universidade de aveiro

departamento de física

MECÂNICA E CAMPO ELETROMAGNÉTICO

ano letivo 2024/2025

Capítulo 1. Fundamentos de Mecânica Clássica

1.1 Cinemática da partícula

1. A posição de um objeto que se move segundo uma linha reta é dada por:

$$x = 3{,}0t - 4{,}0t^2 + t^3$$

em que x é expresso em metros e t em segundos.

a) Calcule a posição do objeto para *t* = 1, 2, 3 e 4 s.

b) Qual o espaço percorrido entre *t* = 0 e *t* = 4 s?

c) Qual a velocidade média no intervalo de tempo *t* = 2 e *t* = 4 s?

d) Determine a expressão para a velocidade em função do tempo.

2. Um carro parte do repouso com uma aceleração de 4 m.s^{-2} durante 4 s. Durante os 10 s seguintes, move-se com movimento uniforme. Em seguida, aplicam-se os travões e o carro trava com aceleração de 8 m.s^{-2} até parar.

a) Represente graficamente a velocidade em função do tempo.

b) Determine a distância percorrida, desde a partida.

3. As coordenadas de um corpo são $x = 2sen(\omega t)$ e $y = 2cos(\omega t)$, onde x e y estão em centímetros.

a) Estabeleça a equação da trajetória, em coordenadas cartesianas.

b) Determine o valor da velocidade, num instante qualquer.

c) Determine as componentes tangencial e normal da aceleração, num instante qualquer.

d) Identifique o tipo de movimento descrito pelas equações.

4. Confirme a expressão da aceleração centrípeta por análise dimensional.

5. A aceleração de um corpo que se move ao longo de uma linha reta é dada por:

$$\vec{a} = (4 - t^2)\ \hat{\imath}$$

em que as unidades da *a* são m.s^{-2} e de ***t*** são segundos. Determinar a velocidade e a posição em função do tempo, sabendo que para $t = 3$ s, temos $v = 2$ m.s^{-1} e $x = 9$ m.

6. Dois projéteis são lançados, simultaneamente, um para cima na direção vertical, e outro numa direção que faz um ângulo de 30º com a horizontal. Determine a relação das velocidades iniciais para que, quando o primeiro atinja o solo, o segundo atinja a altura máxima. Verifique que esta relação se reduz a metade se os dois projéteis atingirem simultaneamente o solo.

7. Um projétil é lançado com uma velocidade de 100 m.s^{-1}, fazendo um ângulo de 60º com a horizontal. Calcule:

a) o alcance do projétil.

b) a altura máxima.

c) a velocidade e a altura 10 s, após o lançamento.

8. Determine o valor da velocidade e a aceleração centrípeta da Terra no seu movimento em torno do Sol. O raio da órbita da Terra é de 1,49x10^{11} m.

9. Um corpo desloca-se num arco de circunferência de raio *r*=1,0 m no plano *OXY*, *segundo*

$$s(t) = 2t - t^2$$

Em *t*=0 encontra-se na origem (0,0) e o sentido positivo de *s(t)* é o sentido retrógrado.

Determine, usando coordenadas cartesianas:

a) o vetor de posição da partícula em qualquer instante.

b) o vetor velocidade em qualquer instante.

c) o vetor aceleração em qualquer instante.

d) as componentes, tangencial e normal da aceleração em t=0,5 s.

e) a distância percorrida até t=2 s. Qual é a posição?

10. Um corpo descreve uma trajetória circular de raio igual a 2 m, com velocidade angular

$$w = 3t + 1$$

onde t é expresso em segundos.

a) Calcule o vetor aceleração do corpo, no instante t = 1 s (valor e ângulo do vetor com a tangente à circunferência).

b) Determine a equação que descreve o espaço percorrido, em função do tempo.

