

Numeric

Ruben Triwari

# INHALTSVERZEICHNIS

CHAPTER

NORMEN UND KONDITIONSZAHL PAGE 2

# Kapitel 1

## Normen und Konditionszahl

### 1: Matrixnormen

Sei  $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$  beliebig.

Die Spaltensummennorm ist die maximale Summe der Spalten einer Matrix.

$$\|A\|_1 = \max_{n=1,2,\dots,N} \sum_{m=1}^N |a_{m,n}|$$

Die Zeilensummennorm ist die maximale Summe der Zeilen einer Matrix.

$$\|A\|_\infty = \max_{n=1,2,\dots,N} \sum_{m=1}^N |a_{n,m}|$$

Die Frobeniusnorm ist die Wurzel der Quadratsumme über alle Einträge einer Matrix.

$$\|A\|_F = \sqrt{\sum_{m=1}^N \sum_{n=1}^N |a_{n,m}|^2} = \sqrt{\sum_{n=1}^N \lambda_n(A^*A)}$$

Die zweite Gleichheit gilt, da

$$\text{spur}(A^*A) = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N \overline{a_{n,m}} a_{n,m} = \sum_{n=1}^N \sum_{m=1}^N |a_{n,m}|^2 = \|A\|_F^2$$

Spektralnrm:

$$\|A\|_2 = \max_{n=1,2,\dots,N} \sqrt{\lambda_n(A^*A)}$$

## 2: Induzierte Matrixnorm

Sei  $\|\cdot\|$  eine Norm auf  $\mathbb{K}^N$ , dann ist die induzierte Matrixnorm:

$$\|A\| = \sup_{0 \neq x \in \mathbb{K}^N} \frac{\|Ax\|}{\|x\|} = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Es gilt die Submultiplikativität:

$$\|A \cdot B\| \leq \|A\| \cdot \|B\|.$$

Sowie:

$$\|\mathbb{1}\| = \sup_{\|x\|=1} \|\mathbb{1}x\| = \sup_{\|x\|=1} \|x\| = 1.$$

Wichtige induzierte Matrixnormen:

$$\|x\|_1 \leftrightarrow \|A\|_1$$

$$\|x\|_\infty \leftrightarrow \|A\|_\infty$$

$$\|x\|_2 \leftrightarrow \|A\|_2$$

## 3: Konditionszahl

Die Konditionszahl ist der Fehlerverstärker falls eine Störung in einer regulären Matrix  $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$  in einem linearen Gleichungssystem vorkommt. Sei  $\|\cdot\|$  eine Matrixnorm, dann setze:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\|.$$

Es gilt  $\forall \alpha \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ :

$$\text{cond}(\alpha A) = \|\alpha A\| \cdot \|(\alpha A)^{-1}\| = |\alpha \cdot \alpha^{-1}| \cdot \|A\| \cdot \|A^{-1}\| = \text{cond}(A)$$

Falls  $\|\cdot\|$  eine induzierte Matrixnorm ist, gilt wegen Submultiplikativität:

$$\text{cond}(A) = \|A\| \cdot \|A^{-1}\| \geq \|A \cdot A^{-1}\| = 1$$

Außerdem für eine induzierte Matrixnorm:

$$\text{cond}(A) = \frac{\sup_{\|x\|=1} \|Ax\|}{\inf_{\|x\|=1} \|Ax\|}$$

Daraus folgt für die Spektralnorm:

$$\text{cond}(A) = \sqrt{\frac{\max_n \lambda_n(A^*A)}{\min_n \lambda_n(A^*A)}}$$

#### 4: Fehlerabschätzungen für lineare Gleichungssysteme

Sei  $A, \Delta A \in \mathbb{K}^{N \times N}$  und  $b, \Delta b, x, \Delta x \in \mathbb{K}^N$ .

Mit  $Ax = b$  und  $A(x + \Delta x) = b + \Delta b$  gilt dann:

$$\|\Delta x\| \leq \|A^{-1}\| \cdot \|\Delta b\| \quad \text{und} \quad \frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{\|\Delta b\|}{\|b\|}$$

Dies motiviert die Konditionszahl.

Falls nun  $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$  gilt dann  $A + \Delta A$  regulär, mit

$$\|(A + \Delta A)^{-1}\| \leq \|A^{-1}\| \frac{1}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|}$$

Daraus erhält man falls weiter  $\|\Delta A\| < \frac{1}{\|A^{-1}\|}$  gilt und mit

$$(A + \Delta A)(x + \Delta x) = b + \Delta b.$$

$$\frac{\|\Delta x\|}{\|x\|} \leq \text{cond}(A) \frac{1}{1 - \|\Delta A\| \cdot \|A^{-1}\|} \left( \frac{\Delta A}{A} + \frac{\Delta b}{b} \right)$$

#### 5: Strikt diagonaldominante Matrizen

Sei  $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$  dann heißt die Matrix strikt diagonaldominant, wenn für alle  $n = 1, 2, \dots, N$  gilt:

$$\sum_{m=1}^N |a_{n,m}| < |a_{n,n}|$$

Eigenschaften falls A strikt diagonaldominant:

- A regulär
- So ist bei Anwendung der L-R Zerlegung  $a_{n,n}^{(n)} \neq 0 \quad \forall n$
- Die Pivoelementsuche liefert immer  $a_{n,n}^{(n)}$

## 6: LR-Zerlegung

Sei  $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_N \end{pmatrix} \in \mathbb{K}^N$  ein Vektor,  $n \in \{1, 2, \dots, N\}$  mit  $y_n \neq 0$  und setze

$$l_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{y_{n+1}}{y_n} \\ \vdots \\ \frac{y_N}{y_n} \end{pmatrix}.$$

Wobei die ersten  $n$  Einträge null sind. Daraus erhält man die Matrix:

$$L_n := E_n - l_n \cdot e_n^* = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 1 & & \\ & & \frac{-y_{n+1}}{y_n} & 1 & \\ & & \vdots & & \ddots \\ & & \frac{-y_N}{y_n} & & & 1 \end{pmatrix}$$

Die  $y$  Einträge befinden sich in der  $n$ -ten Spalte und in den  $(n+1) - N$  Zeilen. Diese Matrix hat folgende Eigenschaften:

$$L_n y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad L_n e_m = e_m \quad \text{für } m \neq n$$

