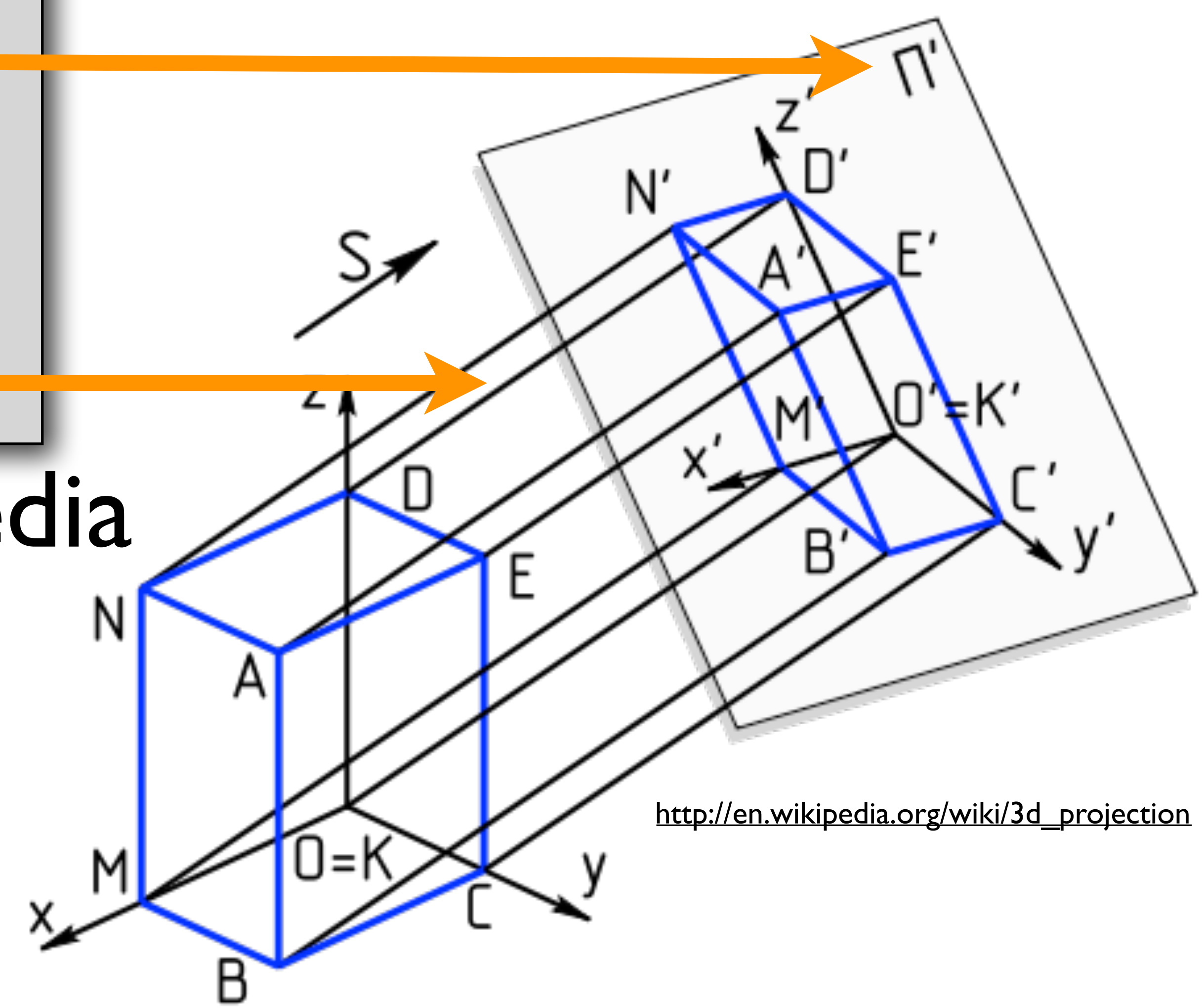
Projeções Geométricas Planas

Projeções Geométricas Planas

A superfície de projeção é um plano.

As projetantes são linhas retas.

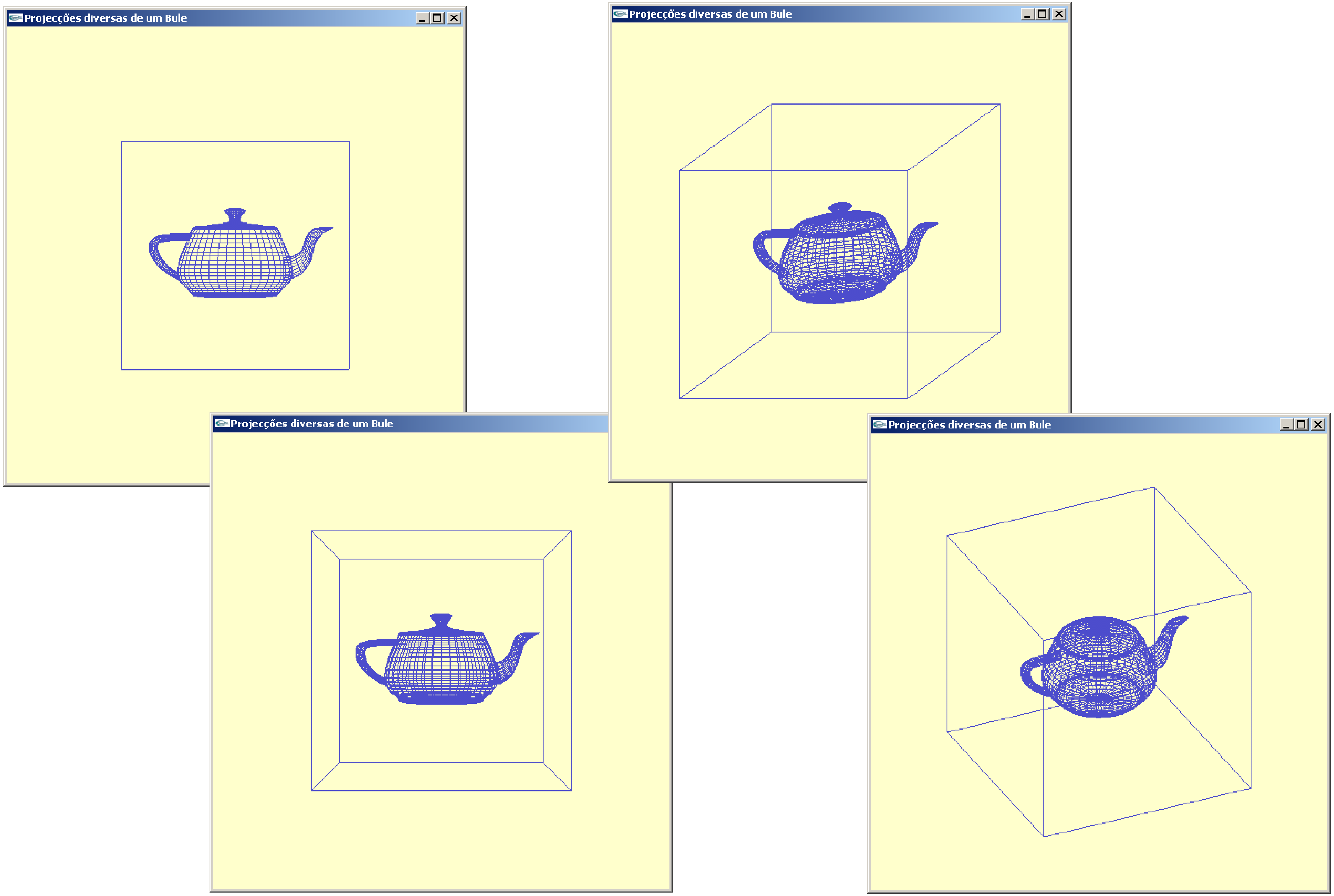
Wikipedia



http://en.wikipedia.org/wiki/3d_projection

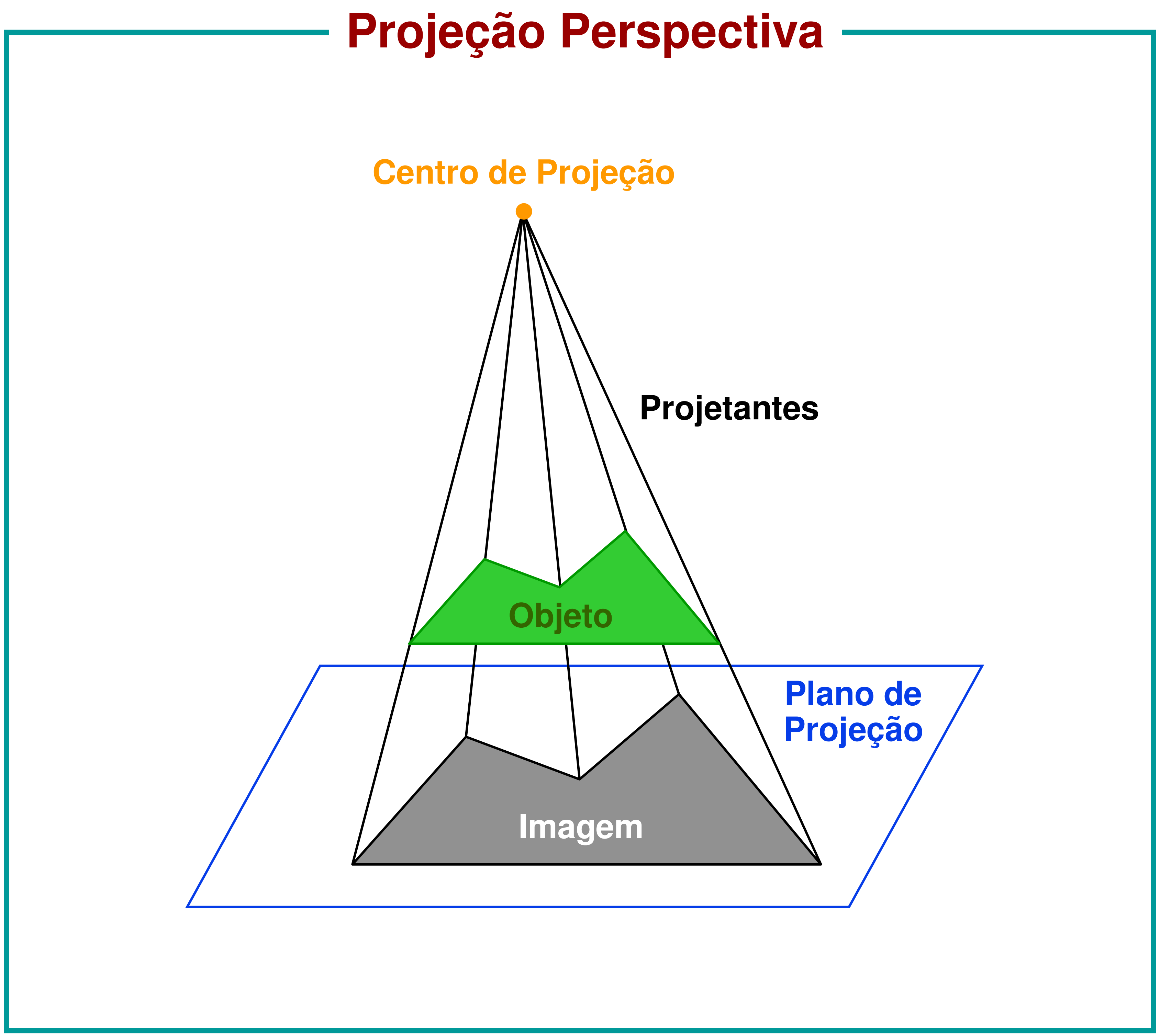
A (imagem da) projeção de um ponto é a intersecção da projetante com o plano.

