

Ejercicio 1

De las siguientes afirmaciones, indicar cuales son ciertas y cuales no:

- | | |
|---|--|
| (i) $n^2 \in O(n^3)$ | (ix) $n^2 \in \Omega(n^3)$ |
| (ii) $n^3 \in O(n^2)$ | (x) $n^3 \in \Omega(n^2)$ |
| (iii) $2^{n+1} \in O(2^n)$ | (xi) $2^{n+1} \in \Omega(2^n)$ |
| (iv) $(n+1)! \in O(n!)$ | (xii) $(n+1)! \in \Omega(n!)$ |
| (v) $f(n) \in O(n) \Rightarrow 2^{f(n)} \in O(2^n)$ | (xiii) $f(n) \in \Omega(n) \Rightarrow 2^{f(n)} \in \Omega(2^n)$ |
| (vi) $3^n \in O(2^n)$ | (xiv) $3^n \in \Omega(2^n)$ |
| (vii) $\log n \in O(n^{1/2})$ | (xv) $\log n \in \Omega(n^{1/2})$ |
| (viii) $n^{1/2} \in O(\log n)$ | (xvi) $n^{1/2} \in \Omega(\log n)$ |

Ejercicio 2

Sea a una constante real, $0 < a < 1$. Usar las relaciones \subset y $=$ para ordenar los órdenes de complejidad de las siguientes funciones: $n \log n$, $n^2 \log n$, n^8 , n^{1+a} , $(1+a)^n$, $(n^2 + 8n + \log^3 n)^4$, $n^2 / \log n$, 2^n .

Ejercicio 3

Demostrar las siguientes inclusiones estrictas: $O(1) \subset O(\log n) \subset O(n) \subset O(n \log n) \subset O(n^2) \subset O(n^3) \subset O(n^k) \subset O(2^n) \subset O(n!)$.

Ejercicio 4

Considérense las siguientes funciones de n :

$$f_1(n) = n^2; \quad f_2(n) = n^2 + 1000n;$$

$$f_3(n) = \begin{cases} n, & \text{si } n \text{ impar} \\ n^3, & \text{si } n \text{ par} \end{cases}; \quad f_4(n) = \begin{cases} n, & \text{si } n \leq 100 \\ n^3, & \text{si } n > 100 \end{cases}$$

Para cada posible valor de i, j indicar si $f_i \in O(f_j)$ y si $f_i \in \Omega(f_j)$.

Ejercicio 5

- a) $T(n)=3T(n-1)+4T(n-2)$ si $n>1$; $T(0)=0$; $T(1)=1$.
- b) $T(n)=2T(n-1)-(n+5)3^n$ si $n>0$; $T(0)=0$.
- c) $T(n)=4T(n/2)+n^2$ si $n>4$, n potencia de 2; $T(1)=1$; $T(2)=8$.
- d) $T(n)=2T(n/2)+n\log n$ si $n>1$, n potencia de 2.
- e) $T(n)=3T(n/2)+5n+3$ si $n>1$, n potencia de 2.
- f) $T(n)=2T(n/2)+\log n$ si $n>1$, n potencia de 2.
- g) $T(n)=2T(n^{1/2})+\log n$ con $n=2^{2^k}$; $T(2)=1$.
- h) $T(n)=5T(n/2)+(n\log n)^2$ si $n>1$, n potencia de 2; $T(1)=1$.
- i) $T(n)=T(n-1)+2T(n-2)-2T(n-3)$ si $n>2$; $T(n)=9n^2-15n+106$ si $n=0,1,2$.
- j) $T(n)=(3/2)T(n/2)-(1/2)T(n/4)-(1/n)$ si $n>2$; $T(1)=1$; $T(2)=3/2$.
- k) $T(n)=2T(n/4)+n^{1/2}$ si $n>4$, n potencia de 4.
- l) $T(n)=4T(n/3)+n^2$ si $n>3$, n potencia de 3.

Ejercicio 6

Suponiendo que $T_1 \in O(f)$ y que $T_2 \in O(f)$, indicar cuáles de las siguientes afirmaciones son ciertas:

- a) $T_1 + T_2 \in O(f)$.
- b) $T_1 - T_2 \in O(f)$.
- c) $T_1 / T_2 \in O(1)$.
- d) $T_1 \in O(T_2)$.

Ejercicio 7

Demostrar que para cualquier constante k se verifica que $\log^k n \in O(n)$.

Ejercicio 8

Consideremos la siguiente función que implementa el recorrido en inorden de un árbol binario:

```
void Inorden(bintree<int> &ab,bintree<int>::nodo n){
    if (!n.nulo()){
        Inorden(ab,ab.hizq(n));
        cout<<n.etiqueta()<<endl;
        Inorden(ab,ab.hdrcha(n));
    }
}
```

Suponemos que `nulo`, `hizq`, `hdrcha` son $O(1)$.

Calcular el tiempo de ejecución y sus órdenes de complejidad (O -grande, Ω , Θ).

Ejercicio 9

Consideremos la siguiente función que obtiene de un árbol binario:

```
int Altura (bintree<int> &ab,bintree<int>::nodo n){  
    if (n.nulo()) return 0;  
    else  
        return 1+max(Altura(ab,ab.hizq(n)),Altura(ab,ab.hdrcah(n));  
}
```

Calcular el tiempo de ejecución y sus órdenes de complejidad (O-grande, Omega, Theta).
Suponemos que nulo, hizq, hdrcha son O(1).

Ejercicio 10

Ordenar las siguientes funciones de acuerdo a su velocidad de crecimiento:

n , \sqrt{n} , $\log n$, $\log \log n$, $\log^2 n$, $n/\log n$, $\sqrt{n} \log^2 n$, $(1/3)^n$, $(3/2)^n$, 17 , n^2 .

Ejercicio 11

Resolver la ecuación $T(n) = \frac{1}{n} \left(\sum_{i=0}^{n-1} T(i) \right) + cn$, siendo $T(0) = 0$.

Ejercicio 12

Dada la siguiente función:

```
int Raro(const int *a, int prim,int ult){  
    if (prim>=ult) return a[ult];  
    mitad=(prim+ult)/2;  
    terc = (ult-prim)/3;  
    return a[mitad]+Raro(a,prim,prim+terc)+Raro(a,ult-terc,ult);  
}
```

1. Calcular el tiempo de ejecución de la función Raro(a,0,n-1) suponiendo que n es potencia de 3.
2. Dar una cota de complejidad para dicho tiempo de ejecución.