Sei  $A$  eine beliebige Matrix mit  $y = A_n$ , dann setze:

$$R := L_{N-1} \cdots L_2 L_1 A \quad \text{und} \quad L := L_1^{-1} L_2^{-1} \cdots L_{N-1}^{-1}$$

Dann sind  $L$  und  $R$  Dreiecksmatrizen und für  $L$  gilt:

$$L = E_n + l_1 e_1^* + l_2 e_2^* + \cdots + l_{N-1} e_{N-1}^*$$

Jetzt kann das LGS einfach mit  $L$  und  $R$  gelöst werden:

$$Ax = L(Rx) = b \iff Lz = b \quad \text{und} \quad Rx = z$$

Dieser Algorithmus verwendet folgende Anzahl an Schritten:

$$\text{Rechenaufwand} = \frac{1}{3}N^3 - \frac{1}{3}N$$

## 7: Pivotsuche

Idee: Falls das Pivoelement bei der LR-Zerlegung  $a_{n,n}^{(n)} = 0$  ist, tauschen wir die Zeilen oder Spalten um ein Pivotelement  $a_{n,n}^{(n)} \neq 0$  erhalten.

Die Vertauschungen können mittels einer Permutationsmatrix durchgeführt werden:

$$P_n := \left( \begin{array}{ccc|ccc|ccc} 1 & & & & & & & & \\ & \ddots & & & & & & & \\ & & 1 & & & & & & \\ \hline & & & 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & \\ & & & 0 & 1 & & & 0 & \\ & & & \vdots & & \ddots & & \vdots & \\ & & & 0 & & & 1 & 0 & \\ & & & 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & \\ \hline & & & & & & & 1 & \\ & & & & & & & & \ddots & \\ & & & & & & & & & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow n \\ \\ \\ \leftarrow p \\ \\ \end{array}$$

$\uparrow \quad \quad \uparrow$   
 $n \quad \quad p$

Die Matrix heißt elementare Permutationsmatrix und hat folgende Eigenschaften:

- $A \cdot P_n$  vertauscht n-te und p-te Zeile von A
- $P_n \cdot A$  vertauscht n-te und p-te Spalte von A
- $P_n^2 = E_n$

Der n-te Schritt mit Pivotsuche ist daher:

$$A^{(n+1)} = L_n P_n A^{(n)}$$

Dann gilt für R und L:

$$R := \tilde{L}_{N-1} \tilde{L}_{N-2} \cdots \tilde{L}_1 P A \quad \text{und} \quad L := \tilde{L}_1^{-1} \tilde{L}_2^{-1} \cdots \tilde{L}_{N-1}^{-1}$$

mit

$$\tilde{L}_n := P_{N-1} \cdots P_{n+1} L_n P_{n+1} \cdots P_{N-1}$$

Also gilt wieder:

$$PA = LR \quad \text{dann lässt man wieder} \quad Ly = Pb \quad \text{und} \quad Rx = y$$

Spaltenpivotsuche:

Das m-te Pivotelement mit dem höchsten Score wird gewählt mit der Spaltenmaximierungsstrategie:

$$\text{Pivoelement-Zeile} = \operatorname{argmax}_{n=m, \dots, N} = \frac{|a_{n,m}|}{\sum_{l=m}^N |a_{n,l}|}$$

## 8: LR-Zerlegung Algorithmus

Algorithmus:

1. Start:  $A^{(1)} := A$ ,  $L^{(1)} := 0$ ,  $P^{(1)} := E_N$

2. Pivotsuche ergibt neues Element: Vertausche Zeilen von  $A^{(n)}$ , also berechne:  
 $A'^{(n)} := P_{n,j} A^{(n)}$ ,  $P^{(n)} := P_{n,j} P^{(n-1)}$

3. Pivotsuche gibt kein neues Element:  $P^{(n)} := P^{(n-1)}$

4. Berechne:  $l_n := \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ \frac{a_{n+1,n}^{(n)}}{a_{n,n}^{(n)}} \\ \vdots \\ \frac{a_{N,n}^{(n)}}{a_{n,n}^{(n)}} \end{pmatrix}$ ,  $L_n := \begin{pmatrix} 0 & & & & \\ & \ddots & & & \\ & & 0 & & \\ & & l_{n+1} & 0 & \\ & & \vdots & \ddots & \\ & & l_N & & 0 \end{pmatrix}$ ,  $L_-^{(n)} := E_N - L^{(n)}$

5. Berechne:  $A^{(n+1)} := L_-^{(n)} A^{(n)}$

6. Schluss:  $R := A^{(N)}$ ,  $L = E_N + L^{(1)} + \dots + L^{(N)}$ ,  $P := P^{(N)}$

## 9: Cholesky Zerlegung

Sei  $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$  hermitesch und positiv definit, dann gibt es eine untere Dreiecksmatrix mit positiven Diagonalelementen und

$$A = LL^*.$$

Ansatz zur Berechnung:

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,N} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,N} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{N,1} & a_{N,2} & \cdots & a_{N,N} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} l_{1,1} & & & \\ l_{2,1} & l_{2,2} & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{N,1} & l_{N,2} & \cdots & l_{N,N} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} l_{1,1} & \overline{l_{1,2}} & \cdots & \overline{l_{1,N}} \\ & l_{2,2} & \cdots & \overline{l_{2,N}} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & l_{N,N} \end{pmatrix}$$

Mit Rechenaufwand:

$$\text{Rechenaufwand} = \frac{1}{6}N^3 + \mathcal{O}(N^2)$$

## 10: Householder-Transformation

Die Householder-Transformation bzgl. eines Vektors  $v \in \mathbb{K}^N$  ist:

$$P = E_n - \frac{2}{v^*v} v v^* \in \mathbb{K}^{N \times N}$$

Die Householder-Transformation ist eine Spiegelung an der Ebene orthogonal zu  $v$ .  
 Für  $P$  gilt folgende Eigenschaften:

- $Pv = -v$
- $Pw = w \quad \forall w \perp v$
- $P$  hermitesch, also  $P^* = P$
- $P$  unitär, also  $P^*P = E_N$



## 11: QR-Zerlegung

Sei  $A \in \mathbb{K}^{M \times N}$  mit  $M \geq N$  und  $\text{rang}(A) = N$ . Dann gibt es eine unitäre Matrix  $Q \in \mathbb{K}^{M \times M}$  und eine obere Dreiecksmatrix  $R \in \mathbb{K}^{M \times N}$  mit

$$A = QR$$

Wegen  $Q$  unitär kann das Gleichungssystem wie folgt gelöst werden:

$$Rx = Q^*b$$

Algorithmus:

Im  $n$ -ten Schritt haben wir  $A^{(n)}$  bestimmt und sei  $a_n = A_n^{(n)}$  die  $n$ -te Spalte von  $A^{(n)}$ .

