas preguntas las dan los criterios de convergencia, el cual es un valor que nos dice si nos estamos alejando o acercando a la solución en qué medida.
- Hay dos criterios de paro que nos ayudan a conocer la convergencia y que son normalmente usados:
  - $abs(x_{i+1}-x_i) < \varepsilon$
  - $abs(f(x_i)) < \varepsilon$

Algoritmo

Para encontrar una raíz real de la ecuación g(x)=x proporcionar la función G(X) y los

DATOS: Valor inicial X0, criterio de convergencia EPS y número máximo de iteraciones MAXIT.

RESULTADOS: La raíz aproximada X o un mensaje de falla.

PASO 1. Hacer I = 1

PASO 2. Mientras I < MAXIT, realizar los pasos 3 a 6.

PASO 3. Hacer X = G(X0)

PASO 4. Si ABS(X-X0) < EPS entonces IMPRIMIR X y TERMINAR. De otro modo CONTINUAR.

PASO 5. Hacer I = I + 1

PASO 6. Hacer X0 = X

PASO 7. IMPRIMIR mensaje de falla “El método no converge a una raíz” y TERMINAR.

Criterio $|g'(x)| < 1$

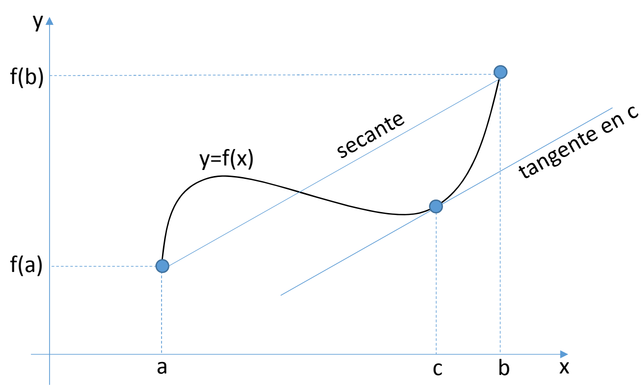
- ¿por qué algunas formas equivalentes de $x = g(x)$, de $f(x) = 0$, conducen a una raíz en el modelo de punto fijo y otras no, aún empleando el mismo valor inicial?

Teorema del punto medio

- Dada cualquier función f continua en el intervalo [a,b] y diferenciable en el intervalo abierto (a,b) entonces existe al menos un punto c en el intervalo (a,b) tal que la tangente a la curva en c es paralela a la recta secante que une los puntos (a,f(a)) y (b,f(b)). Es decir:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(c)$$

Gráficamente

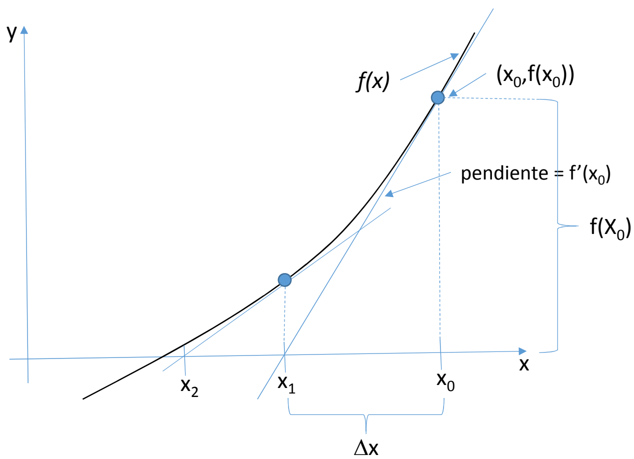


Método de Newton-Raphson

Descripción

- Es un método de segundo orden de convergencia cuando se trata de raíces reales no repetidas.
- Consiste en un procedimiento que lleva la ecuación *f(x) = 0* a la forma *x = g(x)*, de modo que $g'(\overline{x_i}) = 0$.
  - Suponga un valor inicial x_0.
  - Trácese una tangente a la curva en el punto $(x_0, f(x_0))$ y a partir de ese punto va al punto de cruce de dicha tangente con el eje x, el cual es x_1.
  - Se repite el proceso hasta que x_1 cumple la condición $|f(x_i)| \leq \varepsilon_1$, $|x_{i+1} - x_i| < \varepsilon_1$ o ambos.
  - Si esto no se cumple en un MAXIT, debe reiniciarse el método con un valor nuevo de x_0.

Explicación gráfica



Algoritmo

Para encontrar una raíz real de la ecuación g(x)=x proporcionar la función F(X), su derivada DF(X) y los

DATOS: Valor inicial X0, criterio de convergencia EPS, criterio de exactitud EPS1 y número máximo de iteraciones MAXIT.

RESULTADOS: La raíz aproximada X o un mensaje de falla.

PASO 1. Hacer I = 1

PASO 2. Mientras I < MAXIT, realizar los pasos 3 a 7.

PASO 3. Hacer X = X0-F(X0)/DF(X0)

PASO 4. Si ABS(X-X0) < EPS entonces IMPRIMIR X y TERMINAR. De otro modo CONTINUAR.

PASO 5. Si ABS(F(X)) < EPS1 entonces IMPRIMIR X y TERMINAR. De otro modo CONTINUAR.

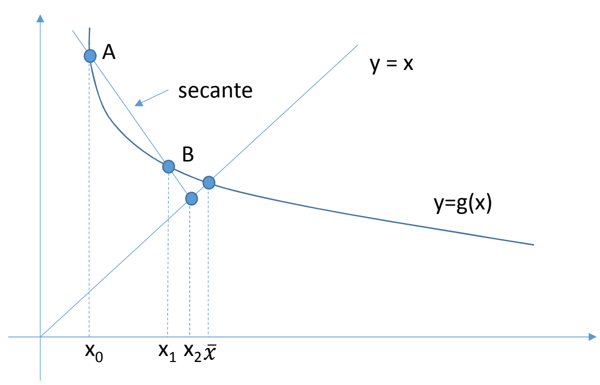
PASO 6. Hacer I = I + 1

PASO 7. Hacer X0 = X

PASO 8. IMPRIMIR mensaje de falla "El método no converge a una raíz" y TERMINAR.

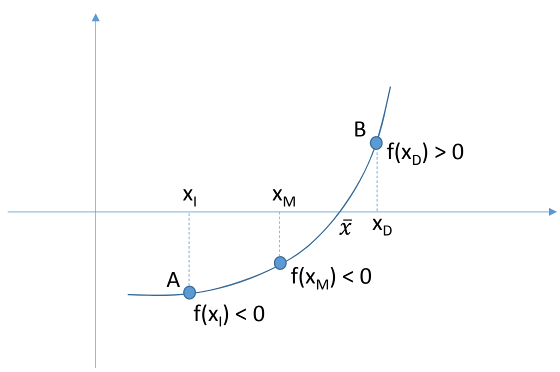
Método de la secante

Interpretación geométrica



Método de la bisección

Interpretación geométrica



Referencias

- A. Nieves y F.C. Domínguez. Métodos Numéricos Aplicados a la Ingeniería. 2a ed, CECSA (2002).