**71.** Mostre que a equação $x^2y + 3y^3x^4 = 4$ define $y = \phi(x)$ numa vizinhança de $(1, 1)$. Determine $\phi'(x)$ na vizinhança considerada.

**72.** Seja $f : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \to x^2y^2 + e^x + z$. Mostre que a equação $f(x, y, z) = 0$ define implicitamente $x$ como função de $y$ e $z$ numa vizinhança de $(0, 1, -1)$ $(x = \phi(y, z))$. Calcule $\frac{\partial \phi}{\partial y}(y, z)$ e $\frac{\partial \phi}{\partial z}(y, z)$ numa vizinhança do ponto $(1, -1)$.

**73.** Considere $x_0 \neq 0$, $y_0 \neq 0$ e $z_0 \neq 0$ e seja $(x_0, y_0, z_0)$ um ponto que satisfaz a equação

$$\frac{x}{z} = \phi\left(\frac{y}{z}\right), \text{ onde } \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}. \tag{1}$$

**a.** Indique que condições deve satisfazer $\phi$ por forma a que a equação (1) defina implicitamente $z$ como função de $x$ e $y$ numa vizinhança de $(x_0, y_0, z_0)$.

**b.** Mostre que

$$x\frac{\partial z}{\partial x} + y\frac{\partial z}{\partial y} = z,$$

onde $z = \varphi(x, y)$, na vizinhança considerada para $(x_0, y_0)$.

**74.**
**a.** Mostre que a equação $e^z \sin(xyz) + 2z + 2xy = \pi$ define implicitamente $z$ como função de $x$ e $y$ numa vizinhança de $(1, \frac{\pi}{2}, 0)$.

**b.** Considerando $\vec{u} = (1, 1)$, calcule $z'_{\vec{u}}(1, \frac{\pi}{2})$.

**75.**
**a.** Mostre que a equação $x + \sin(y + z) = 0$ define implicitamente $y$ como função de $x$ e $z$ numa vizinhança de $(0, 0, 0)$ $(y = \phi(x, z))$. Calcule $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(0, 0)$.

**b.** Explicite a função $\phi$ e calcule de novo $\frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}(0, 0)$.

**76.** Prove que numa vizinhança de $(0, 1, 1)$ o sistema

$$\begin{cases} x^2 + y^2 - z^2 = 0 \\ x^2 - 3y^2 + 4z^2 = 1 \end{cases} .$$

define implicitamente $y$ e $z$ como funções de $x$. Determine $y'(x)$ e $z'(x)$.

**77.** Mostre que o sistema

$$\begin{cases} e^x \cos(yz) + x^2 = 0 \\ \sin(xyz) + x^2 + z^2 = 4 \end{cases} .$$

define implicitamente $y$ e $z$ como funções de $x$ numa vizinhança de $\left(0, \frac{\pi}{4}, 2\right)$. Calcule $y'(x)$ e $z'(x)$.

**78.** Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (xy, 2x^2 - 5y^2)$ é localmente invertível mas não é globalmente invertível.

**79.** Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por $f(x, y) = (e^x + e^y, e^x - e^y)$.
**a.** Prove que $f$ é invertível numa vizinhança de qualquer ponto de $\mathbb{R}^2$.
**b.** Determine $Jac\, f^{-1}$.

**80.** Considere $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definida por

$$\begin{cases} f_1(x, y) = \arcsin(x) + \sqrt{xy} \\ f_2(x, y) = \log(-x^2 - y + 2) \end{cases} .$$

Analise a invertibilidade de $f$ numa vizinhança de $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.