1. Berechne  $v_n := \frac{a_n}{\|a_n\|_2} + \delta_n e_1$  mit  $\delta_n := \begin{cases} \frac{(a_n)_1}{|(a_n)_1|} & , (a_n)_1 \neq 0 \\ 1 & , \text{sonst} \end{cases}$
2. Berechne  $\beta_n := \frac{2}{v_n^* v_n}$ ,  $w_n := A^* v_n$
3. Berechne  $P_n = E_N - \beta_n v_n v_n^* = \begin{pmatrix} E_n & 0 \\ 0 & P'_n \end{pmatrix} \implies P_n A^{(n)} = A^{(n)} - \beta_n v_n w_n^* = \begin{pmatrix} r_{n,n} & * \\ 0 & A^{(n+1)} \end{pmatrix}$
4. Schluss:  $R := P_n \cdots P_1 A$  und  $Q := P_1 \cdots P_n$

Bemerkungen:

- QR-Zerlegung nicht eindeutig für  $M \neq N$ .
- Die Konditionszahl von der QR Zerlegung ist gleich der von  $A$ , also  $\text{cond}_2(A) = \text{cond}_2(RQ) = \text{cond}_2(R)$ .
- Also besser als bei der LR Zerlegung mit  $\text{cond}_2(A) \leq \text{cond}_2(L)\text{cond}_2(R)$ , wobei die Konditionszahlen von  $L$  und  $R$  viel höher als  $A$  sein können.
- Auch besser als die Cholesky Zerlegung, da für die cholesky-Zerlegung gilt:  $\text{cond}_2(A) \leq (\text{cond}_2(L'))^2$ .
- QR-Zerlegung ist doppelt so aufwendig wie LR-Zerlegung und viermal so aufwendig wie cholesky-Zerlegung.
- Falls der Rang nicht voll ist kann wieder Vertauschungen von Spalten verwendet werden, um den Algorithmus trotzdem anzuwenden zu können.
- Der Algorithmus kann leicht abgewandelt werden dass die Pivoelemente immer ungleich Null sind.

$$\text{Rechenaufwand} = MN^2 - \frac{1}{3} + O(MN)$$

## 12: Lineare Ausgleichsrechnung

Sei  $Ax = b$  mit  $A \in \mathbb{K}^{M \times N}$ ,  $x \in \mathbb{K}^N$ ,  $b \in \mathbb{K}^M$  und  $M > N$ . Dieses LGS ist allgemein nicht lösbar, deswegen brauchen wir einen neuen Lösungsbegriff:

$$\inf_{x \in \mathbb{K}^N} \|Ax - b\|_2$$

Die Minimierer sind die Lösungen der Gaußschen Normalengleichung:

$$A^*Ax = A^*b$$

Also eine Alternative zu der QR-Zerlegung

### 13: Banachscher Fixpunktsatz

Sei  $M$  vollständig bzgl. einer Metrik  $d$  und sei  $\phi : M \rightarrow M$  eine Abbildung, sodass es ein  $q > 1$  gibt mit

$$\forall x, y \in M : d(\phi(x), \phi(y)) \leq q \cdot d(x, y)$$

Dann gibt es **genau ein**  $\hat{x} \in M$  mit  $\phi(\hat{x}) = \hat{x}$ . Außerdem konvergiert für jedes  $x^{(0)} \in M$  die Folge

$$x^{(n+1)} := \phi(x^{(n)}), \forall n \in \mathbb{N}_0$$

gegen  $\hat{x}$  und für  $n \geq 1$  gilt:

- (a) Monotonie:  $d(x^{(n)}, \hat{x}) \leq q \cdot d(x^{(n-1)}, \hat{x})$
- (b) A-priori-Schranke:  $d(x^{(n)}, \hat{x}) \leq \frac{q^n}{1-q} \cdot d(x^{(0)}, x^{(1)})$
- (c) A-posteriori-Schranke:  $d(x^{(n)}, \hat{x}) \leq \frac{q}{1-q} \cdot d(x^{(n)}, x^{(n-1)})$

### 14: Fixpunktsatz angewendet auf lineare Gleichungssysteme

Anwendung auf LGS  $Ax = b$ , zerlege in  $A = M - N$ . Daraus erhalten wir

$$Mx = Nx + b.$$

dass kann nun als ein Fixpunktproblem geschrieben werden:

$$x = Tx + c \quad \text{mit} \quad T = M^{-1}N \quad \text{und} \quad c = M^{-1}b$$

also  $\phi(x) = Tx + c$ .

Dieses Problem konvergiert falls  $\|T\| < 1$ , für eine induzierte Matrixnorm.

