Computação Gráfica e Interfaces

2017-2018

Fernando Birra

Transformações Geométricas

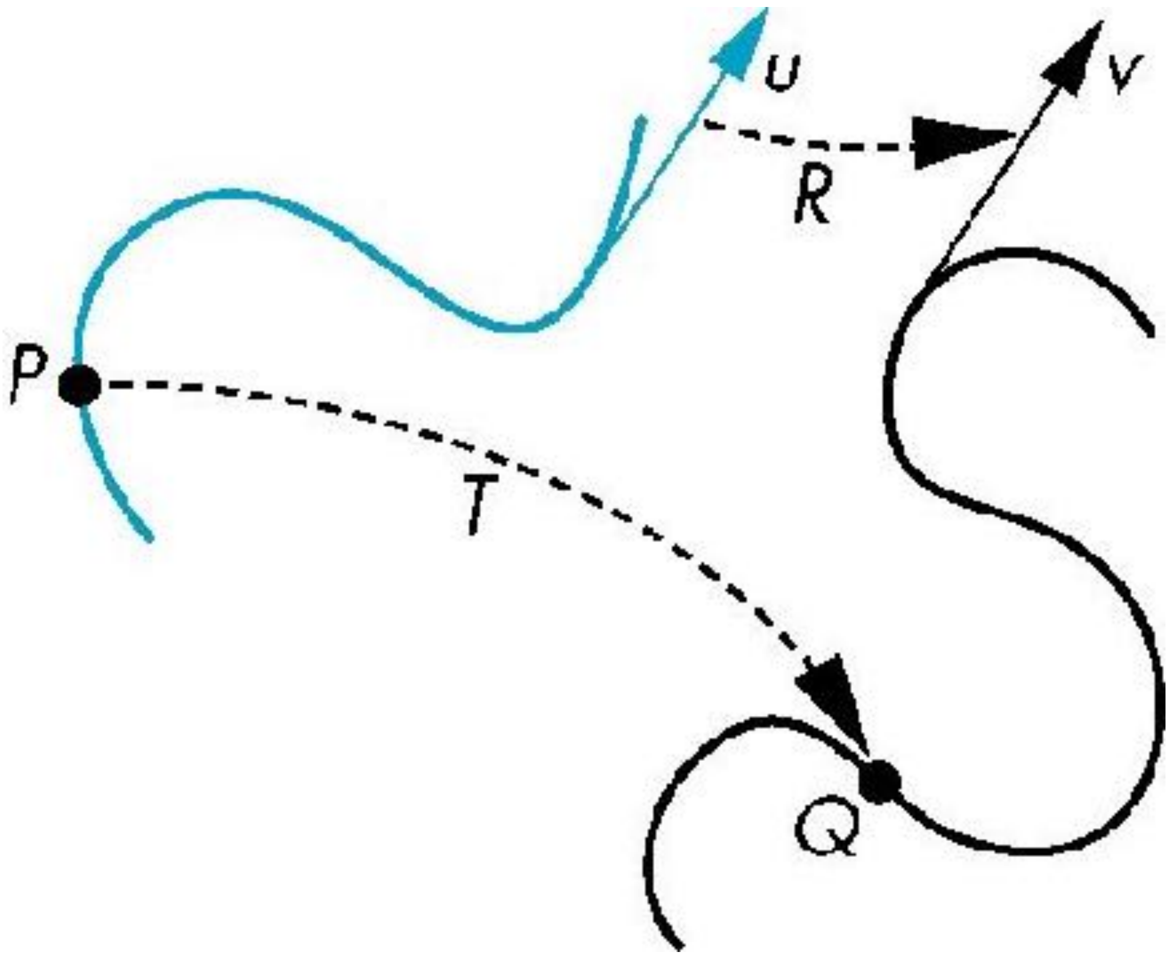
2017-2018
Fernando Birra

Objetivos

- Introduzir as transformações geométricas simples:
  - Translação
  - Rotação
  - Mudança de Escala
  - Deformação Transversa
- Derivar as respetivas matrizes de transformação com coordenadas homogéneas
- Aprender a usar a composição de transformações simples para deduzir transformações geométricas arbitrárias

Transformações Geométricas Genéricas

- Uma transformação geométrica qualquer transforma pontos e/ou vetores em outros pontos/vetores.

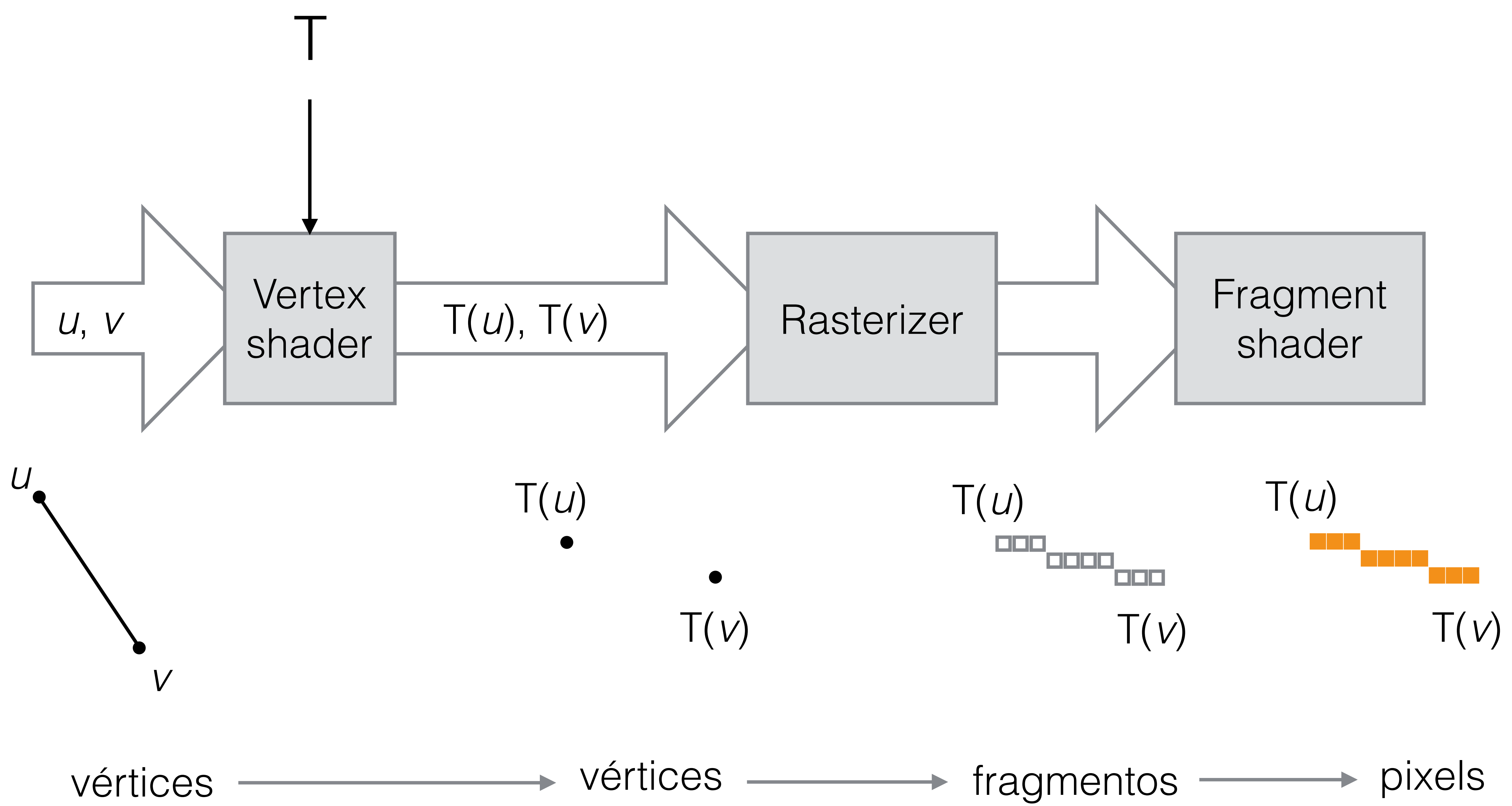


Transformações Afins

- Preservam as linhas
- As transformações mais importantes são transformações afins:
  - Transformações dos corpos rígidos (translação, rotação)
  - Mudança de escala e deformação transversa (shear)