Soluções de I.1.1

1– a) $\vec{x}(1) = \vec{0}$ m; $\vec{x}(2) = -2\vec{e}_x$ m; $\vec{x}(3) = \vec{0}$ m; $\vec{x}(4) = 12\,\vec{e}_x$ m; b) d = 17,5 m;

c) $\|\vec{v}_{med}\| = 7$ m.s^{-1} d) $\vec{v} = (3{,}0 - 8{,}0t + 3t2)\vec{e}_x$ m.s^{-1}

2 – b) d = 208 m

3 – a) $x^2+y^2=4$; b) 2 ω cm.s^{-1}; c) $a_T = 0$, $a_N = 2\omega^2$ cm.s^{-2}

4 – $a_N=v^2/r$: $[L][T]^{-2}=([L][T]^{-1})^2/[L]$

5 – $\vec{v} = (-1 + 4t - t^3/3)\hat{\imath}$ m.s^{-1};

$\vec{x} = (0{,}75 - t + 2t^2 - t^4/12)\vec{e}_x$ m

6 – $\|\vec{v}_{01}\| / \|\vec{v}_{02}\| = 1/4$;

$\|\vec{v}0_1\| / \|\vec{v}_{02}\| = 1/2$

7– a) x ($2t_h$) = 884 m; b) h = 383 m; c) v(10) = 51,3 m.s^{-1}; h(10) = 376 m

8 – $\|\vec{v}\| = 2{,}97\text{x}10^4$ m.s^{-1}; $a_c = 5{,}9\text{x}10^{-3}$ m.s^{-2}

9 – a) $\vec{r} = -1 + cos(2t-t^2)\vec{e}_x + sin(2t-t^2)\vec{e}_y$; b) $\vec{v}_x = -(2-2t)sin(2t - t^2)\vec{e}_x$;

$\vec{v}_y = (2-2t)cos(2t-t^2)\vec{e}_y$; $\|\vec{v}\| = 2-2t$

c) $\vec{a}_x = -(2-2t)^2cos(2t-t^2) + 2\,sin(2t-t^2)\vec{e}_x$;

$\vec{a}_y = -(2-2\text{t})^2\text{sin}(2\text{t} - t^2) - 2\,\text{cos}(2\text{t} - t^2)\,\vec{e}_y$

d) $\vec{a}_t$= -2$\hat{u}_t$ m.s^{-2}; $\vec{a}_N$=1 $\hat{u}_n$ m.s^{-2} e) d=2m; s=0; ponto (0,0)

10 – a) $\vec{a}(1) = 6\,\hat{u}_t + 32\,\hat{u}_n$; $\|\vec{a}(1)\|$ = 32,6 m/s^2; ϕ = 79,4º ;

b) s(t) = 2t + 3t^2

1. A posição de um objeto que se move segundo uma linha reta é dada por:

$$x = 3{,}0t - 4{,}0t^2 + t^3$$

em que x é expresso em metros e t em segundos.

a) Calcule a posição do objeto para t = 1, 2, 3 e 4 s.

b) Qual o espaço percorrido entre t = 0 e t = 4 s?

c) Qual a velocidade média no intervalo de tempo t = 2 e t = 4 s?

d) Determine a expressão para a velocidade em função do tempo.

a) $x(1) = 3{,}0 \times (1) - 4{,}0 \times (1)^2 + (1)^3$
$= 0{,}0\ m$

$x(2) = 3{,}0 \times (2) - 4{,}0 \times (2)^2 + (2)^3$
$= -2{,}0\ m$

$x(3) = 3{,}0 \times (3) - 4{,}0 \times (3)^2 + (3)^3$
$= 0{,}0\ m$

$x(4) = 3{,}0 \times (4) - 4{,}0 \times (4)^2 + (4)^3$
$= 12{,}0\ m$

---

b) $v(t) = 3 - 8t + 3t^2$

$0 = 3 - 8t + 3t^2 \Leftrightarrow t = 0{,}45 \vee t = 2{,}27$

$x(0{,}45) = 0{,}63 \mid x(2{,}21) = -2{,}11$

$|x(0{,}45) - x(0)|$
$+ |x(2{,}21) - x(0{,}45)|$
$+ |x(4) - x(2{,}21)|$
$\approx 17{,}5\ m$

