Computação Gráfica e Interfaces

2017-2018

Fernando Birra

Coordenadas Homogéneas

2017-2018

Fernando Birra

Objetivos

- Introduzir o conceito de Coordenadas Homogéneas
- Mudanças de referencial:
  - Caso dos vetores
  - Caso dos pontos

Representação Única de Pontos e Vetores

- Dado um referencial $(v1, v2, v3, P_0)$, com origem no ponto P_0 e base = {v1, v2, v3}, se definirmos as operações:

$$0 \cdot P = \mathbf{0} \text{ e } 1 \cdot P = P$$

multiplicação de um escalar por um ponto

- então podemos escrever, qualquer vetor V e ponto P:

$$V = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ 0][v_1 \ v_2 \ v_3 \ P_0]^T$$

$$P = \beta_1 v_1 + \beta_2 v_2 + \beta_3 v_3 + 1P_0 = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ 1][v_1 \ v_2 \ v_3 \ P_0]^T$$

- obtendo assim a representação **v** e **p**, em coordenadas homogéneas do vetor V e do ponto P:

$$\boxed{\mathbf{v} = [\alpha_1 \ \alpha_2 \ \alpha_3 \ 0]^T \qquad \mathbf{p} = [\beta_1 \ \beta_2 \ \beta_3 \ 1]^T}$$

Coordenadas Homogéneas em Computação Gráfica

- As coordenadas homogéneas são fundamentais em todos os sistemas gráficos
- Todas as transformações geométricas elementares (rotação, translação e mudança de escala) podem ser implementadas com o produto de matrizes 4x4, aplicadas a pontos ou vetores representados em coordenadas homogéneas
- O pipeline implementado no hardware gráfico trabalha com representações 4D

Mudança de sistema de coordenadas

- Considerem-se duas representações **a** e **b**, dum mesmo vetor v, em relação a duas bases diferentes:

$$\mathbf{a}=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]^T \qquad \mathbf{b}=[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3]^T$$

- onde:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 = [\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3][v_1\ v_2\ v_3]^T = \mathbf{a}^T[v_1\ v_2\ v_3]^T$$

$$= \beta_1 u_1 + \beta_2 u_2 + \beta_3 u_3 = [\beta_1\ \beta_2\ \beta_3][u_1\ u_2\ u_3]^T = \mathbf{b}^T[u_1\ u_2\ u_3]^T$$

$$\boxed{\mathbf{a}^T[v_1\ v_2\ v_3]^T = \mathbf{b}^T[u_1\ u_2\ u_3]^T}$$

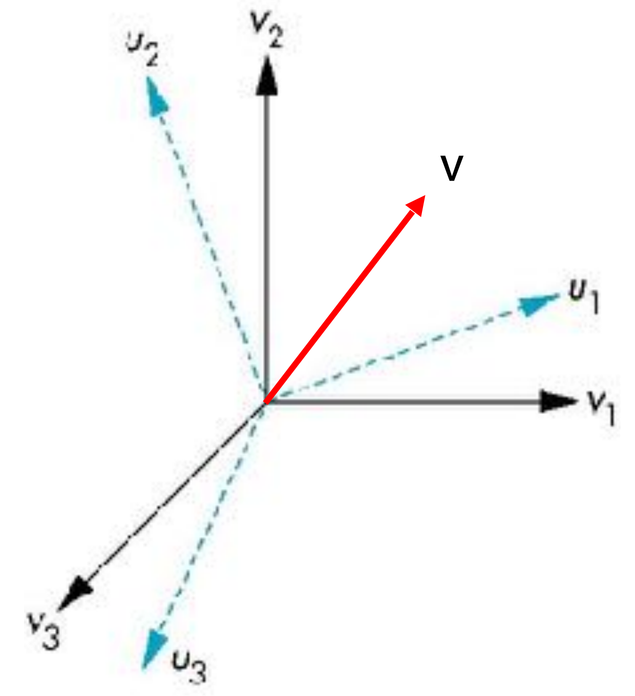
Representação duma base em relação a outra

- Cada um dos vetores u_1, u_2, u_3 de uma das bases, pode escrever-se como uma combinação linear dos vetores v_1, v_2, v_3 da outra base:

$$u_1 = \gamma_{11} v_1 + \gamma_{12} v_2 + \gamma_{13} v_3$$

$$u_2 = \gamma_{21} v_1 + \gamma_{22} v_2 + \gamma_{23} v_3$$

$$u_3 = \gamma_{31} v_1 + \gamma_{32} v_2 + \gamma_{33} v_3$$



Representação duma base em relação a outra

- Os coeficientes definem uma matriz **M**, de 3x3:

$$\mathrm{M} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix}$$

- e podemos escrever:

$$\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix} = \mathrm{M} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}$$

Mudança de sistema de coordenadas

- Substituindo:

$$[u_1\ u_2\ u_3]^T = \mathbf{M}[v_1\ v_2\ v_3]^T$$

na igualdade:

$$\mathbf{a}^T[v_1\ v_2\ v_3]^T = \mathbf{b}^T[u_1\ u_2\ u_3]^T$$

obtém-se:

$$\mathbf{a}^T[v_1\ v_2\ v_3]^T = \mathbf{b}^T\mathbf{M}[v_1\ v_2\ v_3]^T$$

$$\mathbf{a}^T = \mathbf{b}^T\mathbf{M}$$

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^T\mathbf{b}$$

$$[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3]^T = \mathbf{M}^T[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3]^T$$