Importância nos sistemas gráficos: Basta transformar os extremos duma linha e unirmos os pontos transformados com uma linha

Tratamento no Pipeline

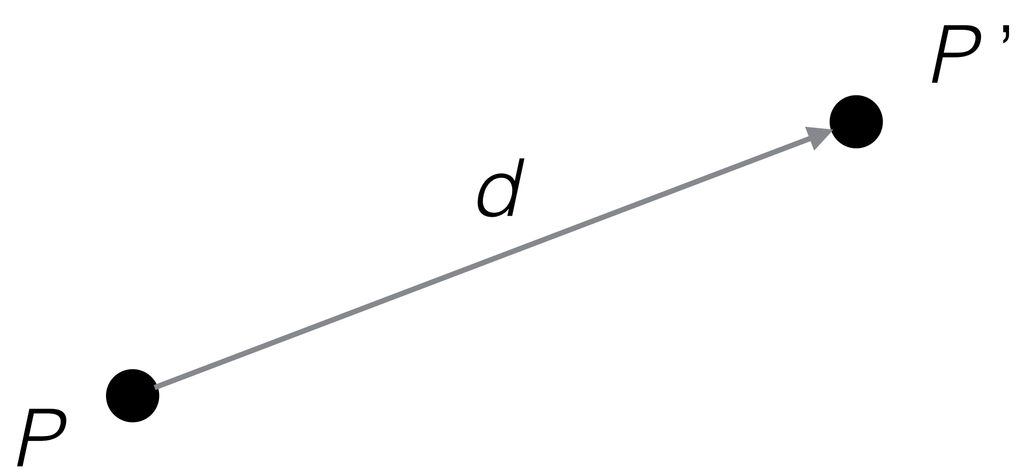


Notação

- P,Q,R: pontos num espaço afim
- u,v,w: vetores num espaço afim
- α, β, γ: escalares
- **p**, **q**, **r**: representações de pontos - array com 4 escalares em coordenadas homogéneas
- **u**, **v**, **w**: representações de vetores - array com 4 escalares em coordenadas homogéneas

Translação

- Mover (transladar, deslocar) um ponto para uma nova localização.



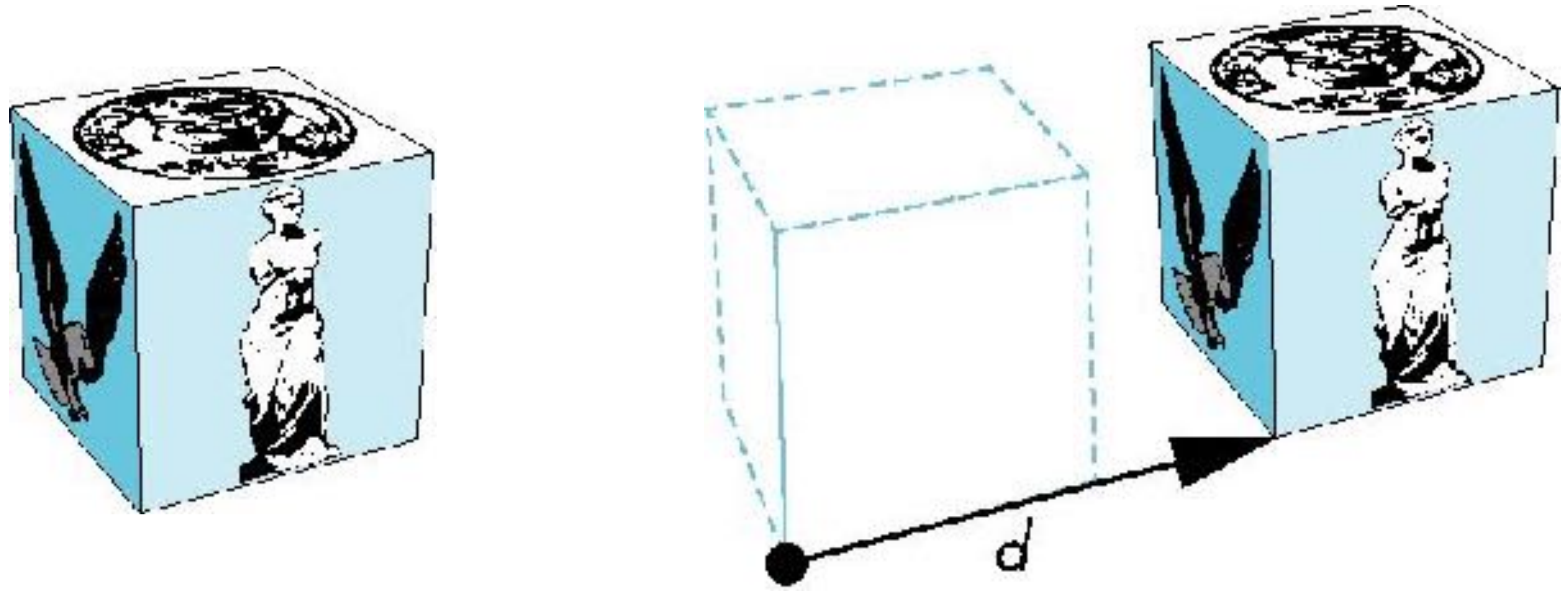
$$P' = P + d$$

- Deslocamento determinado por um vetor *d*

- 3 graus de liberdade

Translação

- Embora um ponto se possa mover para outra localização mais do que de uma forma, para um conjunto de pontos existe normalmente apenas uma forma.



objeto

translação: todos os pontos deslocados dum mesmo vetor

Translação

- Usando a representação em coordenadas homogéneas num determinado referencial:

$\mathbf{p}=[p_x\ p_y\ p_z\ 1]^T$

$\mathbf{p'}=[p'_x\ p'_y\ p'_z\ 1]^T$

$\mathbf{d}=[d_x\ d_y\ d_z\ 0]^T$

Componente w

Esta expressão é em 4D e exprime o conceito: ponto = ponto + vetor

$$p'_x = p_x + d_x$$
$$p'_y = p_y + d_y$$
$$p'_z = p_z + d_z$$
$$p'_w = p_w + d_w$$

$$\Rightarrow \quad \mathbf{p}' = \mathbf{p} + \mathbf{d}$$

Translação (Matriz de Transformação)

- Também se pode representar uma translação usando uma matriz **T**, de 4x4, usando coordenadas homogéneas, de tal modo que:

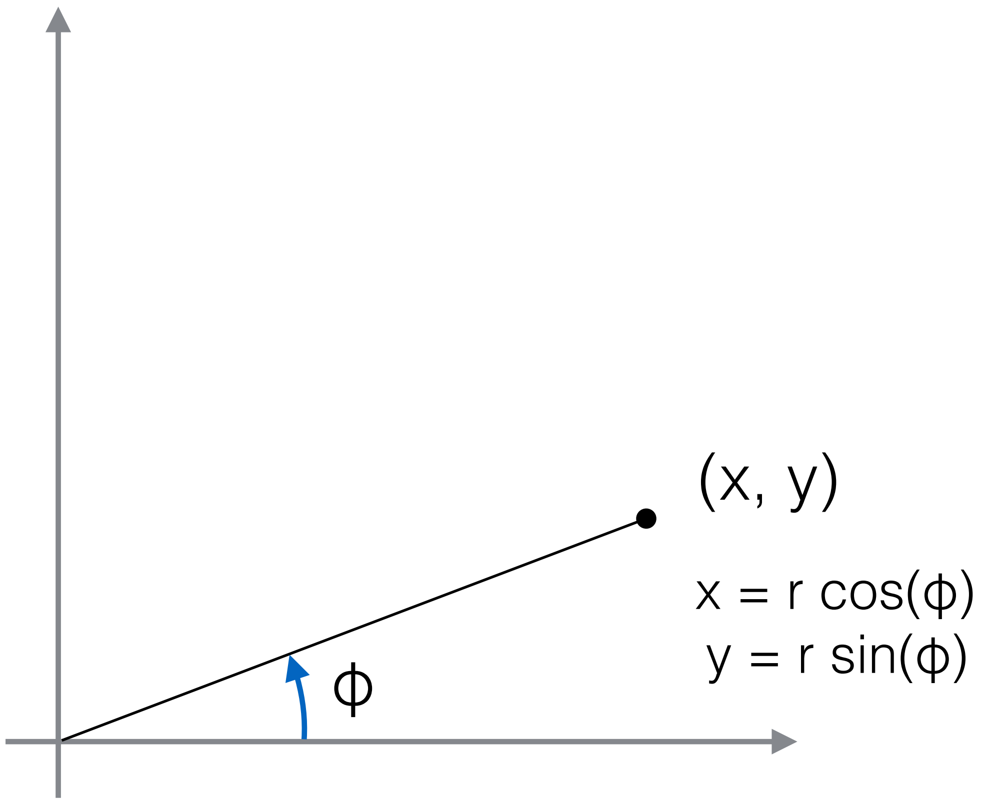
$$\mathbf{p'} = \mathbf{Tp}$$

$$\mathsf{M} = \mathsf{T}(d_x, d_y, d_z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & d_x \\ 0 & 1 & 0 & d_y \\ 0 & 0 & 1 & d_z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- A vantagem desta abordagem é que todas as transformações afins se podem exprimir desta forma, podendo várias transformações ser concatenadas e guardadas numa única matriz.

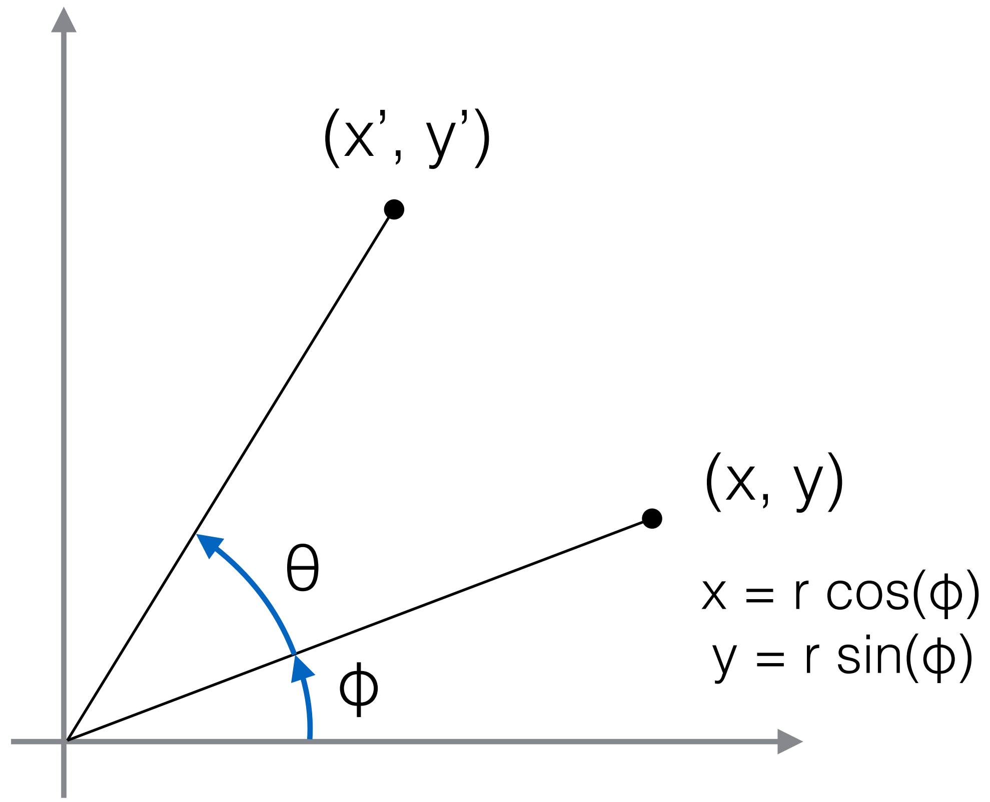
Rotação (2D)

- Considerando coordenadas polares de um ponto *P*(r,ϕ)=(r cos(ϕ), r sin(ϕ)), na rotação em torno da origem de um ângulo θ, o raio mantém-se constante, aumentando o ângulo inicial em θ:



Rotação (2D)

- Considerando coordenadas polares de um ponto $P(r,\phi)=(r\cos(\phi), r\sin(\phi))$, na rotação em torno da origem de um ângulo θ, o raio mantém-se constante, aumentando o ângulo inicial em θ:

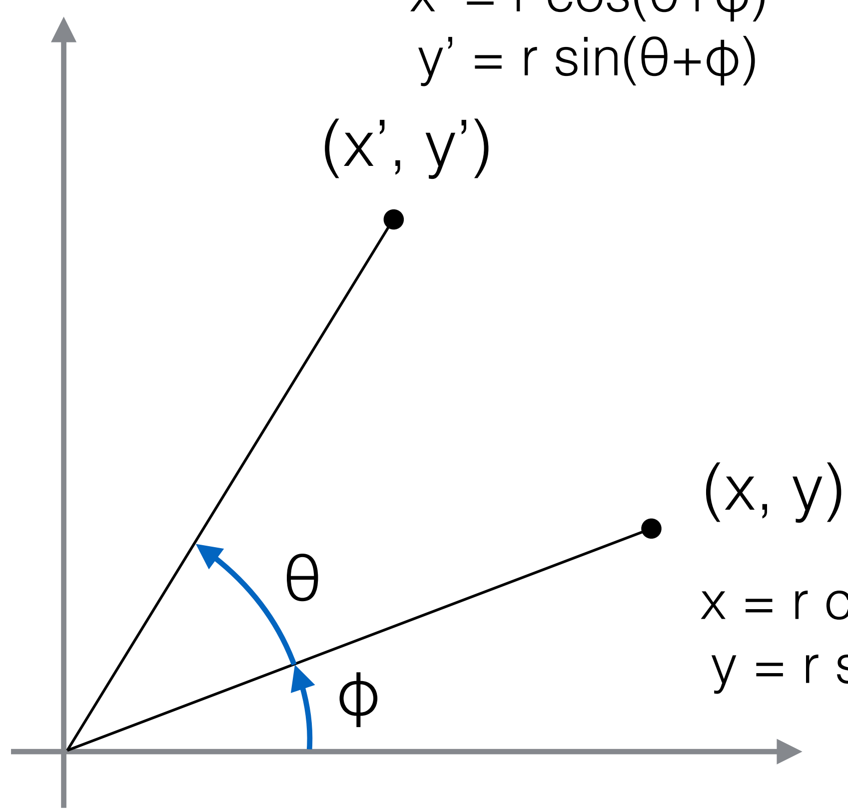


Rotação (2D)

