Active-set-method

Redaktör: Martin Söderén

Version 0.1

Status

Granskad		-
Godkänd		-

PROJEKTIDENTITET

VT, 2015, Grupp 2

Linköpings Tekniska Högskola, IDA

Gruppdeltagare

Namn	**Ansvar**	**Telefon**	**E-post**
Adam Sestorp	Team leader	070 9987270	adase035@student.liu.se
Dennis Ljung	Dokumentansvarig	070 8568148	denlj069@student.liu.se
Alexander Yngve	Utvecklingsansvarig	076 2749762	aleyn573@student.liu.se
Martin Söderén	Analysansvarig	070 8163241	marso329@student.liu.se
Ruben Das	Kvalitetssamordnare	073 7355892	rubda680@student.liu.se
Sebastian Fast	Arkitekt	073 3885208	sebfa861@student.liu.se
Johan Isaksson	Testledare	070 2688785	johis024@student.liu.se

Hemsida: http://pum-2.ida.liu.se/

Kund: SAAB
Kontaktperson hos kund: Daniel Simon
Kursansvarig: Kristian Sandahl
Handledare: Andreas Runefalk

Innehåll

Dokumenthistorik

Version	Datum	Utförda förändringar	Utförda av	Granskad
0.1	2015-02-21	Första utkast	Martin Söderén	

1 Inledning

Metoden har fått sitt namn efter att den iterativt väljer vilka bivillkor i optimeringsproblemet som ska vara aktiva och den söker efter den mängd aktiva bivillkor som ger ett globalt minimum. Detta kan vara inga, några eller alla.

2 definitioner

2.1 qp subproblem

$$\begin{aligned} \underset{p}{\text{minimize}} \quad & \frac{1}{2} p^T G p + g_k^T p \\ \text{subject to} \quad & a_i^T p = 0 \; for \; all \; i \in W_k \end{aligned}$$

$$g_k = G x_k + d$$

där p en vektor av längd n(antalet variabler) som beskriver hur mycket vi ska ändra varje variabel denna iteration. a_i är radvektorn i A. Detta är 16.27 i boken

2.2 Lagrange multiplikatorer

$$\sum_{i \in \hat{W}} a_i \hat{\lambda}_i = g = G\hat{x} + d$$

2.3 stegformula

$$\alpha_k \stackrel{def}{=} min\left(1, \min_{i \notin W_k, a_i^T p_k < 0} \frac{b_i - a_i^T x_k}{a_i^T p_k}\right)$$

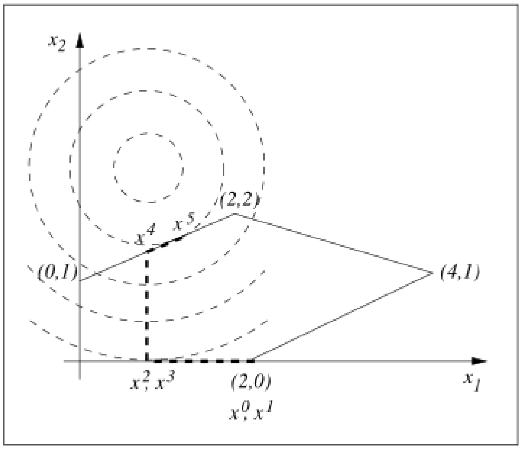
b_i är radvektorn i b

3 Exempel

Följande exempel är från boken Numerical Optimization av Jorge Nocedal och Stephen J. Wright släppt 1999 och är exempel 16.3 på sida 462.

$$\begin{aligned} & \underset{x}{\text{minimize}} \; q(x) = (x_1 - 1)^2 + (x_2 - 2.5)^2 \\ \text{subject to} \; & x_1 - 2x_2 + 2 \geq 0 \\ & -x_1 - 2x_2 + 6 \geq 0 \\ & x_1 + 2x_2 + 2 \geq 0 \\ & x_1 \geq 0 \\ & x_2 \geq 0 \\ & z \in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

Figur 2 – Problembeskrivning



Figur 1 – Visualisering av problemet.

Problemet kan skrivas om för att göra det enklare att beskriva det på matrisform:

$$\underset{x}{\text{minimize}}\ q(x) = x_1^2 + 1^2 - 2x_1 + x_2^2 + 2.5^2 - 5x_2$$

$$\begin{aligned} \text{subject to } x_1 - 2x_2 &\geq -2 \\ -x_1 - 2x_2 &\geq -6 \\ x_1 + 2x_2 &\geq -2 \\ x_1 &\geq 0 \\ x_2 &\geq 0 \\ z &\in \mathbb{R}^N \end{aligned}$$

Målfunktionen kan nu delas in i konstanta delar som vi inte kan påverka, linjära delar och kvadratiska delar. Dessa kan sedan användas för att beskriva problemet i matrisform.

$$G = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

$$d = \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$b = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

G och d beskriver målfunktionen, A och b beskriver bivillkoren i följande uppställning:

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
\underset{x}{\text{minimize}} \quad & \frac{1}{2}x^T G x + d^T x \\
\text{subject to} \quad & Ax \geq b \\
& x \in \mathbb{R}^N \\
& A \in \mathbb{R}^{m*N}
\end{aligned}
$$

