Conjuntos y combinatoria

Taller de Álgebra I

Primer cuatrimestre 2019

Repaso de clases anteriores

Recursión básica

Repasemos algunos problemas que resolvimos definiendo funciones recursivas:

- Casos que se resuelven aplicando recursivamente la definición sobre el entero anterior

Factorial

```
factorial :: Integer -> Integer
factorial 0 = 1
factorial n = n * factorial (n-1)
```

Repaso de clases anteriores

Recursión básica

Repasemos algunos problemas que resolvimos definiendo funciones recursivas:

- Casos que se resuelven aplicando recursivamente la definición sobre el entero anterior

Factorial

```
factorial :: Integer -> Integer
factorial 0 = 1
factorial n = n * factorial (n-1)
```

- Casos cuya definición recursiva no es respecto del entero inmediatamente anterior

División

```
dividir :: Integer -> Integer -> Integer
dividir a b | a < b      = 0
            | otherwise = 1 + dividir (a-b) b
```

Casos donde la recursión se debe realizar sobre un valor que no es el parámetro de entrada

Suma de divisores

Definir `sumaDivisores` que calcule la suma de todos los divisores positivos de n.

Casos donde la recursión se debe realizar sobre un valor que no es el parámetro de entrada

Suma de divisores

Definir `sumaDivisores` que calcule la suma de todos los divisores positivos de n.

```
sumaDivisores :: Integer -> Integer
sumaDivisores n = sumaDivisoresHasta n n

sumaDivisoresHasta :: Integer -> Integer -> Integer
sumaDivisoresHasta n 0 = 0
sumaDivisoresHasta n m
          | n `mod` m == 0 = m + sumaDivisoresHasta n (m-1)
          | otherwise      = sumaDivisoresHasta n (m-1)
```

Casos donde la recursión se debe realizar sobre múltiples parámetros

Sumas dobles

Definir una función que calcule $f(n, m) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} i \times j$

Casos donde la recursión se debe realizar sobre múltiples parámetros

Sumas dobles

Definir una función que calcule $f(n, m) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} i \times j$

```
sumaInterior :: Integer -> Integer -> Integer
sumaInterior n 0 = 0
sumaInterior n m = (n*m) + sumaInterior n (m-1)

sumaDoble :: Integer -> Integer -> Integer
sumaDoble 0 m = 0
sumaDoble n m = sumaInterior n m + sumaDoble (n-1) m
```

Repaso de clases anteriores

Listas

El tipo lista (`[a]`) representa una colección de objetos de un mismo tipo.

Repaso de clases anteriores

Listas

El tipo lista (`[a]`) representa una colección de objetos de un mismo tipo.

A diferencia de las tuplas, las listas de distintas longitudes son del mismo tipo. Sin embargo, las tuplas pueden definirse con elementos de distintos tipos.

El tipo lista (`[a]`) representa una colección de objetos de un mismo tipo.

A diferencia de las tuplas, las listas de distintas longitudes son del mismo tipo. Sin embargo, las tuplas pueden definirse con elementos de distintos tipos.

Los patrones fundamentales (*constructores*) de las listas son:

- `[]`, la lista vacía.
- `(x:xs)`, una lista con *head* `x` y *tail* `xs`.

Las listas pueden ser tanto parte de la entrada como de la salida de una función:

- Funciones que toman una lista como entrada

Longitud

```
longitud :: [Integer] -> Integer
longitud []     = 0
longitud (_:xs) = 1 + longitud xs
```

Las listas pueden ser tanto parte de la entrada como de la salida de una función:

- Funciones que toman una lista como entrada

Longitud

```
longitud :: [Integer] -> Integer
longitud []     = 0
longitud (_:xs) = 1 + longitud xs
```

- Funciones que devuelven una lista como salida

Listar Impares

```
imparesHasta :: Integer -> [Integer]
imparesHasta 0 = []
imparesHasta n | n `mod` 2 == 1 = n : imparesHasta (n-1)
               | otherwise      = imparesHasta (n-1)
```

También podemos tener un caso donde tanto la entrada como salida son listas

- Por ejemplo: definir una función que dada una lista l de enteros, devuelva una lista l' con los valores de l que son múltiplo de 7.