Exemplos



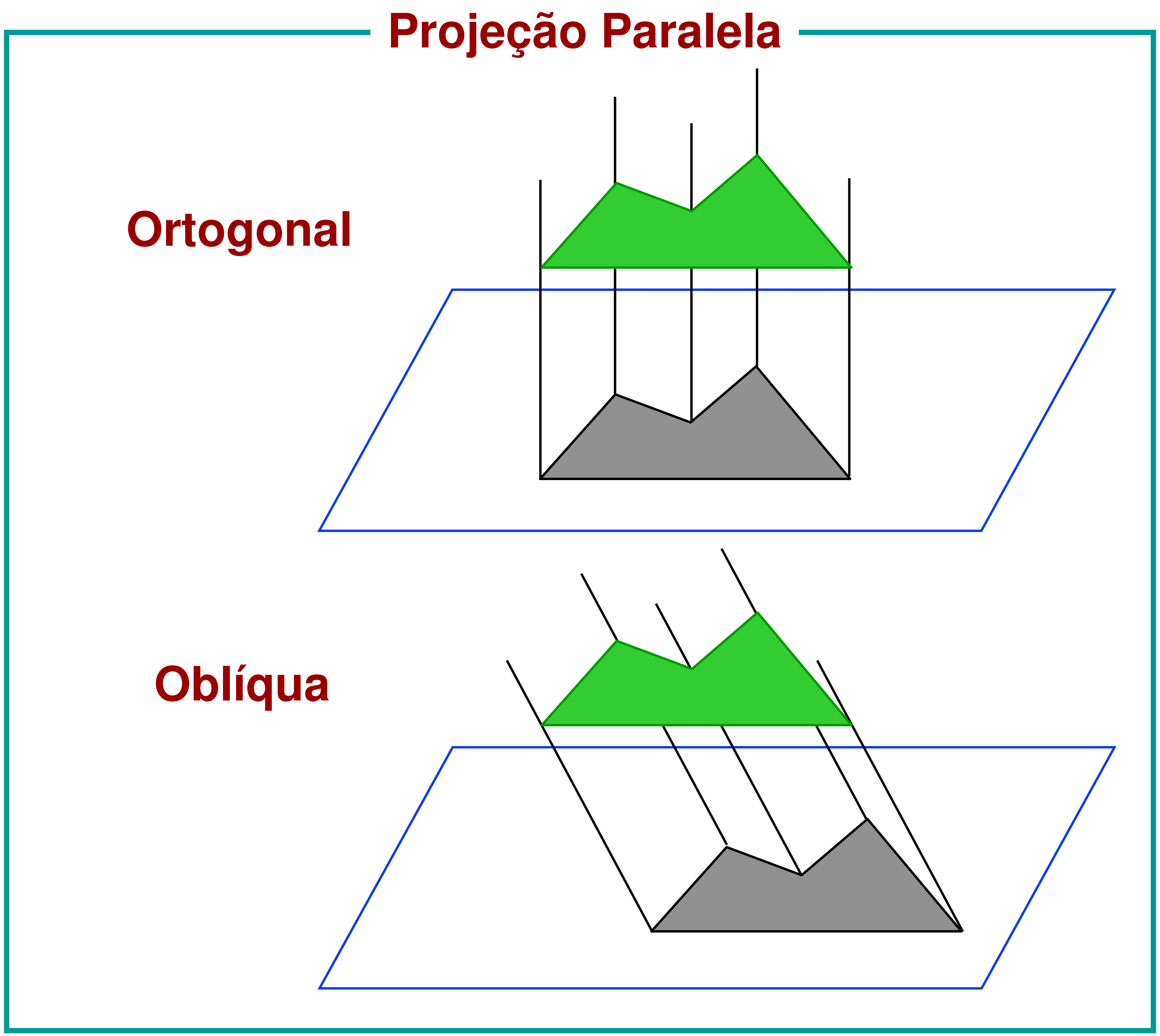
M.Próspero

Projeção Perspetiva



M.Próspero

Projeção Paralela

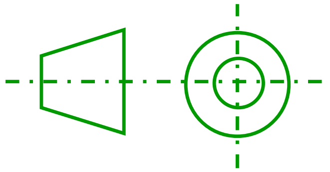


Nota: É um caso particular da Projeção Perspectiva

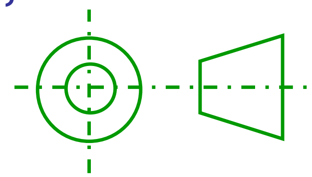
M.Próspero

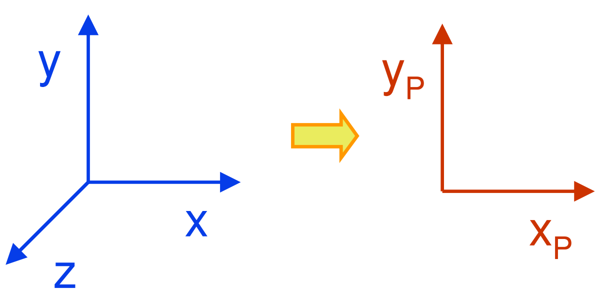
Uma classificação das projeções no desenho técnico

- **Central ou Cónica (Perspectiva)**
- **Paralela**
  - **Oblíqua**
  - **Ortogonal**
    - **Simples**
      - **Axonométrica**
        - **Isométrica**
        - **Dimétrica**
        - **Trimétrica**
      - **Cotada**
    - **Dupla**
    - **Múltipla**
      - **Método Europeu, do 1.º Diedro ou Método E**



      - **Método Americano, do 3.º Diedro ou Método A**





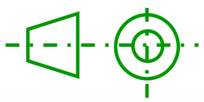
$$P' = P_P = M_{projeção} \cdot P$$

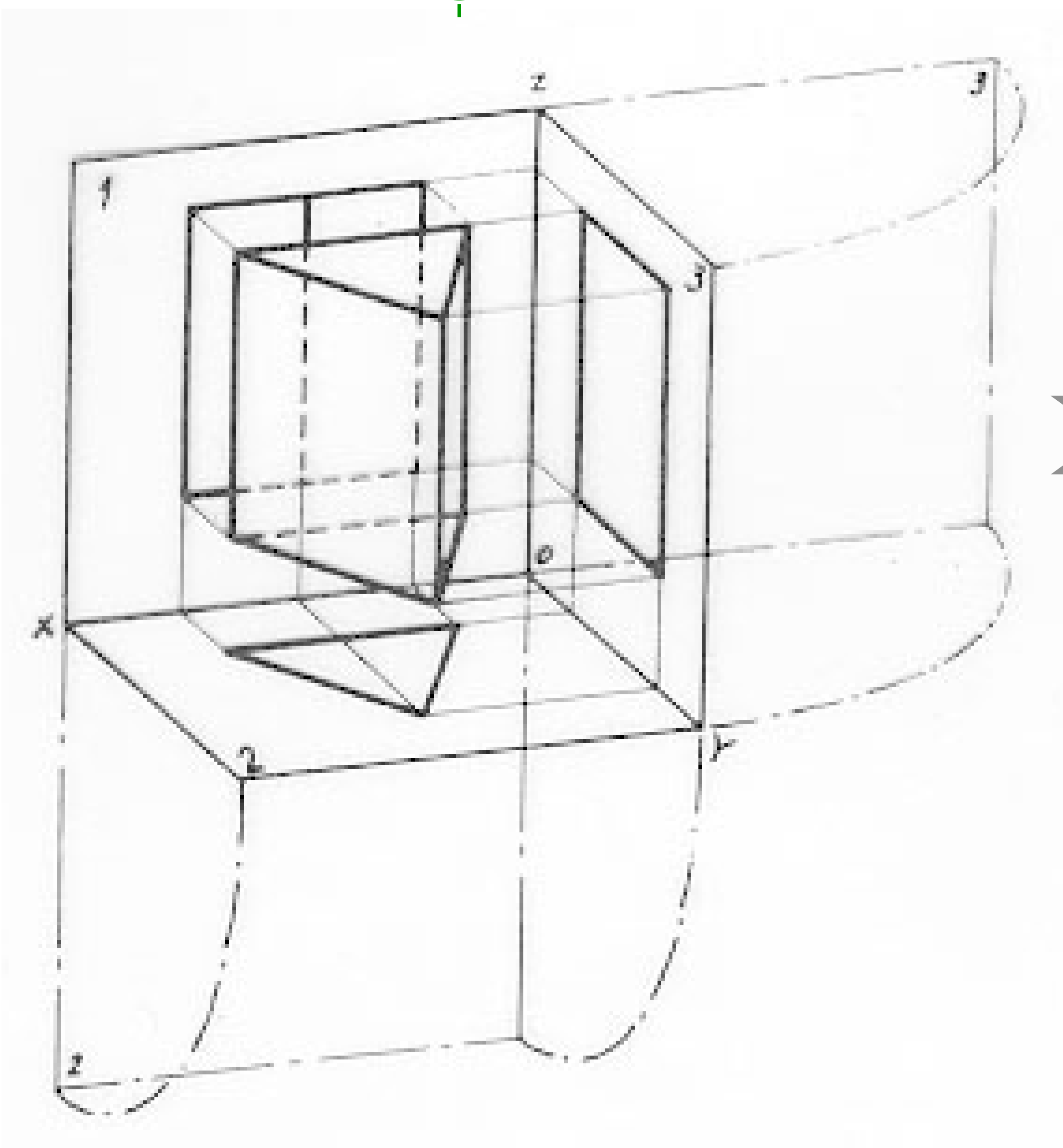
M.Próspero

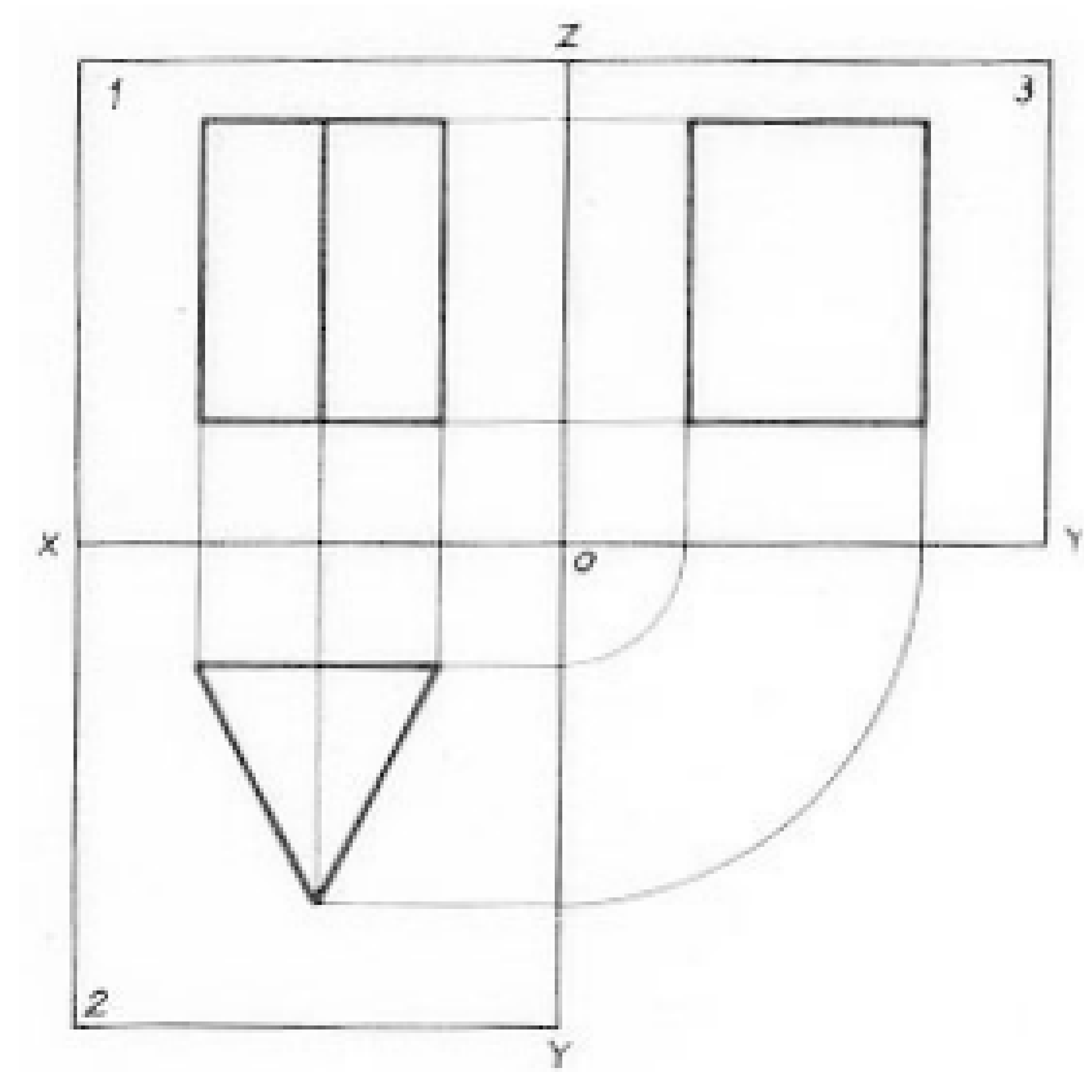
Projeções Ortogonais Múltiplas

PROJEÇÕES ORTOGONAIS MÚLTIPLAS

(Método Europeu)



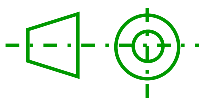




M.Próspero

PROJEÇÕES ORTOGONAIS MÚLTIPLAS

(Método Europeu)



As diferenças entre os métodos A e E baseiam-se nas relações entre:

(1) Observador

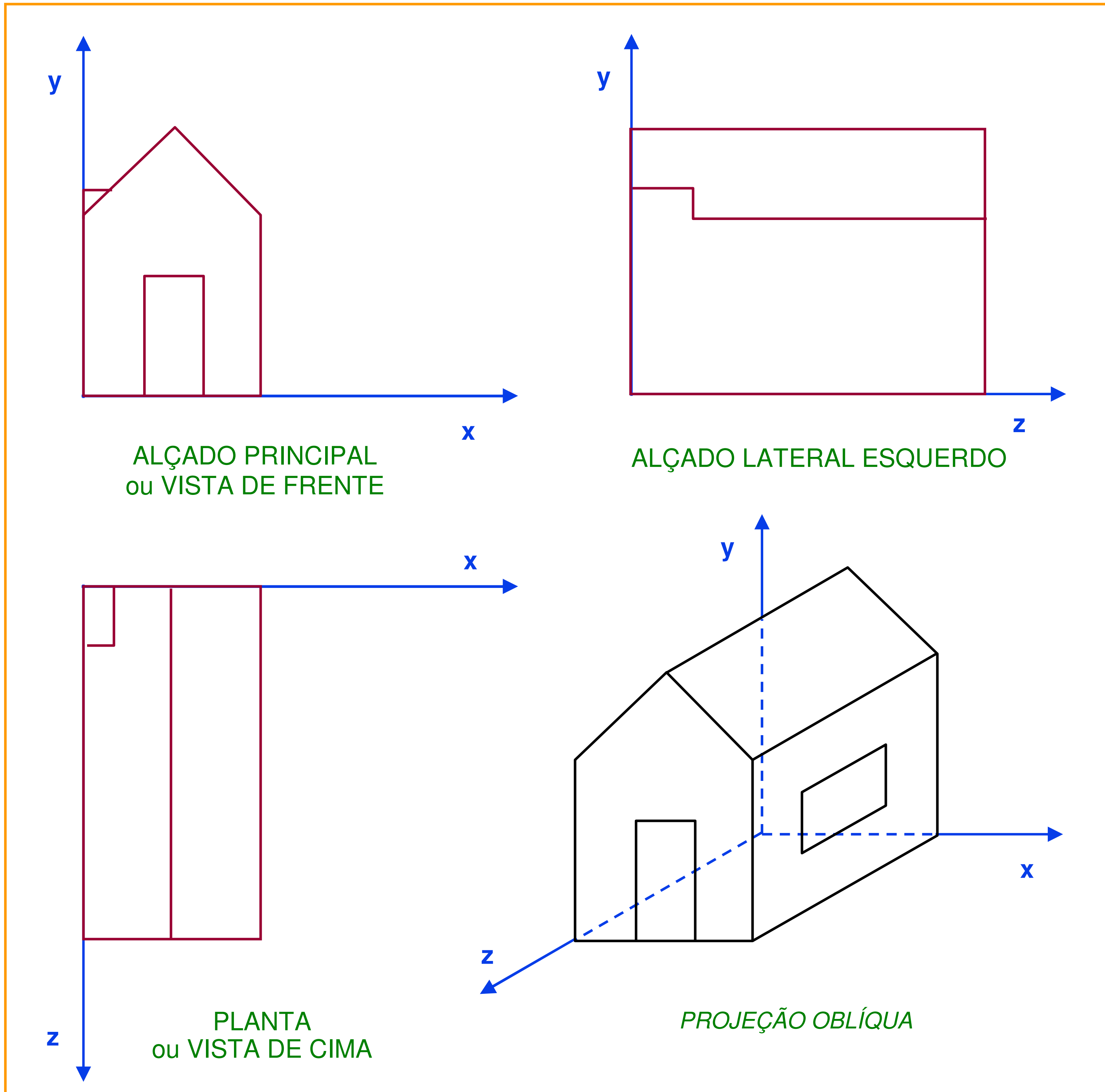
(2) Objeto

(3) Plano de projeção.