---

c) $\vec{v}_{media} = \dfrac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \dfrac{12 - (-2)}{4 - 2} = 7\ m/s$

---

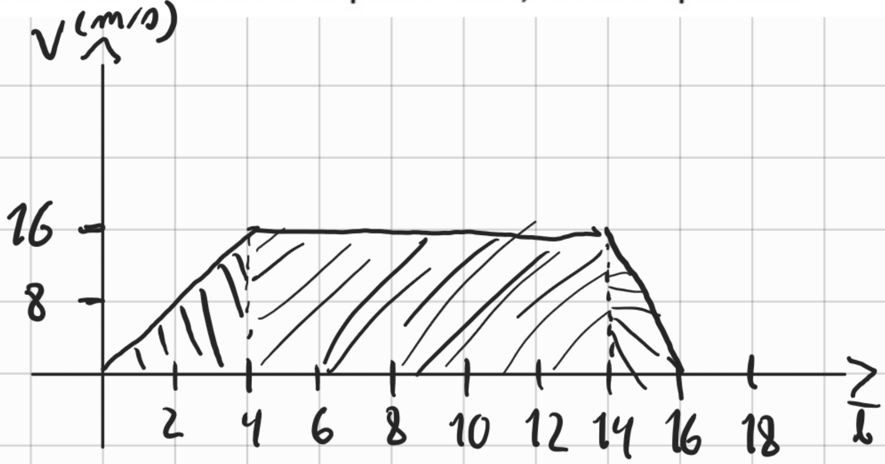
d) $v(t) = \dfrac{dr}{dt} = 3{,}0 - 8{,}0t + 3t^2\ \hat{\imath}\ (m/s)$

2. Um carro parte do repouso com uma aceleração de 4 $m.s^{-2}$ durante 4 s. Durante os 10 s seguintes, move-se com movimento uniforme. Em seguida, aplicam-se os travões e o carro trava com aceleração de 8 $m.s^{-2}$ até parar.

a) Represente graficamente a velocidade em função do tempo.

b) Determine a distância percorrida, desde a partida.

a)



b)

1

$$\vec{v}(t) = \int \vec{a} = 4t \;,\; 0 \leq t \leq 4$$
$$= 16 \;,\; 4 < t \leq 14$$
$$= -8t + 16 \;,\; t > 14$$

$$\vec{r}(t) = \int \vec{v} = 2t^2 \;,\; 0 \leq t \leq 4$$
$$= 16t \;,\; 4 < t \leq 14$$
$$= -4t^2 + 16t \;,\; t > 14$$

$$d = 2\cdot(4-0)^2 + 16\cdot(14-4) + (-4\cdot(2)^2 + 16\cdot 2)$$
$$= 32 + 160 - 16 + 32$$
$$= 208\,m$$

$$d = \frac{4 \cdot 16}{2} + (14-4)\cdot 16 + \frac{(16-14)\cdot 16}{2}$$
$$= 208\,m$$

(area do gráfico) 2

3. As coordenadas de um corpo são $x = 2sen(\omega t)$ e $y = 2cos(\omega t)$, onde x e y estão em centímetros.

a) Estabeleça a equação da trajetória, em coordenadas cartesianas.

b) Determine o valor da velocidade, num instante qualquer.

c) Determine as componentes tangencial e normal da aceleração, num instante qualquer.

d) Identifique o tipo de movimento descrito pelas equações.

a) $x = 2\sin(\omega t)$

$y = 2\cos(\omega t)$

$\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t) = 1$

$\Leftrightarrow \left(\frac{x}{2}\right)^2 + \left(\frac{y}{2}\right)^2 = 1 \Leftrightarrow \frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} = 1$

$\Leftrightarrow x^2 + y^2 = 4$

A trajetória é uma circunferência de raio 2 cm, centrada na origem.

b) $\vec{V}(t) = V_x \hat{i} + V_y \hat{j}$

$V_x = \frac{dx}{dt} = \frac{d(2\sin(\omega t))}{dt} = 2\omega\cos(\omega t)$

$V_y = \frac{dy}{dt} = \frac{d(2\cos(\omega t))}{dt} = -2\omega\sin(\omega t)$

$\vec{V}(t) = 2\omega\cos(\omega t)\,\hat{i} - 2\omega\sin(\omega t)\,\hat{j}$ $(cm.s^{-1})$

