2017/2018	Ficha Prática 3 - Cálculo Diferencial	AM2E

35. Determine as derivadas parciais de primeira ordem das seguintes funções:

i. $f_1(x,y) = \cos(\log(xy))$

ii. $f_2(x,y) = x^y$

iii. $f_3(x,y) = \dfrac{4x}{x^2+y^2}$

iv. $f_4(x,y) = 4xy^2e^{-y^2}$

v. $f_5(x,y,z) = 2x^2y^3z^4 - 13x^2y$

vi. $f_6(x,y,z) = 4xze^{-\frac{1}{x^2+y^2+z^2}}$

vii. $f_7(x,y,z,w) = \sin(\sqrt{w^2+x^2+2y^2+3z^2})$

viii. $f_8(x,y) = \displaystyle\int_x^y g(t)dt$, com $g(t)$ contínua em $\mathbb{R}$

36. Considere a função f definida em $\mathbb{R}^3 \setminus \{(0,0,0)\}$ por $f(x,y,z) = \dfrac{xy}{x^2+y^2+z^2}$. Calcule:

i. $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial x}$ **ii.** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}$ **iii.** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z \partial y}$ **iv.** $\dfrac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ **v.** $\dfrac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z}$

37. Uma função $f : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ de classe $C^2(D)$ diz-se harmónica se

$$\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in D,\ \Delta f(x) := \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x) + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}(x) = 0.$$

a. Verifique que as seguintes funções são harmónicas:

i. $f_1(x,y) = e^x \sin(y)$

ii. $f_2(x,y) = \log\left(\sqrt{x^2+y^2}\right)$

iii. $f_3(x,y,z) = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right) + \arctan\left(\dfrac{z}{y}\right) + \arctan\left(\dfrac{x}{z}\right)$

iv. $f_4(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$

b. Na ausência de campo magnético, o campo eléctrico

$$E(x) = (E_1(x), E_2(x), E_3(x)) \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$$

e o potencial eléctrico $\phi(x)$ estão ligados pela equação

$$E(x) = -\nabla\phi(x).$$

Por outro lado, as equações de Maxwell afirmam que na ausência de cargas eléctricas,

$$\frac{\partial E_1}{\partial x_1} + \frac{\partial E_2}{\partial x_2} + \frac{\partial E_3}{\partial x_3} = 0.$$

Mostre que nestas condições o potencial ϕ é uma função harmónica.
(Nota: A menos de constantes físicas, a função f_4 corresponde ao potencial eléctrico gerado por uma carga colocada na origem do referencial.)

38. Determine $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ para a função $f(x,y) = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.

39. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3 - \frac{1}{2}y^3}{x^2 + y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Determine, caso existam, as derivadas parciais de f de primeira ordem na origem. A função f é diferenciável neste ponto?

40. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy}{x^2 + y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}.$$

Mostre que $\dfrac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ e $\dfrac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ existem, mas que f não é diferenciável em $(0,0)$.

41. Considere a função:

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & , \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & , \quad (x,y) = (0,0) \end{cases} .$$

a. Escreva o gradiente de f em todos os pontos do plano. Será f diferenciável em $\mathbb{R}^2$?

b. Calcule $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0,0)$ e $\dfrac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0,0)$.

42. Calcule a derivada segundo o vector indicado (no ponto P) e a correspondente derivada direccional.

i. $f(x,y) = 3x^2 + 5y^2$, $\quad u = (3,-2)$, $\quad P = (-2,1)$

ii. $f(x,y) = x^2 - 2y^2$, $\quad u = (-1,2)$, $\quad P = (-2,3)$

iii. $f(x,y,z) = \dfrac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}$, $\quad u = (1,2,1)$, $\quad P = (-2,2,1)$

43. Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ diz-se homogénea de grau um se $f(tx) = tf(x)$ para quaisquer $x \in \mathbb{R}^n$ e $t \in \mathbb{R}$. Mostre que para qualquer função homogénea de grau um,

$$f'_u(0) = f(u).$$

44. A superfície de uma montanha é modelada pela curva de equação

$$h(x,y) = 5000 - 0.001x^2 - 0.004y^2.$$

Um alpinista está no ponto $(500, 300, 4390)$. Se o alpinista quiser subir a parte mais íngreme da montanha, qual a direcção que deve tomar?