Filtrar listas

```
multiplosDe7 :: [Integer] -> [Integer]
multiplosDe7 []     = []
multiplosDe7 (x:xs) | x `mod` 7 == 0 = x:(multiplosDe7 xs)
                    | otherwise = multiplosDe7 xs
```

También podemos tener un caso donde tanto la entrada como salida son listas

- Por ejemplo: definir una función que dada una lista l de enteros, devuelva una lista l' con los valores de l que son múltiplo de 7.

Filtrar listas

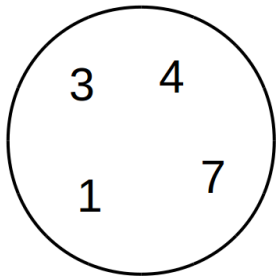
```
multiplosDe7 :: [Integer] -> [Integer]
multiplosDe7 []     = []
multiplosDe7 (x:xs) | x `mod` 7 == 0 = x:(multiplosDe7 xs)
                    | otherwise = multiplosDe7 xs
```

Todos estos esquemas son importantes!

Repasen los ejercicios que fueron vistos en clase, resuelvan los que no pudieron hacer antes y ¡consulten!

Conjuntos

Supongamos que queremos representar un **conjunto** de números enteros.

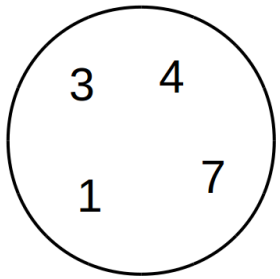


¿Es buena idea usar una lista `[Integer]`?

- Podríamos representar ese conjunto con la lista `[1,3,4,7]`.

Conjuntos

Supongamos que queremos representar un **conjunto** de números enteros.

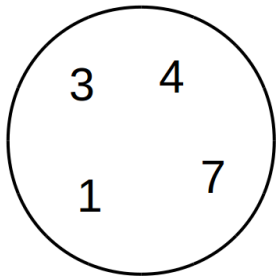


¿Es buena idea usar una lista `[Integer]`?

- Podríamos representar ese conjunto con la lista `[1,3,4,7]`.
  - También con `[4,1,3,7]`, `[3,7,4,1]`, `[7,3,1,4]`, ...
  - Todas estas listas son **distintas**, pero representan al **mismo** conjunto.
  - El orden de los elementos es relevante para las listas, pero no para conjuntos.

Conjuntos

Supongamos que queremos representar un **conjunto** de números enteros.

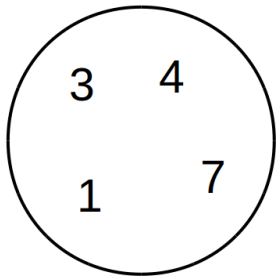


¿Es buena idea usar una lista `[Integer]`?

- Podríamos representar ese conjunto con la lista `[1,3,4,7]`.
  - También con `[4,1,3,7]`, `[3,7,4,1]`, `[7,3,1,4]`, ...
  - Todas estas listas son **distintas**, pero representan al **mismo** conjunto.
  - El orden de los elementos es relevante para las listas, pero no para conjuntos.
- ¿Y la lista `[1,3,4,7,7,7,1,4,7]`? ¿Sirve para representar a nuestro conjunto?

Conjuntos

Supongamos que queremos representar un **conjunto** de números enteros.

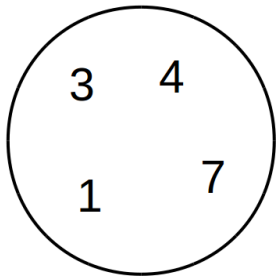


¿Es buena idea usar una lista `[Integer]`?

- Podríamos representar ese conjunto con la lista `[1,3,4,7]`.
  - También con `[4,1,3,7]`, `[3,7,4,1]`, `[7,3,1,4]`, ...
  - Todas estas listas son **distintas**, pero representan al **mismo** conjunto.
  - El orden de los elementos es relevante para las listas, pero no para conjuntos.
- ¿Y la lista `[1,3,4,7,7,7,1,4,7]`? ¿Sirve para representar a nuestro conjunto?
  - Las listas pueden tener elementos repetidos, pero eso no tiene sentido con conjuntos.

Conjuntos

Supongamos que queremos representar un **conjunto** de números enteros.



¿Es buena idea usar una lista `[Integer]`?