$V = \sqrt{(2\omega\cos(\omega t))^2 + (-2\omega\sin(\omega t))^2}$

$\Leftrightarrow V = \sqrt{4\omega^2(\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t))}$

$\Leftrightarrow V = \sqrt{4\omega^2}$

$\Leftrightarrow V = 2\omega \ cm.s^{-1}$

c) $a = a_t + a_c$

Como a velocidade é constante ($V = 2\omega$), $a_t = 0$

$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a}_x \hat{i} + \vec{a}_y \hat{j} = -2\omega^2 \sin(\omega t)\hat{i} - 2\omega^2 \cos(\omega t)\hat{j}$$

$a = 0 + a_c$

$\Leftrightarrow a = a_c$

$$\boxed{\begin{aligned} a_c &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \quad (1) \\ &= \sqrt{(-2\omega^2 \sin(\omega t))^2 + (-2\omega^2 \cos(\omega t))^2} \\ &= \sqrt{(-2\omega^2)^2 . (\sin^2(\omega t) + \cos^2(\omega t))} \\ &= 2\omega^2 \ cm.s^{-2} \end{aligned}}$$

$$\boxed{a_c = \frac{v^2}{r} = \frac{(2\omega)^2}{2} = \frac{4\omega^2}{2} = 2\omega^2 \ cm.s^{-2} \quad (2)}$$

d) O movimento descrito é circular uniforme:

- A trajetória é uma circunferência ($x^2 + y^2 = 4$)
- A velocidade tem o módulo constante ($V = 2\omega$)

4. Confirme a expressão da aceleração centrípeta por análise dimensional.

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$[v] = [L][T]^{-1}$$

$$[r] = [L]$$

$$\left[\frac{v^2}{r}\right] = \frac{([L][T]^{-1})^2}{[L]} = [L] \cdot [T]^{-2}$$

5. A aceleração de um corpo que se move ao longo de uma linha reta é dada por:

$$\vec{a} = (4 - t^2)\,\hat{\imath}$$

em que as unidades da *a* são m.s^{-2} e de ***t*** são segundos. Determinar a velocidade e a posição em função do tempo, sabendo que para $t = 3$ s, temos $v = 2$ m.s^{-1} e $x = 9$ m.

$$\vec{v} = \int \vec{a} = 4t - \frac{t^3}{3} + C$$

$$v(3) = 4 \times 3 - \frac{3^3}{3} + C$$

$$\Leftrightarrow 2 = 12 - 9 + C$$

$$\Leftrightarrow C = -1$$

$$\vec{v} = -1 + 4t - \frac{t^3}{3}\,\hat{\imath} \quad (m.s^{-1})$$

$$\vec{r} = \int \vec{v} = -t + 2t^2 - \frac{t^4}{12} + C$$

$$r(3) = -3 + 2\cdot(3)^2 - \frac{3^4}{12} + C$$

$$\Leftrightarrow 9 = -3 + 18 - \frac{27}{4} + C$$

$$\Leftrightarrow -6 + \frac{27}{4} = C \Leftrightarrow C = \frac{3}{4}$$

$$\vec{r} = \frac{3}{4} - t + 2t^2 - \frac{t^4}{12}\ \hat{\imath}\ (m)$$

6. Dois projéteis são lançados, simultaneamente, um para cima na direção vertical, e outro numa direção que faz um ângulo de 30° com a horizontal. Determine a relação das velocidades iniciais para que, quando o primeiro atinja o solo, o segundo atinja a altura máxima. Verifique que esta relação se reduz a metade se os dois projéteis atingirem simultaneamente o solo.

