FACULDADE DE CIÊNCIAS
UNIVERSIDADE DO PORTO

Programação Funcional - Exercícios

DCC-FCUP 2020

Definição de funções simples (Aulas 1 e 2)

1. Considere as seguintes definições de funções:

$$\mathit{inc}\ x = x + 1 \qquad \mathit{dobro}\ x = x + x$$
$$\mathit{quadrado}\ x = x * x \qquad \mathit{media}\ x\ y = (x + y)/2$$

Efectuando reduções passo-a-passo, calcule os valores das expressões seguintes:

(a) $\mathit{inc}\ (\mathit{quadrado}\ 5)$

(b) $\mathit{quadrado}\ (\mathit{inc}\ 5)$

(c) $\mathit{media}\ (\mathit{dobro}\ 3)\ (\mathit{inc}\ 5)$

2. Num triângulo, verifica-se sempre a seguinte condição: a medida de um qualquer lado é menor que a soma da dos outros dois. Complete a definição de uma função $\mathit{triangulo}\ a\ b\ c = \cdots$ que testa esta condição; o resultado deve ser um valor boleano.

3. Escreva uma definição em Haskell duma função para calcular a área A de um triângulo de lados a, b, c usando a fórmula de Heron:

$$A = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}\,,$$

onde s é metade do perímetro do triângulo.

4. Usando as funções do prelúdio-padrão dadas na primeira aula (*head*, *tail*, *length*, *take*, *drop*, ++, *reverse*, !!, *sum* e *product*), escreva uma função *metades* que divide uma lista de comprimento par em duas com metade do comprimento. Exemplo: $\mathit{metades}\ [1,2,3,4,5,6,7,8] = ([1,2,3,4],[5,6,7,8])$. Investigue o acontece se a lista tiver comprimento ímpar.

5. (a) Mostre que a função *last* (que seleciona o último elemento de uma lista) pode ser escrita como composição das funções do prelúdio-padrão apresentadas na primeira aula. Consegue encontrar *duas* definições diferentes?

(b) Mostre que a função *init* (que remove o último elemento duma lista) pode ser definida analogamente de duas formas diferentes.

6. (a) Escreva uma função *binom* com dois argumentos que calcule o *coeficiente binomial*:

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Sugestão: pode exprimir $n!$ como $\mathit{product}\ [1..n]$.

(b) Para todas as listas de números xs e ys, temos que $\mathit{product}\ (xs +\!\!+ ys) = \mathit{product}\ xs * \mathit{product}\ ys$. Use esta propriedade para re-escrever a definição de forma mais eficiente, eliminando factores comuns entre o numerador e denominador.

7. Considere as definições das funções *max* e *min* do prelúdio-padrão que calculam respectivamente o máximo e o mínimo de dois números:

$$\mathit{max}\ x\ y = \mathsf{if}\ x \geq y\ \mathsf{then}\ x\ \mathsf{else}\ y$$
$$\mathit{min}\ x\ y = \mathsf{if}\ x \leq y\ \mathsf{then}\ x\ \mathsf{else}\ y$$

(a) Usando condições embricadas, escreva definições de duas funções *max3* e *min3* para calcular, respectivamente, o máximo e o mínimo de três números.

(b) Re-escreva as funções pedidas nas alíneas anteriores de forma a usar *apenas* a composição de max e min (i.e. sem condicionais ou guardas).

8. Implemente em Haskell as seguintes funções:

(a) $maxOccurs :: Integer \to Integer \to (Integer, Integer)$ que retorna o máximo de dois inteiros e o número de vezes que ocorre.

(b) $orderTriple :: (Integer, Integer, Integer) \to (Integer, Integer, Integer)$ que ordena o triplo por ordem ascendente.

9. Escreva duas definições da função $classifica :: Int \to String$, respectivamente usando expressões condicionais e guardas, que faz corresponder uma classificação qualitativa a uma nota de 0 a 20:

≤ 9	reprovado
10–12	suficiente
13–15	bom
16–18	muito bom
19–20	muito bom com distinção

10. Escreva uma definição da função lógica ou-exclusivo $xor :: Bool \to Bool \to Bool$ usando múltiplas equações com padrões.

11. Pretende-se implementar uma função $safetail :: [a] \to [a]$ que extende a função *tail* do prelúdio de forma a dar a lista vazia quando o argumento é a lista vazia (em vez de um erro). Escreva três definições diferentes usando condicionais, equações com guardas e padrões.

12. Escreva duas definições da função $curta :: [a] \to Bool$ para testar se uma lista tem zero, um ou dois elementos, usando:

(a) a função *length* do prelúdio-padrão;

(b) múltiplas equações e padrões.

13. Defina uma função $textual :: Int \to String$ para converter um número positivo inferior a um milhão para a designação textual em português. Alguns exemplos:

$$\begin{aligned} textual\ 21 &= \text{“vinte e um”} \\ textual\ 1234 &= \text{“mil duzentos e trinta e quatro”} \\ textual\ 123456 &= \text{“cento e vinte e três mil quatrocentos e cinquenta e seis”} \end{aligned}$$

Sugestão: Começe por definir funções auxiliares para converter para texto número inferiores a 100 e 1000.

Tipos e classes (Aula 2)

14. Indique tipos admissíveis para os seguintes valores.

(a) ['a', 'b', 'c']

(b) ('a', 'b', 'c')

(c) [(*False*, '0'), (*True*, '1')]

(d) $([False, True],\ ['0', '1'])$

(e) $[tail,\ init,\ reverse]$

(f) $[id,\ not]$

15. Indique tipos possíveis para f e para g por forma que:

1. $f\ (2, 5)$ tem tipo Int;
2. $f\ (g\ 5)$ tem tipo Int;
3. $(f\ g)\ 5$ tem tipo Int;
4. $f\ g\ [1, 2, 3]$ tem tipo $[Int]$;
5. $f\ (2, 5)$ tem tipo $[Int \to Int]$.

16. Diga qual o tipo mais geral de f e g por forma que $head\ (f\ g)\ 5$ tenha o tipo $[Int]$.

17. Indique o tipo mais geral para as seguintes definições; tenha o cuidado de incluir restrições de classes no caso de operações com sobrecarga.

(a) $segundo\ \mathtt{xs} = head\ (tail\ \mathtt{xs})$

(b) $trocar\ (\mathtt{x}, \mathtt{y}) = (\mathtt{y}, \mathtt{x})$

(c) $par\ \mathtt{x}\ \mathtt{y} = (\mathtt{x}, \mathtt{y})$

(d) $dobro\ \mathtt{x} = 2 * \mathtt{x}$

(e) $metade\ \mathtt{x} = \mathtt{x}/2$

(f) $minuscula\ \mathtt{x} = \mathtt{x} \geq \text{'a'}\ \&\&\ \mathtt{x} \leq \text{'z'}$

(g) $intervalo\ \mathtt{x}\ \mathtt{a}\ \mathtt{b} = \mathtt{x} \geq \mathtt{a}\ \&\&\ \mathtt{x} \leq \mathtt{b}$

(h) $palindromo\ \mathtt{xs} = reverse\ \mathtt{xs} == \mathtt{xs}$

(i) $twice\ \mathtt{f}\ \mathtt{x} = \mathtt{f}\ (\mathtt{f}\ \mathtt{x})$

18. Indique exemplos de tipos concretos admissíveis e os tipos mais gerais para cada uma das definições dos exercícios 1 e 2. Tenha o cuidado de incluir apenas as restrições de classe estritamente necessárias.