- Considerando coordenadas polares de um ponto $P(r,\phi)=(r\cos(\phi), r\sin(\phi))$, na rotação em torno da origem de um ângulo θ, o raio mantém-se constante, aumentando o ângulo inicial em θ:

$$x' = r\cos(\theta+\phi)$$
$$y' = r\sin(\theta+\phi)$$

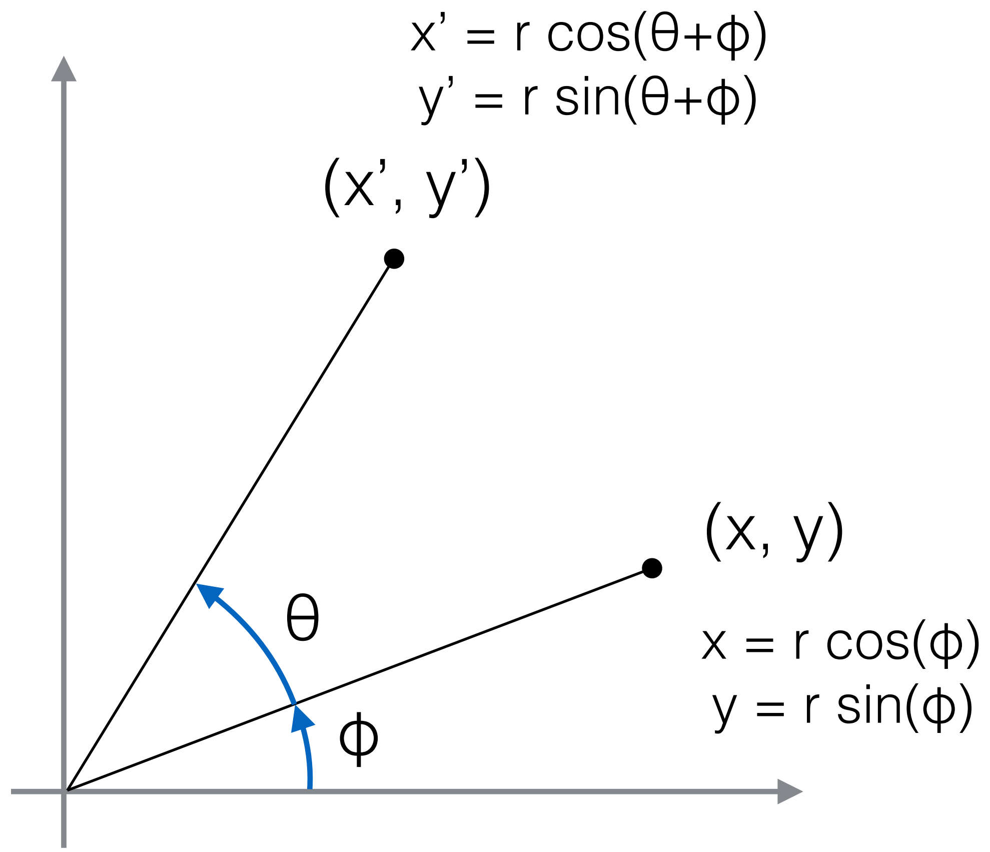
$$x' = r\cos(\phi)\cos(\theta) - r\sin(\phi)\sin(\theta)$$
$$y' = r\sin(\phi)\cos(\theta) + r\cos(\phi)\sin(\theta)$$



$$x = r\cos(\phi)$$
$$y = r\sin(\phi)$$

Rotação (2D)

- Considerando coordenadas polares de um ponto $P(r,\phi)=(r\cos(\phi), r\sin(\phi))$, na rotação em torno da origem de um ângulo θ, o raio mantém-se constante, aumentando o ângulo inicial em θ:

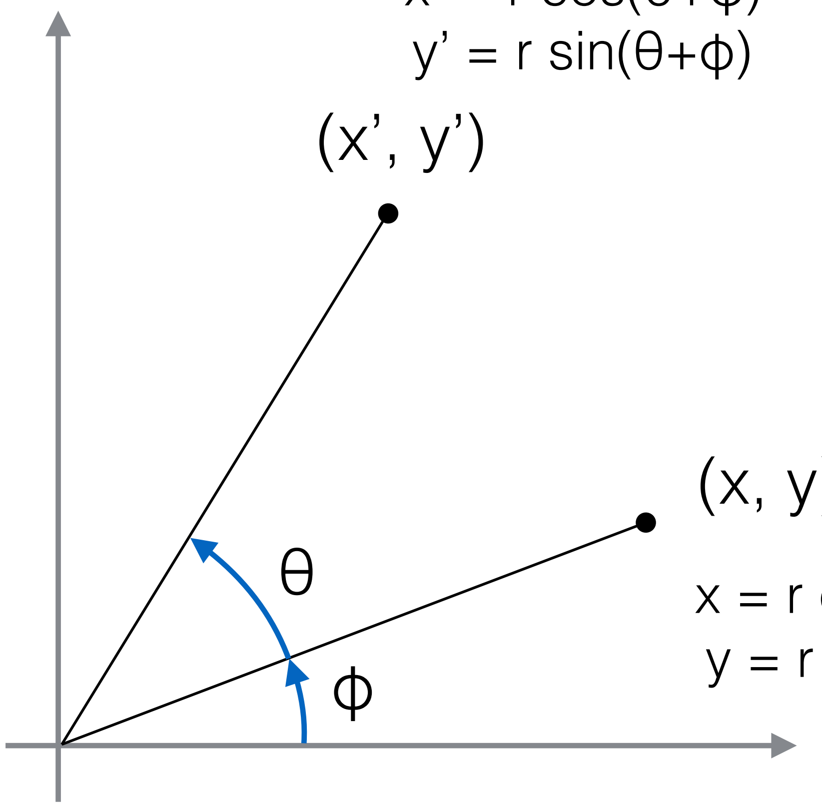


Rotação (2D)

- Considerando coordenadas polares de um ponto $P(r,\phi)=(r\cos(\phi), r\sin(\phi))$, na rotação em torno da origem de um ângulo θ, o raio mantém-se constante, aumentando o ângulo inicial em θ:

$$x' = r\cos(\theta+\phi)$$
$$y' = r\sin(\theta+\phi)$$

$$x' = r\cos(\phi)\cos(\theta) - r\sin(\phi)\sin(\theta)$$
$$y' = r\sin(\phi)\cos(\theta) + r\cos(\phi)\sin(\theta)$$