Gesamtschrittverfahren(Jacobi-Verfahren):

Hier ist  $M = D$ ,  $N = L + R$ , wobei  $D$  Diagonalmatrix mit Einträgen ungleich Null, dann ist das wieder ein Fixpunktproblem mit:

$$\begin{aligned} x_{\text{neu}} &= D^{-1}(b + (L + R)x_{\text{alt}}) \\ \iff x_{\text{neu}} &= \underbrace{D^{-1}b}_{:=c} + \underbrace{D^{-1}(L + R)}_{:=T} x_{\text{alt}} \end{aligned}$$

oder konkret:

$$x_n^{(k+1)} = \frac{1}{a_{n,n}}(b_n - \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N a_{n,m} \cdot x_m^{(k)})$$

Einzelschrittverfahren(Gauß-Seidel-Verfahren):

Hier ist  $M = D - L$  und  $N = R$ , daraus:

$$\begin{aligned} x &= (D - L)^{-1}(b - Rx) \\ \rightsquigarrow x^{(\text{neu})} &= (D - L)^{-1}(b - Rx^{(\text{alt})}) \\ \iff x^{(\text{neu})} &= D^{-1}(b + Lx^{(\text{neu})} - Rx^{(\text{alt})}) \end{aligned}$$

konkret:

$$x_n^{k+1} = \frac{1}{a_{n,n}}(b_n - \sum_{k=1}^{n-1} a_{n,m} x_m^{k+1} - \sum_{k=n+1}^N a_{n,m} x_m^k)$$

Falls  $A$  strikt diagonaldominant konvergieren beide Verfahren für jeden Startwert  $x^{(0)} \in \mathbb{K}^N$

## 15: Konjugierte Gradienten

Sei  $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$  hermitesch und positiv definit. Das Verfahren berechnet die exakte Lösung wird aber oft vorher abgebrochen.

Algorithmus:

1. Start: Wähle  $x^{(0)} \in \mathbb{K}^N$  und setze  $d^{(0)} := r^{(0)} = b - Ax^{(0)}$ . Ist  $d^{(0)} = 0$  kann abgebrochen werden.

2. Berechne:

$$\alpha_{k-1} := \frac{d^{(k-1)*} r^{(k-1)}}{d^{(k-1)*} A d^{(k-1)}}, \quad \beta_{k-1} := \frac{d^{(k-1)*} A r^{(k)}}{d^{(k-1)*} A d^{(k-1)}} \quad \text{und} \quad r^{(k)} := b - Ax^{(k)}$$

3. Berechne:

$$x^{(k)} := x^{(k-1)} + \alpha_{k-1} d^{(k-1)} \quad \text{und} \quad d^{(k)} := r^{(k)} + \beta_{k-1} d^{(k-1)}$$

4. Schluss:  $d^{(k)} = 0 \implies x^{(k)} = \hat{x}$  mit  $A\hat{x} = b$

Das Verfahren konvergiert nach genau  $N$  Schritten.

Konvergenzrate:

$$\|x^{(k)} - \hat{x}\|_2 \leq 2 \operatorname{cond}(A) \left( \frac{\sqrt{\operatorname{cond}(A)} - 1}{\sqrt{\operatorname{cond}(A)} + 1} \right)^k \|x^0 - \hat{x}\|_2$$

## 16: Eigenwerteinschließung

Sei  $A, \Delta A \in \mathbb{K}^{N \times N}$ ,  $\|\cdot\|$  eine induzierte Matrixnorm und  $\sigma(A) := \{\lambda \in \mathbb{C} : \lambda \text{ ist Eigenwert von } A\}$ . Dann gilt (Bauer-Fike):

$$\min_{\lambda(A) \in \sigma(A)} |\lambda(A) - \mu(\Delta A)| \leq \operatorname{cond}(A) \cdot \|\Delta A\|.$$

Wenn  $A$  normal ( $A^*A = AA^*$ ) ist, so gilt sogar

$$\min_{\lambda(A) \in \sigma(A)} |\lambda(A) - \mu(\Delta A)| \leq \|\Delta A\|_2.$$

Gerschgorin:

Sei

$$\mathcal{K}_n := \{\xi \in \mathbb{C} : |a_{n,n} - \xi| \leq \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N |a_{n,m}|\} \quad \text{und} \quad \mathcal{K}_n^* := \{\xi \in \mathbb{C} : |a_{n,n} - \xi| \leq \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq n}}^N |a_{m,n}|\}.$$

Dann ist

$$\sigma(A) \subset \left( \bigcup_{n=1}^N \mathcal{K}_n \right) \cap \left( \bigcup_{n=1}^N \mathcal{K}_n^* \right).$$

Wenn  $\mathcal{N}_1 \dot{\cup} \mathcal{N}_2 = \{1, 2, \dots, N\}$  mit

$$\left( \bigcup_{n \in \mathcal{N}_1} \mathcal{K}_n \right) \cap \left( \bigcup_{n \in \mathcal{N}_2} \mathcal{K}_n^* \right) = \emptyset.$$

Dann enthalten  $\bigcup_{n \in \mathcal{N}_i} \mathcal{K}_i$ ,  $i = 1, 2$  je genau  $\#\mathcal{N}_i$  Eigenwerte.

Courant-Fischer:

Falls  $A$  hermitesch mit Eigenwerten  $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$ . Dann gilt für jeden Unterraum  $\mathcal{L} \subset \mathbb{K}^N$  mit  $\dim(\mathcal{L}) = n$ , dass

$$\min_{0 \neq x \in \mathcal{L}} \frac{x^* A x}{x^* x} \leq \lambda_n \quad \text{und} \quad \max_{0 \neq x \in \mathcal{L}} \frac{x^* A x}{x^* x} \geq \lambda_{N-n+1}$$

mit Gleichheit  $\mathcal{L} = \{x_1, \dots, x_n\}$  bzw.  $\mathcal{L} = \{x_{N-n+1}, \dots, x_N\}$ , wobei  $(x_m)_{m=1}^N$  Eigenvektoren einer Orthonormalbasis sind.

### 17: Courant-Fischer Folgerung

Sei  $A, \Delta A \in \mathbb{K}^{N \times N}$  hermitesch, dann

$$\lambda_n(A) + \lambda_N(\Delta A) \leq \lambda_n(A + \Delta A) \leq \lambda_n(A) + \lambda_1(\Delta A), \forall n = 1, \dots, N$$

und insbesondere

$$|\lambda_n(A + \Delta A) - \lambda_n(A)| \leq \|\Delta A\|_2 \forall n = 1, \dots, N$$

### 18: Potenzmethode

*Motivation:* Sei  $A \in \mathbb{K}^{N \times N}$  diagonalisierbar, und  $(v_n)_{n=1}^N$  eine Orthonormalbasis aus Eigenvektoren, so gilt für  $x = \sum_{n=1}^N \xi_n v_n$ , dass

$$A^k x = \sum_{n=1}^N \lambda_n^k \xi_n v_n.$$

Also dominiert der betragsgrößte Eigenwert für große  $k$ .

