2017/2018	Ficha Prática 2 - Limites e Continuidade	AM2E

25. Esboce o domínio D_j das funções f_j definidas nas alíneas seguintes:

i. $f_1(x,y) = \sqrt{1-x^2-y^2}\log(x^2-y^2)$

ii. $f_2(x,y) = \frac{\log(x^2-2x+1)}{\arctan(x^2+y^2)}\arccos\left(\frac{y}{x}\right)$

iii. $f_3(x,y) = \tan(y-x)\tan(y+x)$

iv. $f_4(x,y) = \sqrt{x^2-2x+2y^2-3}$

v. $f_5(x,y) = \log\left(\sin\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}\right)\right)$

vi. $f_6(x,y) = \sqrt{y-x^2+6x-10}$

vii. $f_7(x,y) = \frac{1}{\sin(x-y)} + \log(xy)$

viii. $f_8(x,y) = \frac{\log(xy-1)}{\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2-2}}$

a. Para cada j, explicite o interior, a fronteira e a aderência do conjunto D_j, indicando se o conjunto é aberto ou fechado.
b. Explicite uma sucessão $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de D_2 tal que $\lim u_n = (1,0)$.
c. Explicite uma sucessão $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ de pontos de D_5 tal que $\lim u_n = (0,0)$.

26. Mostre, recorrendo à definição de convergência segundo Cauchy, que são válidos os seguintes limites:

a. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2\sin(x^2+3xy)}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ **b.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2e^{-y^4}}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$ **c.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0$

27. Esboce o domínio e as curvas de nível $\mathcal{C}_k$ para as seguintes funções:

a. $f_1(x,y) = \frac{x^2+y}{x+y^2}$, $k=-1,0$

b. $f_2(x,y) = \frac{xy-x+y}{xy}$, $k=1,2$

c. $f_3(x,y) = \frac{x^2}{y^2-1}$, $k\in\mathbb{R}$

d. $f_4(x,y) = \sin(xy)$, $k=0,1$

28. Considere a função g definida em $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ pela expressão:

$$g(x,y) = \frac{x^2 y}{x^4 - 2x^2 y + 3y^2}.$$

Calcule os limites direccionais de g na origem. Calcule o limite de g na origem, segundo a parábola $y = x^2$. Conclua quanto à existência de limite para g no ponto $(0,0)$.

29. Calcule, caso existam, os seguintes limites:

a. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$ **b.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} (x+y)\sin\left(\frac{1}{xy}\right)$ **c.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,2)} \frac{\sin(xy)}{x}$

d. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2+y^2+5xy}{x-y}$ **e.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(1,2)} \frac{(x-1)(y-2)^3}{\sqrt{((x-1)^2+(y-2)^2)^3}}$ **f.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x+y}{\sqrt{x^2-y^2}}$

g. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^2y}{x^2+y^2+xy}$ **h.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^7+x^4y+x^3y}{x^6+x^3y+y^2}$ **i.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{3x-y^2}{x^2+y^2}$

j. $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{xy}{|x|+|y|}$ **k.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,1)} \sqrt{\frac{x}{1-|y|}}$ **l.** $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{x^4y^4}{(x^2+y^4)^3}$

30. Considere a função h definida em $D = \mathbb{R}^2 \backslash \{(0,0)\}$ pela expressão:

$$h(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4}.$$

Mostre que os limites direccionais de h na origem são nulos. Será possível definir um prolongamento desta função à origem, por continuidade?

31. Seja $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ uma função linear tal que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, |f(x)| \leq M\|x\|,$$

onde $M > 0$ é uma constante real fixa.
a. Prove que f é contínua na origem.
b. Utilizando a linearidade de f e a alínea anterior, prove que f é contínua em qualquer ponto de $\mathbb{R}^3$.

Reciprocamente, considere agora uma qualquer função linear $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ que seja contínua.

c. Justifique a existência de $M = \max\{|g(x)| : x \in \mathcal{S}\}$, onde $\mathcal{S}$ é a esfera unitária, centrada na origem.

d. Mostre que

$$\forall x \in \mathbb{R}^3, |g(x)| \leq M\|x\|.$$

Para tal, comece por notar que considerando $x \neq 0$, $x = \frac{x}{\|x\|}\|x\|$ e $\frac{x}{\|x\|} \in \mathcal{S}$.

e. Baseando-se neste exercício, será possível enunciar uma condição necessária e suficiente para que uma função linear seja contínua?

32. Estude a continuidade das funções definidas pelas expressões:

$$\mathbf{a}.f(x,y) = \begin{cases} 0 & \text{, se } x \neq y \\ 3x^2 + 2y & \text{, se } x = y \end{cases} \qquad \mathbf{b}.g(x,y) = \begin{cases} \frac{2xy}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{, se } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{, se } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

33. Esboçe o gráfico e analise a continuidade das seguintes funções:

$$\mathbf{a}.f(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{, se } x < y \\ 0 & \text{, se } x = y \\ 0.5 & \text{, se } x > y \end{cases} \qquad \mathbf{b}.g(x,y) = \begin{cases} 1 - x^2 - y^2 & \text{, se } \|(x,y)\| \leq 1 \\ 0 & \text{, se } \|(x,y)\| > 1 \end{cases}$$

$$\mathbf{c}.h(x,y) = \begin{cases} 5 & \text{, se } \|(x,y)\| > 1 \\ -2 & \text{, se } \|(x,y)\| \leq 1 \end{cases}$$

34. Garanta a existência de pelo menos uma raíz real para a equação

$$x^2 \log(y) + 3x^2 - y - 3 = 0.$$