19. Dê exemplo de funções cuja definição é compatível com os tipos seguintes:

1. $Int \to (Int \to Int) \to Int$
2. $Char \to Bool \to Bool$
3. $(Char \to Char \to Int) \to Char \to Int$
4. $Eq\ a \Rightarrow a \to [a] \to Bool$
5. $Eq\ a \Rightarrow a \to [a] \to [a]$
6. $Ord\ a \Rightarrow a \to a \to a$

20. Diga se a função $f :: (a, [a]) \to Bool$, pode ser aplicada aos argumentos $(2, [3])$, $(2, [])$ e $(2, [\mathsf{True}])$. Nos casos afirmativos quais os tipos dos resultados?

21. Repita o exercício anterior para a função $f :: (a, [a]) \to a$.

Listas em compreensão (Aula 3)

22. Usando uma lista em compreensão, escreva uma expressão para calcular a soma $1^2 + 2^2 + \cdots + 100^2$ dos quadrados dos inteiros de 1 a 100.

23. A constante matemática π pode ser aproximada usando expansão em *séries* (i.e. somas infinitas), como por exemplo:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \cdots + \frac{(-1)^n}{2n+1} + \cdots$$

(a) Escreva uma função *aprox* :: *Int* $\to$ Double para aproximar π somando em n parcelas da série acima (onde n é o argumento da função).

(b) A série anterior converge muito lentamente, pelo são necessário muitos termos para obter uma boa aproximação; escreva uma outra função *aprox'* usando a seguinte expansão para π^2:

$$\frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \cdots + \frac{(-1)^k}{(k+1)^2} + \cdots$$

Compare os resultados obtidos somado 10, 100 e 1000 termos com a aproximação *pi* pré-definida no prelúdio-padrão.

24. Defina uma função *divprop* :: *Int* $\to$ [*Int*] usando uma lista em compreensão para calcular a lista de *divisores próprios* de um inteiro positivo (i.e. inferiores ao número dado). Exemplo: *divprop* $10 = [1, 2, 5]$.

25. Um inteiro positivo n diz-se *perfeito* se for igual à soma dos seus divisores (excluindo o próprio n). Defina uma função *perfeitos* :: *Int* $\to$ [*Int*] que calcula a lista de todos os números perfeitos até um limite dado como argumento. Exemplo: *perfeitos* $500 = [6, 28, 496]$. *Sugestão:* utilize a solução do exercício 24.

26. Defina uma função *primo* :: *Int* $\to$ *Bool* que testa primalidade: n é primo se tem exactamente dois divisores, a saber, 1 e n. *Sugestão*: utilize a função do exercício 24 para obter a lista dos divisores próprios.

27. Usando uma função *binom* que calcula o coeficiente binomal, escreva uma definição da função *pascal* :: *Int* $\to$ [[*Int*]] que calcula as primeiras linhas triângulo de Pascal. O *triângulo de Pascal* é constituido pelos valores $\binom{n}{k}$ das combinações de n em k em que n é a linha e k é a coluna.

28. Escreva uma função *dotprod* :: [*Float*] $\to$ [*Float*] $\to$ *Float* para calcular o *produto interno* de dois vectores (representados como listas):

$$\mathit{dotprod}\ [x_1, \ldots, x_n]\ [y_1, \ldots, y_n] = x_1 * y_1 + \cdots + x_n * y_n = \textstyle\sum_{i=1}^{n} x_i * y_i$$

Sugestão: utilize a função *zip* :: $[a] \to [b] \to [(a, b)]$ do prelúdio-padrão para "emparelhar" duas listas.

29. Um trio (x, y, z) de inteiros positivos diz-se *pitagórico* se $x^2 + y^2 = z^2$. Defina a função *pitagoricos* :: *Int* $\to$ [(*Int*, *Int*, *Int*)] que calcule todos os trios pitagóricos cujas componentes não ultrapassem o argumento. Por exemplo: *pitagoricos* $10 = [(3, 4, 5), (4, 3, 5), (6, 8, 10), (8, 6, 10)]$.

30. Defina uma função *forte* :: *String* $\to$ *Bool* para verificar se uma palavra-passe dada numa cadeia de carateres é "forte", ou seja: tem 8 carateres ou mais e pelo menos uma letra maiúscula, uma letra minúscula e um algarismo.

Sugestão: use a função *or* :: [*Bool*] $\to$ *Bool* e listas em compreensão.

Definições recursivas e processamento de listas (Aulas 4 e 5)

31. Defina uma função recursiva em Haskell que dado n calcula 2^n (sem recorrer ao operador de exponenciação).

32. Sem consultar as definições na especificação do prelúdio de Haskell, escreva definições recursivas das seguintes funções:

(a) $\mathit{and} :: [\mathit{Bool}] \to \mathit{Bool}$ — testar se todos os valores são *True*;

(b) $\mathit{or} :: [\mathit{Bool}] \to \mathit{Bool}$ — testar se algum valor é *True*;

(c) $\mathit{concat} :: [[a]] \to [a]$ — concatenar uma lista de listas;

(d) $\mathit{replicate} :: \mathit{Int} \to a \to [a]$ — produzir uma lista com n elementos iguais;

(e) $(!!) :: [a] \to \mathit{Int} \to a$ — selecionar o n-ésimo elemento duma lista;

(f) $\mathit{elem} :: \mathrm{Eq}\ a \Rightarrow a \to [a] \to \mathit{Bool}$ — testar se um valor ocorre numa lista.

Nota: não deve usar os mesmos nomes, para não colidir com as definições no Prelude.

33. Mostre que as funções do prelúdio-padrão *concat*, *replicate* e (!!) podem também ser definidas sem recursão usando listas em compreensão.

34. A raiz quadrada inteira de um número positivo n é o maior inteiro cujo quadrado é menor ou igual a n. Por exemplo, para 15 e 16, os resultados são, respectivamente 3 e 4.

(a) Defina uma função recursiva $\mathit{leastSquare} n$ que calcula o menor inteiro k tal que $k * k \geq n$.

(b) Defina uma função não recursiva $\mathit{isqrt} n$ que calcula a raiz quadrada inteira de n.

35. Defina em Haskell:

(a) a função *factorial* (recursivamente).

(b) a função *rangeProduct* que calcula

$$a * (a + 1) * ... * (b - 1) * b$$

(c) a função factorial usando a função rangeProduct.

36. Defina uma função em Haskell para calcular o máximo divisor comum de dois inteiros positivos segundo a seguinte definição:

$$\mathit{mdc}(a, b) = \begin{cases} a & b = 0 \\ \mathit{mdc}(b, a\ \mathit{mod}\ b) & \text{otherwise} \end{cases}$$

37. A função $\mathit{nub} :: \mathrm{Eq}\ a \Rightarrow [a] \to [a]$ do módulo *Data.List* elimina ocorrências de elementos repetidos numa lista ("nub" em inglês significa *essência*). Por exemplo: *nub* "banana" = "ban".