Sei  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_N|$  die Eigenwerte von  $A$ ,  $0 \neq y \in \mathbb{C}^N$ , mit  $A^* y = \overline{\lambda_1} y$  und sei  $\tilde{z}^{(0)} \in \mathbb{C}^N$  mit  $y^* \tilde{z}^{(0)} \neq 0$ , dann:

$$z^{(k)} := \frac{A^k \tilde{z}^{(0)}}{\|A^k \tilde{z}^{(0)}\|}, \forall k \geq 0$$

so gilt

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \| \|Az^{(k)}\| - |\lambda_1| \| \leq \left( \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \right)^k.$$

Außerdem gibt es genau ein Eigenvektor von  $\lambda_1$  mit  $\|v\| = 1$  und  $\text{sgn}(y^* v) = \text{sgn}(y^* \tilde{z}^{(0)})$  und dann gilt:

$$\limsup_{k \rightarrow \infty} \| z^{(k)} - \text{sgn}(\lambda_1)^k v \| \leq \left( \frac{|\lambda_2|}{|\lambda_1|} \right)^k.$$

Algorithmus:

1. Start: Wähle  $\tilde{z}^{(0)}$ , sodass möglichst  $y^* \tilde{z}^{(0)} \neq 0$
2. Berechne  $z^k := \frac{\tilde{z}^{(k)}}{\|\tilde{z}^{(k)}\|}$
3. Berechne  $\tilde{z}^{(k)} := Az^{(k-1)}$
4. Schluss Eigenwert:  $|\lambda_1| \approx \|Az^{(k)}\|$
5. Schluss Eigenvektor:  $\text{sgn}(\lambda_1)^k z^{(k)} \approx v$

### Definition 1.0.1: Lokale Konvergenz

Ein Iterationsverfahren  $x_{k+1} = \phi(x_k)$ , mit  $\phi(\hat{x}) = \hat{x}$  heißt *lokal Konvergent* gegen  $\hat{x} \in \mathbb{K}$ , falls es eine offene Menge  $U \subset \mathcal{D}(\phi)$  mit  $\hat{x} \in U$  gibt, sodass für jedes  $x^{(0)} \in U$  das Iterationsverfahren definiert ist und gegen  $\hat{x}$  konvergiert.

### Definition 1.0.2: Konvergenz Ordnung

Ein lokal gegen  $\hat{x}$  konvergentes Iterationsverfahren heißt konvergent *von der Ordnung*  $p \geq 1$ , falls es ein  $\rho > 0$  und  $C < \infty$  (mit  $C < 1$  für  $p = 1$ ) gibt mit:

$$\|x_{k+1} - \hat{x}\| \leq C \|x_k - \hat{x}\|^p, \quad \forall k \geq 0 \quad \text{und} \quad \|x_0 - \hat{x}\| < \rho$$

### Example 1.0.1

Das Gesamtschrittverfahren(Banach), Einzelschrittverfahren(Banach) und CG-Verfahren konvergieren mit Ordnung 1.

## 19: Konvergenz von Iterationsverfahren

Falls  $\phi : \mathcal{D}(\phi) \subset \mathbb{K}^N \rightarrow \mathbb{K}^N$  stetig differenzierbar mit  $\hat{x}$  im inneren von  $\mathcal{D}(\phi)$  und es gibt eine Induzierte Matrixnorm mit  $\|\phi'(x)\| < 1$  so ist die Fixpunktiteration lokal konvergent gegen  $\hat{x}$

## 20: Ordnung von Iterationsverfahren

Die Funktion  $\phi : \mathcal{D}(\phi) \subset \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$  sei  $p$ -mal stetig differenzierbar mit  $p \geq 2$  und habe einen Fixpunkt  $\hat{x}$  im inneren von  $\mathcal{D}(\phi)$ . Ist

$$\phi'(x) = \dots = \phi^{(p-1)}(x) = 0$$

so ist die Fixpunktiteration lokal konvergent gegen  $\hat{x}$  mit Konvergenzordnung mindestens  $p$ . Ist zusätzlich  $\phi^{(p)}(\hat{x}) \neq 0$ , ist die Ordnung genau  $p$ .

## 21: Newton-Verfahren

Die Funktion  $f : \mathcal{D}(f) \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  ist differenzierbar und sei  $\hat{x} \in \mathbb{R}$  mit  $f(\hat{x}) = 0$ , dann heißt folgende Vorschrift *Newton-Verfahren*:

$$x_{k+1} := x_k - \frac{f(x_k)}{f'(x_k)}, \forall k \geq 0$$

Falls  $f \in C^3[a, b]$  und  $\hat{x} \in (a, b)$  mit  $f(\hat{x}) = 0, f'(\hat{x}) \neq 0$ . Dann konvergiert das Newton-Verfahren lokal quadratisch, also  $p = 2$ , gegen  $\hat{x}$ .

Sekantenverfahren:

$$x_{k+1} = x_k - \frac{x_k - x_{k-1}}{f(x_k) - f(x_{k-1})} f(x_k)$$

Sei  $-\infty < a < b \leq \infty$  und  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$  stetig mit  $f(a) = 0$  und in  $(a, b)$  stetig differenzierbar  $f'(x) > 0$  für alle  $x \in (a, b)$ . Außerdem gelte

$$f(x) \geq f'(x)(x - a) \forall x \in (a, b).$$

Dann konvergiert das Newton-Verfahren für alle  $x_0 \in (a, b)$  gegen  $a$  und die iterierte ist streng monoton fallend.