- Podríamos representar ese conjunto con la lista `[1,3,4,7]`.
  - También con `[4,1,3,7]`, `[3,7,4,1]`, `[7,3,1,4]`, ...
  - Todas estas listas son **distintas**, pero representan al **mismo** conjunto.
  - El orden de los elementos es relevante para las listas, pero no para conjuntos.
- ¿Y la lista `[1,3,4,7,7,7,1,4,7]`? ¿Sirve para representar a nuestro conjunto?
  - Las listas pueden tener elementos repetidos, pero eso no tiene sentido con conjuntos.

Vamos a usar `[Integer]` para representar conjuntos, pero dejando claro que hablamos de conjuntos (sin orden ni repetidos). Para eso podemos hacer un renombre de tipos.

Conjuntos

Definición de tipo usando `type`

Definamos un renombre de tipos para conjuntos: `type Set a = [a]`

- Otra forma de escribir lo mismo, pero más descriptivo.
- `type` es la palabra reservada del lenguaje, `Set` es el nombre que le pusimos nosotros.
- Si bien internamente es una lista, la idea es tratar a `Set` a como si fuera conjunto (es un contrato entre programadores).
- Si nuestra función recibe un conjunto, **vamos a suponer** que no contiene elementos repetidos. (Haskell no hace nada para verificarlo.)
- Si nuestra función devuelve un conjunto, **debemos asegurar** que no contiene elementos repetidos. (Haskell tampoco hace nada automático.)
- Además, no hace falta preocuparse por el orden de los elementos. (Haskell no lo sabe.)

Conjuntos

Definición de tipo usando `type`

Definamos un renombre de tipos para conjuntos: `type Set a = [a]`

- Otra forma de escribir lo mismo, pero más descriptivo.
- `type` es la palabra reservada del lenguaje, `Set` es el nombre que le pusimos nosotros.
- Si bien internamente es una lista, la idea es tratar a `Set` a como si fuera conjunto (es un contrato entre programadores).
- Si nuestra función recibe un conjunto, **vamos a suponer** que no contiene elementos repetidos. (Haskell no hace nada para verificarlo.)
- Si nuestra función devuelve un conjunto, **debemos asegurar** que no contiene elementos repetidos. (Haskell tampoco hace nada automático.)
- Además, no hace falta preocuparse por el orden de los elementos. (Haskell no lo sabe.)

Ejercicios entre todos

- Definir `vacio :: Set Integer` que represente el conjunto vacío
- Implementar entre todos la función
  `agregar :: Integer -> Set Integer -> Set Integer`
  que dado un entero y un conjunto agrega el primero al segundo (ayuda: La función "pertenece" en Haskell existe y se llama "elem")

Ejercicios simples

1. Implementar una función `incluido :: Set Integer -> Set Integer -> Bool` que determina si el primer conjunto está incluido en el segundo.
2. Implementar una función `iguales :: Set Integer -> Set Integer -> Bool` que determina si dos conjuntos son iguales.

```
Ejemplo> iguales [1,2,3,4,5] [2,3,1,4,5]
True
```

3. Implementar una función `agregarC :: Set Integer -> Set (Set Integer) -> Set (Set Integer)` que dado un conjunto de enteros y un conjunto de conjunto de enteros agrega el primero al segundo.

```
Ejemplo> agregarC [1,2] [[4,5],[2,3,1],[2,1]]
[[4,5],[2,3,1],[2,1]
```

Partes de un conjunto

Ejercicios

1. Implementar la función `agregarATodos :: Integer -> Set (Set Integer) -> Set (Set Integer)` que dado un número n y un conjunto de conjuntos cls agrega a n en cada conjunto de cls.
2. Implementar una función `partes :: Integer -> Set (Set Integer)` que genere todos los subconjuntos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

```
Ejemplo> partes 2
[[], [1], [2], [1, 2]]
```

Producto Cartesiano

Producto cartesiano

- Implementar una función
  `productoCartesiano :: Set Integer -> Set Integer -> Set (Integer, Integer)`
  que dados dos conjuntos genere todos los pares posibles (como pares de dos elementos) tomando el primer elemento del primer conjunto y el segundo elemento del segundo conjunto.

```
Ejemplo> productoCartesiano [1, 2, 3] [3, 4]
[(1, 3), (2, 3), (3, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4)]
```

- ¿Cómo podemos encarar este ejercicio?