Escreva uma definição recursiva para esta função. Sugestão: use uma lista em compreensão com uma guarda para eliminar elementos duma lista.

38. Escreva uma definição da função $\mathit{intersperse} :: a \to [a] \to [a]$ do módulo *Data.List* que intercala um valor entre os elementos duma lista. Exemplo: *intersperse* '-' "banana" = "b-a-n-a-n-a".

39. Defina uma função $\mathit{maxFun} :: (\mathit{Integer} \to \mathit{Integer}) \to \mathit{Integer} \to \mathit{Integer}$, que tendo como argumentos uma função $f :: \mathit{Integer} \to \mathit{Integer}$ e um inteiro n, retorne o máximo de $f\ 0, f\ 1, \ldots, f\ n$.

40. Defina uma função *anyZero* :: $(Integer \to Integer) \to Integer \to Bool$ que tendo como argumentos uma função f :: $Integer \to Integer$ e um inteiro n retorna True se algum valor de *f 0, f 1,..., f n* é igual a zero e False caso contrário.

41. Defina uma função *sumFun* :: $(Integer \to Integer) \to Integer \to Integer$, que tendo como argumentos uma função f :: $Integer \to Integer$ e um inteiro n retorna *(f 0) + (f 1) + ... + (f n)*.

42. Ordenação de listas pelo **método de inserção**.

(a) Escreva definição recursiva da função *insert* :: Ord $a \Rightarrow a \to [a] \to [a]$ da biblioteca *List* para inserir um elemento numa lista ordenada na posição correcta de forma a manter a ordenação. Exemplo: *insert* $2\ [0,1,3,5] = [0,1,2,3,5]$.

(b) Usando a função *insert*, escreva uma definição também recursiva da função *isort* :: Ord $a \Rightarrow [a] \to [a]$ que implementa *ordenação pelo método de inserção*:

- a lista vazia já está ordenada;
- para ordenar uma lista não vazia, recursivamente ordenamos a cauda e inserimos a cabeça na posição correcta.

43. Ordenação de listas pelo **método de seleção**.

(a) Escreva definição recursiva da função *minimum* :: *Ord* $a \Rightarrow [a] \to a$ do prelúdio-padrão que calcula o menor valor duma lista não-vazia. Exemplo: *minimum* $[5,1,2,1,3] = 1$.

(b) Escreva uma definição recursiva da função *delete* :: *Eq* $a \Rightarrow a \to [a] \to [a]$ da biblioteca *List* que remove a primeira ocorrência dum valor numa lista. Exemplo: *delete* $1\ [5,1,2,1,3] = [5,2,1,3]$.

(c) Usando as funções anteriores, escreva uma definição recursiva da função *ssort* :: Ord $a \Rightarrow [a] \to [a]$ que implementa *ordenação pelo método de seleção*:

- a lista vazia já está ordenada;
- para ordenar uma lista não vazia, colocamos à cabeça o menor elemento m e recursivamente ordenamos a cauda sem o elemento m.

44. Ordenação de listas pelo método **merge sort**.

(a) Escreva uma definição recursiva da função *merge* :: Ord $a \Rightarrow [a] \to [a] \to [a]$ para juntar duas listas ordenadas numa só mantendo a ordenação. Exemplo: *merge* $[3,5,7]\ [1,2,4,6] = [1,2,3,4,5,6,7]$.

(b) Usando a função *merge*, escreva uma definição recursiva da função *msort* :: Ord $a \Rightarrow [a] \to [a]$ que implementa o método *merge sort*:

- uma lista vazia ou com um só elemento já está ordenada;
- para ordenar uma lista com dois ou mais elementos, partimos em duas metades, recursivamente ordenamos as duas partes e juntamos os resultados usando *merge*.

Sugestão: comece por definir uma função *metades* :: $[a] \to ([a],[a])$ para partir uma lista em duas metades.

45. Escreva uma definição da função *bits* :: *Int* $\to$ $[[Bool]]$ que obtém todas as sequências de boleanos do comprimento dado. Exemplo: *bits* $2 =$ `[[False,False],[True,False],[False,True],[True,True]]`; note que a ordem das sequências não é importante.

Sugestão: tente exprimir a função por recorrência sobre o comprimento.

46. Escreva uma função *permutations* $:: [a] \to [[a]]$ para obter a lista com todas as permutações dos elementos uma lista. Assim, se xs tem comprimento n, então *permutations* xs tem comprimento $n!$. Exemplo: *permutations* $[1,2,3] = [[1,2,3],[2,1,3],[2,3,1],[1,3,2],[3,1,2],[3,2,1]]$; note que a ordem das permutações não é importante.

Funções de ordem superior (Aulas 6 e 7)

47. Mostre como a lista em compreensão $[f\ x \mid x \leftarrow xs,\ p\ x]$ se pode escrever como combinação das funções de ordem superior *map* e *filter*.

48. Sem consultar a especificação do Haskell, escreva definições não-recursivas das seguintes funções do prelúdio-padrão:

(a) $(+\!\!+) :: [a] \to [a] \to [a]$, usando *foldr*;

(b) *concat* $:: [[a]] \to [a]$, usando *foldr*;

(c) *reverse* $:: [a] \to [a]$, usando *foldr*;

(d) *reverse* $:: [a] \to [a]$, usando *foldl*;

(e) *elem* $:: \mathsf{Eq}\ a \Rightarrow a \to [a] \to \mathit{Bool}$, usando *any*.

49. Usando *foldl*, defina uma função *dec2int* $:: [\mathit{Int}] \to \mathit{Int}$ que converte uma lista de dígitos decimais num inteiro. Exemplo: *dec2int* $[2,3,4,5] = 2345$.

50. A função *zipWith* $:: (a \to b \to c) \to [a] \to [b] \to [c]$ do prelúdio-padrão é uma variante de *zip* cujo primeiro argumento é uma função usada para combinar cada par de elementos. Podemos definir *zipWith* usando uma lista em compreensão:

$$\mathit{zipWith}\ f\ xs\ ys = [f\ x\ y \mid (x,y) \leftarrow \mathit{zip}\ xs\ ys]$$

Escreva uma definição recursiva de *zipWith*.

51. Mostre que pode definir função *isort* $:: \mathsf{Ord}\ a \Rightarrow [a] \to [a]$ para ordenar uma lista pelo método de inserção usando *foldr* e *insert*.

52. Considere a função *rotate*, que produz todas as rotações possíveis de uma lista. Ou seja `rotate [1, 2, 3] = [[1, 2, 3],[2, 3, 1],[3, 1, 2]]`.

(a) Defina a função *shift*, que coloca o primeiro elemento de uma lista no final. Ou seja `shift [1,2, 3] = [2, 3, 1]` e `shift "eat" = "ate"`.

(b) Utilizando *foldr* e *shift* defina a função *rotate*.