## 22: Polynom-Interpolation

Seien  $x_0, \dots, x_N \in \mathbb{R}$  paarweise verschieden. Dann heißen  $w(x) := \prod_{n=0}^N (x - x_n)$  das Knotenpolynom. Falls die Knoten angeordnet sind durch  $x_0 < \dots < x_N$  heißt,

$$l_n(x_k) := \frac{w(x_k)}{(x_k - x_n)w'(x_k)} = \prod_{\substack{m=0 \\ m \neq n}}^N \frac{x_k - x_m}{x_n - x_m} = \delta_{n,k}$$

das Lagrange-Grundpolynom. Dann gibt es für alle  $y_0, \dots, y_N \in \mathbb{K}$ , genau ein Polynom  $p$  von  $\text{Grad} \leq N$  mit

$$p(x_n) = y_n, \forall n = 0, \dots, N.$$

Dieses Polynom ist gegeben durch

$$p(x) = \sum_{n=0}^N y_n l_n(x)$$

Sei nun  $f \in C^{N+1}[a, b]$  und  $p$  das Interpolationspolynom vom  $\text{Grad} \geq N$ . Dann gibt es zu jedem  $x \in [a, b]$  ein  $\xi \in \text{conv}(x, x_0, \dots, x_N)$  (Konvexhülle) mit

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} w(x).$$

Insbesondere ist

$$|f(x) - p(x)| \leq \frac{\max_{\xi \in [a, b]} |f^{(N+1)}(\xi)|}{(N+1)!} |w(x)|.$$

Es gilt:

$$\min_{x_0, \dots, x_N \in [a, b]} \max_{x \in [a, b]} |(x - x_0) \dots (x - x_N)| = \frac{(b - a)^{N+1}}{2 \cdot 4^N}.$$

Die beste Wahl ist dann für die Knoten:

$$x_n = \frac{1}{2} \left( (b - a) \cos \frac{(2n - 1)\pi}{2(N + 1)} + a + b \right), n = 0, \dots, N$$

Sei nun  $K_0, \dots, K_M \in \mathbb{N}$ . Dann gibt es für alle  $(y_m^{(k)})_{\substack{m=0, \dots, M \\ k=0, \dots, K_m-1}}$  genau ein Polynom  $p$  von

$\text{Grad} \geq N := \left( \sum_{m=0}^M K_m \right) - 1$  mit

$$p^{(k)}(x_m) = y_m^{(k)}, \quad \text{für } m = 0, \dots, M, \quad k = 0, \dots, K_m - 1.$$

Falls  $f \in C^{N+1}[a, b]$  und für jedes  $x \in [a, b]$  gibt es ein  $\xi \in \text{conv}(x, x_0, \dots, x_M)$  mit

$$f(x) - p(x) = \frac{f^{(N+1)}(\xi)}{(N+1)!} w(x)$$

wobei

$$w(x) := (x - x_0)^{K_0} \dots (x - x_M)^{K_M}.$$

**Definition 1.0.3: Splines**

Sei  $[a, b]$  Intervall und Knoten  $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ . Sei

$$h_n := x_n - x_{n-1}, n = 1, \dots, N$$

und

$$h := \max_n h_n$$

Ein Spline von Grad  $L$  ist eine Funktion  $s \in C^{L-1}[a, b]$ , die auf jeden Intervall  $[x_{n-1}, x_n]$  mit einem Polynom von Grad  $\geq L$  übereinstimmt. Die Menge aller Splines vom Grad  $L$  wird mit  $S_L$  oder  $S_{L,\Delta}$  mit  $\Delta = \{x_0, \dots, x_N\}$  bezeichnet.

$S_L$  ist ein  $(N + L)$ -dimensionaler Vektorraum.

**Definition 1.0.4:  $L_2$  Norm**

$$\|f\|_{L_2(a,b)} := \left( \int_a^b |f(x)|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

**Definition 1.0.5: Sobolevraum**

Der Sobolevraum  $H^1(a, b)$  besteht aus allen Funktionen  $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{K}$  für die es ein  $c \in \mathbb{K}$  und  $g \in L^2(a, b)$  gibt mit

$$f(x) = c + \int_a^x g(t) dt \quad \forall x \in [a, b]$$

Periodischer Sobolevraum:

$$H_{\text{per}}^1 := \{f \in H^1(0, 2\pi) : f(0) = f(2\pi)\}$$

Für beliebige  $s > 0$  kann dieser charakterisiert werden durch:

$$H_{\text{per}}^s(0, 2\pi) = \left\{ f \in L^2(0, 2\pi) : \sum_{k \in \mathbb{Z}} (|k|^{2s} + 1) |\hat{f}_k|^2 < \infty \right\}$$

Mit Norm:

$$\|f\|_{H_{\text{per}}^s(0, 2\pi)} := \left( 2\pi \sum_{k \in \mathbb{Z}} (|k|^{2s} + 1) |\hat{f}_k|^2 \right)^{\frac{1}{2}}$$

## 23: Lineare Splines

Hutfunktionen:

$$\Lambda_0(x) = \begin{cases} \frac{x-x_1}{x_0-x_1} & \text{falls } x_0 \leq x \leq x_1, \\ 0 & \text{falls } x_1 \leq x \leq x_N \end{cases}$$

$$\Lambda_n(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_0 \leq x \leq x_{n-1}, \\ \frac{x-x_{n-1}}{x_n-x_{n-1}} & \text{falls } x_{n-1} \leq x \leq x_n \\ \frac{x-x_{n+1}}{x_n-x_{n+1}} & \text{falls } x_n \leq x \leq x_{n+1}, \\ 0 & \text{falls } x_{n+1} \leq x \leq x_N \end{cases}$$

$$\Lambda_N(x) = \begin{cases} 0 & \text{falls } x_0 \leq x \leq x_{N-1}, \\ \frac{x-x_{N-1}}{x_N-x_{N-1}} & \text{falls } x_{N-1} \leq x \leq x_N \end{cases}$$

Für alle  $y_0, \dots, y_N \in \mathbb{K}$  ist

$$s = \sum_{n=0}^N y_n \Lambda_n$$

der eindeutig bestimmte lineare Spline mit

$$s(x_n) = y_n, n = 0, \dots, N$$

Intuition:  $\Lambda_n(x_m) = \delta_{n,m}, n, m = 0, \dots, N$

Sei nun  $f \in C^2[a, b]$ , dann gilt:

$$\max_{x \in [a, b]} |s(x) - f(x)| \leq \frac{h^2}{8} \max_{\xi \in [a, b]} |f''(\xi)|$$

Sei nun  $f \in H^1(a, b)$ , dann gilt

$$\|s - f\|_{L_2(a, b)} \leq \frac{h}{\pi} \|f'\|_{L_2(a, b)}$$

und für  $f \in H^2(a, b)$

$$\|s - f\|_{L_2(a, b)} \leq \frac{h^2}{\pi^2} \|f''\|_{L_2(a, b)} \quad \text{und} \quad \|s' - f'\|_{L_2(a, b)} \leq \frac{h}{\pi} \|f''\|_{L_2(a, b)}$$