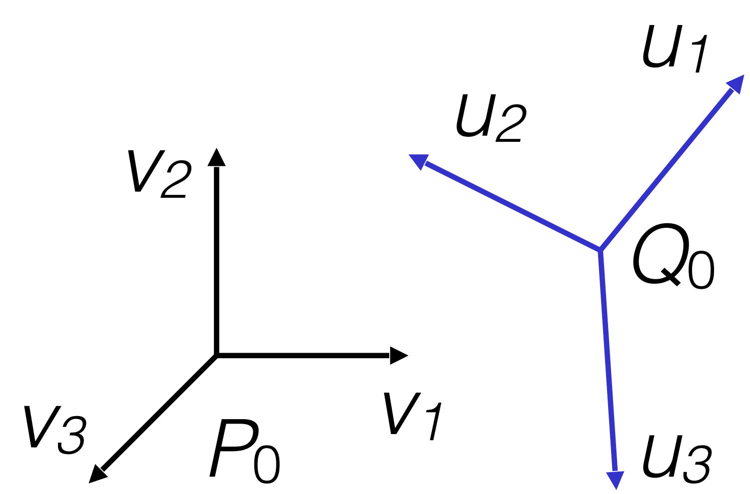
Mudança de referenciais

- O mesmo processo pode ser aplicado em coordenadas homogéneas às representações, quer dos pontos, quer dos vetores

Considerando dois referenciais:

$(v_1,\ v_2,\ v_3,\ P_0)$

$(u_1,\ u_2,\ u_3,\ Q_0)$



- Qualquer ponto ou vetor pode ser representado em qualquer dos referenciais.

- Pode representar-se $(u_1,\ u_2,\ u_3,\ Q_0)$ em relação a $(v_1,\ v_2,\ v_3,\ P_0)$

Representação dum referencial em relação a outro

- Estendendo o que foi feito para a mudança de bases:

$$
\begin{aligned}
u_1 &= \gamma_{11} v_1 + \gamma_{12} v_2 + \gamma_{13} v_3 \\
u_2 &= \gamma_{21} v_1 + \gamma_{22} v_2 + \gamma_{23} v_3 \\
u_3 &= \gamma_{31} v_1 + \gamma_{32} v_2 + \gamma_{33} v_3 \\
Q_0 &= \gamma_{41} v_1 + \gamma_{42} v_2 + \gamma_{43} v_3 + P_0
\end{aligned}
$$

- Introduzimos a matrix **M** de 4x4, escrevendo:

$$
\begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ Q_0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \gamma_{13} & 0 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \gamma_{23} & 0 \\ \gamma_{31} & \gamma_{32} & \gamma_{33} & 0 \\ \gamma_{41} & \gamma_{42} & \gamma_{43} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ P_0 \end{bmatrix} = \mathbf{M} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ P_0 \end{bmatrix}
$$

Usando as representações

- Um ponto ou vetor tem uma única representação em cada um dos referenciais:

$$\mathbf{a}=[\alpha_1\ \alpha_2\ \alpha_3\ \alpha_4]^T$$

$$\mathbf{b}=[\beta_1\ \beta_2\ \beta_3\ \beta_4]^T$$

- onde $\alpha_4=\beta_4=1$ para os pontos e $\alpha_4=\beta_4=0$ para os vetores, podendo mudar-se a representação usando:

$$\mathbf{a} = \mathbf{M}^T\mathbf{b}$$

- A matrix **M** é uma matriz de 4x4 que define uma transformação afim (transformação linear seguida duma translação) em coordenadas homogéneas.

Transformações Afins

- Todas as transformações lineares equivalem a uma mudança de referencial
- Todas as transformações afins preservam as linhas
- Uma transformação afim apenas possui 12 graus de liberdade (porque os 4 elementos mais à direita na matriz da transformação são constantes fixas).
- As transformações afins são um subconjunto de todas as transformações 4x4 lineares possíveis.

Exemplo de mudança de referencial (Mundo, Câmara e Recorte)

- Quando se usa a representação de pontos e vetores, trabalha-se com tuplos ou arrays de números reais.
- Uma mudança de referencial é representada por uma matriz de 4x4
- Em WebGL, o referencial em que se especificam os objetos duma cena é o referencial do mundo, sendo as suas coordenadas designadas por World Coordinates (WC)
- À saída do *vertex shader*, o sistema de coordenadas é um sistema normalizado (de dimensões pré-definidas) denominado de *clip coordinates,* ou coordenadas de recorte *(um cubo de lado 2, centrado na origem)*
- Se nenhuma transformação for efetuada pelo *vertex shader*, os referenciais em que se especificam os objetos e as coordenadas de recorte coincidem (estão sobrepostos)
- Numa fase intermédia do processamento, ao vertex shader poderá convir que as coordenadas estejam no referencial da câmara ou do olho (Camera/Eye Coordinates).