53. As funções *foldl1* e *foldr1* do prelúdio-padrão são variantes de *foldl* e *foldr* que só estão definidas para listas com pelo menos um elemento (i.e. não-vazias). *Foldl1* e *foldr1* têm apenas dois argumentos (uma operação de agregação e uma lista) e o seu resultado é dado pelas equações seguintes.

$$\mathit{foldl1}\ (\oplus)\ [x_1,\ldots,x_n] = (\ldots(x_1 \oplus x_2)\ldots) \oplus x_n$$
$$\mathit{foldr1}\ (\oplus)\ [x_1,\ldots,x_n] = x_1 \oplus (\ldots(x_{n-1} \oplus x_n)\ldots)$$

(a) Mostre que pode definir as funções *maximum*, *minimum* $:: \mathsf{Ord}\ a \Rightarrow [a] \to a$ do prelúdio-padrão (que calculam, respectivamente, o maior e o menor elemento duma lista não-vazia) usando *foldl1* e *foldr1*.

(b) Mostre que pode definir *foldl1* e *foldr1* usando *foldl* e *foldr*. Sugestão: utilize as funções *head*, *tail*, *last* e *init*.

54. A função *add* pode ser definida em termos das funções:

```
succ i = i + 1
pred i = i - 1
```

pelas equações:

```
add i 0 = i
add i j = succ (add i (pred j))
```

(a) Dê uma definição semelhante para *mult* que use apenas *add* e *pred*. Dê uma definição para *exp* que use apenas *mult* e *pred*. Qual será a próxima função nesta sequência?

(b) A função *foldi* sobre inteiros pode ser definida da seguinte forma:

```
foldi :: (a -> a) -> a -> Integer -> a
foldi f q 0 = q
foldi f q i = f (foldi f q (pred i))
```

Defina as funções *add*, *mult* e *exp* em termos *foldi*.

(c) Defina as funções *fact* (factorial) e *fib* (Fibonacci) utilizando a função *foldi*.

55. A função de ordem superior *until* $:: (a \to Bool) \to (a \to a) \to a \to a$ está definida no prelúdio-padrão; *until* p f é a função que repete sucessivamente a aplicação de f ao argumento até que que p seja verdade. Usando *until*, escreva uma definição não recursiva da função

$$mdc\ a\ b = \text{if } b == 0 \text{ then } a \text{ else } mdc\ b\ (a\text{`}mod\text{`}b)$$

que calcula o máximo divisor comum pelo algoritmo de Euclides.

56. A função do prelúdio *scanl* é uma variante do *foldl* que produz a lista com os valores acumulados:

$$scanl\ f\ z\ [x_1, x_2, \ldots] = [z, f\ z\ x_1, f\ (f\ z\ x_1)\ x_2, \ldots]$$

Por exemplo:

$$scanl\ (+)\ 0\ [1,2,3] = [0,\ 0+1,\ 0+1+2,\ 0+1+2+3] = [0,1,3,6]$$

Em particular, para listas finitas xs temos que $last\ (scanl\ f\ z\ xs) = foldl\ f\ z\ xs$.

Escreva uma definição recursiva de *scanl*; deve usar outro nome para evitar colidir com a definição do prelúdio.

Listas infinitas (Aula 8)

57. Defina as listas infinitas dos factoriais e dos números de Fibonacci,

```
factorial = [1,1,2,6,24,120,720,...]
fibonacci = [0,1,1,2,3,5,8,13,21,...]
```

58. Defina uma função merge de duas listas infinitas ordenadas, que junta as listas retornando uma lista infinita também ordenada. Utilize a função merge com as listas de todas as potências de 2 e todas as potências de 3.

Defina a lista de números cujos únicos factores primos são 2,3 e 5 (chamados números de Hamming):

```
hamming = [1,2,3,4,5,6,8,9,10,12,15,...
```

(sugestão: use a função merge definida anteriormente)

59. Defina uma função de somas sucessivas

```
somas :: [Int] -> [Int]
```

que calcula as somas sucessivas

```
[0,n0,n0+n1,n0+n1+n2,...
```

a partir de uma lista infinita

```
[n0,n1,n2,...
```

60. Neste exercício pretende-se definir o triângulo de Pascal completo como uma *lista infinita pascal* :: [[*Int*]] das linhas do triângulo.

(a) Escreva uma definição de *pascal* usando a função *binom* do Exercício 6. Note que $pascal\ !!\ n\ !!\ k = binom\ n\ k$, para quaisquer n e k tais que $n > 0$ e $0 \leq k \leq n$.

(b) Escreva outra definição que evite o cálculo de factoriais usando as seguintes propriedades de coeficientes binomiais:

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1 \qquad\qquad \binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} \quad \text{(se } n > k\text{)}$$

61. Considere as função *shift* e *rotate* do exercício 52. Redefina a função *rotate*, usando a função *shift* e lista infinita de rotações.

62. Considere a função *stringsN* que, dado um n, calcula a lista de todas as strings de tamanho n compostas por letras minúsculas.

(a) Comece por definir uma função *strings* que calcula a lista infinita de todas as sequências de letras minúsculas.

(b) Utilizando a função da alínea anterior, defina a função *stringsN*.

63. Sem recorrer às funções *map*, *foldl* e *scanl*, escreva uma definição em Haskell para a função *scanl*, que opere sobre listas infinitas. Por exemplo:

$$scanl\ (*)\ 1\ [2, 2..]\ =\ [1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, ...]$$

Programas interactivos (Aula 9)

64. Escreva uma função *elefantes* :: $Int \to IO$ () tal que, por exemplo, *elefantes* 5 imprime os seguintes versos:

Se 2 elefantes incomodam muita gente,
3 elefantes incomodam muito mais!
Se 3 elefantes incomodam muita gente,
4 elefantes incomodam muito mais!
Se 4 elefantes incomodam muita gente,
5 elefantes incomodam muito mais!

Sugestão: utilize a função *show* :: $Show\ a \Rightarrow a \to String$ para converter um inteiro numa cadeia de caracteres; pode ainda re-utilizar a função *sequence_* :: $[IO\ a] \to IO$ () para executar uma lista de ações.

65. Escreva um programa completo que reproduza a funcionalidade do utilitário `wc` de Unix: ler um ficheiro de texto da entrada-padrão e imprimir o número de linhas, número de palavras e de *bytes*. Exemplo:

```
$ echo "a maria tinha um cordeirinho" | wc
      1       5      29
```

Sugestão: modifique o exemplo apresentado na aula teórica; utilize as funções *words* e *lines* do prelúdio-padrão.

66. Escreva um programa completo que lê linhas de texto da entrada-padrão e imprime cada linha invertida.

67. Escreva um programa completo que codifique a entrada-padrão usando a cifra de César de 13 posições (ver `http://www.rot13.com`). Exemplo:

```
$ echo "a maria tinha um cordeirinho" | ./rot13
n znevn gvaun hz pbeqrvevaub
```

68. Escreva uma função interactiva *adivinha* :: $String \to$ IO () que implemente um jogo de advinha duma palavra secreta dada como argumento pelo utilizador; um outro jogador vai tentar adivinhá-la.