Hierbei wird die optimale konstante saturiert durch

$$f(x) = \sin \frac{\pi(x-a)}{b-a}.$$



## 24: Kubische Splines

Brachte Polynome Grad  $\leq 3$  zwischen den Knoten. Sei  $x_0, \dots, x_N$  und  $y_0, \dots, y_N$  dann

$$s(x_n) = y_n, \forall n = 1, \dots, N$$

Wir haben nicht genug Informationen, da  $S_3$  Dimension  $N + 3$  und wir haben nur  $N + 1$  Werte. Setze:

$$s_n := s(x_n) \quad s'_n := s'(x_n) \quad \gamma_n := s''(x_n) \quad n = 0, \dots, N$$

Daraus ergibt sich folgendes Gleichungssystem:

In Matrixschreibweise:

$$\frac{1}{6} \begin{pmatrix} h_1 & 2(h_1 + h_2) & h_2 & & & \\ & h_2 & 2(h_2 + h_3) & h_3 & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & h_{N-1} & 2(h_{N-1} + h_N) & h_N \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \gamma_0 \\ \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-1} \end{pmatrix},$$

wobei wir gesetzt haben

$$\begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_{N-1} \end{pmatrix} := - \begin{pmatrix} -\frac{1}{h_1} & \frac{1}{h_1} + \frac{1}{h_2} & -\frac{1}{h_2} & & & \\ & -\frac{1}{h_2} & \frac{1}{h_2} + \frac{1}{h_3} & -\frac{1}{h_3} & & \\ & & \ddots & \ddots & \ddots & \\ & & & -\frac{1}{h_{N-1}} & \frac{1}{h_{N-1}} + \frac{1}{h_N} & -\frac{1}{h_N} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} s_0 \\ s_1 \\ \vdots \\ s_N \end{pmatrix}$$

Die obigen Matrizen haben die Dimension  $(n - 1) \times (n + 1)$ , also nicht invertierbar. Aber mit den Randbedingungen:

- $s''(a) = s''(b) = 0$  natürliche Splines
- $s'(a) = y'_0$  und  $s'(b) = y'_N$  vollständige kubische Splines

Mit der jeweiligen Bedingung sind obigen Matrizen Regulär, also können die Polynome des Splines bestimmt werden. Außerdem ist obiges LGS gut konditioniert:

$$\text{cond}_2(\dots) \leq 3 \frac{\max h_n}{\min h_n}$$

für äquidistante Knoten folgt

$$\text{cond}_2(\dots) \leq 3$$

Falls  $f \in C^4[a, b]$  dann ist bzgl Maximumsnorm:

$$\max_{x \in [a, b]} |s(x) - f(x)| \leq \frac{5}{386} h^4 \max_{\xi \in [a, b]} |f^{(4)}(\xi)|$$

Falls  $f \in H^4(a, b)$  dann ist bzgl  $L_2$ -Norm:

$$\|s - f\|_{L_2(a, b)} \leq \frac{h^4}{\pi^4} \|f^{(4)}\|_{L_2(a, b)}, \quad \|s' - f'\|_{L_2(a, b)} \leq \frac{h^3}{\pi^3} \|f^{(4)}\|_{L_2(a, b)}, \quad \|s'' - f''\|_{L_2(a, b)} \leq \frac{h^2}{\pi^2} \|f^{(4)}\|_{L_2(a, b)}$$

## 25: Fouriertransformation

Fouriertransformation:

Für  $f \in L^1(0, 2\pi)$  heißen die Zahlen

$$\hat{f}_k := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{-ik\theta} f(\theta) d\theta$$

die Fourierkoeffizienten von  $f$  und die Abbildung  $f \mapsto (\hat{f})_{k \in \mathbb{Z}}$  heißt Fouriertransformation.

Sei nun  $\mathcal{F}_N : \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{C}$  die diskrete Fouriertransformation. Für einen Vektor  $f = (f_0, \dots, f_{N-1})^T \in \mathbb{C}$  bezeichnet  $\mathcal{F}f = ((\mathcal{F}_N f)_0, \dots, (\mathcal{F}_N f)_{N-1})^T \in \mathbb{C}$  Vektor mit Komponenten:

$$(\mathcal{F}_N f)_k := \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} f_n e^{-2\pi i \frac{kn}{N}}, k = 0, \dots, N-1.$$

Schnelle Fouriertransformation:

Sei  $N = 2M$  gerade,  $\omega_N := e^{\frac{2\pi i}{N}}$ ,  $\omega_M := w_N^2 = e^{\frac{2\pi i}{M}}$ . Für  $f = (f_0, \dots, f_{N-1})^T \in \mathbb{C}$  setze  $f^{(+)}, f^{(-)} \in \mathbb{C}$ :

$$f^{(+)}_m := f_m + f_{m+M}, \quad f^{(-)}_m := (f_m - f_{m+M})\omega_N^{-m}, \quad \forall m = 0, \dots, M-1.$$

Dann ist

$$(\mathcal{F}_N f)_{2m} = \frac{1}{2} (\mathcal{F} f^{(+)}_m), \quad (\mathcal{F}_N f)_{2m+1} = \frac{1}{2} (\mathcal{F} f^{(-)}_m) \quad \forall m = 0, \dots, M-1.$$

Sei  $f \in L^2(0, 2\pi)$ . Dann ist

$$\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{f}|^2 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(\theta)|^2 d\theta < \infty$$

und  $\sum_{k=-K}^K \hat{f}_k e^{ik\theta}$  konvergiert für  $K \rightarrow \infty$  in  $L^2$  gegen  $f$ .

Sei andersherum  $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{Z}}$  eine Folge mit  $\sum_{k \in \mathbb{Z}} |\alpha_k|^2 < \infty$ . Dann konvergiert  $\sum_{k=-K}^K \alpha_k e^{ik\theta}$  für  $K \rightarrow \infty$  in  $L^2$  gegen eine Funktion  $f$  und es gilt  $\hat{f}_k = \alpha_k, \forall k$

Sei  $f \in H^s_{\text{per}(0, 2\pi)}$  mit  $s < \frac{1}{2}$  dann konvergiert die Fourierreihe von  $f$  ( $\sum_{k=-K}^K \hat{f}_k e^{ik\theta}$ ) gleichmäßig in  $[0, 2\pi]$  gegen  $f$  und  $f$  ist stetig.