Projetil 1 (vertical):

$$t_{voo} = 2 \times t_{y\,max}$$

$$V_y(t) = V_0 - g t$$

altura máxima

$$0 = V_{i_1} - g t \Leftrightarrow t = \frac{V_{i1}}{g}$$

$$t_{voo} = 2 \cdot \frac{V_{i1}}{g}$$

Projetil 2 (30° com horizontal)

$T_{y\,max} = ?$

$V_y(T) = V_{i_2} \cdot \sin 30 - gT$

$0 = V_{i_2} \cdot \sin 30 - gT$

$\Leftrightarrow T = \dfrac{V_{i_2} \cdot \sin 30}{g}$

$\dfrac{2 V_{i1}}{g} = \dfrac{V_{i_2} \cdot \sin 30}{g} \Leftrightarrow 2 V_{i1} = V_{i_2}/2$

$\Leftrightarrow \dfrac{V_{i1}}{V_{i_2}} = \dfrac{1}{4}$

Para atingirem o solo ao mesmo tempo:

$\dfrac{2 V_{i1}}{g} = \dfrac{2 V_{i2} \cdot \sin 30}{g} \Leftrightarrow 2 V_{i1} = V_{i2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{V_{i1}}{V_{i2}} = \dfrac{1}{2}$

7. Um projétil é lançado com uma velocidade de 100 m.s-1, fazendo um ângulo de 60° com a horizontal. Calcule:

a) o alcance do projétil.

b) a altura máxima.

c) a velocidade e a altura 10 s, após o lançamento.

$$V_i = 100 \ m.s^{-1}$$

$$\vec{V_x} = 100 . \cos 60 = 50 \ \hat{i} \ (m.s^{-1})$$

$$\vec{V_y} = 100 . \sin 60 - gT \ \hat{j} \ (m.s^{-1})$$

a) $$\vec{r} = \int \vec{v} = 50T \ \hat{i} + \left(100 . \sin 60 . t - \frac{gT^2}{2}\right) \hat{j}$$

$$T_{voo} = ?$$

$$r_y = 0 \iff 100 . \sin 60 . T - \frac{gT^2}{2} = 0$$

$$\iff \frac{200 . \sin 60}{g} = T$$

$$\iff T \simeq 17.67 \ s$$

$$\text{alcance} = r_x(17.32) = 50 \times 17,67$$
$$= 883,5 \ m$$

b) $T_{\text{altura máxima}} = T_{\text{voo}}/2$

$= 8,66\ s$

$$r_y(8,66) = 100 \cdot \sin 60 \cdot 8,66 - \frac{9,8 \cdot 8,66^2}{2}$$

$$\simeq 382,5\ m$$

c) $$r_y(10) \simeq 100 \cdot \sin 60 \cdot 10 - \frac{9,8 \cdot 10^2}{2}$$

$$\simeq 376\ m$$

$$V(10) = \sqrt{V_x^2 + V_y^2}$$

$$= \sqrt{50^2 + (100 \cdot \sin 60 - 9,8 \cdot 10)^2}$$

$$= 51,3\ m \cdot s^{-1}$$

8. Determine o valor da velocidade e a aceleração centrípeta da Terra no seu movimento em torno do Sol. O raio da órbita da Terra é de $1{,}49 \times 10^{11}$ m.

$$V = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \cdot 1,49 \cdot 10^{11}}{31\,557\,600} \simeq 29,7 \cdot 10^3\ m \cdot s^{-1}$$

$$T = 365,25 \times 24 \times 60 \times 60$$
$$= 31\,557\,600\ s$$

$$a_c = \frac{V^2}{r} = \frac{(29,7 \cdot 10^3)^2}{1,49 \cdot 10^{11}} \simeq 5,9 \cdot 10^{-3}\ m \cdot s^{-2}$$

9. Um corpo desloca-se num arco de circunferência de raio r=1,0 m no plano *OXY*, *segundo*

$$s(t) = 2t - t^2$$

Em t=0 encontra-se na origem (0,0) e o sentido positivo de $s(t)$ é o sentido retrógrado.