Método A: (3) entre (1) e (2)

Método E: (2) entre (1) e (3)

É usual aproveitar-se o quadrante livre para uma representação do objeto noutro tipo de projeção (oblíqua, no exemplo ao lado).



M.Próspero

Matemática da Projeção Ortogonal

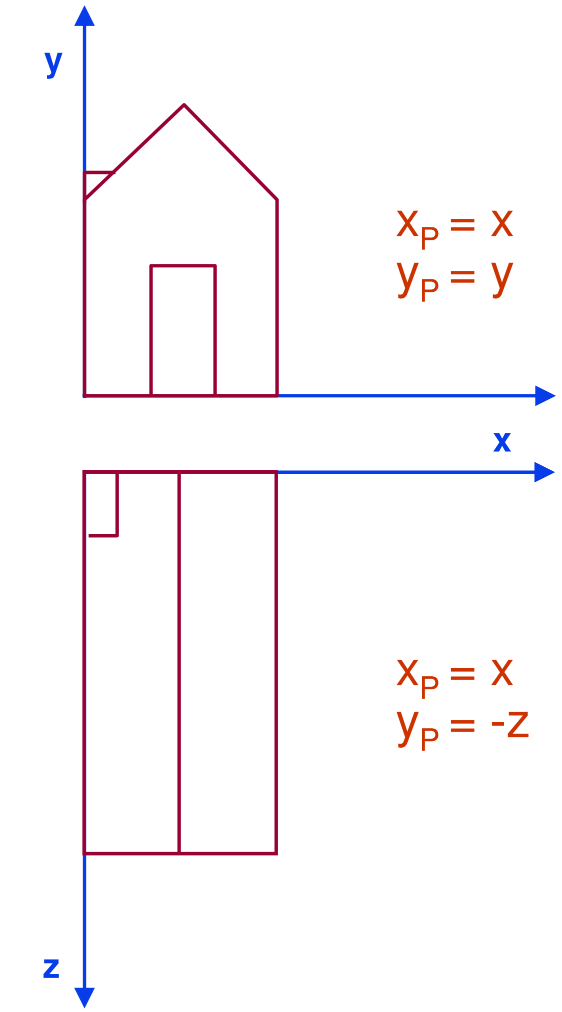
$$P' = M_{ORT} \cdot P$$

Alçado Principal:

$$M_{ORT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x_P = x$
$y_P = y$

$z_P = 0$



Planta:

$$M_{ORT} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$x_P = x$
$y_P = -z$

etc.

Prós e contras:

- \+ Mostra as dimensões exatas das faces paralelas ao plano de projeção.
- \- Pode ser difícil avaliar a forma tridimensional do objecto.

M.Próspero

Composição de Transformações na Projeção Ortogonal

Conhecendo-se a matriz $\mathbf{M_{ORT}}$ do Alçado Principal e recordando que

$$R_X(\theta) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

facilmente se prova que $\mathbf{M_{ORT} \cdot R_x(90°)}$ coincide com a matriz da Planta:

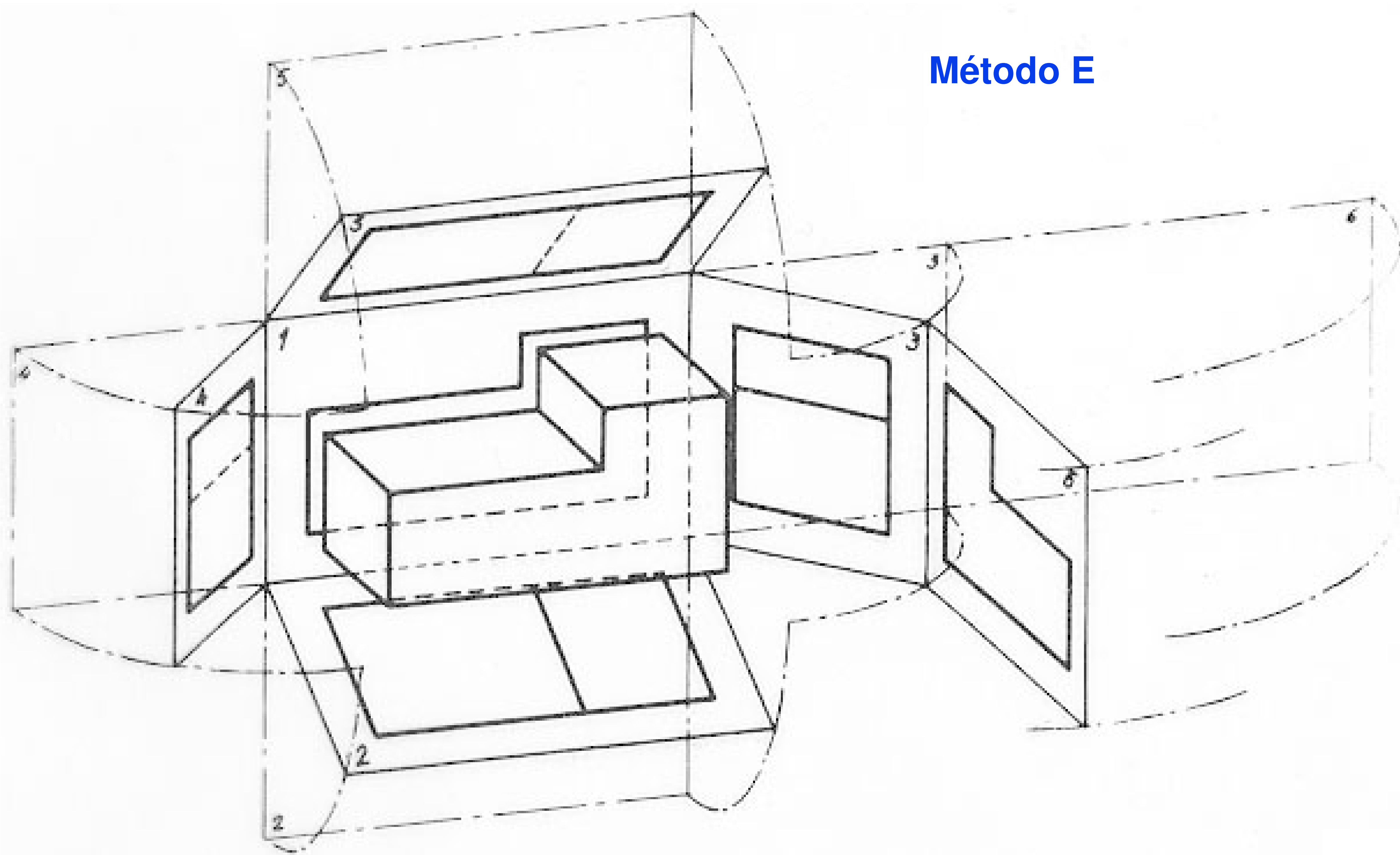
$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Conclusão:

A interpretação geométrica com base em rotações é uma solução alternativa mais simples à dedução matemática direta de cada matriz de projeção, bastando ter-se a matriz do alçado principal e rodar-se previamente o objeto em torno do eixo adequado.