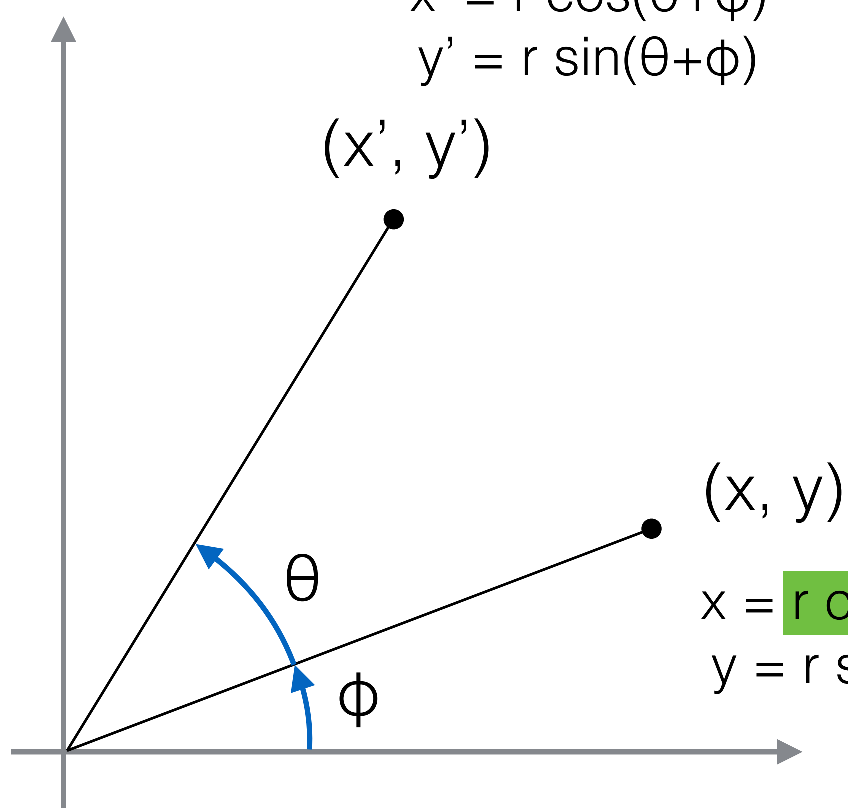
$$x = r\cos(\phi)$$
$$y = r\sin(\phi)$$

Rotação (2D)

- Considerando coordenadas polares de um ponto *P*(r,ϕ)=(r cos(ϕ), r sin(ϕ)), na rotação em torno da origem de um ângulo θ, o raio mantém-se constante, aumentando o ângulo inicial em θ:

$$x' = r\cos(\theta+\phi)$$
$$y' = r\sin(\theta+\phi)$$

$$x' = \boxed{r\cos(\phi)}\cos(\theta) - r\sin(\phi)\sin(\theta)$$
$$y' = r\sin(\phi)\cos(\theta) + \boxed{r\cos(\phi)}\sin(\theta)$$



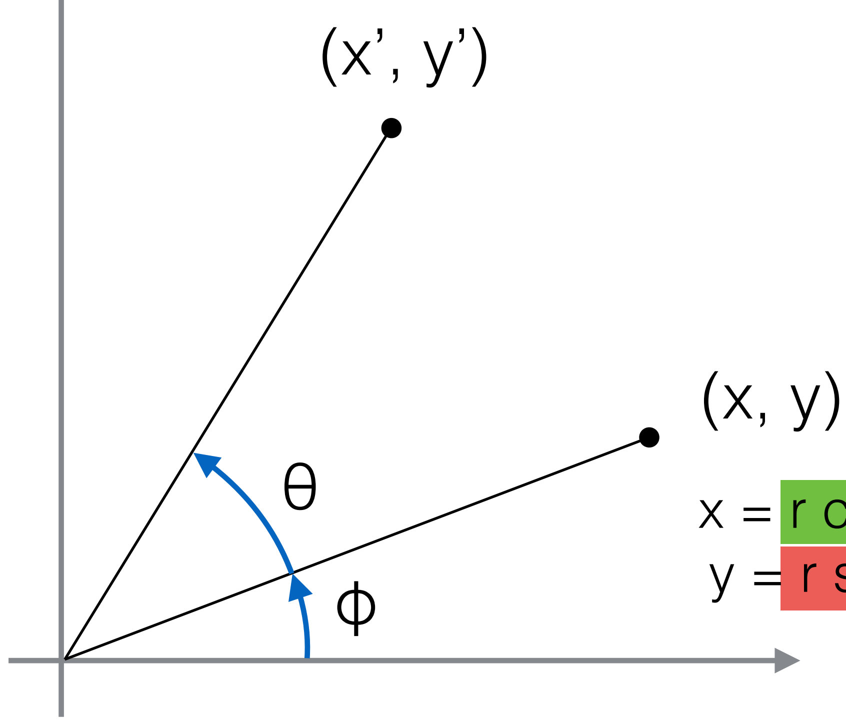
$$x = \boxed{r\cos(\phi)}$$
$$y = r\sin(\phi)$$

Rotação (2D)

- Considerando coordenadas polares de um ponto *P*(r,ϕ)=(r cos(ϕ), r sin(ϕ)), na rotação em torno da origem de um ângulo θ, o raio mantém-se constante, aumentando o ângulo inicial em θ:

$$x' = r\cos(\theta+\phi)$$
$$y' = r\sin(\theta+\phi)$$

$$x' = \boxed{r\cos(\phi)}\cos(\theta) - \boxed{r\sin(\phi)}\sin(\theta)$$
$$y' = \boxed{r\sin(\phi)}\cos(\theta) + \boxed{r\cos(\phi)}\sin(\theta)$$

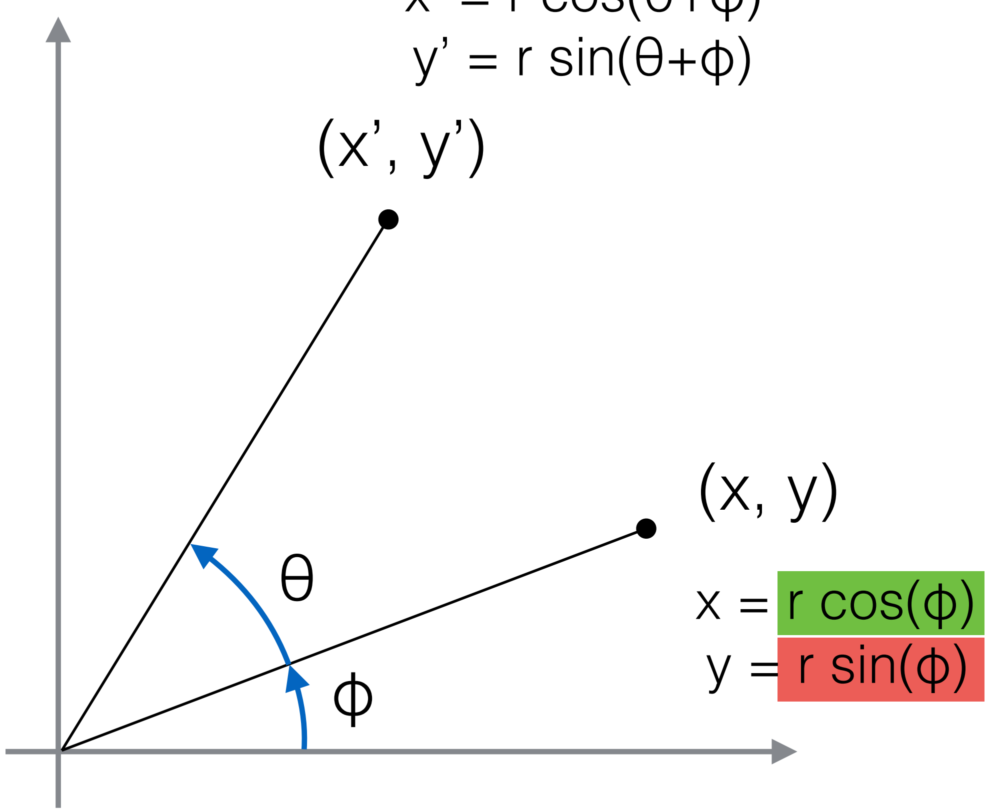


$$x = \boxed{r\cos(\phi)}$$
$$y = \boxed{r\sin(\phi)}$$

Rotação (2D)