Figur 3 – Nästan normalform

$$
\begin{aligned}
\underset{x}{\text{minimize}} \quad & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 & -5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2 + 1^2 - 2x_1 + x_2^2 + 2.5^2 - 5x_2 \\
\text{subject to} \quad & Ax = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & -2 \\ -1 & 2 \\ 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \geq b = \begin{pmatrix} -2 \\ -6 \\ -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\
& x \in \mathbb{R}^N \\
& A \in \mathbb{R}^{m*N}
\end{aligned}
$$

Så matriserna beskriver problemet.
Det första problemet är att hitta en startpunkt där man kan börja söka efter lösning. Det enklaste är att sätta x lika med nollvektorn, dvs:

$$
x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Sedan testa om denna punkt uppfyller alla bivillkor. I detta fall så är denna punkt okey men skulle den inte vara okey så sätter man lika många bivillkor som man har variabler lika med istället för mindre/större än. Dvs i detta exempel har vi 2 variabler och om vi gör om de två första bivillkoren till lika med villkor så för vi ett lösbart system.

$$
\begin{aligned}
x_1 - 2x_2 + 2 = 0 \\
-x_1 - 2x_2 + 6 = 0
\end{aligned}
$$

Sedan testar vi denna punkt mot alla bivillkor. Skulle detta vara en ej godkänd punkt så testar men en annan kombination av bivillkor tills man hittar en godkänd startpunkt.
I boken valde de följande startpunkt:

$$
x^0 = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}
$$

Om man sittar på bivillkoren så kan man se att i denna punkt är bivillkoren 3 och 5 aktiva. Det vill säga punkten ligger på bivillkorens linjer. Då kan vi säga att mängden aktiva bivillkor består av bivillkor 3 och 5 och skrivs på följande sätt:

$$
W_0 = \{3, 5\}
$$

Nu kan vi lösa subproblemet definierat under definitioner.

$$
p^0 = \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}
$$

$$\begin{aligned} \underset{p}{\text{minimize}} \quad & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + g_0^T \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ \text{subject to} \quad & \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = 0 \\ & \begin{pmatrix} 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = 0 \end{aligned}$$

$$g_0 = Gx_0 + d = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -2 \\ -5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

Detta ger:

$$\begin{aligned} \underset{p}{\text{minimize}} \quad & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ \text{subject to} \quad & -p_1 + 2p_2 = 0 \\ & p_2 = 0 \end{aligned}$$

vilket ger

$$p_1 = p_2 = 0$$

Vi kan nu beräkna Lagrange multiplikatorerna för denna iteration:

$$\sum_{i \in \hat{W}} a_i \hat{\lambda}_i = g = G\hat{x} + d$$

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \hat{\lambda}_3 + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \hat{\lambda}_5 = \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}$$

$$-\hat{\lambda}_3 = 2$$

$$2\hat{\lambda}_3 + \hat{\lambda}_5 = -5$$

Vilket ger:

$$\begin{pmatrix} \hat{\lambda}_3 & \hat{\lambda}_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -1 \end{pmatrix}$$

Detta leder till att vi tar bort bivillkor 3 från mängden då den har mest negativ Lagrange multiplikator.

$$W_1 = \{5\}$$

Vi löser subproblemet:

$$\begin{aligned} \underset{p}{\text{minimize}} \quad & \frac{1}{2}\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} \\ \text{subject to} \quad & p_2 = 0 \end{aligned}$$

$$\underset{p}{\text{minimize}} \;\; p_1^2 + 2p_1$$

derivering ger:

$$2 * p_1 + 2$$

som är 0 då:

$$p_1 = -1$$

Andraderivatan är positiv vilket ger att det är en minpunkt, lösning ges av:

$$\begin{pmatrix} p_1 \\ p_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} = p^1$$

Nu vet vi vart vi står och i vilken riktining vi ska gå. Nu ska vi beräkna hur långt vi ska gå med hjälp av stegformulan under definitioner.

$$\frac{b_i - a_i^T x_k}{a_i^T p_k}$$

Beräknas för alla villkor som inte tillhör den aktiva mängden. För i=1:

$$\frac{-2 - \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{-4}{-1} = 4$$

Vilket är större än 1 så nuvarande α är 1 För i=2:

$$\frac{-6 - \begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{-4}{1} = -4$$

vilket är mindre än 1 men $a_i^T p_k > 0$ så α är fortfarande 1 För i=3:

$$\frac{-2 - \begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{0}{1} = 0$$

vilket är mindre än 1 men $a_i^T p_k > 0$ så α är fortfarande 1
För i=4:

$$\frac{0 - \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}} = \frac{-2}{-1} = 2$$

vilket är större än 1 så α är fortfarande 1. Detta ger:

$$x^2 = x^1 + p^1 \alpha$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix} * 1$$

vilket ger:

$$x^2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nu kan man titta vilka villkor som är aktiva i denna punkt och använda detta för att lösa subproblemet och forsätter iterera tills vi vår en lösning med p=0 och positiva lagrange multiplikatorer