M.Próspero

Projeções Ortogonais Múltiplas



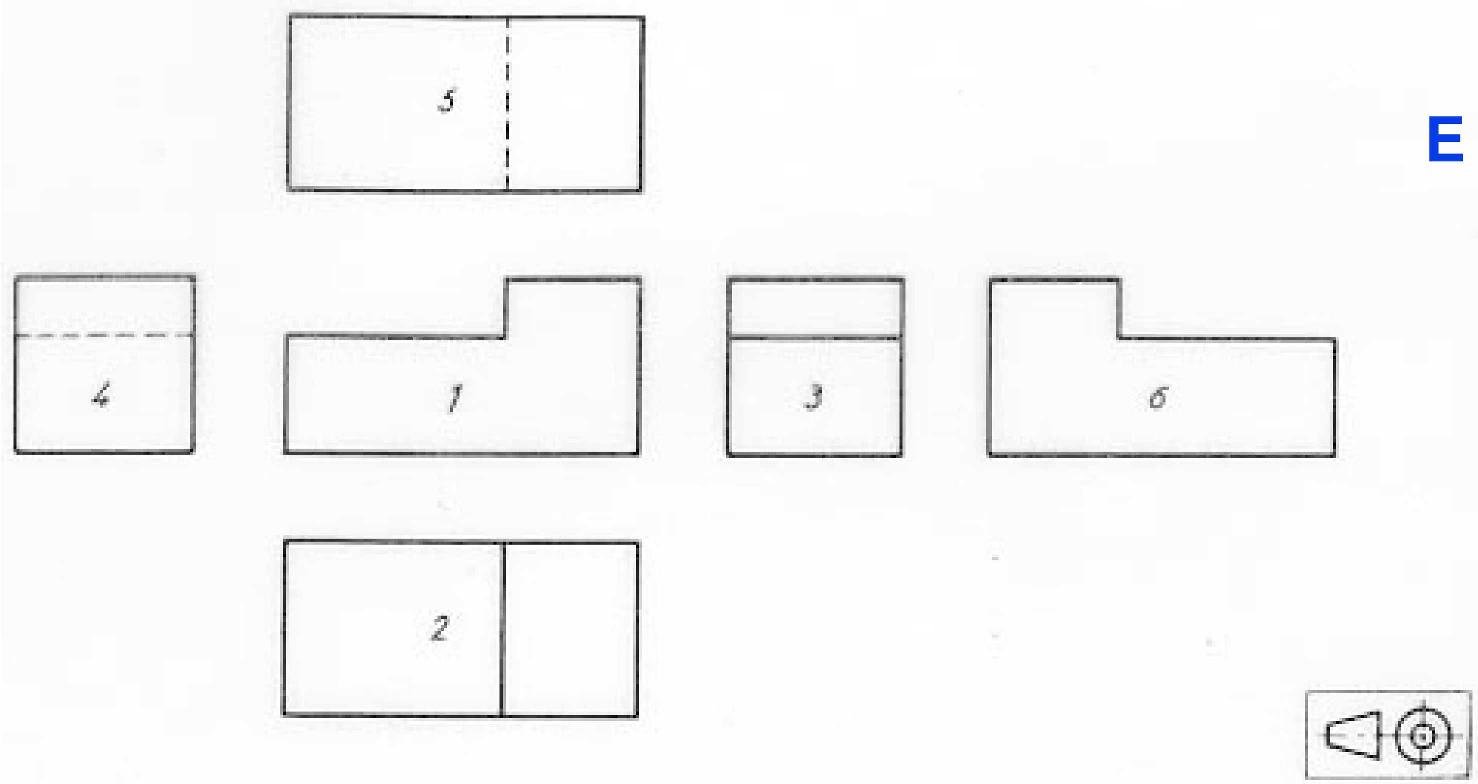
Método E

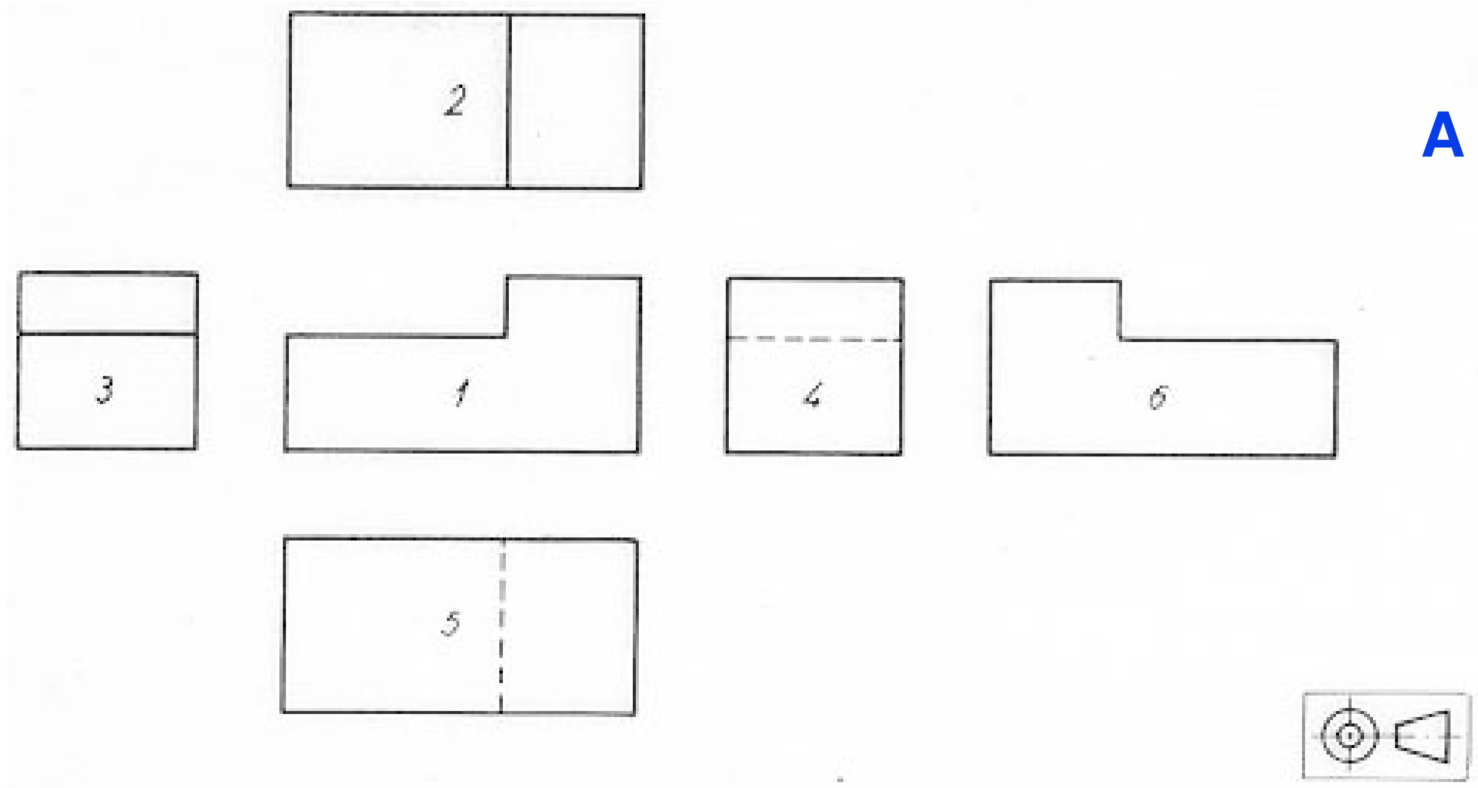
M.Próspero

Projeções Ortogonais Múltiplas

1. *Alçado principal*
2. *Planta*
3. *Alçado lateral esquerdo*
4. *Alçado lateral direito*
5. *Vista de baixo*
6. *Alçado de tardoz* *

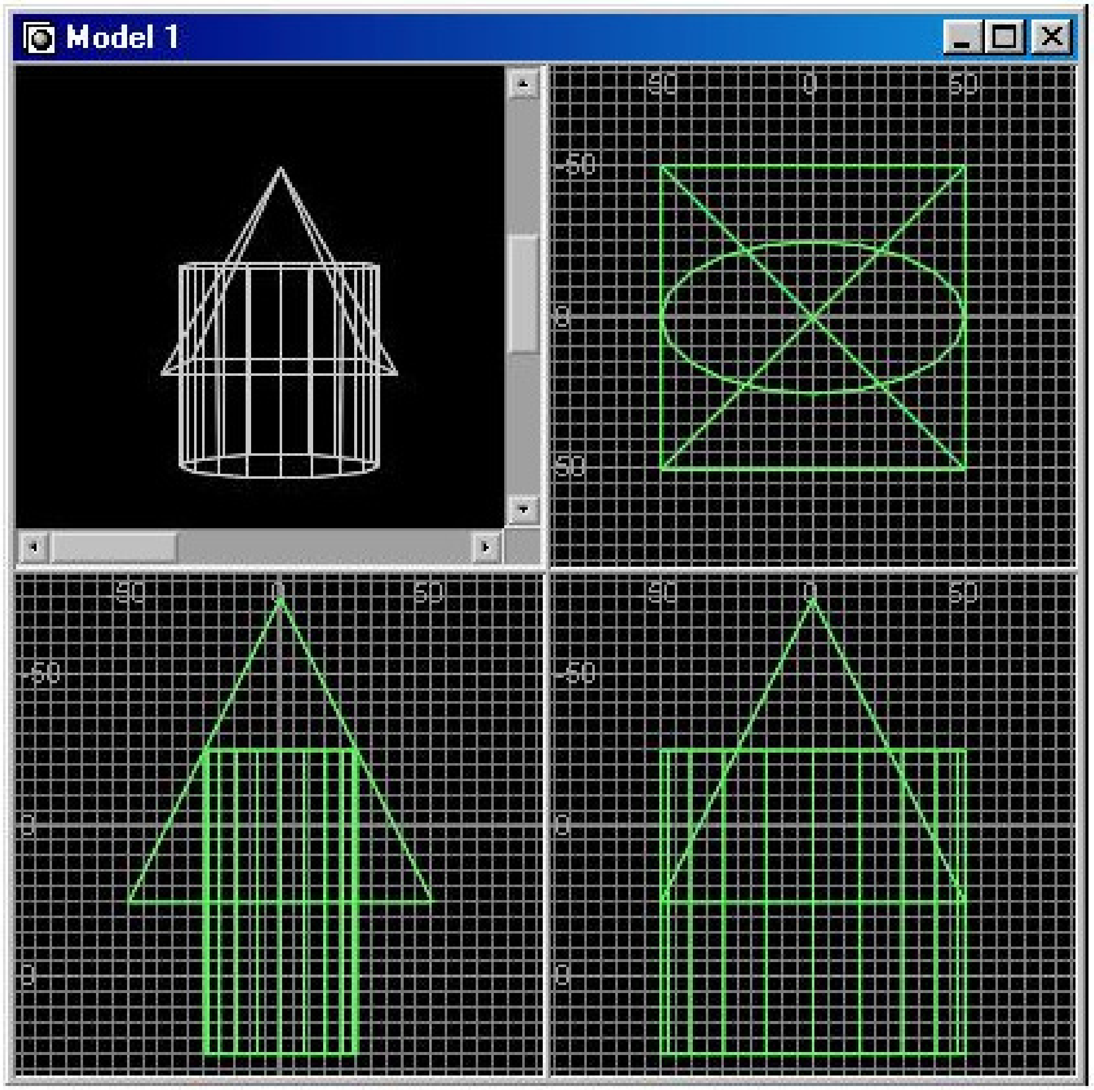
* Indiferente ficar à esquerda ou à direita





M.Próspero

Método A

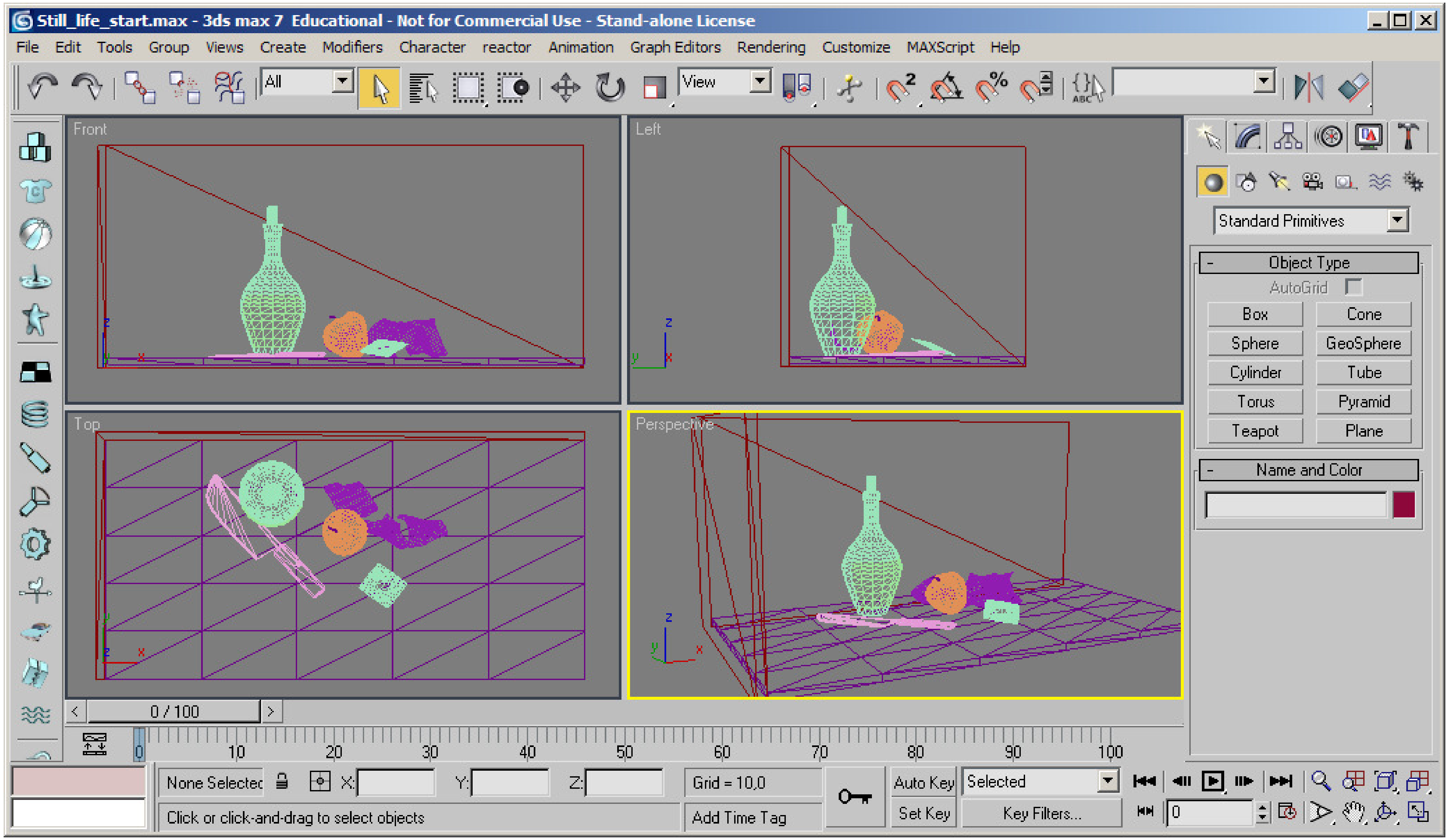


3D Flash Animator

M.Próspero

Projeções Ortogonais Múltiplas

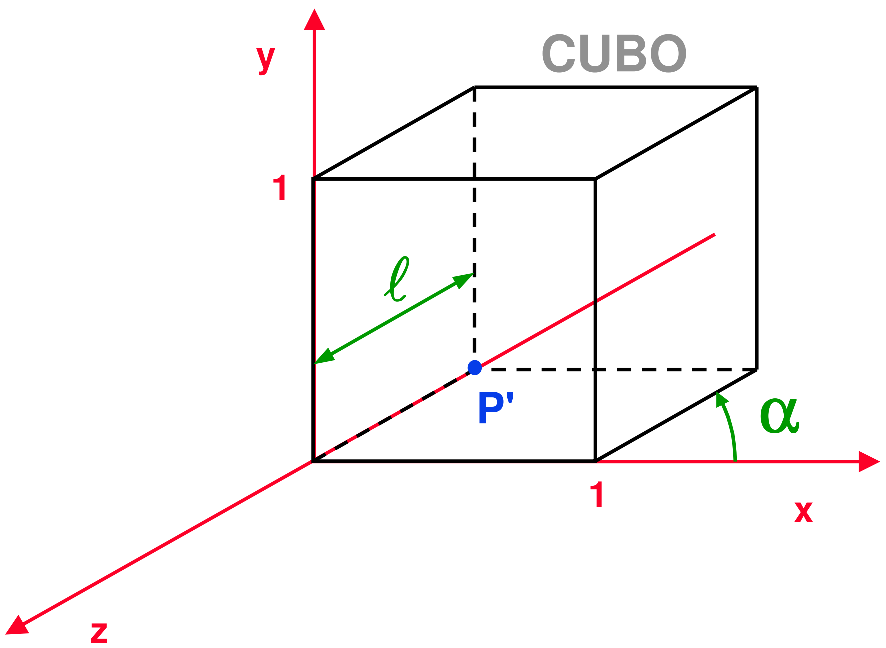
Método E



3D Studio Max

M.Próspero

Projeção Oblíqua

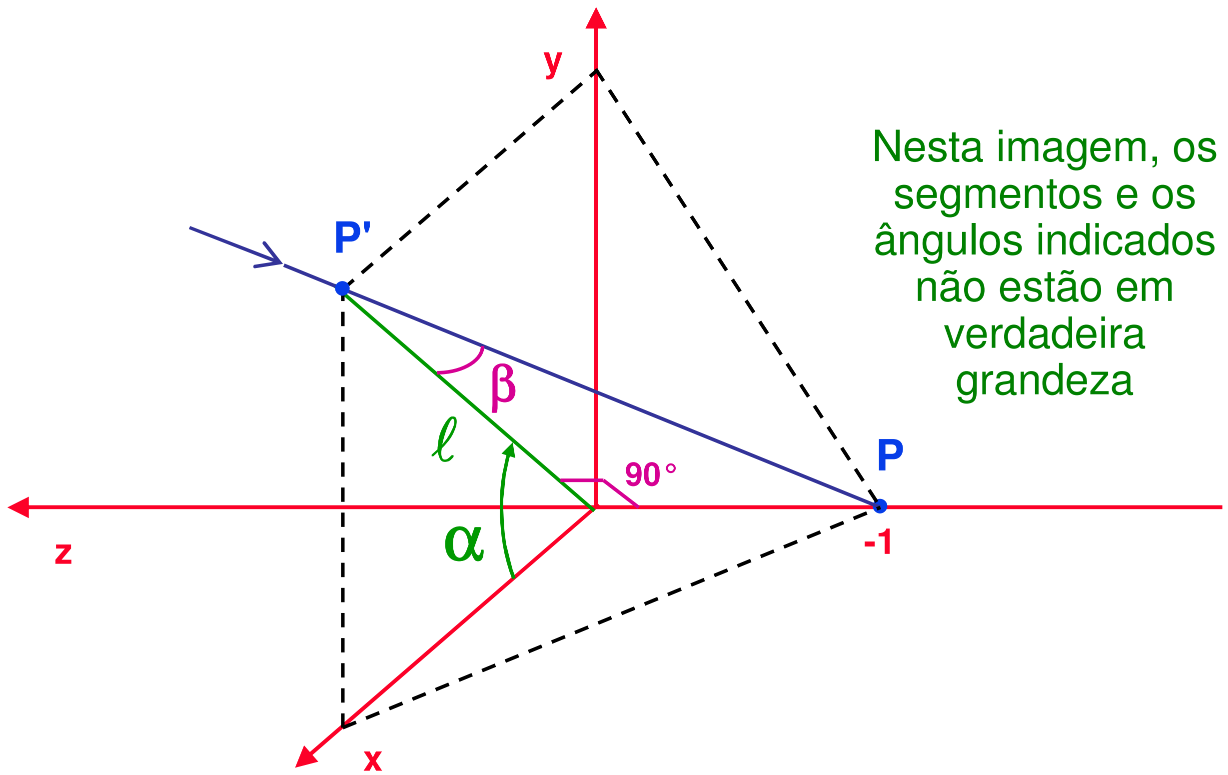


ℓ – **fator de redução ou de encurtamento (*Foreshortening Ratio*)**

α – **ângulo de fuga**

(valores medidos no espaço da imagem)