## 26: Trigonometrische Interpolation

Sei O.B.d.A:  $L = 2\pi$ ,  $0 \leq \theta_0 < \theta_1 < \dots < \theta_{N-1} \leq L$  und  $y_0, \dots, y_{N-1}$ . Zur Vereinfachung äquidistante Knoten:

$$\theta_n = \frac{2\pi n}{N}$$

Funktion aus:

$$\mathcal{T}_N := \left\{ \sum_{-\frac{N}{2}+1 \leq k \leq \frac{N}{2}} \alpha_k e^{ik\theta} : \alpha_k \in \mathbb{C}, \forall -\frac{N}{2}+1 \leq k \leq \frac{N}{2} \right\}$$

Bei  $N$  ungerade, gilt für die Indexmenge:

$$-\frac{N-1}{2} \leq k \leq \frac{N-1}{2}$$

$t \in \mathcal{T}_N$  das das Interpolationsproblem löst ist gegeben durch:

$$t(\theta) = \sum_{-\frac{N}{2}+1 \leq k \leq \frac{N}{2}} \alpha_k e^{ik\theta}$$

mit

$$\alpha_k = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} y_n e^{ik\theta_n}, \forall -\frac{N}{2}+1 \leq k \leq \frac{N}{2}$$

Fehlerabschätzung:

Sei  $f \in H_{\text{per}}^s(0, 2\pi)$  mit  $s > \frac{1}{2}$  und  $t_N \in \mathcal{T}_N$  das interpolierende trigonometrisches Polynom. Dann gilt:

$$\|t_N - f\|_{L^2(0, 2\pi)} \leq 2^s \sqrt{1 + c_s} N^{-s} \|f\|_{H_{\text{per}}^s(0, 2\pi)},$$

mit  $c_s := 2 \sum_{l=1}^{\infty} (2l-1)^{-2s}$

## Definition 1.0.6: Maximierende Alternante

Sei  $g \in C[a, b]$  reell. Eine maximierende Alternante der Länge  $M$  ist eine Folge  $a \leq x_0 < \dots < x_{M-1} \leq b$  mit  $|g(x_m)| = \|g\|_{\infty}$  für  $m = 0, \dots, M-1$  und

$$g(x_m) = -g(x_{m-1}) \text{ für } m = 0, \dots, M-1$$

## 27: Tschebyscheff Polynome

Erster Art:

Für  $n \in \mathbb{N}_0$  und  $x \in [-1, 1]$ , sei

$$T_N(x) := \cos(N \arccos(x))$$

$T_N$  ist Polynom von Grad  $N$  und es gilt:

$$T_0(x) = 1, \quad T_1(x) = x$$

und für  $N \geq 1$

$$T_{N+1}(x) = 2xT_N(x) - T_{N-1}(x).$$

Der Koeffizient des führenden Terms von  $T_N$  gleich  $2^{N-1}$ .

### Definition 1.0.7: Skalarprodukt

Sei  $X$  ein  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $f, g \in X$  beliebig und  $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ . Dann heißt die Abbildung  $\langle \cdot, \cdot \rangle : X \times X \rightarrow \mathbb{K}$  Skalarprodukt, mit

1.  $\langle f, g \rangle = \overline{\langle g, f \rangle}$
2.  $\langle f, \alpha g + \beta h \rangle = \alpha \langle f, g \rangle + \beta \langle f, h \rangle$
3.  $\langle f, f \rangle > 0$  für  $f \neq 0$

### Definition 1.0.8: Orthonormalsystem

Sei  $X$  ein Innenproduktraum, dann heißen  $\phi_1, \dots, \phi_N \in X$  ein Orthonormalsystem falls

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \delta_{n,m} \quad \forall n, m = 1, \dots, N$$

Das ist automatisch linear unabhängig in  $X$ .

## 28: Approximationstheorie

Sei  $f \in C[a, b]$ , dann können wir  $f$  beliebig gut mit den Bernsteinpolynomen approximieren, mit langsamer Konvergenzgeschwindigkeit.

$$(B_N f)(x) := \sum_{n=0}^N f\left(\frac{n}{N}\right) \binom{N}{n} x^n (1-x)^{(N-n)}$$

Das Problem der Bestapproximation kann wie folgt ausgedrückt werden:  
Sei  $X$  ein normierter  $\mathbb{K}$ -Vektorraum,  $x \in X$  und  $V \subset X$

$$\inf_{v \in V} \|v - x\| =: E_x(V)$$

Tscherbyschof Alternanten Satz:

Sei  $-\infty < a < b < \infty$ ,  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $f \in C[a, b]$  reel und sei  $p \in \mathcal{P}_N$  reel mit  $f \neq p$ . Dann sind äquivalent:

- $p$  ist eine Bestapproximation in  $\mathcal{P}_N$  an  $f$  bzgl.  $\|\cdot\|_\infty$ .
- $p - f$  besitzt eine Maximierende Alternante der Länge  $N + 2$

Insbesondere ist die Bestapproximation in diesem Setting eindeutig.  
Die Bestapproximation im Intervall  $[-1, 1]$  von  $x^{N+1}$  bzgl. der  $\|\cdot\|_\infty$  ist:

$$p_*(x) = \frac{1}{2^N} T_{N+1}(x)$$

und es folgt:

$$E_{x^{N+1}}(\mathcal{P}_N) = \min_{p \in \mathcal{P}_N} \max_{x \in [-1, 1]} |x^{N+1} - p(x)| = \frac{1}{2^N}$$

Sei  $\phi_1, \dots, \phi_N$  ein Orthonormalsystem (ONS) und  $X_N := \text{span}(\phi_1, \dots, \phi_N)$ , dann ist:

$$f_N := \sum_{n=1}^N \langle \phi_n, f \rangle \phi_n$$

die Bestapproximation an  $f$  aus  $X_N$