- Considerando coordenadas polares de um ponto *P*(r,ϕ)=(r cos(ϕ), r sin(ϕ)), na rotação em torno da origem de um ângulo θ, o raio mantém-se constante, aumentando o ângulo inicial em θ:

$$x' = r\cos(\theta+\phi)$$
$$y' = r\sin(\theta+\phi)$$



$$x' = \boxed{r\cos(\phi)}\cos(\theta) - \boxed{r\sin(\phi)}\sin(\theta)$$
$$y' = \boxed{r\sin(\phi)}\cos(\theta) + \boxed{r\cos(\phi)}\sin(\theta)$$

$$\boxed{\begin{aligned} x' &= x\cos(\theta) - y\sin(\theta) \\ y' &= x\sin(\theta) + y\cos(\theta) \end{aligned}}$$

Rotação em torno de Z (3D)

- Em 3D, a rotação em torno de Z deixa todos os pontos com o valor da coordenada Z inalterada.
- É equivalente à rotação 2D em planos de Z constante:

$$x' = x\cos(\theta) - y\sin(\theta)$$

$$y' = x\sin(\theta) + y\cos(\theta)$$

$$z' = z$$

- Em coordenadas homogéneas:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{R}_z(\theta)\mathbf{p} \qquad R = R_z(\theta)\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Matrizes de rotação em 3D

- De forma análoga:

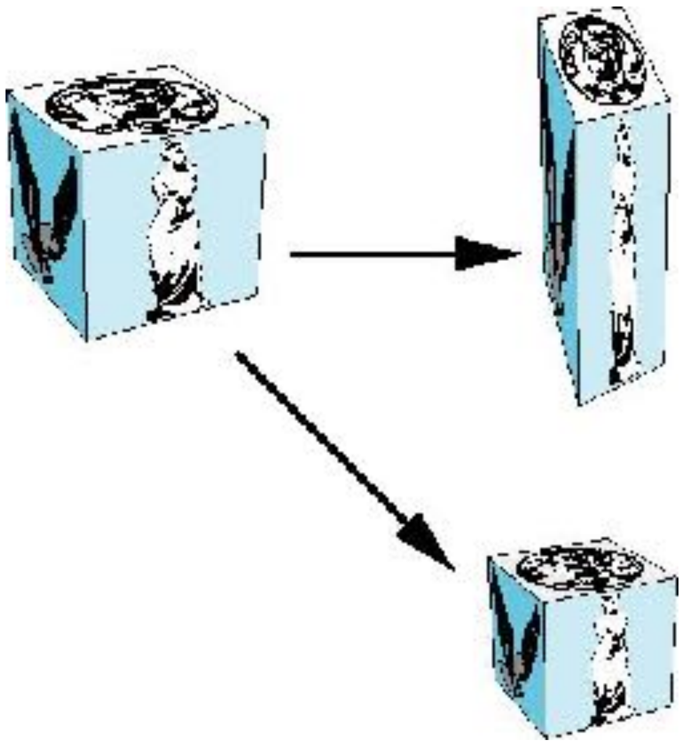
  Rotação em torno de X não altera a coordenada X
  Rotação em torno de Y não altera a coordenada Y

$$R = R_x(\theta)\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad R = R_y(\theta)\begin{bmatrix} \cos\theta & 0 & \sin\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$R = R_z(\theta)\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mudança de escala

- Expansão ou contração ao longo de cada um dos eixos, com o ponto fixo na origem



$x' = s_x\, x$

$y' = s_y\, y$

$z' = s_z\, z$

p'=Sp

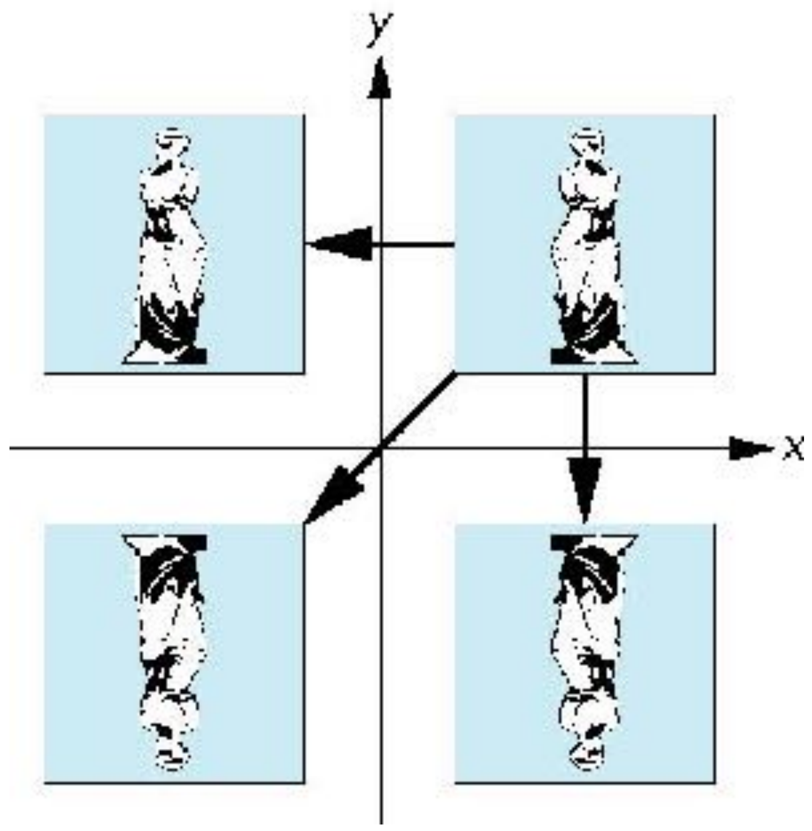
$$S = S(s_x, s_y, s_z) = \begin{bmatrix} s_x & 0 & 0 & 0 \\ 0 & s_y & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s_z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Reflexões

- São um caso particular da mudança de escala (com fatores unitários negativos)

$s_x = -1 \ s_y = 1$

original



$s_x = -1 \ s_y = -1$

$s_x = 1 \ s_y = -1$

Transformações inversas

- As transformações inversas das transformações simples podem ser obtidas sem recorrer a fórmulas gerais:
  - Translação: $\mathbf{T}^{-1}(d_x,d_y,d_z)=\mathbf{T}(-d_x,-d_y,-d_z)$
  - Rotação: $\mathbf{R}^{-1}(\theta)=\mathbf{R}(-\theta)$

    $=\mathbf{R}^T(\theta)$, pq. $\sin(-\theta)=-\sin(\theta)$ e $\cos(-\theta)= \cos(\theta)$
  - Escala: $\mathbf{S}^{-1}(s_x,s_y,s_z)=\mathbf{S}(1/s_x,1/s_y,1/s_z)$

Composição de transformações geométricas

- Podem formar-se transformações afins arbitrárias por composição das transformações simples: rotações, translação e mudança de escala

- Supondo que temos um conjunto grande de vértices **p**, para transformar com uma composição de transformações simples $\mathbf{M}_n(\ldots\mathbf{M}_2(\mathbf{M}_1\mathbf{p}))\ldots)$, o custo do cálculo de $\mathbf{M}=\mathbf{M}_n\ldots\mathbf{M}_2.\mathbf{M}_1$, é negligenciável quando comparado com o custo **M.p**, para um grande número de vértices.

- O desafio é encontrar a composição certa para fazer o que se pretende numa dada aplicação.