O programa deve mostrar a palavra, substituindo as letras desconhecidas por traços e pedir uma nova letra; todas as ocorrências dessa letra na palavra devem então ser reveladas. O jogo termina quando o jogador adivinha a palavra; o programa deve então imprimir o número de tentativas (ver Figura 1).

69. O jogo *Nim* desenrola-se com cinco filas de peças idênticas (representadas por estrelas), cujo estado inicial é o seguinte:

$$\begin{array}{rl} 1: & * * * * * \\ 2: & * * * * \\ 3: & * * * \\ 4: & * * \\ 5: & * \end{array}$$

Dois jogadores vão alternadamente retirar uma ou mais estrelas de uma das filas; ganha o jogador que remover a última estrela ou grupo de estrelas.

Implemente este jogo como um programa em Haskell que pergunte as jogadas de cada jogador e actualize o tabuleiro. Sugestão: represente estado do jogo como uma lista com o número de estrelas em cada fila; o estado inicial será então $[5, 4, 3, 2, 1]$.

```
------
? a
-a-a-a
? e
Não ocorre
-a-a-a
? b
ba-a-a
? n
banana
Adivinhou em 4 tentativas
```

Figura 1: Exemplo de interacção do jogo de adivinha.

Árvores de pesquisa (Aula 10)

Nos exercícios seguintes considere a definição do tipo de árvores de pesquisa apresentada na aulas teóricas:

$$\mathit{data}\ \mathit{Arv}\ a = \mathit{Vazia}\ \mid\ \mathit{No}\ a\ (\mathit{Arv}\ a)\ (\mathit{Arv}\ a)$$

70. Escreva uma definição recursiva da função $\mathit{sumArv} :: \mathit{Num}\ a \Rightarrow \mathit{Arv}\ a \to a$ que soma todos os valores duma árvore binária de números.

71. Baseado-se na função $\mathit{listar} :: \mathit{Arv}\ a \to [a]$ apresentada na aula teórica, escreva a definição duma função para listar os elementos duma árvore de pesquisa por *ordem decrescente*.

72. Escreva uma definição da função $\mathit{nivel} :: \mathit{Int} \to \mathit{Arv}\ a \to [a]$ tal que $\mathit{nivel}\ n\ arv$ é a lista ordenada dos valores da árvore no nível n, isto é, a uma altura n (considerando que a raiz tem altura 0).

73. Experimente usar o interpretador de Haskell para calcular a altura de árvores de pesquisa com n valores.

(a) usando o método de partições binárias, e.g. $\mathit{construir}\ [1..n]$;

(b) usando inserções simples, e.g. $\mathit{foldr}\ \mathit{inserir}\ \mathit{Vazia}\ [1..n]$;

(c) usando inserções AVL, e.g. $\mathit{foldr}\ \mathit{inserirAVL}\ \mathit{Vazia}\ [1..n]$;

Experimente com $n = 10$, 100 e 1000 e compare a altura obtida com o minorante teórico: uma árvore binária com n nós tem altura $\geq \log_2 n$.

74. Escreva uma definição da função de ordem superior $\mathit{mapArv} :: (a \to b) \to \mathit{Arv}\ a \to \mathit{Arv}\ b$ tal que $\mathit{mapArv}\ f\ t$ aplica uma função f a cada valor duma árvore t.

75. Escreva uma definição da função de ordem superior $\mathit{foldArv} :: (a \to b \to b \to b) \to b \to \mathit{Arv}\ a \to b$ tal que $\mathit{foldArv}\ f\ v\ t$ se comporte como a função *foldr*, mas opere sobre árvores.

76. Neste exercício pretende-se implementar uma variante da remoção de um valor duma árvore de pesquisa simples.

(a) Baseando-se na função $\mathit{mais\_esq} :: \mathit{Arv}\ a \to a$ apresentada na aula teórica, escreva uma definição da função $\mathit{mais\_dir} :: \mathit{Arv}\ a \to a$ que obtém o valor mais à direita numa árvore (i.e., o maior valor).

(b) Usando a função da alínea anterior, escreva uma definição alternativa da função $\mathit{remover} :: \mathit{Ord}\ a \Rightarrow a \rightarrow \mathit{Arv}\ a \rightarrow \mathit{Arv}\ a$ que use o valor mais à direita da sub-árvore esquerda no caso de um nó com dois descentes não-vazios.

77. Escreva uma definição da função $\mathit{removerAVL} :: \mathit{Ord}\ a \Rightarrow a \rightarrow \mathit{Arv}\ a \rightarrow \mathit{Arv}\ a$ para remover um valor duma árvore AVL de forma a manter a árvore resultante equilibrada. Sugestão: modifique a função análoga para árvores de pesquisa simples.

Definição de Tipos de Dados (Aula 11)

78. Implemente em Haskell:

(a) Defina um datatype Shape para representar círculos de um determinado raio ($\mathsf{Circle\ Float}$) ou rectângulos de lados a, b ($\mathsf{Rectangle\ Float\ Float}$).

(b) Defina uma função para calcular o perímetro de uma figura geométrica Shape.

79. Um rectângulo de lados paralelos aos eixos é definido pelas suas extremidades inferior esquerda e superior direita. Cada uma dessas extremidades é um ponto caracterizado por um par de coordenadas.

1. Caracterize os tipos apropriados para a representação dos rectângulos do tipo indicado.
2. Defina uma função que calcule a área de um rectângulo.
3. Defina uma função que indique se dois rectângulos dados se intersectam (i.e. têm pelo menos um ponto em comum).

80. Escreva uma função $\mathit{parent} :: \mathit{String} \rightarrow \mathit{Bool}$ que verifique se uma cadeia de caracteres é uma sequência de parêntesis curvos e rectos correctamente emparelhados; por exemplo:

$$\mathit{parent}\ \texttt{"((((()[()])))"} = \mathit{True} \qquad \mathit{parent}\ \texttt{"(()]())"} = \mathit{False}$$

Sugestão: represente parêntesis abertos usando uma pilha dos caracteres '(', '[' e '{'; utilize o módulo *Stack* apresentado na aula teórica.

81. Na *notação polaca invertida* (abreviado para *RPN* do inglês "*reverse polish notation*") colocamos cada operador binário após os dois operandos; por exemplo, a expressão $42 \times 3 + 1$ escreve-se "`42 3 * 1 +`". Nesta notação não necessitamos de parêntesis ou de precedências entre operadores.

Pretende-se escrever uma função para calcular o valor de uma expressão em RPN; este cálculo pode ser feito percorrendo a expressão uma só vez usando uma pilha para guardar valores intermédios.

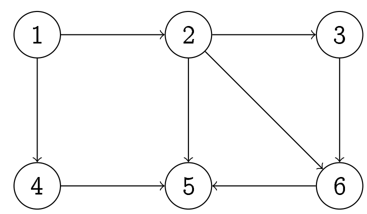
(a) Escreva uma função auxiliar $\mathit{calc} :: \mathit{Stack\ Float} \rightarrow \mathit{String} \rightarrow \mathit{Stack\ Float}$ que implemente uma operação (se o 2º argumento for "+", "*", "-" ou "/" ou coloque um operando na pilha (se o 2º argumento for um numeral); o resultado deve ser a pilha modificada.
Sugestão: utilize a função $\mathit{read} :: \mathit{String} \rightarrow \mathit{Float}$ do prelúdio-padrão para converter um número em texto para vírgula flutuante.