45. A figura seguinte representa as curvas de nível de uma função f. Indique se as deri-

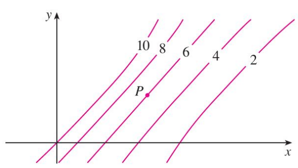

Figura 1: Representação de curvas de nível.

vadas parciais $\frac{\partial f}{\partial x}$ e $\frac{\partial f}{\partial y}$ são positivas ou negativas no ponto P.

46. Considere a função f definida por:

$$f(x,y) = \begin{cases} 1 + \dfrac{2(y-1)^3 + x^2(y-1+x^4)}{x^2 + 2(y-1)^2} & , \quad (x,y) \neq (0,1) \\ 1 & , \quad (x,y) = (0,1) \end{cases}.$$

a. Estude a continuidade de f no ponto $(0,1)$.
b. Estude a diferenciabilidade de f no ponto $(0,1)$.
c. Calcule $f'_{(2,1)}(0,1)$.
d. Calcule uma aproximação de primeira ordem para $f(0.012, 1.005)$.

47. Sejam $a, b \in \mathbb{R}$. Consideremos uma função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{(x-a)(y-b)^2}{(x-a)^2 + (y-b)^4} & , \quad (x,y) \neq (a,b) \\ 0 & , \quad (x,y) = (a,b) \end{cases}.$$

Mostre que $f'_u(a,b)$ existe qualquer que seja o vector u unitário, mas que f não é diferenciável em (a,b). Será f contínua em (a,b)? Justifique.

48. Considere a função f definida pela expressão

$$f(x,y) = \frac{y^3 \cos(xy)}{x^2 + y^2}.$$

Será possível construir um prolongamento $\overline{f}$ de f a $\mathbb{R}^2$ tal que esse prolongamento seja diferenciável no ponto $(0,0)$? Sendo $\bar{f}$ o prolongamento por continuidade de f ao ponto $(0,0)$, calcule, caso exista, $\overline{f}'_{(1,1)}(0,0)$.

49. Determine uma aproximação linear da função $f(x,y) = \sqrt{20 - x^2 - 7y^2}$ em $(2,1)$ e use-a para determinar um valor aproximado de $f(1.95, 1.08)$.

50. Consideremos um bloco sólido com dimensões laterais x, y e z. Seja $d = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ o comprimento da diagonal do bloco. O comprimento de cada lado foi medido utilizando um instrumento mal calibrado, sujeito a erros máximos de 0.03. Supondo que se obtiveram os comprimentos $x = 2$, $y = 1$ e $z = 2$, utilize uma aproximação de primeira ordem para calcular um valor aproximado do erro cometido ao afirmar que o comprimento da diagonal do bloco é igual a 3.

51. Duas resistências eléctricas r_1 e r_2 montadas em paralelo geram uma resistência equivalente de

$$R(r_1, r_2) = \frac{r_1 r_2}{r_1 + r_2}.$$

Sabendo que $r_1 = 100\Omega$ e $r_2 = 400\Omega$, e que estes valores foram calculados respectivamente com um erro máximo de 2% e 3%, use um desenvolvimento de primeira ordem para $R(r_1, r_2)$ para obter uma boa estimativa do erro máximo que se comete ao afirmar que o valor da resistência é igual a $R(100, 400) = 80\Omega$.

52. O período de um pêndulo em regime de pequenas oscilações é dado por

$$T(L, g) = 2\pi\sqrt{\frac{L}{g}},$$

onde L é o comprimento do pêndulo e g é a aceleração da gravidade.
Sabendo que os valores $g = 9,81\, ms^{-2}$ e $L = 10\, m$ foram obtidos com uma precisão de 1% e 3%, respectivamente, estime utilizando um desenvolvimento de primeira ordem a incerteza associada ao afirmar que o período do pêndulo é igual a $T(10\, m, 9,81\, ms^{-2})$.

