

## ARITMÉTICA ENTERA Y MODULAR

### ÁLGEBRA LINEAL Y ESTRUCTURAS MATEMÁTICAS

**Ejercicio 1.-** Encuentra los sistemas de numeración, si existe alguno, para los que se verifica cada una de las siguientes igualdades:

- a)  $3 \times 4 = 22$ ,
- b)  $41 \times 14 = 1224$ ,
- c)  $52 \times 25 = 1693$ ,
- d)  $25 \times 13 = 51$ ,
- e)  $13^4 = 14641$

**Ejercicio 2.-** Da la expresión en base 8 de los naturales que en base 2 se escriben:

- a) 101101100010011010111,
- b) 10001000000100110,
- c) 1011101111011111.

**Ejercicio 3.-** Prueba que dado un número entero cualquiera  $m$  se verifica una de las siguientes posibilidades:

- a)  $m^2 \equiv 0 \pmod{8}$ ,
- b)  $m^2 \equiv 1 \pmod{8}$ ,
- c)  $m^2 \equiv 4 \pmod{8}$

**Ejercicio 4.-** Resuelve las siguientes congruencias:

- a)  $3x \equiv 2 \pmod{5}$ ,
- b)  $7x \equiv 4 \pmod{10}$ ,
- c)  $6x \equiv 3 \pmod{4}$ .

**Ejercicio 5.-** Resuelve los siguientes sistemas de ecuaciones en congruencias:

a)

$$\begin{cases} x \equiv 1 & (\text{mód } 2) \\ 6x \equiv 3 & (\text{mód } 9) \\ 3x \equiv 3 & (\text{mód } 5) \end{cases}$$

b)

$$\begin{cases} x \equiv 1 & (\text{mód } 2) \\ x \equiv 2 & (\text{mód } 4) \end{cases}$$

c)

$$\begin{cases} x \equiv 3 & (\text{mód } 6) \\ x \equiv 1 & (\text{mód } 4) \\ 2x \equiv 1 & (\text{mód } 5) \end{cases}$$

**Ejercicio 6.-** Tres granjeros dividen en partes iguales el arroz que han cultivado en común. Fueron a mercados diferentes en los que se usaban medidas de peso diferentes: en un lugar era de 7 kilos, en otro de 15 kilos y en el último de 19 kilos. Cada uno vendió todo lo que pudo en medidas enteras en sus respectivos mercados y a la vuelta al primer granjero le sobraban 6 kilos, al segundo 11 y al tercero 14. ¿Cuánto arroz habían cultivado?

**Ejercicio 7.-** Calcula las soluciones en  $\mathbb{Z}$  de la ecuación

$$2x + 3y = 7.$$

**Ejercicio 8.-** Calcula las soluciones en  $\mathbb{Z}$  de la ecuación

$$6x + 10y = 16.$$

**Ejercicio 9.-** ¿Cuántas soluciones enteras tiene la ecuación

$$210x - 91y = 77$$

verificando que  $x, y \in [-500, 500]$ ?

**Ejercicio 10.-** Encuentra un número entero cuyo resto al dividirlo entre 5 sea 3 y que al multiplicarlo por 3 y dividirlo entre 4 dé resto 1.

- Ejercicio 11.-** ¿Cuántos números naturales hay menores que 1000, que acaben en 7, y que al dividirlos por 55 den resto 12?
- Ejercicio 12.-** Calcula, si es posible,  $1392^{-1}$  en  $\mathbb{Z}_{7585}$ .
- Ejercicio 13.-** En  $\mathbb{Z}_{300}$  realiza, si es posible los siguientes cálculos.
- $25 \cdot 60$ .
  - $127 \cdot (-100)$ .
  - $237^{-1}$ .
  - $13 - 50 \cdot 100^{-1}$ .
  - Encuentra  $x \neq 0$  tal que  $111x = 0$ .
  - Encuentra  $x$  tal que  $13x + 25 = 32x - 50$ .
  - Resuelve  $11x - 100 = 45x + 12$ .
- Ejercicio 14.-** Enumera los divisores positivos de 120 y calcula el número de divisores positivos que tiene 118800.
- Ejercicio 15.-** Un cocinero de un barco pirata relató cómo había conseguido las dieciocho monedas de oro que llevaba: *Quince piratas atacaron un barco francés. Consiguieron un cofre lleno de monedas de oro. Las repartieron en partes iguales y me dieron las cinco que sobraban. Sin embargo, tras una tormenta murieron dos de ellos, por lo que los piratas juntaron todas sus monedas y las volvieron a repartir. A mí me dieron las diez que sobraban. Por último, tras una epidemia de peste murieron cinco de los piratas que aún quedaban en pie, por lo que los supervivientes repitieron la misma operación.* Sabiendo que en el cofre no caben más de dos mil quinientas monedas, ¿cuántas monedas contenía el cofre?
- Ejercicio 16.-** Demuestra que un número escrito en base 10 es par si y sólo si su última cifra es par.
- Ejercicio 17.-** Demuestra que un número escrito en base 10 es un múltiplo de 3 si y sólo si la suma de sus cifras es un múltiplo de 3.
- Ejercicio 18.-** Demuestra que un número escrito en base 10 es un múltiplo de 9 si y sólo si la suma de sus cifras es un múltiplo de 9.
- Ejercicio 19.-** Demuestra que un número escrito en base 10 es un múltiplo de 5 si acaba en 0 o en 5.
- Ejercicio 20.-** Demuestra que un número escrito en base 10 es múltiplo de 11 si y sólo si la suma de las cifras que ocupan un lugar par menos la suma de las cifras que ocupan posiciones impares es un múltiplo de 11.
- Ejercicio 21.-** Demuestra que un número escrito en base 8 es un múltiplo de 7 si y sólo si la suma de sus cifras es un múltiplo de 7.
- Ejercicio 22.-** Descompón en producto de primos los números  $10!$  y  $15!$ . ¿Cuántos divisores positivos tiene cada uno de ellos?
- Ejercicio 23.-** Encuentra el máximo entero positivo  $n$  tal que  $2^n$  divide a  $25!$ .