Producto Cartesiano

Producto cartesiano

- Implementar una función
  `productoCartesiano :: Set Integer -> Set Integer -> Set (Integer, Integer)`
  que dados dos conjuntos genere todos los pares posibles (como pares de dos elementos) tomando el primer elemento del primer conjunto y el segundo elemento del segundo conjunto.

```
Ejemplo> productoCartesiano [1, 2, 3] [3, 4]
[(1, 3), (2, 3), (3, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4)]
```

- ¿Cómo podemos encarar este ejercicio?
- Notar que tenemos dos parámetros sobre los que tenemos que hacer recursión para obtener todos los pares.

Producto Cartesiano

Producto cartesiano

- Implementar una función
  `productoCartesiano :: Set Integer -> Set Integer -> Set (Integer, Integer)`
  que dados dos conjuntos genere todos los pares posibles (como pares de dos elementos) tomando el primer elemento del primer conjunto y el segundo elemento del segundo conjunto.

```
Ejemplo> productoCartesiano [1, 2, 3] [3, 4]
[(1, 3), (2, 3), (3, 3), (1, 4), (2, 4), (3, 4)]
```

- ¿Cómo podemos encarar este ejercicio?
- Notar que tenemos dos parámetros sobre los que tenemos que hacer recursión para obtener todos los pares.
- Podría servir alguna idea como la de la suma doble...

Variaciones con repetición

- Implementar una función
  `variaciones :: Set Integer -> Integer -> Set [Integer]` que dado un conjunto *c* y una longitud *l* genere todas las posibles listas de longitud *l* a partir de elementos de *c*.

```
Ejemplo> variaciones [4, 7] 3
[[4, 4, 4], [4, 4, 7], [4, 7, 4], [4, 7, 7], [7, 4, 4], [7, 4, 7], [7,
7, 4], [7, 7, 7]]
```

- ¿Cómo podemos pensar este ejercicio recursivamente?

Permutaciones

Insertar un elemento en una lista

- Implementar una función `insertarEn :: [Integer] -> Integer -> Integer -> [Integer]` que dados una lista *l*, un número *n* y una posición *i* (contando desde 1) devuelva una lista en donde se insertó n en la posición i de l y los elementos siguientes corridos en una posición.

```
Ejemplo> insertarEn [1, 2, 3, 4, 5] 6 2
[1, 6, 2, 3, 4, 5]
```

Permutaciones

Insertar un elemento en una lista

- Implementar una función
  `insertarEn :: [Integer] -> Integer -> Integer -> [Integer]` que dados una lista *l*, un número *n* y una posición *i* (contando desde 1) devuelva una lista en donde se insertó n en la posición i de l y los elementos siguientes corridos en una posición.

```
Ejemplo> insertarEn [1, 2, 3, 4, 5] 6 2
[1, 6, 2, 3, 4, 5]
```

Permutaciones (DIFÍCIL!)

- Implementar una función

  `permutaciones :: Integer -> [[Integer]]`

  que genere todas las posibles permutaciones de los números del 1 al *n*.

```
Ejemplo> permutaciones 3
[[1, 2, 3], [1, 3, 2], [2, 1, 3], [2, 3, 1], [3, 1, 2], [3, 2, 1]]
```

Más ejercicios

Implementar funciones que devuelvan

1. Todas las formas de ubicar n bolitas numeradas en k cajas.
2. Todas las listas ordenadas de k números distintos tomados del conjunto $\{1, \ldots, n\}$.
3. Todas las sucesiones de 0 y 1 de longitud 6 en las que hay tres 1's y tres 0's.
4. Todas las sucesiones de 0 y 1 de longitud 5 en las que hay mas 1's que 0's.
5. Implementar una función
   `subconjuntos :: Integer -> Integer -> Set (Set Integer)` que dados k y n enteros, genera todos los subconjuntos de k elementos del conjunto $\{1, 2, 3, \ldots, n\}$.

```
Ejemplo> subjconjuntos 2 3
[[1, 2], [2, 3], [1, 3]]
```

Recordar la demostración combinatoria de la igualdad

$$\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k} + \binom{n-1}{k-1}$$