53. Seja $\varphi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função contínua em $(0,0)$, com $\varphi(0,0) = 0$. Mostre que a função $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f(x,y) = (x+y)\varphi(x,y)$ é diferenciável no ponto $(0,0)$.

54. Mostre que $g(x,t) = \frac{1}{2}[f(x-ct) + f(x+ct)]$, com $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de classe $\mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ e c uma constante real, é uma solução da equação de onda unidimensional

$$\frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 g}{\partial x^2}.$$

(Nota: Esta equação descreve pequenas vibrações transversais de uma corda elástica, como as associadas a alguns instrumentos musicais.)

55. Seja n um inteiro positivo. Seja $f(x,y) : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ uma função de classe $C^1(\Omega)$, homogénea de grau n, isto é, para todo $(x,y) \in \Omega$ e para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(\lambda x, \lambda y) \in \Omega$, $f(\lambda x, \lambda y) = \lambda^n f(x,y)$.

a. Mostre que f verifica

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = nf.$$

b. Considere $f(x,y) = x^4y^2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right)$. Indique o maior aberto onde as derivadas parciais de primeira ordem de f estão definidas e verifique que nesse aberto temos

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} = 6f.$$

56. Sejam $f, \phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ duas funções de classe $C^2(\mathbb{R})$. Seja $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ a função definida por

$$F(x,y) = f(x + \phi(y)).$$

Verifique que

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial^2 F}{\partial x \partial y}\frac{\partial F}{\partial x} = 0.$$

57. Mostre que a função $z = f(x^2y)$, com f diferenciável, verifica a igualdade

$$x\frac{\partial z}{\partial x} = 2y\frac{\partial z}{\partial y}.$$

58. Considere as funções $u(x,y)$ e $v(x,y)$. Mostre que as equações de Cauchy-Reimann

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \text{ e } \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}$$

podem ser escritas em coordenadas polares como

$$\frac{\partial u}{\partial r} = \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} \text{ e } \frac{\partial v}{\partial r} = -\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta}.$$

59. Sejam $F(x,y)$ e $G(x,y)$ duas funções diferenciáveis em todo o seu domínio. Exprima em função de F e G e das suas derivadas parciais, as derivadas parciais das seguintes funções:

a. $f(x,y) = F\left(y\cos(x), \int_0^{xy} e^{-t^2}\, dt\right)$

b. $g(x,y) = F\left(G(x,y), \arctan\left(\frac{x}{y^2}\right)\right)$

60. Seja $f(x,y)$ uma função diferenciável em todo o seu domínio. Consideremos $x = u\cos(\alpha) - v\sin(\alpha)$ e $y = u\sin(\alpha) + v\cos(\alpha)$, com α constante real. Mostre que

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 = \left(\frac{\partial f}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial v}\right)^2.$$

61. Seja g a função definida em $\mathbb{R}^3$ por

$$g(x,y,z) = \left(x^2 + e^z, \arctan\left(\frac{x+y+z}{3}\right)\right).$$

a. Escreva a matriz jacobiana de g na origem. Calcule uma aproximação de primeira ordem para $g(0.01, 0.2, 0.03)$.
b. Seja $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ uma função diferenciável cuja matriz jacobiana é dada em todo o ponto por

$$Jac_f(x,y) = \begin{bmatrix} y+2 & x^2 \\ \cos(y) & e^x \end{bmatrix}.$$

Calcule a matriz jacobiana de fog no ponto $(1,1,1)$.

62. Mostre que as aplicações

$$\begin{array}{lcl} f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \to & \vec{x}.\vec{y} \end{array} \qquad e \qquad \begin{array}{lcl} g : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\vec{x}, \vec{y}) & \to & \vec{x} \times \vec{y} \end{array}$$

são diferenciáveis e explicite as suas matrizes jacobianas.