Determine, usando coordenadas cartesianas:

a) o vetor de posição da partícula em qualquer instante.

b) o vetor velocidade em qualquer instante.

c) o vetor aceleração em qualquer instante.

d) as componentes, tangencial e normal da aceleração em t=0,5 s.

e) a distância percorrida até t=2 s. Qual é a posição?

a) $s = \overset{1}{r}\,\theta$

$\Leftrightarrow \theta = s = 2t - t^2$

$x(0) = r \cdot \cos(2t - t^2) + C$

$\Leftrightarrow 0 = 1 \cdot 1 + C$

$\Leftrightarrow C = -1$

$x(t) = -1 + \cos(2t - t^2)$

$y(0) = r \cdot \sin(2t - t^2) + C$

$\Leftrightarrow 0 = 1 \cdot 0 + C$

$\Leftrightarrow C = 0$

$y(t) = \sin(2t - t^2)$

$\vec{r} = (-1 + \cos(2t - t^2))\,\hat{i} + \sin(2t - t^2)\,\hat{j}$

b) $\vec{v} = \dfrac{d\vec{r}}{dt} = -(2 - 2t)\sin(2t - t^2)\,\hat{i} + (2 - 2t)\cos(2t - t^2)\,\hat{j}$

c) $\vec{a} = \dfrac{d\vec{v}}{dt} = -(2 - 2t)^2\cos(2t - t^2) + 2\sin(2t - t^2)\,\hat{i}$

$- (2 - 2t)^2\sin(2t - t^2) - 2\cos(2t - t^2)\,\hat{j}$

d) $a(t) = a_c + a_t$

$$a_c = \frac{v^2}{r}$$

$$v = \sqrt{\left(-(2-2t)\sin(2t-t^2)\right)^2 + (2-2t)\cos(2t-t^2)}$$
$$= \sqrt{(2-2t)^2\left(\sin^2(2t-t^2) + \cos^2(2t-t^2)\right)}$$
$$= 2-2t$$

$$v(0{,}5) = 1$$

$$a_c = \frac{1^2}{1} = 1\,\hat{u}_n$$

$$a_t = \frac{d\|\vec{v}\|}{dt} = -2\,\hat{u}_t$$

e) $$v_s = \frac{ds}{dt} = 2-2t$$

$$v = 0$$
$$\Leftrightarrow 2-2t = 0$$
$$\Leftrightarrow t = 1$$

$$\int_0^2 |v| = \int_0^1 |v| + \int_1^2 |v|$$

$$= |2\times1-1^2-0| + |2\times2-2^2-2\times1+1^2|$$

$$= 1 + 1 = 2\ m$$

$$x(2) = -1 + \cos(2 \times 2 - 2^2) = -1 + 1 = 0$$

$$y(2) = \sin(2 \times 2 - 2^2) = 0$$

$$\vec{r}(2) = (0,0)$$

10. Um corpo descreve uma trajetória circular de raio igual a 2 m, com velocidade angular

$$w = 3t + 1$$

onde *t* é expresso em segundos.

a) Calcule o vetor aceleração do corpo, no instante *t* = 1 s (valor e ângulo do vetor com a tangente à circunferência).

b) Determine a equação que descreve o espaço percorrido, em função do tempo.

$$\vec{v} = r\,\omega$$

$$a_T = \frac{d(\omega r)}{dt} = r \cdot \frac{d\omega}{dt} = r \cdot 3$$

$$a_T = 6\,\hat{u}_T$$

$$a_c = r\,\omega^2$$

$$a_c(1) = 2 \times (3 \times 1 + 1)^2$$
$$= 2 \times 4^2$$
$$= 32\,\hat{u}_n$$

$$\vec{a}(1) = 6\,\hat{u}_T + 32\,\hat{u}_n$$

$$|\vec{a}(1)| = \sqrt{6^2 + 32^2}$$
$$= 32{,}56\ m.s^{-2}$$

O angulo (θ) com a Tangente

$$\tan\theta = \frac{a_c}{a_T}$$

$$\Leftrightarrow \tan\theta = \frac{32}{6}$$

$$\Leftrightarrow \theta = \tan^{-1}\left(\frac{16}{3}\right)$$

$$\Leftrightarrow \theta = 79{,}38^\circ$$