(b) Usando a função anterior e o módulo *Stack* apresentados nas aulas teóricas, escreva a função $\mathit{calcular} :: \mathsf{String} \rightarrow \mathit{Float}$ que calcula o valor duma expressão em RPN; por exemplo:
calcular "42 3 * 1 +" = 127.
Sugestão: utilize a função $\mathit{words} :: \mathit{String} \rightarrow [\mathit{String}]$ do prelúdio-padrão para partir uma cadeia de caracteres em palavras.

(c) Escreva um programa principal que leia uma expressão em RPN da entrada padrão como uma cadeia de caracteres da entrada padrão e calcule o seu valor. Experimente o programa com expressões correctas e incorrectas e interprete os resultados.

82. Considere um grafo dirigido $G = (V, E)$ constituído por um conjunto finito de vértices V e por um conjunto finito de arcos E, sendo cada arco (x, y) um par ordenado de vértices.

1. Defina em Haskell uma estrutura apropriada para representar grafos.
2. Represente o grafo da seguinte figura:



3. Escreva uma função cujos dados sejam um grafo dirigido (qualquer!) e dois vértices desse grafo e cujo resultado seja o número de caminhos distintos entre os dois vértices dados. Supõe-se que o grafo não tem ciclos.

   Por exemplo, para o grafo da figura e para os vértices 1 e 5 o resultado é 4 (os caminhos correspondentes - que não é necessário calcular!- são `[1,4,5]`, `[1,2,5]`, `[1,2,6,5]` e `[1,2,3,6,5]`).

83. As equações seguintes especificam as operações do tipo abstracto *pilha*:

$$\begin{aligned} pop\ (push\ x\ s) &= s & (1)\\ top\ (push\ x\ s) &= x & (2)\\ isEmpty\ empty &= True & (3)\\ isEmpty\ (push\ x\ s) &= False & (4) \end{aligned}$$

A propriedade (1) foi verificada na aula; verifique que a implementação usando listas apresentada na aula téorica satisfaz as restantes propriedades (2)–(4)

84. Escreva um programa para contar as ocorrências de letras num texto. Sugestão: represente a contagem de ocorrências usando um dicionário `Map Char Int`.

85. Modifique o exemplo da contagem de palavras distintas de forma a usar listas sem repetição em vez de `Data.Set` (cuja implementação usa árvores equilibradas).

A análise assimptótica diz-nos que, para conjuntos grandes, a pesquisa em árvores equilibradas é mais eficiente do que em listas. Investigue experimentalmente qual o tamanho de texto apartir do qual tal se verifica. Sugestão: use o comando `:set +s` do interpretador para imprimir o tempo usado numa computação.

86. Considere o tipo abstrato *Set* a para conjuntos finitos de valores de tipo a com as seguintes operações:

$$\begin{aligned} &\mathrm{empty} :: Set\ a\\ &\mathrm{insert} :: Ord\ a \Rightarrow a \to Set\ a \to Set\ a\\ &\mathrm{member} :: Ord\ a \Rightarrow a \to Set\ a \to Bool \end{aligned}$$

Escreva uma implementação deste tipo usando árvores binárias de pesquisa simples.

87. Considere as operações de união, interseção e diferença entre conjuntos; todas estas operações têm o mesmo tipo:

$$\mathit{union}, \mathit{intersect}, \mathit{difference} :: \mathit{Ord}\ a \Rightarrow \mathit{Set}\ a \rightarrow \mathit{Set}\ a \rightarrow \mathit{Set}\ a$$

Acrescente estas operações à implementação que fez para o exercício anterior.

88. Considere o tipo abstrato $\mathit{Map}\ k\ a$ para associações entre chaves de tipo k e valores de tipo a com as seguintes operações:

$$\begin{aligned}
&\mathit{empty} :: \mathit{Map}\ k\ a \\
&\mathit{insert} :: \mathit{Ord}\ k \Rightarrow k \rightarrow a \rightarrow \mathit{Map}\ k\ a \rightarrow \mathit{Map}\ k\ a \\
&\mathit{lookup} :: \mathit{Ord}\ k \Rightarrow k \rightarrow \mathit{Map}\ k\ a \rightarrow \mathit{Maybe}\ a
\end{aligned}$$

Escreva uma implementação deste tipo abstrato usando árvores binárias de pesquisa simples.

Raciocinar sobre programas (Aula 12)

89. Considere a definição recursiva dos naturais e da adição.

$$\text{data}\ \mathit{Nat} = \mathit{Zero}\ \mid\ \mathit{Succ}\ \mathit{Nat}$$

$$\begin{aligned}
&\mathit{Zero} + y = y \\
&\mathit{Succ}\ x + y = \mathit{Succ}\ (x + y)
\end{aligned}$$

Prove a associatividade da adição: $x + (y + z) = (x + y) + z$ para todo x, y, z.

Sugestão: use indução sobre x.

90. Usando indução sobre a lista xs, prove a associatividade da concatenação: $(xs +\!\!+ ys) +\!\!+ zs = xs +\!\!+ (ys +\!\!+ zs)$.

Sugestão: a prova é análoga à do exercício anterior.

91. Prove a distributividade de *reverse* sobre $+\!\!+$:

$$\mathit{reverse}\ (xs +\!\!+ ys) = \mathit{reverse}\ ys +\!\!+ \mathit{reverse}\ xs$$

usando indução sobre a lista xs.

Sugestão: será útil usar o resultado do exercício anterior (associatividade de $+\!\!+$). Tenha em atenção que as listas xs, ys aparecem por ordem contrária no lado direito da igualdade!

92. Considere as definições das funções de ordem-superior *map* e $\circ$ (composição de duas funções):

$$\begin{aligned}
&\mathit{map}\ f\ [\,] = [\,] \\
&\mathit{map}\ f\ (x : xs) = f\ x : \mathit{map}\ f\ xs
\end{aligned}$$

$$(f \circ g)\ x = f\ (g\ x)$$

Usando indução sobre listas, mostre que $\mathit{map}\ f\ (\mathit{map}\ g\ xs) = \mathit{map}\ (f \circ g)\ xs$.

93. Usando as seguintes definições das funções *take*, *drop* :: *Int* → [a] → [a] e a definição canónica de ++, mostre que $take\ n\ xs ++ drop\ n\ xs = xs$.

$$\begin{aligned}
&take\ 0\ xs = [\,]\\
&take\ n\ [\,] \quad | \quad n > 0 = [\,]\\
&take\ n\ (x : xs) \quad | \quad n > 0 = x : take\ (n-1)\ xs
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&drop\ 0\ xs = xs\\
&drop\ n\ [\,] \quad | \quad n > 0 = [\,]\\
&drop\ n\ (x : xs) \quad | \quad n > 0 = drop\ (n-1)\ xs
\end{aligned}$$

Sugestão: use indução sobre n e análise de casos da lista xs.

