2017/2018 **Ficha Prática 6 - Integrais Duplos** AM2E

81. Calcule os integrais iterados das funções, nos rectângulos indicados:

a. $f(x,y) = \dfrac{1}{2x+y+3}$ e $\mathcal{R} = [0,2] \times [0,1]$

b. $f(x,y) = x^2 - y^3 + xy^2$ e $\mathcal{R} = [0,1] \times [0,1]$

c. $f(x,y) = \sin^2 x$ e $\mathcal{R} = [-5\pi, 3\pi] \times [-2,3]$

d. $f(x,y) = x\sqrt{x^2+y}$ e $\mathcal{R} = [0,1] \times [0,3]$

82. Inverta a ordem de integração dos integrais seguintes:

a. $\displaystyle\int_0^2 \int_0^{\sqrt{9-x^2}} f(x,y)dydx$ **b.** $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\arccos(x)} f(x,y)dydx$

83. Calcule:

a. $\displaystyle\int_0^2 \int_y^1 \sin(x^2)dxdy$ **b.** $\displaystyle\int_0^1 \int_y^1 e^{x^2}dxdy$

c. $\displaystyle\int_0^1 \int_{y^2}^1 \sqrt{x}e^{x^2}dxdy$ **d.** $\displaystyle\int_0^1 \int_{\sqrt{y}}^1 y\sin(x^5)dxdy$

84. Calcule $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$, onde:

a. $f(x,y) = x + y$ e $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 9\}$

b. $f(x,y) = xy$ e $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 4 \wedge x \leq 1\}$

c. $f(x,y) = \dfrac{y}{9+x^2}$ e $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \leq 0 \wedge x^2 + y^2 \leq 9\}$

85. Considere no plano YOZ o conjunto $\mathcal{C}$ dos pontos que satisfazem $yz = 1$, com $z > 0$. Seja $\mathcal{S}$ a superfície obtida por revolução de $\mathcal{C}$ em torno do eixo OZ.

a. Para $a > 1$, calcule o volume V_a do sólido limitado por $\mathcal{S}$ e pelos planos de equação $z = 1$ e $z = a$.
b. Mostre que existe $\lim\limits_{a \to +\infty} V_a$, calculando o respectivo valor.

86. Calcule o volume do sólido $\mathcal{S}$:

a. Limitado pelo plano de equação $x + 2y + 3z = 6$ e pelos planos coordenados;
b. Limitado pelo cilindro de equação $x^2 + y^2 = 1$, pelo plano XOY e pelo plano de equação $z = 4 - y$;
c. Limitado pelos cilindros de equação $x^2 + y^2 = 1$ e $x^2 + z^2 = 1$;
d. Do primeiro octante, limitado pelo cilindro parabólico $z = x^2$ e pelos planos de equação $x = 2y$ e $x = 2$.

87. Utilizando coordenadas polares, calcule o valor dos seguintes integrais:

a. $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} e^{x^2+y^2} dxdy$, onde $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 1\}$;

b. $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} \log(x^2 + y^2) dxdy$, onde $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2\}$;

c. $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} e^{x^2} dxdy$, onde $\mathcal{D} = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 3 \wedge 0 \leq y \leq \frac{x}{2}\}$;

d. $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \int_y^{\sqrt{9-y^2}} x dxdy$;

e. $\displaystyle\int_0^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} \log(1 + x^2 + y^2) dydx$.

88. Calcule a área da região do plano:

a. Limitada pela elipse de equação $\left(\dfrac{x}{a}\right)^2 + \left(\dfrac{y}{b}\right)^2 = 1$;
b. Localizada no primeiro quadrante e limitada pelas elipses de equação $x^2 + 2y^2 = 1$, $x^2 + 2y^2 = 4$ e pelas rectas $y = x$ e $y = \sqrt{3}x$;
c. Que satisfaz as inequações $x^2 + y^2 \geq 1$ e $(x - 1)^2 + y^2 \leq 1$.

89. Calcule o volume do sólido $\mathcal{S}$:

a. Limitado superiormente pela esfera de equação $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ e inferiormente pelo parabolóide de equação $z = x^2 + y^2$;
b. Limitado pelas superfícies de equação $z = x^2 + y^2$ e $x^2 + y^2 = 4$, com $z \geq 0$;
c. Limitado pelos cilindros de equação $x^2 + y^2 = 4$ e $x^2 + y^2 = 9$ e os planos $z = 2$ e $z = -3$;
d. Compreendido entre os parabolóides $3z = 4 - x^2 - y^2$ e $z = x^2 + y^2$;
e. Limitado inferiormente pela superfície de equação $z = x^2 + y^2$ e superiormente por $x^2 + y^2 + z^2 = \frac{15}{4}$, com $z \geq 1$.

90. Calcule os integrais $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} f(x,y)dxdy$, recorrendo à mudança de variáveis sugerida.

a. $f(x,y) = x^2 + y^2$ onde $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq y \leq x \leq 1\}$, considerando $x = u + v$ e $y = u - v$;
b. $f(x,y) = e^{\frac{y}{x+y}}$ onde $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0 \wedge y \geq 0 \wedge x + y \leq 1\}$, considerando $x + y = u$ e $y = uv$;
c. $f(x,y) = x^2 + y^2$ onde $\mathcal{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \leq y \leq 3x \wedge 1 \leq xy \leq 2\}$, considerando $x = \sqrt{\frac{u}{v}}$ e $y = \sqrt{uv}$.