Plano de projeção: xy



Nesta imagem, os segmentos e os ângulos indicados não estão em verdadeira grandeza

P (0, 0, -1) → P' (ℓ cos α, ℓ sin α, 0)

Direção de projeção:

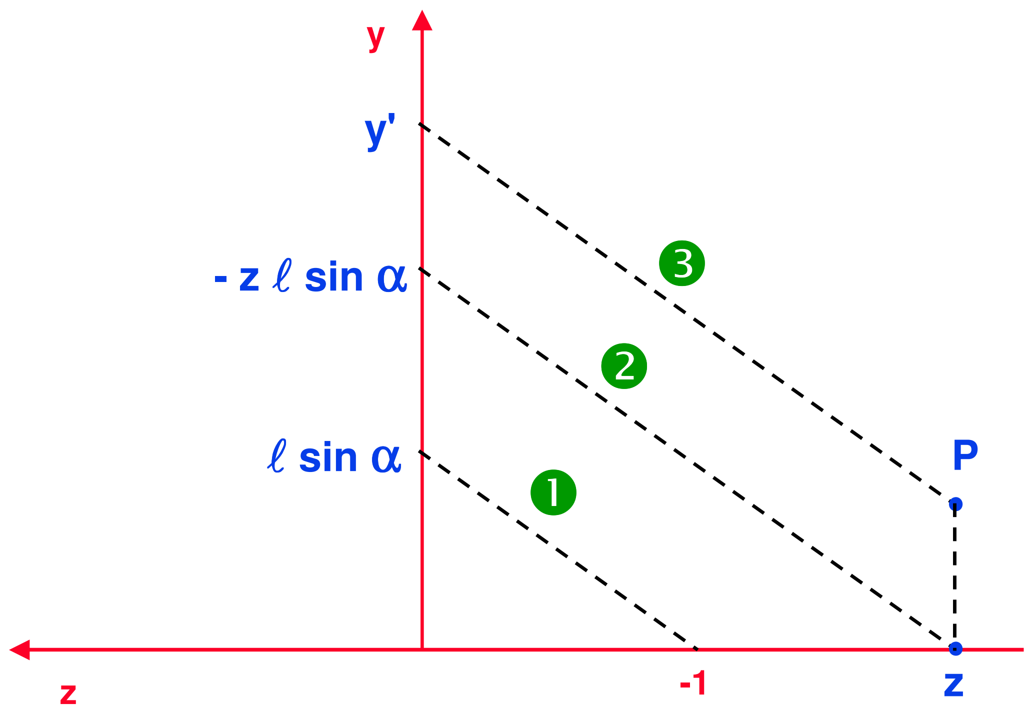
$$DOP = P - P' = \begin{bmatrix} -\ell \cos\alpha \\ -\ell \sin\alpha \\ -1 \end{bmatrix}$$

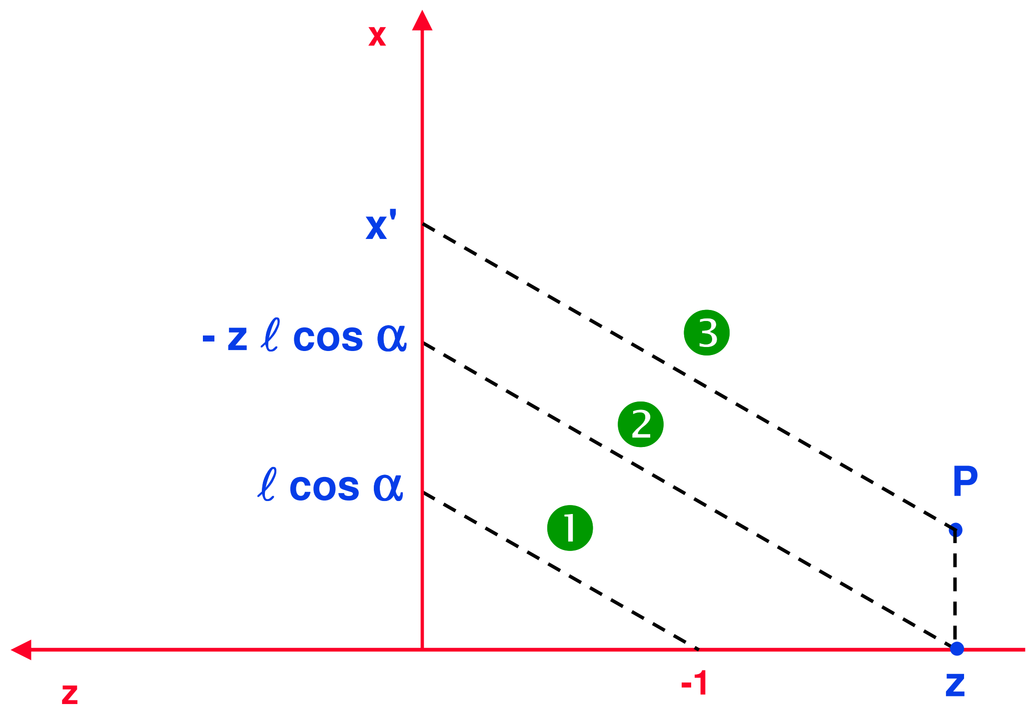
M.Próspero

Projeção Oblíqua

❶ P (0, 0, -1) → P' (ℓ cos α, ℓ sin α, 0)

❷ P (0, 0, z) → P' (- z ℓ cos α, - z ℓ sin α, 0)





Ponto genérico:

❸ P (x, y, z) → P' (x - z ℓ cos α, y - z ℓ sin α, 0)

$$M_{OBL} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -\ell\cos\alpha & 0 \\ 0 & 1 & -\ell\sin\alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

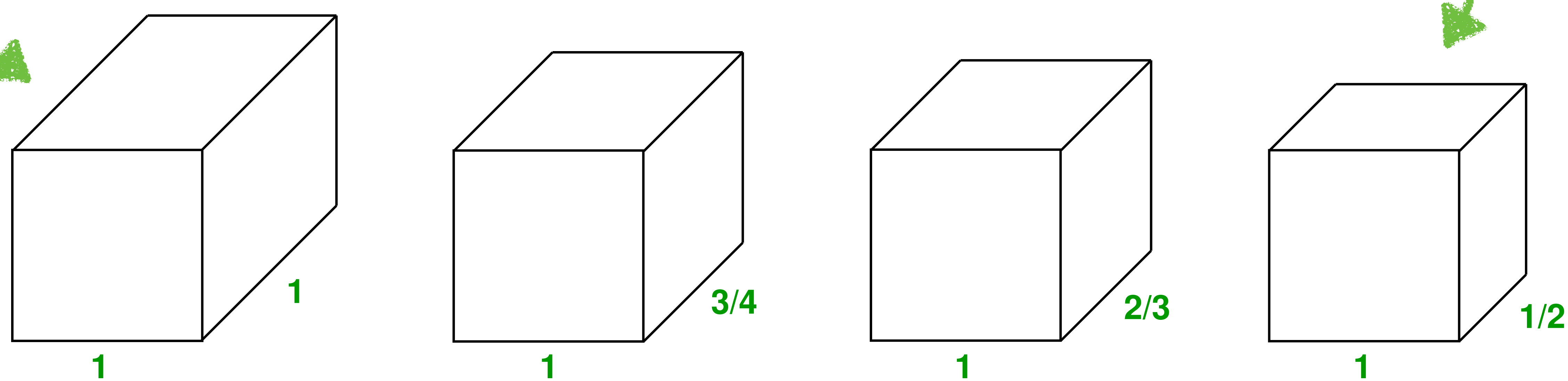
M.Próspero

Projeção Oblíqua

As projeções oblíquas são determinadas/caracterizadas

- Pelo ângulo β que as projetantes fazem com o plano de projecção (z=0) (**ℓ é função de β**)
- Pela orientação das projetantes, independentemente do ângulo com o plano de projecção (embora a amplitude de α possa ser qualquer, habitualmente usam-se valores de 45° ou 30°).

Projeção CAVALEIRA:	$\ell = 1$	$\Leftrightarrow$	$\beta = 45°$
Projeção de GABINETE:	$\ell = 0.5$	$\Leftrightarrow$	$\beta = 63.4°$
Projeção ORTOGONAL:	$\ell = 0$	$\Leftrightarrow$	$\beta = 90°$



(Na prática não se usam valores ℓ>1; nestes exemplos fez-se α=45°)

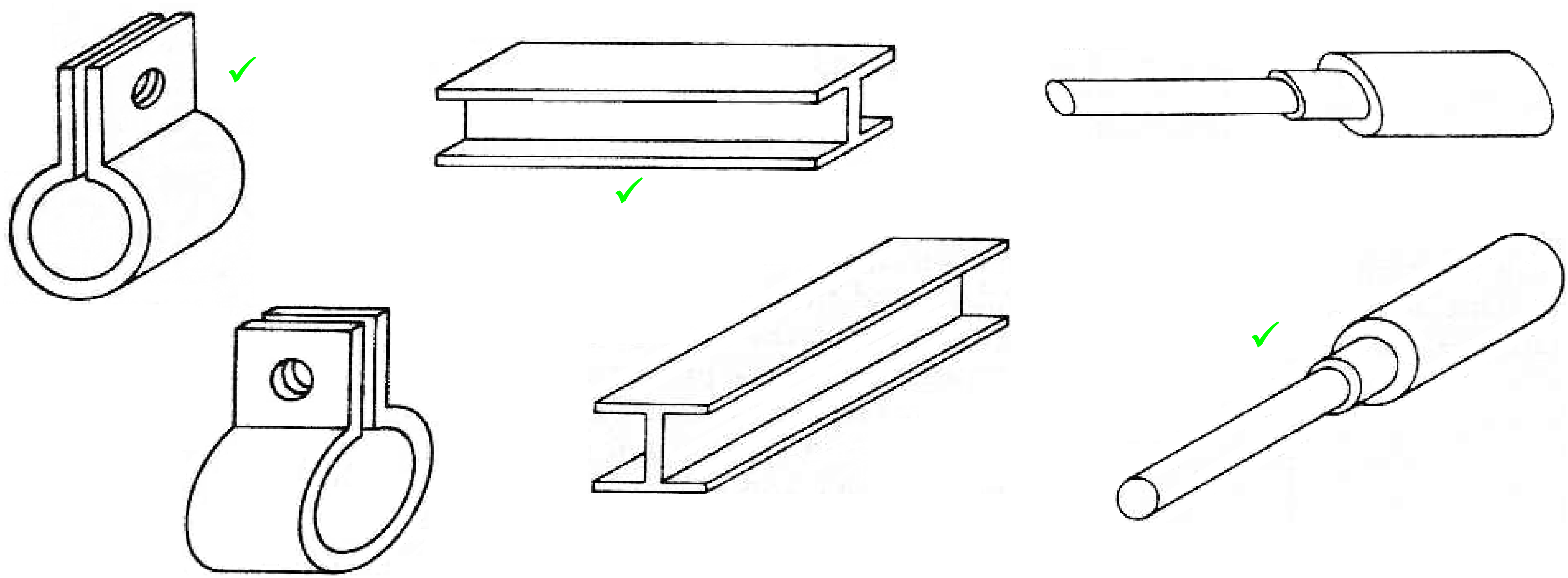
M.Próspero

Regras da Projeção Oblíqua

R1) O plano de projeção deverá ser paralelo às faces mais irregulares do objeto ou às que contêm formas curvas.

R2) O plano de projeção deverá ser paralelo à face de maior comprimento do objeto.

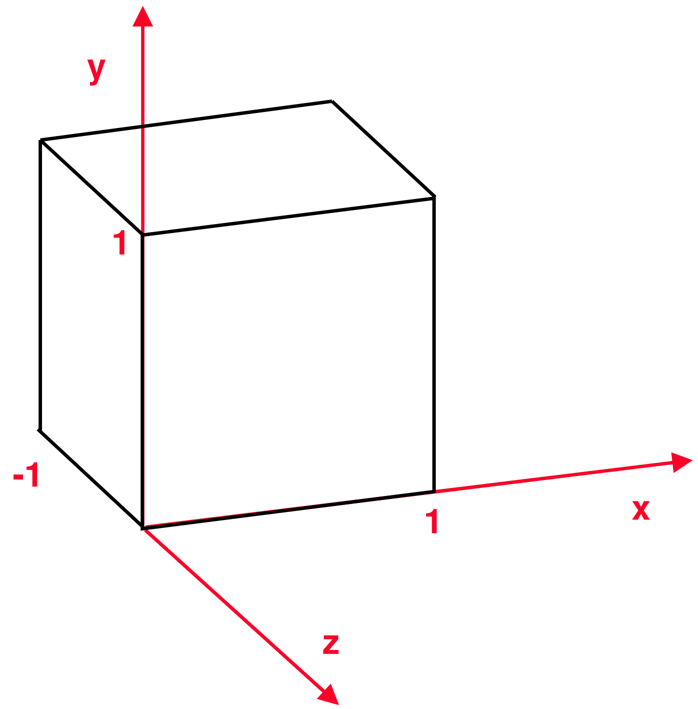
R3) A regra **R1** tem preferência sobre **R2**.