94. Usando indução sobre listas, prove que $length\ (map\ f\ xs) = length\ xs$, isto é, a função *map* preserva o comprimento da lista.

95. Usando indução sobre listas, prove que $sum\ (map\ (1+)\ xs) = length\ xs + sum\ xs$. Recorde que a notação $(1+)$ representa a função que adiciona 1 a um número.

96. Usando indução sobre listas, mostre que

$$map\ f\ (xs{+\!\!+}ys) = map\ f\ xs{+\!\!+}map\ f\ ys$$

para quaisquer funções f e listas finitas xs e ys.

97. Usando indução sobre listas, mostre que

$$map\ f\ (reverse\ xs) = reverse\ (map\ f\ xs)$$

Sugestão: use a propriedade provada no exerício 96.

98. Considere a seguinte definição da função *inserir* :: *Int* → [*Int*] → [*Int*] que insere um valor numa lista crescente de inteiros mantendo a ordenação.

$$\begin{aligned}
&inserir\ x\ [\,] = [x]\\
&inserir\ x\ (y : ys) \mid x \le y = x : y : ys\\
&inserir\ x\ (y : ys) \mid x > y = y : inserir\ x\ ys
\end{aligned}$$

Usando indução sobre listas, prove que $length\ (\mathrm{insert}\ x\ xs) = 1 + length\ xs$.

99. Considere a declaração dum tipo recursivo para árvores binárias anotadas:

$$\mathrm{data}\ Arv\ a = Folha \ \mid \ No\ a\ (Arv\ a)\ (Arv\ a)$$

Usando indução sobre árvores, mostre que o *número de folhas* é sempre mais um do que o *número de nós intermédios*.

Sugestão: começe por definir duas funções recursivas para calcular o número de folhas e nós intermédios duma árvore.

100. Considere a função para listar por ordem os elementos duma árvore binária:

$$\begin{aligned}
&\mathit{listar} :: \mathit{Arv}\ \mathrm{a} \to [\mathrm{a}]\\
&\mathit{listar}\ \ \mathit{Vazia} = [\,]\\
&\mathit{listar}\ \ (\mathit{No}\ \mathrm{x}\ \mathrm{esq}\ \mathrm{dir}) = \mathit{listar}\ \mathrm{esq} +\!\!+ [\mathrm{x}] +\!\!+ \mathit{listar}\ \mathrm{dir}
\end{aligned}$$

Empregue a técnica para eliminar concatenações apresentada na aula teórica para derivar uma versão mais eficiente desta função.

Sugestão: sintetize uma definição recursiva da função auxiliar $\mathit{listarAcc} :: \mathit{Arv}\ \mathrm{a} \to [\mathrm{a}] \to [\mathrm{a}]$ tal que $\mathit{listarAcc}\ \mathrm{t}\ \mathrm{xs} = \mathit{listar}\ \ \mathrm{t} +\!\!+ \mathrm{xs}$.

101. Considere a seguinte declaração de tipo:
`data Arv a = Vazia | No a (Arv a) (Arv a)`
Nota: As seguintes alíneas deverão ser definidas para árvores de valores numéricos.

(a) Defina uma função `soma`, que calcule a soma dos valores da árvore dada.

(b) Defina uma função `valorArv`, que devolva o valor na raiz da árvore dada, ou zero no caso da árvore ser vazia.

(c) Defina uma função `somasTree`, que devolva uma árvore em que cada nó contém as somas parciais dos valores em cada sub-árvore da árvore dada.

Nota: A soma dos elementos em cada sub-árvore deve ser efectuada uma única vez e **sem recorrer** à função `soma` definida anteriormente.

(d) Considerando as funções definidas na questão anterior, mostre que para qualquer árvore númerica `t`, `soma t = valorArv (somasTree t)`.

102. Considere o tipo `Arv a` definido no exercício anterior.

- Defina uma função `simetrica`, que dada uma árvore, devolva uma nova árvore em que os elementos aparecem em posições simétricas (em relação à raiz) à sua posição inicial.
- Mostre que para qualquer árvore `t`,

`listar t = reverse (listar (simetrica t)).`

103. Considere a função `soma`, definida anteriormente.

(a) Recorde a função `foldr` definida para listas. Defina uma função `foldtree`, que se comporte como a função `foldr`, mas opere sobre árvores. **Nota**: A função `foldtree` deverá ter como parâmetro uma função do tipo `a -> b -> b -> b`. Por exemplo, podemos definir a função `soma t` da alínea anterior, como `foldtree soma3 0 t`, onde `soma3 x y z = x + y + z`.

(b) Mostre que para qualquer árvore númerica `t`, `soma t = foldtree soma3 0 t`, onde `soma3 x y z = x + y + z`.

Exercícios suplementares

104. (a) Escreva uma função $\mathit{mindiv} :: \mathit{Int} \to \mathit{Int}$ cujo resultado é o menor divisor próprio do argumento (i.e. o menor divisor superior a 1). Note que se $n = p \times q$, então p e q são ambos divisores de n; assim, se $p \geq \sqrt{n}$, então $q \leq \sqrt{n}$ pelo que $\mathit{mindiv}\ n \leq \sqrt{n}$.

(b) Utilize *mindiv* para definir um teste de primalidade mais eficiente do que o exercício 26: n é primo se $n > 1$ e o seu menor divisor próprio for igual a n.

105. A *cifra de César* é um dos métodos mais simples para codificar um texto: cada letra é substituida pela que dista k posições à frente no alfabeto; se ultrapassar a letra Z, volta à letra A. Por exemplo, para $k = 3$, a substituição efectuada é

A B C D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z
D E F G H I J K L M N O P Q R S T U V W X Y Z A B C

e o texto "ATAQUE DE MADRUGADA" é transformado em "DWDTXH GH PDGUXJDGD".

Escreva uma função $\mathit{cifrar} :: \mathit{Int} \to \mathit{String} \to \mathit{String}$ para cifrar uma cadeia de caracteres usando um deslocamento dado. Note que $\mathit{cifrar}\ (-n)$ é a função inversa de $\mathit{cifrar}\ n$, pelo que não necessitamos de definir uma função especial para descodificação.

106. Um quadrado mágico de dimensão n é uma matriz $n \times n$ contendo os inteiros de 1 até n^2 tal que a soma de qualquer linha, coluna ou diagonal dá um mesmo valor. A figura seguinte representa um quadrado mágico de dimensão 3, em que cada linha, coluna e diagonal soma 15.

6	7	2
1	5	9
8	3	4

Escreva um programa para para testar se uma matriz `[[Int]]` é um quadrado mágico.

107. O *problema das oito rainhas* consiste em determinar posições para colocar oito rainhas num tabuleiro de Xadrez (com 8×8 casas) de forma a que nenhuma rainha esteja em linha de ataque de outra (i.e. usando movimentos em linhas, colunas ou diagonais).

Escreva um programa para procurar *todas* as soluções do problema das oito rainhas.