Ordem de aplicação

- O produto de matrizes (a composição de transformações) é associativo, mas não é comutativo!

$$\mathbf{p}' = \mathbf{ABCp} = \mathbf{A}(\mathbf{B}(\mathbf{Cp}))$$

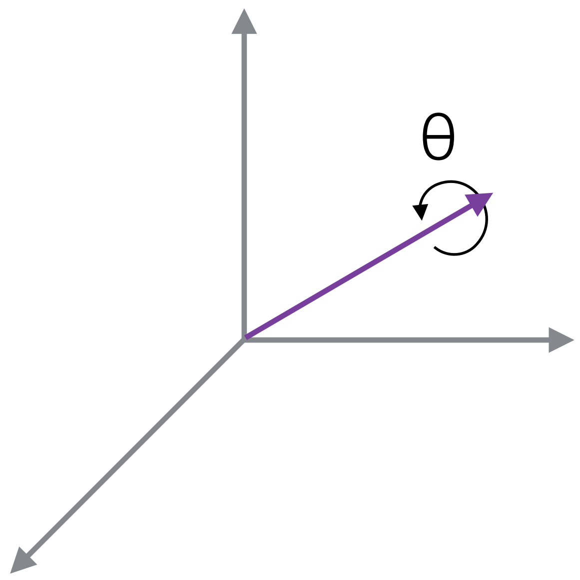
- Se se usassem vetores linha para representar os pontos, a transformação acima seria:

$$\mathbf{p}' = \mathbf{pC}^T\mathbf{B}^T\mathbf{A}^T = ((\mathbf{pC}^T)\mathbf{B}^T)\mathbf{A}^T$$

Rotação em torno de eixo arbitrário (que cruza a origem)

- Transformação complexa que pode ser decomposta em transformações simples

- Uma rotação de θ em torno dum eixo arbitrário pode ser decomposta em rotações em torno dos eixos x, y e z



$$\mathbf{R}(\theta)=\mathbf{R}_z(\theta_z)\mathbf{R}_y(\theta_y)\mathbf{R}_x(\theta_x)$$

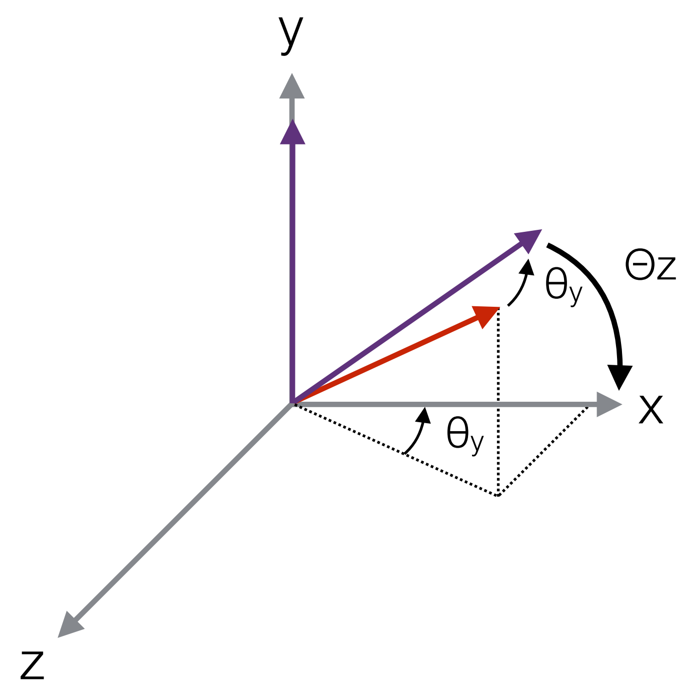
- Os ângulos θ_x, θ_y e θ_z denominam-se por ângulos de Euler.

- Embora as rotações não se possam trocar, é possível encontrar 3 outros ângulos de Euler, para outra ordem de aplicação das transformações, que produza o mesmo efeito.

Rotação em torno de eixo arbitrário (que cruza a origem)

- Alternativamente, poder-se-ia deduzir uma expressão que faz a mesma transformação usando os seguintes passos:

1. Rodar, segundo y, o vetor **v** que passa pelo eixo de rotação, por forma colocá-lo no plano xy
2. Rodar em z por forma a que o vector de 1 fique coincidente com o eixo x
3. Rodar em torno do eixo x do valor θ
4. Desfazer as rotações dos passos 1 e 2, pela ordem inversa.



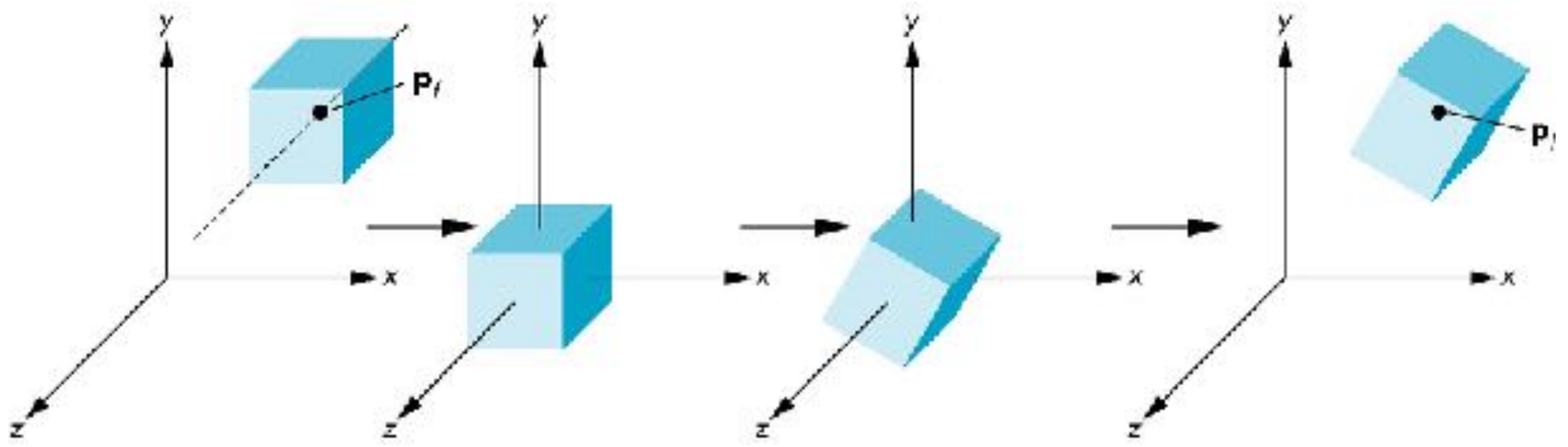
$$\mathbf{R}(\theta)=\mathbf{R}_y(-\theta_y)\mathbf{R}_z(-\theta_z)\mathbf{R}_x(\theta)\mathbf{R}_z(\theta_z)\mathbf{R}_y(\theta_y)$$

Rotação em torno dum eixo que não passa na origem

- Usa-se o resultado anterior, mas com a seguinte alteração:

1. Mover um ponto ($\mathbf{p}_f$) do eixo para a origem
2. Rodar $\mathbf{R}(\theta)$
3. Mover o ponto de volta para a sua posição inicial

$$\mathbf{M} = \mathbf{T}(\mathbf{p}_f)\mathbf{R}(\theta)\mathbf{T}(-\mathbf{p}_f)$$