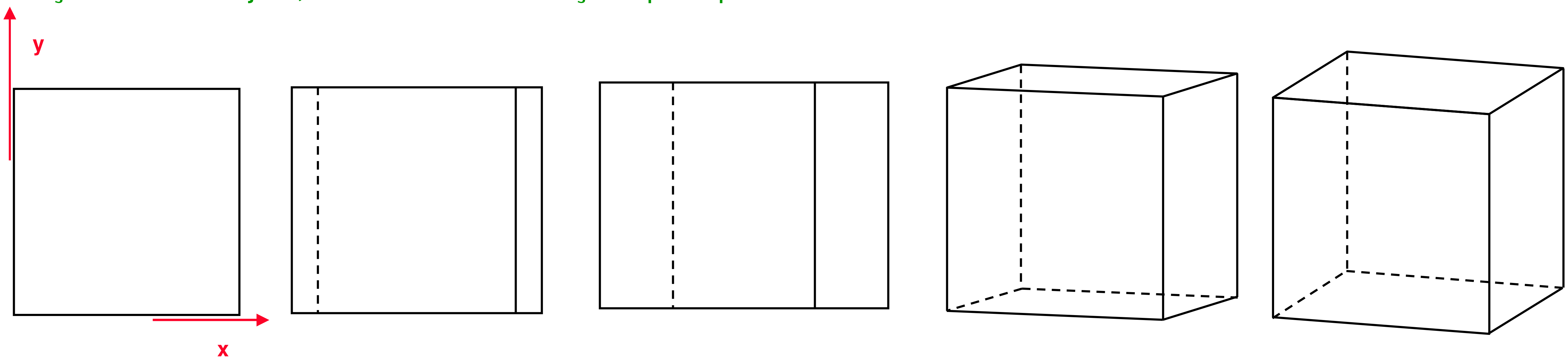
M.Próspero

Projeção Axonométrica

Objeto e seu Sistema de Coordenadas (SC):



Ação sobre o objeto, visualizando-se o alçado principal:



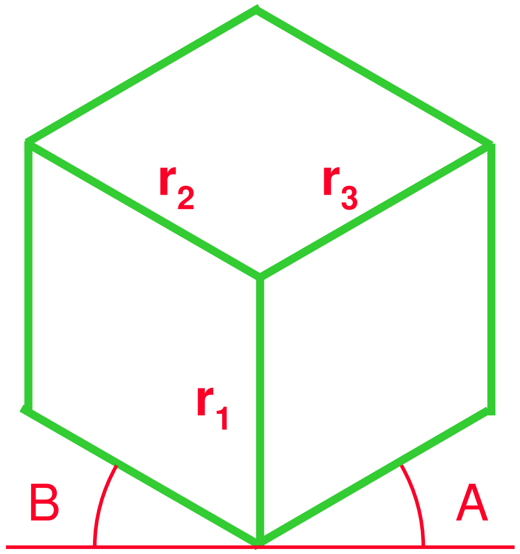
Tratamento matemático, para o caso geral: $M_{AX} = M_{ORT} \,.\, R_X(\gamma) \,.\, R_Y(\theta)$

(em z=0)

M.Próspero

Desenho Axonométrico

ISOMETRIA

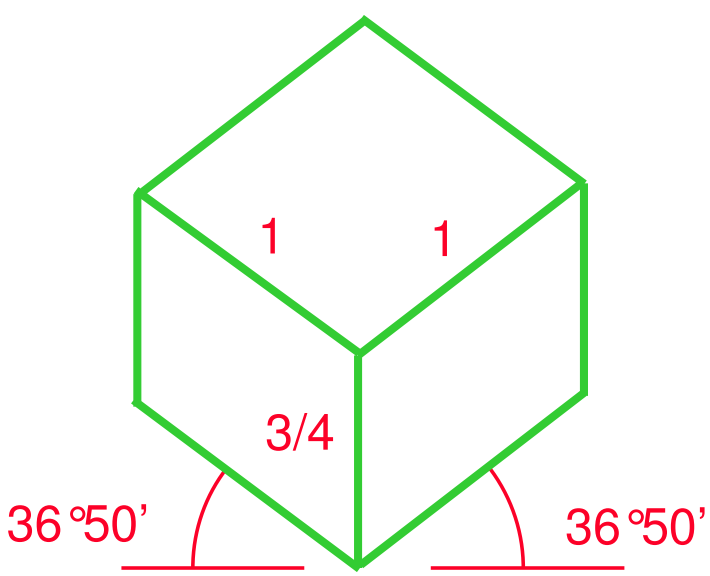


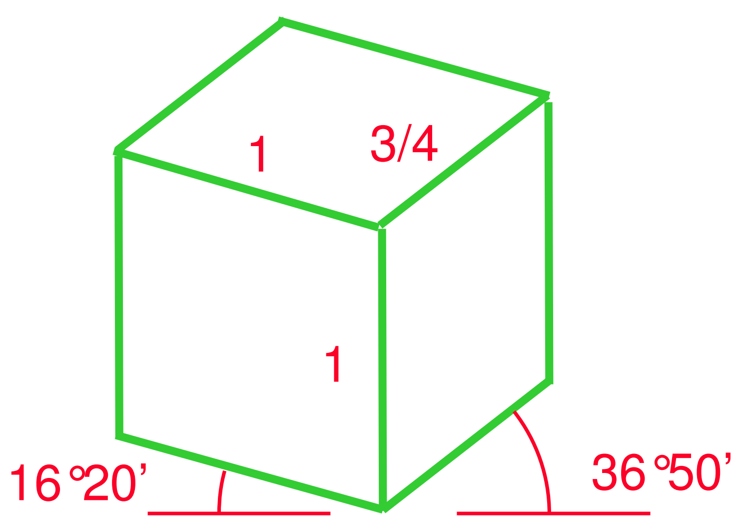
A = B = 30°

Scale ratios **(fatores de escala) do desenho:**

$r_1 = r_2 = r_3 = 1$ (ou relação das dimensões 1:1:1)

DIMETRIA

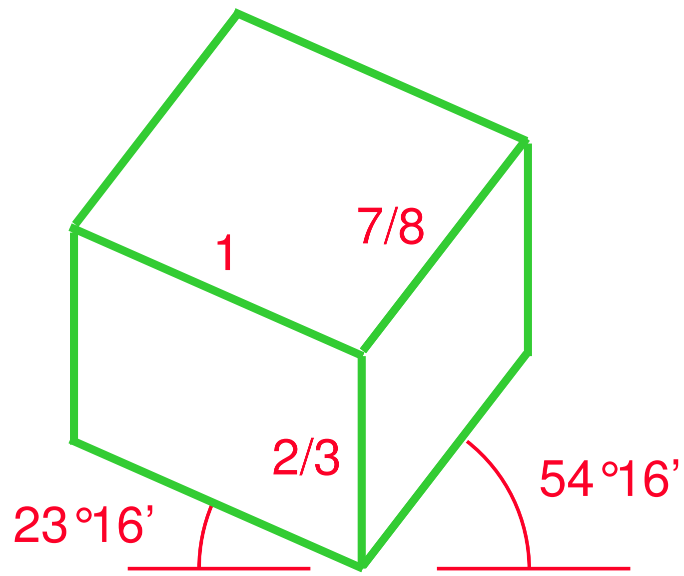


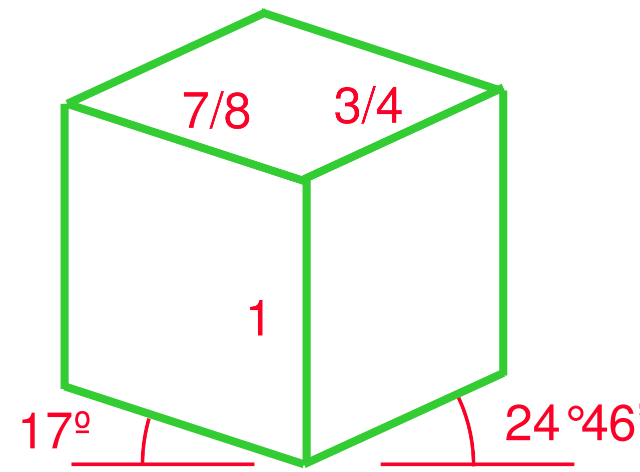


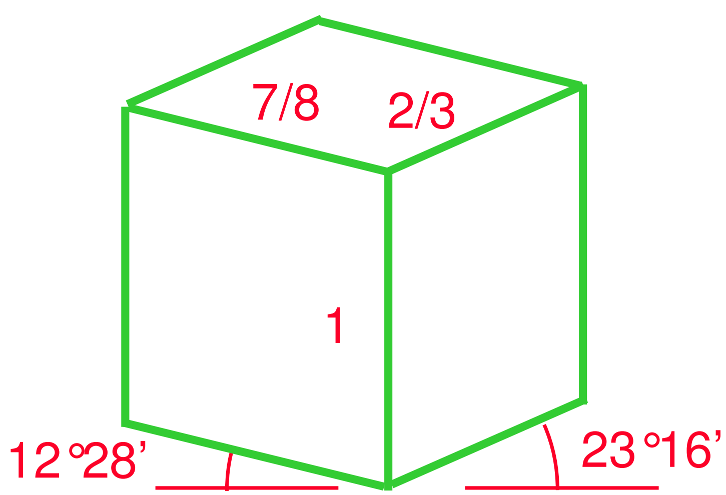
M.Próspero

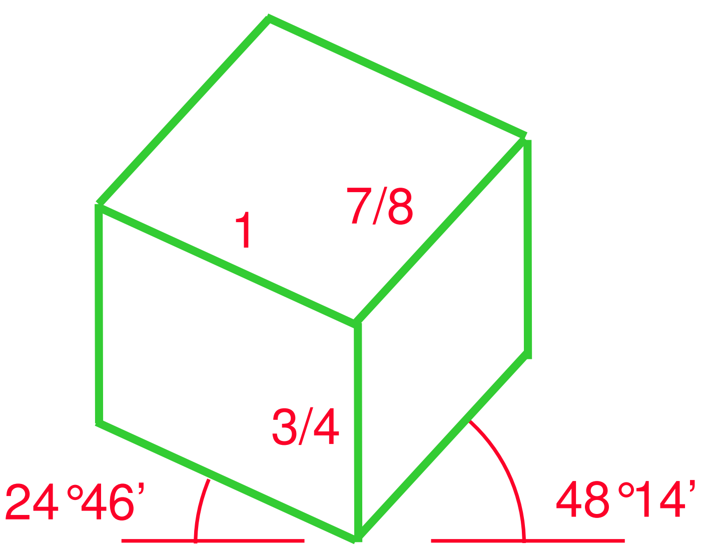
Desenho Axonométrico

TRIMETRIA





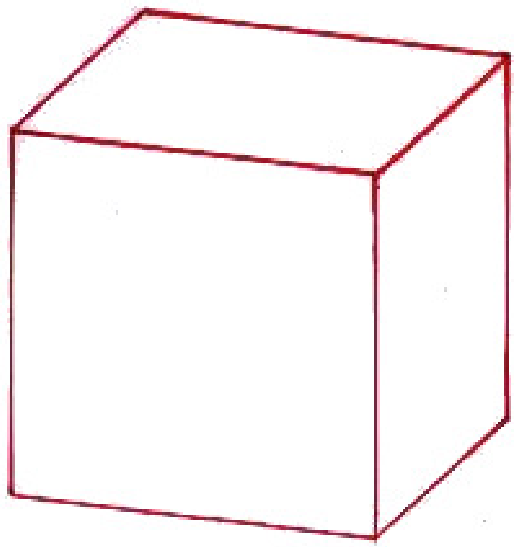




M.Próspero

Desenho Axonométrico

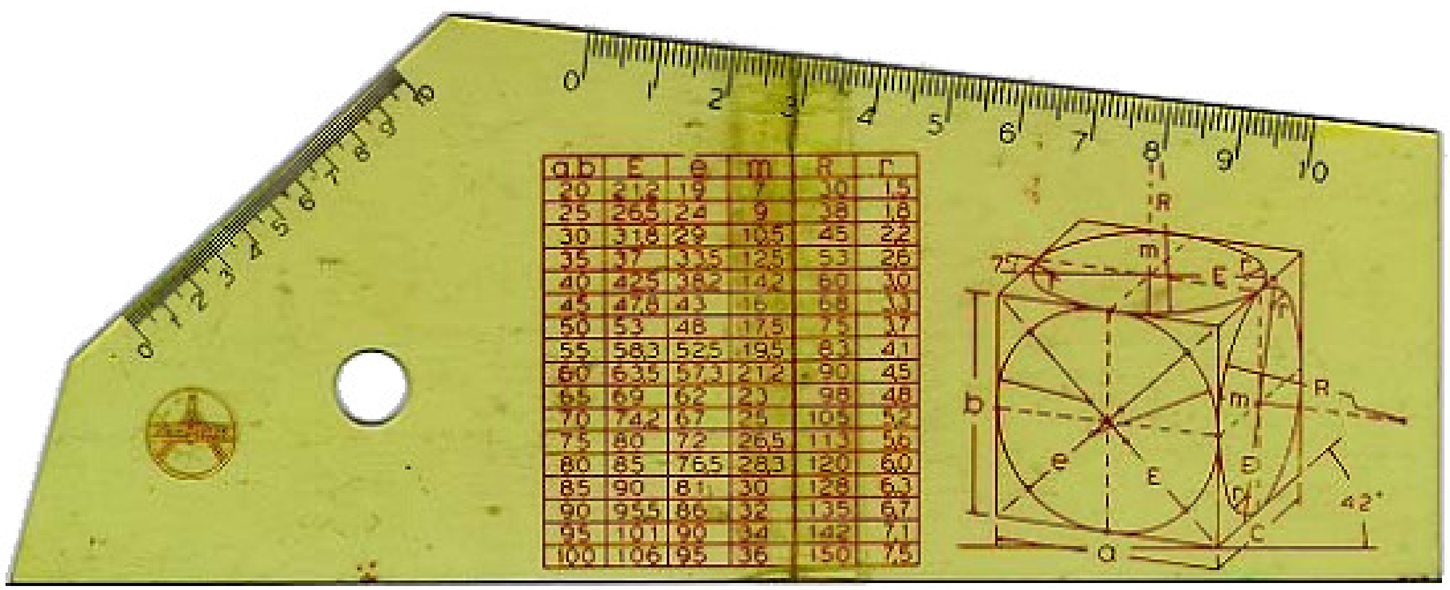
Cubo de aresta = 5 cm



Desenho dimétrico de relação 1:1:0.5

A=42° B=7°

feito à mão com o auxílio de esquadro próprio:



M.Próspero

Projeção Axonométrica

$\theta = \text{arctg} \sqrt{\text{tg } A \ / \ \text{tg } B} - \pi/2$ $\gamma = \text{arcsin} \sqrt{\text{tg } A \, . \, \text{tg } B}$

$r_1 = \cos \gamma$ $r_2 = \cos \theta / \cos B$ $r_3 = -\sin \theta / \cos A$

Aplicação – Cálculo de alguns fatores de escala (ou de redução) de uma projeção:

i. $A = B = 30^{\text{o}}$

$r_1 = r_2 = r_3 \approx 0.81650$

ii. $A = 36^{\text{o}}50'$ $B = 16^{\text{o}}20'$

$r_1 = r_2 \approx 0.88346$ $r_3 \approx 0.66257$

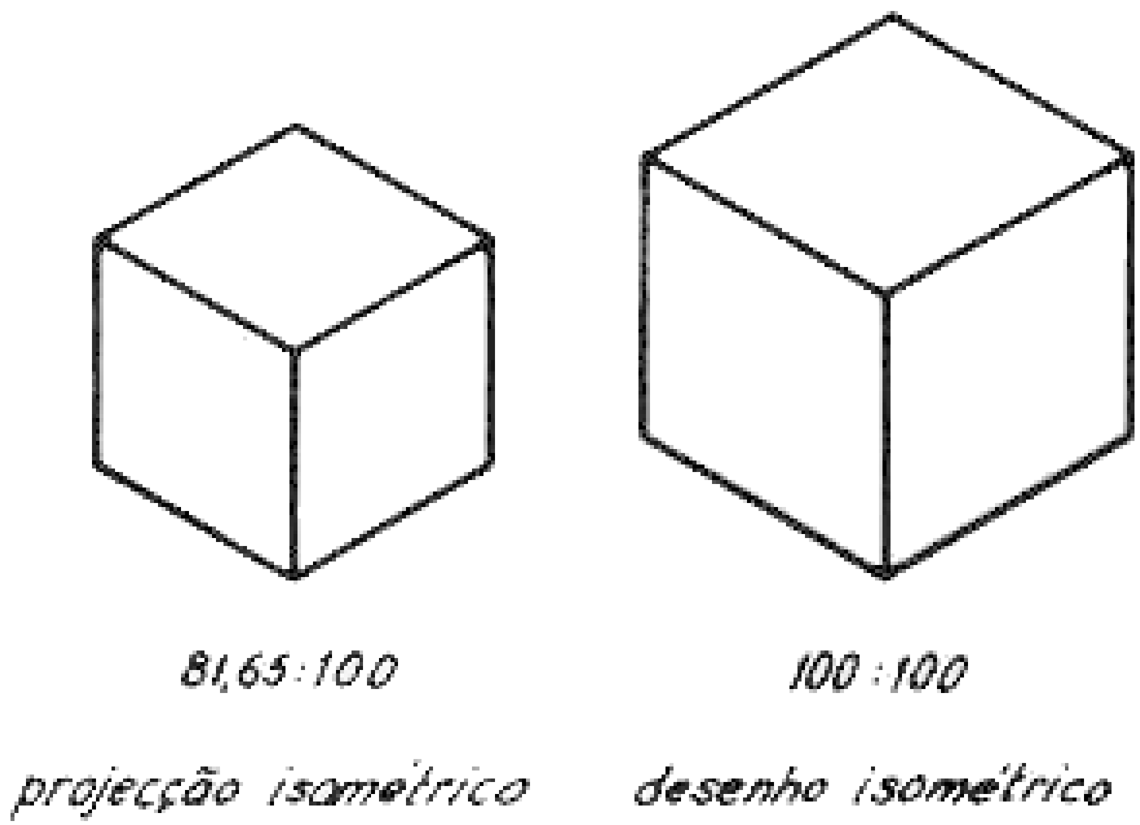
iii. $A = 54^{\text{o}}16'$ $B = 23^{\text{o}}16'$

$r_1 \approx 0.63432$ $r_2 \approx 0.95128$ $r_3 \approx 0.83229$

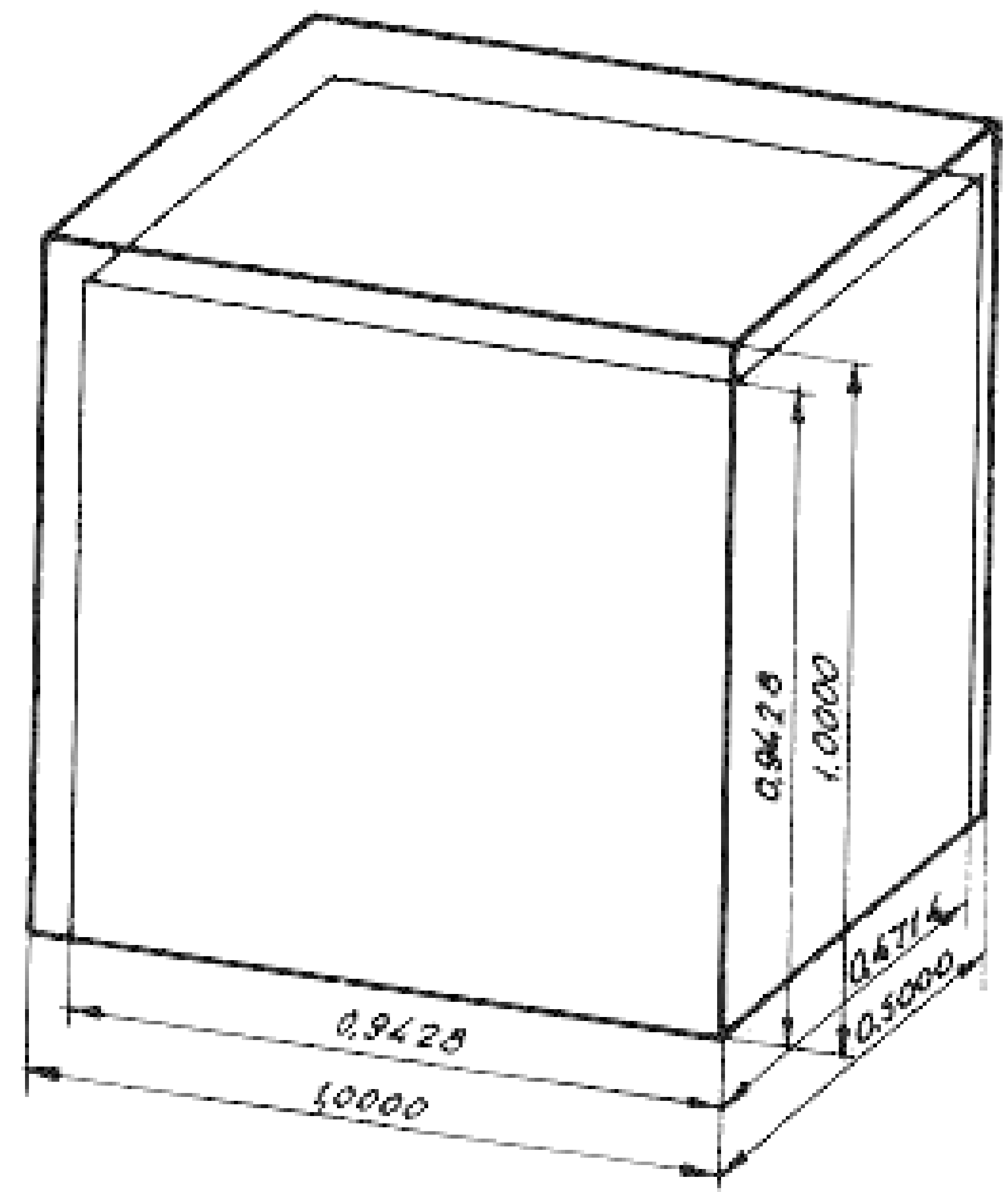
NOTA: Todos os fatores de escala da Projeção (em itálico, para distinção) são inferiores aos respectivos fatores de escala no Desenho Axonométrico. Neste, o maior desses valores, em cada um dos casos, seria sempre igual a 1 (o que se justifica pela comodidade do desenho manual e da leitura de comprimentos).

M.Próspero

Projeção vs Desenho



Dimetria A=42° B=7°



M.Próspero

Exemplos de Aplicação (jogos estratégia)

No Man’s Land

Northland

M.Próspero

Projeção Axonométrica

Uma projeção axonométrica é determinada/caracterizada

- Pelos ângulos que os eixos coordenados locais ao objeto fazem com o plano de projeção

ou

- Pelos três fatores de escala

ou

- Pelos ângulos entre os eixos coordenados depois de projetados (na prática: pelos ângulos A e B).

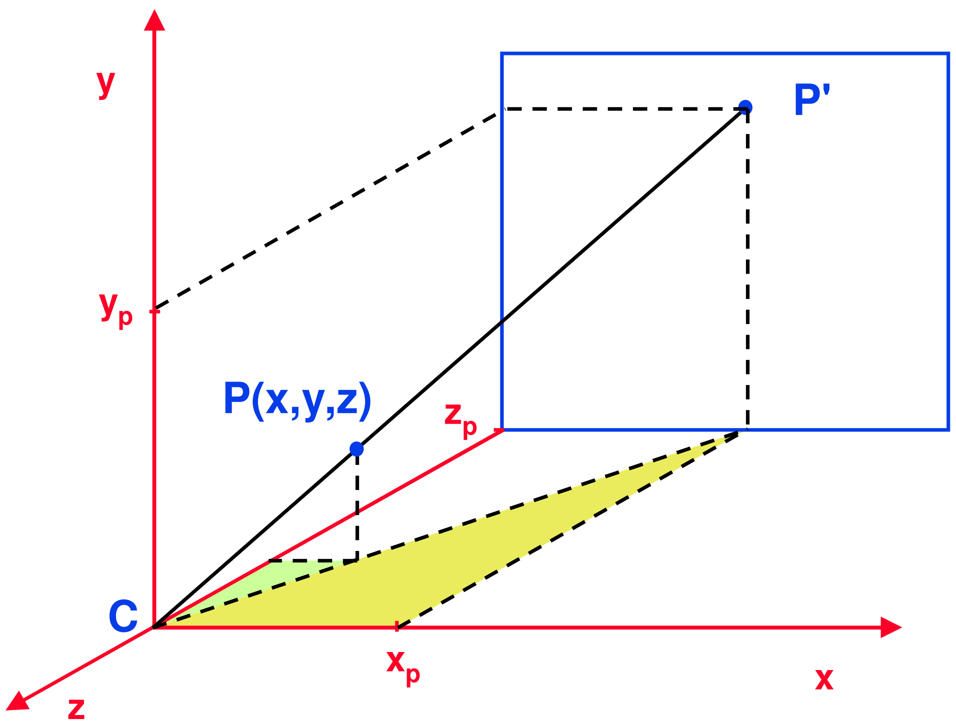
CONCLUSÕES sobre a AXONOMETRIA:

- ✓ **O paralelismo de linhas é preservado...**
- ✓ **... mas os ângulos não o são;**
- ✓ **Os comprimentos são medidos usando-se fatores de escala correspondentes às 3 direções axiais*.**

* Justificação do nome AXONOMETRIA (i.e., medida segundo os eixos).