108. O *problema de decompor uma quantia em trocos* pode ser formalizado da seguinte maneira: dado um natural n e uma lista de naturais xs, encontrar decomposições de n como soma de valores em xs (eventualmente com repetições).

Por exemplo, para $n = 25$ e $xs = [2, 5, 10]$ uma decomposição possível é $[5, 10, 10]$ (porque $25 = 5 + 10 + 10$). Outras possibilidades são $[5, 5, 5, 5, 5]$ ou $[2, 2, 2, 2, 2, 5, 10]$ (e há mais alternativas).

Escreva uma definição duma função $\mathit{decompor} :: \mathit{Int} \to [\mathrm{Int}] \to [[\mathrm{Int}]]$ tal que $\mathit{decompor}\ n\ xs$ encontra *todas* as alternativas para o problema dos trocos. O resultado deverá ser a lista vazia quando o problema não tem solução.

109. O *Sudoku* é um *puzzle* lógico em que o objectivo é completar o preenchimento de uma grelha de 9×9 com inteiros de 1 a 9 de forma que cada uma das 9 linhas, colunas e quadrados 3×3 não contenha números repetidos.

Pretende-se escrever um programa para resolver este tipo de problemas; pode representar a grelha por uma lista de linhas:

$$\mathbf{type}\ \mathit{Grid} = [[\mathit{Int}]]$$

Cada entrada será um inteiro de 1 a 9 ou 0 se ainda não estiver preenchida.

(a) Escreva uma definição da função $\mathit{check} :: \mathit{Grid} \to \mathit{Bool}$ que verifique se uma grelha respeita as condições do problema (i.e. a ausência de repetições nas linhas, colunas e quadrados).

(b) Escreva uma definição da função $solve :: Grid \to [Grid]$ que obtêm todas soluções de um problema Sudoku; o argumento é uma grelha parcialmente preenchida.

110. Pretende-se que resolva este exercício sem usar *words* e *unwords* do prelúdio-padrão (pois $words = palavras$ e $unwords = despalavras$).

(a) Escreva uma definição da função $palavras :: String \to [String]$ que decompõe uma linha de texto em palavras delimitadas por um ou mais espaços.
Exemplo: *palavras* "Abra- ca- drabra!" = ["Abra-", "ca-", "dabra!"].

(b) Escreva uma definição da função $despalavras :: [String] \to String$ que concatena uma lista de palavras juntando um espaço entre cada uma. Note que *despalavras* não é a função inversa de *palavras*; encontre um contra-exemplo que justifique esta afirmação.

111. Considere duas séries (i.e. somas infinitas) que convergem para π:

$$\pi = \frac{4}{1} - \frac{4}{3} + \frac{4}{5} - \frac{4}{7} + \cdots \tag{5}$$

$$\pi = 3 + \frac{4}{2 \times 3 \times 4} - \frac{4}{4 \times 5 \times 6} + \frac{4}{6 \times 7 \times 8} - \cdots \tag{6}$$

Escreva duas funções `calcPi1, calcPi2 :: Int -> Double` que calculam um valor aproximado de π usando o número de parcelas dado como argumento; investigue qual das séries converge mais depresssa para π.

Sugestão: construa listas infinitas para os numeradores e denominadores dos termos separadamente e combine-as usando *zip*/*zipWith*.

112. Escreva um programa completo que implemente a funcionalidade do utilitário `cal` de Unix: imprimir o calendário dum ano formatado numa grelha 4×3 meses; a figura seguinte ilustra uma sugestão de formatação de um mês.

```
   Fevereiro 2016
Su Mo Tu We Th Fr Sa
    1  2  3  4  5  6
 7  8  9 10 11 12 13
14 15 16 17 18 19 20
21 22 23 24 25 26 27
28 29
```

113. A informação de altura de cada sub-árvore é usada para re-equilibrar as árvores AVL. Neste exercício pretende-se que modifique a implementação apresentada na aula teórica de forma a guardar a esta informação nos nós em vez de a re-calcular todas as vezes que é usada. Começe por alterar a declaração de tipo de árvore de forma a que cada nó tenha um argumento extra para a altura:

$$data\ Arv\ a\ =\ Vazia\ \mid\ No\ Int\ a\ (Arv\ a)\ (Arv\ a)$$

Tenha o cuidado de modificar as funções que efectuam rotações de forma a actualizar correctamente a altura.

Verificador de tautologias

Nos exercícios seguintes pretende-se que se baseie no verificador de tautologias apresentado nas aulas teóricas.

114. Escreva uma definição da função *satisfaz* :: *Prop* → *Bool* que verifica se uma proposição é *satisfazível*, isto é, se existe uma atribuição de valores às variáveis que a torna verdadeira.

115. Escreva uma definição da função *equiv* :: *Prop* → *Prop* → *Bool* que verifica se duas proposições são *equivalentes*, isto é, tomam o mesmo valor de verdade para todas as atribuições de variáveis. Sugestão: p, q são equivalentes se e só se $p \implies q \wedge q \implies p$ for uma tautologia.

116. Modifique o verificador de tautologias acrescentando uma nova conectiva para equivalência entre proposições.

117. Escreva uma definição duma função *showProp* :: *Prop* → *String* para converter uma proposição em texto; alguns exemplos:

```
> showProp (Neg (Var 'a'))
"(~a)"
> showProp (Disj (Var 'a') (Conj (Var 'a') (Var 'b')))
"(a || (a && b))"
> showProp (Impl (Var 'a') (Impl (Neg (Var 'a')) (Const False))
"(a -> ((~a) -> F))"
```

118. Modifique o verificador de tautologias para imprimir a tabela de verdade duma proposição. Mais precisamente, escreva uma função *tabela* :: *Prop* → *IO* () que imprime a tabela de verdade da proposição dada.

O Jogo da Vida

Nos exercícios seguintes pretende-se que se baseie no Jogo da Vida apresentado nas aulas teóricas.

119. Modifique a função *life* apresentada na aula teórica de forma a verificar se o tabuleiro fica vazio e, nesse caso, terminar imediatamente a simulação.

120. Modifique a função *life* apresentada na aula teórica para que no final das n gerações imprima o número de células vivas do tabuleiro.

121. Escreva definições das seguintes funções para transformar configurações do jogo da vida:

(a) *trans* :: (*Int*, *Int*) → *Cells* → *Cells*, tal que *trans* (dx, dy) efectua a translação pelo vector (dx, dy) das células no tabuleiro;

(b) *reflh* :: *Cells* → *Cells*, que efectua a transformação de reflexão horizontal (isto é, em relação ao eixo dos y);

(c) *reflv* :: *Cells* → *Cells*, que efectua a transformação de reflexão vertical (isto é, em relação ao eixo dos x);

(d) *rot90* :: *Cells* → *Cells*, que efectua uma rotação de 90° no sentido dos ponteiros do relógio.

(e) Combinando estas transformações com configurações primitivas pode construir configurações complexas de forma modular. Experimente, por exemplo, simular 100 gerações de dois "gliders" em rota de colisão:
life (*glider* ++ *trans* (10, 0) (*reflh glider*)) 100.