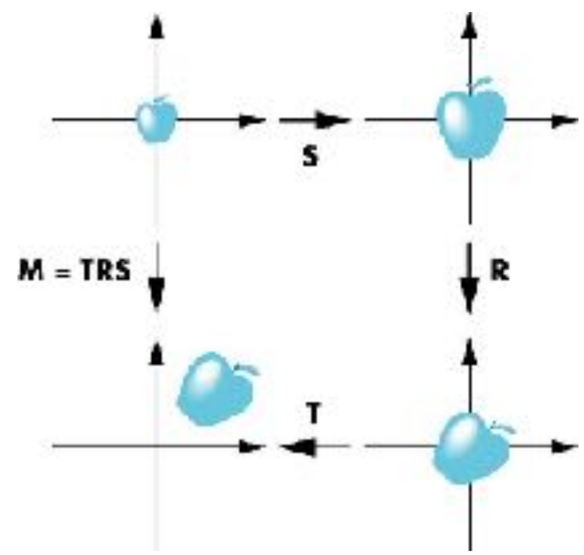


Transformações de instanciação

- Em modelação, os objetos primitivos estão normalmente centrados na origem, orientados com os eixos principais e com um determinado tamanho

- Aos vértices desses objetos "primitivos" aplicam-se transformações que seguem muitas vezes o padrão:

  - Escala
  - Orientação
  - Posicionamento



Transformação de Instanciação Comum

Transformações de instanciação

- Mas também é possível aplicar uma sequência arbitrária de transformações geométricas (acumulação), sem nenhuma ordem especial que não a definida pelo modelador.

- A maior parte do software adopta a ordem fixa TRS:

  - Blender

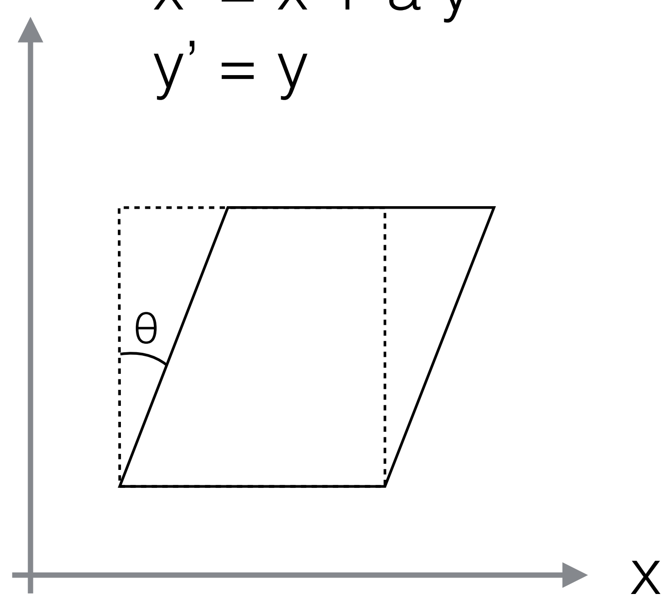
  - Unity

  - Maya

  - etc.

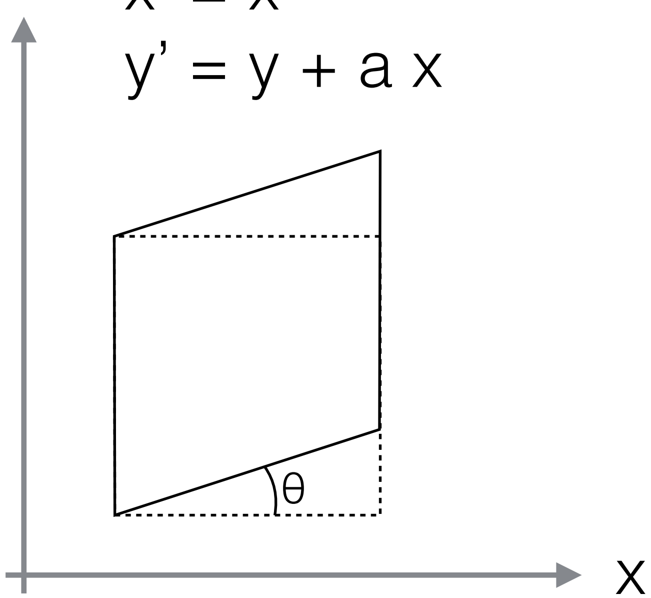
Deformação Transversa em 2D

$x' = x + a\,y$
$y' = y$



$a = \tan\theta$

$x' = x$
$y' = y + a\,x$



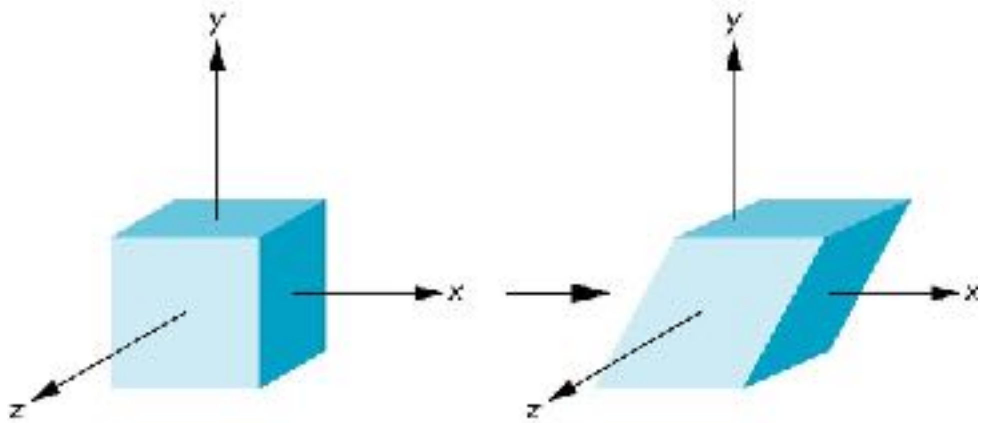
$$SH_y(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & \tan\theta & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$SH_x(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ \tan\theta & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Nota: usamos como índice o eixo que não sofre qualquer alteração

Deformação Transversa

- Exemplo dum caso particular em 3D



- A matriz de deformação transversa, para o caso geral, é dada por:

$$\begin{bmatrix} 1 & a & b & 0 \\ c & 1 & d & 0 \\ e & f & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$x' = x + ay + bz$$
$$y' = y + cx + dz$$
$$z' = z + ex + fy$$

Operações comutativas

- Apesar de, no caso geral, a ordem das transformações ser importante, em alguns casos pode trocar-se a ordem das operações visto serem comutativas:

  - $\mathbf{S}(a, b, c)\ \mathbf{S}(d, e, f) = \mathbf{S}(d, e, f)\ \mathbf{S}(a, b, c) = \mathbf{S}(ad, be, cf)$
  - $\mathbf{T}(a,b,c)\ \mathbf{T}(d, e, f) = \mathbf{T}(d, e, f)\ \mathbf{T}(a, b, c) = \mathbf{T}(a+d, b+e, c+f)$
  - $\mathbf{R}_i(\theta)\mathbf{R}_i(\phi) = \mathbf{R}_i(\phi)\mathbf{R}_i(\theta) = \mathbf{R}_i(\theta+\phi),\ i \in \{x,y,z\}$
  - $\mathbf{R}_x(\theta)\ \mathbf{S}(a, k, k) = \mathbf{S}(a, k, k)\ \mathbf{R}_x(\theta)$
  - $\mathbf{R}_y(\theta)\ \mathbf{S}(k, a, k) = \mathbf{S}(k, a, k)\ \mathbf{R}_y(\theta)$
  - $\mathbf{R}_z(\theta)\ \mathbf{S}(k, k, a) = \mathbf{S}(k, k, a)\ \mathbf{R}_z(\theta)$

Escala uniforme em dois dos eixos e rotação no 3º eixo