M.Próspero

Plano de projeção em $z=d \neq 0$ e centro de projeção C na origem:



$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{z} \Rightarrow x_p = \frac{x}{z/d}$$

$$\frac{y_p}{d} = \frac{y}{z} \Rightarrow y_p = \frac{y}{z/d}$$

$$z_p = d \Rightarrow z_p = \frac{z}{z/d}$$

Coordenadas da imagem de P :

$$P' = \begin{bmatrix} x_p \\ y_p \\ z_p \end{bmatrix}$$

M.Próspero

Projeção Perspetiva (I)

Coordenadas homogéneas de P' :

$$P' = \begin{bmatrix} X=x \\ Y=y \\ Z=z \\ W=z/d \end{bmatrix}$$

Estas coordenadas podem obter-se das de P pela aplicação da matriz M_{PER} :

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ z/d \end{bmatrix} = M_{PER} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix}$$

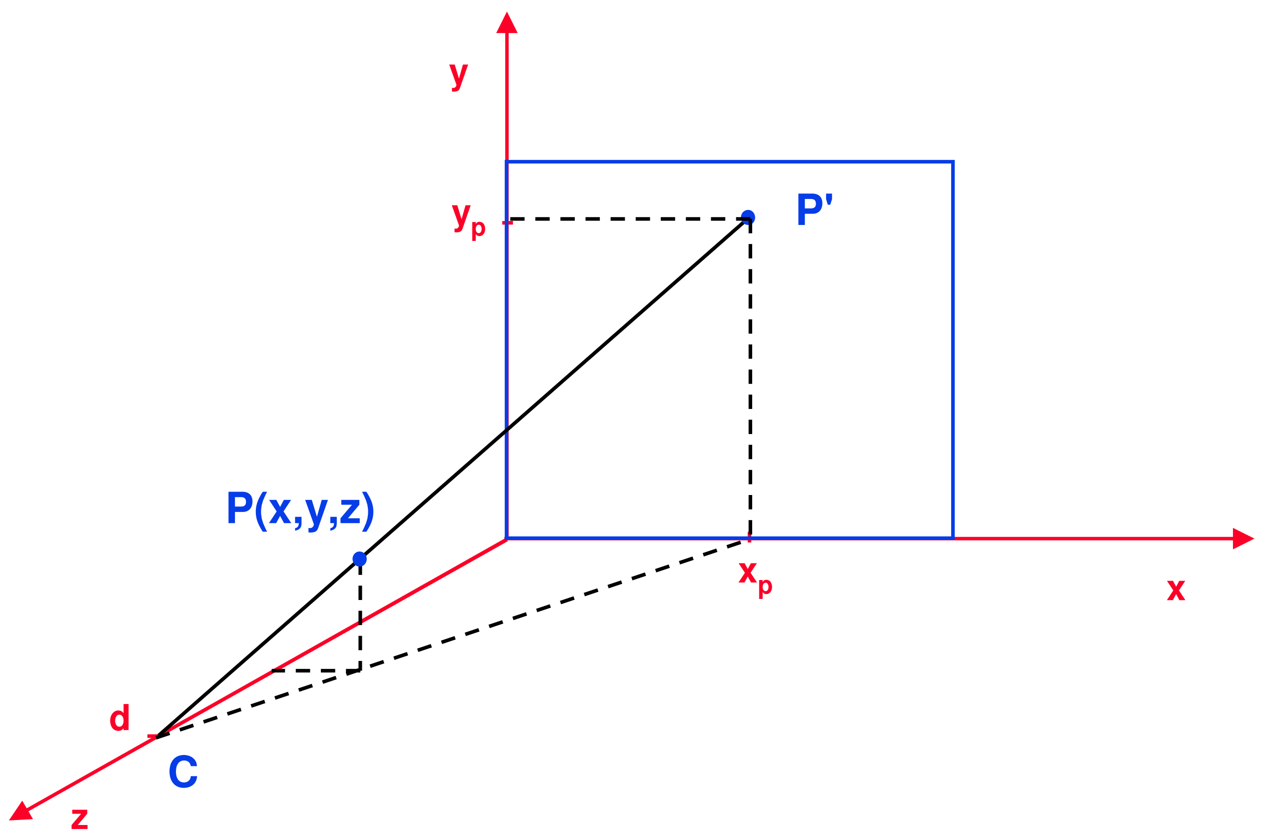
em que

$$M_{PER} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/d & 0 \end{bmatrix}$$

M.Próspero

Projeção Perspetiva (II)

Plano de projeção em z=0 e centro de projeção C em (0,0,d) com $d \neq 0$:



$$\frac{x_p}{d} = \frac{x}{d-z} \Rightarrow x_p = \frac{x}{1 - z/d}$$

$$\frac{y_p}{d} = \frac{y}{d-z} \Rightarrow y_p = \frac{y}{1 - z/d}$$

$$z_p = 0 \Rightarrow z_p = \frac{0}{1 - z/d}$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ 0 \\ 1-z/d \end{bmatrix} = M'_{PER} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} \Rightarrow M'_{PER} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1/d & 1 \end{bmatrix}$$

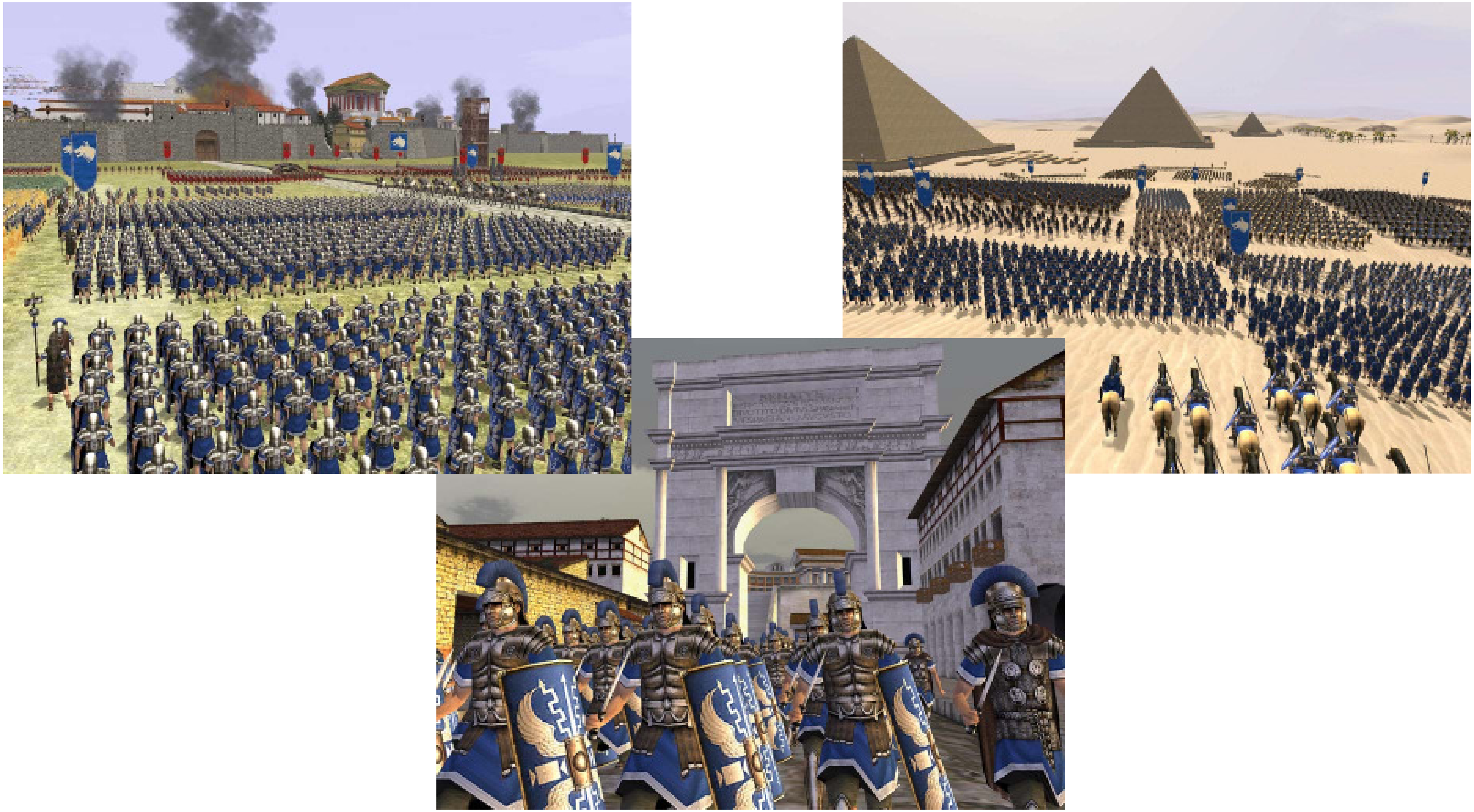
$$d \to \infty \quad \Rightarrow \quad M'_{PER} \to M_{ORT}$$

M'_{PER} aplica-se ao plano de projeção z=0, como nas outras projeções anteriores

M.Próspero

Exemplos de aplicação (jogos de estratégia)

Exemplo em jogo de estratégia com maior realismo



Rome Total War

"The first thing noticeable about the game is its graphical beauty"

Wargamer

GameSpot: 91% "...realistic, cinematic-style battles."

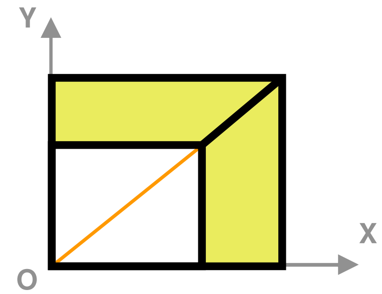
M.Próspero

Projeção Perspetiva

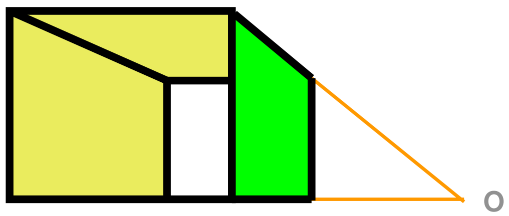
Implicações do paralelismo das direções principais do objeto com as direções axiais

1 ponto de fuga

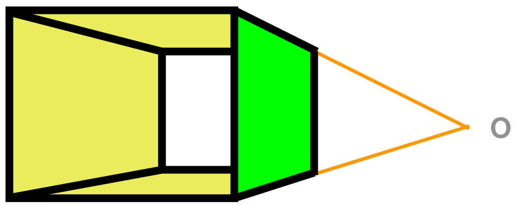
Duas famílias de arestas paralelas a XY



Modelo: Paralelepípedo alinhado com XYZ...
(caixa sem tampa nem fundo)



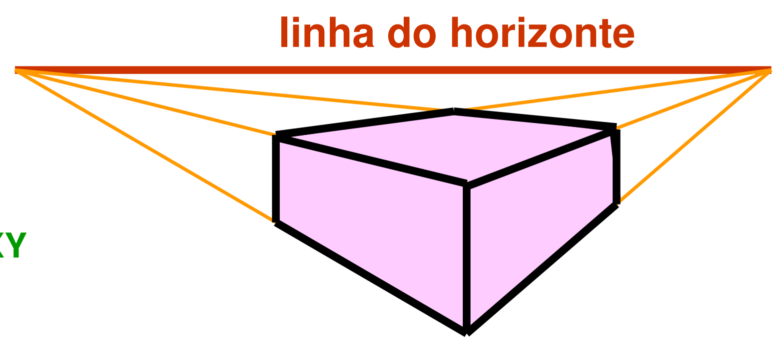
deslocado para a esquerda...

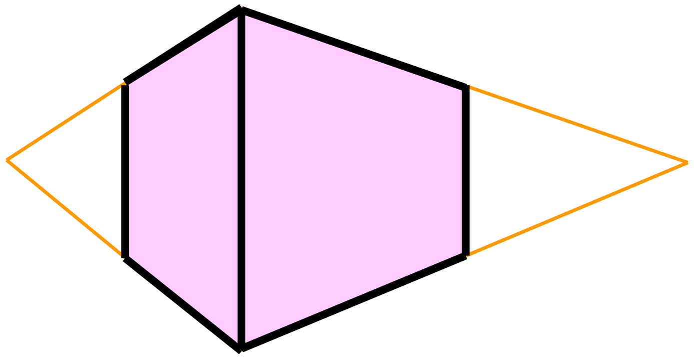


e também para baixo.

2 pontos de fuga

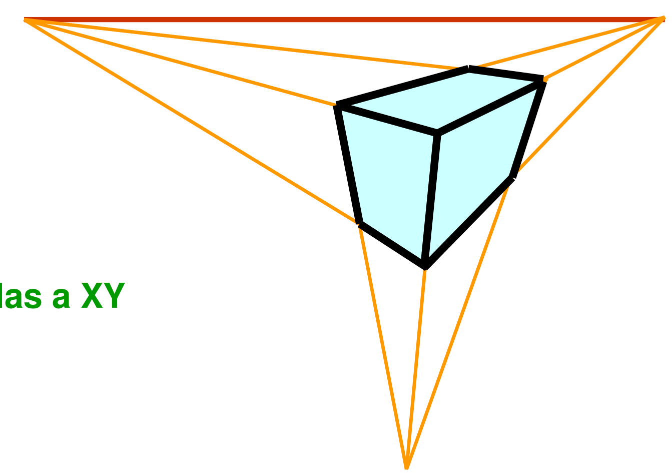
Uma família de arestas paralelas a XY

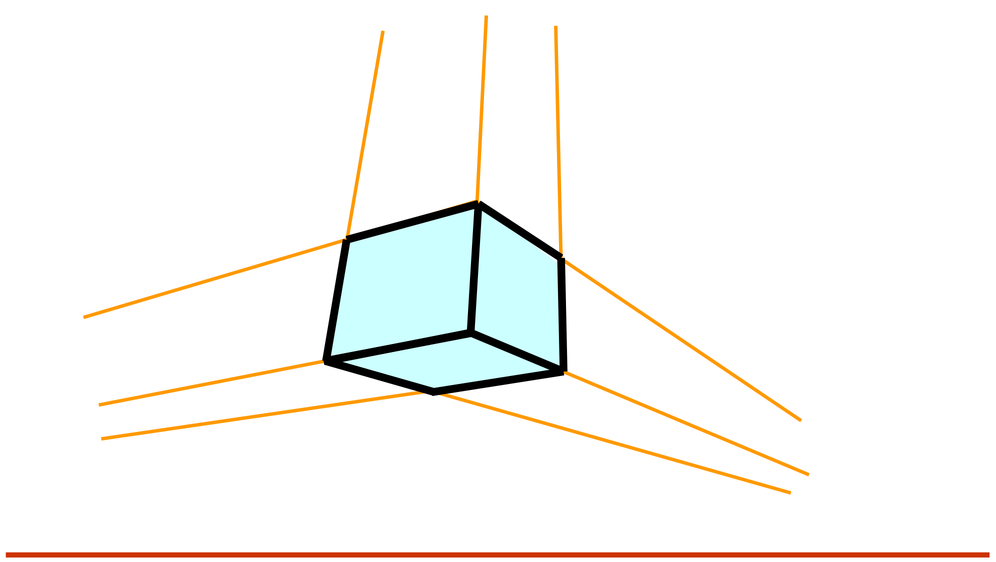




3 pontos de fuga

Nenhuma família de arestas paralelas a XY





M.Próspero

Projeção Perspetiva

Identifique e localize os pontos de fuga:

M.Próspero