Universidade Federal de Santa Catarina
Centro Tecnológico de Joinville

Cálculo Vetorial

Exercícios Resolvidos: Cálculo Volume 2 - James Stewart. Cap.13 - Exemplos: 6,19,22,26,27,28

6 - $\mathbf{r}(t) = e^t\ \vec{i} + e^{-t}\ \vec{j}$, $t = \dfrac{\pi}{4}$

(a) Esboce o gráfico da curva plana com a equação vetorial dada.

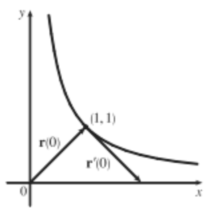
(b) Encontre $\mathbf{r}'(t)$.

(c) Esboce o vetor posição $\mathbf{r}(t)$ e o vetor tangente $\mathbf{r}'(t)$ para o valor dado de t.

Resposta:

a,c)

Visto que $y = e^{-t} = \dfrac{1}{e^t} = \dfrac{1}{x}$, a curva faz parte da hipérbole $y = \dfrac{1}{y}$. Note que $x > 0, y > 0$.



b)

$\mathbf{r}'(t) = e^t\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j}$

$\mathbf{r}'(0) = \mathbf{i} - \mathbf{j}$

19 - Determine o vetor tangente unitário $T(t)$ no ponto com valor de parâmetro dado t.

$\mathbf{r}(t) = \cos(t)\vec{i} + 3t\vec{j} + 2\sin(2t)\vec{k}$

Resposta:

$\mathbf{r}'(t) = -\sin(t)\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 4\cos(2t)\mathbf{k} \Rightarrow \mathbf{r}'(0) = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$,

portanto:

$$\mathbf{T}(0) = \frac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \frac{1}{\sqrt{0^2 + 3^2 + 4^2}}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \frac{1}{5}(3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}) = \frac{3}{5}\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}$$

22 - Se $\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t}\rangle$, encontre $\mathbf{T}(0), \mathbf{r}''(0)$ e $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$.

Resposta:

$\mathbf{r}(t) = \langle e^{2t}, e^{-2t}, te^{2t}\rangle \Rightarrow \mathbf{r}'(t) = \langle 2e^{2t}, -2e^{-2t}, (2t+1)e^{2t}\rangle \Rightarrow$

$\mathbf{r}'(0) = \langle 2e^0, -2e^0, (0+1)e^0\rangle = \langle 2, -2, 1\rangle$ e $|\mathbf{r}'(0)| = \sqrt{2^2 + (-2)^2 + 1^2} = 3$.

Então para $\mathbf{T}(0)$ temos:

$\mathbf{T}(0) = \dfrac{\mathbf{r}'(0)}{|\mathbf{r}'(0)|} = \frac{1}{3}\langle 2, -2, 1\rangle = \langle \frac{2}{3}, \frac{-2}{3}, \frac{1}{3}\rangle$

Para $\mathbf{r}''(0)$:

$\mathbf{r}''(t) = \langle 4e^{2t}, 4e^{-2t}, (4t+4)e^{2t}\rangle \Rightarrow \mathbf{r}''(0) = \langle 4e^0, 4e^0, (0+4)e^0\rangle = \langle 4, 4, 4\rangle$

Para $\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t)$:

$$\begin{aligned}\mathbf{r}'(t) \cdot \mathbf{r}''(t) &= \langle 2e^{2t}, -2e^{-2t}, (2t+1)e^{2t}\rangle \cdot \langle 4e^{2t}, 4e^{-2t}, (4t+4)e^{2t}\rangle \\ &= (2e^{2t})(4e^{2t}) + (-2e^{-2t})(4e^{-2t}) + ((2t+1)e^{2t})((4t+4)e^{2t}) \\ &= 8e^{4t} - 8e^{-4t} + (8t^2+12t+4)e^{4t} = (8t^2+12t+12)e^{4t} - 8e^{-4t}\end{aligned}$$

26 - Determine as equações paramétricas para a reta tangente à curva dada pelas equações paramétricas, no ponto especificado. $x = \sqrt{t^2+3}$; $y = \ln t^2 + 3$; $z = t$; $(2, \ln 4, 1)$

Resposta:

A equação vetorial para a curva é $\mathbf{r}(t) = \langle \sqrt{t^2+3}, \ln(t^2+3), t\rangle$, então $\mathbf{r}'(t) = \left\langle \dfrac{t}{\sqrt{t^2+3}}, \dfrac{2t}{(t^2+3)}, 1\right\rangle$

Em $(2, \ln 4, 1)$, $t = 1$ e $\mathbf{r}'(1) = \left\langle \dfrac{1}{2}, \dfrac{1}{2}, 1\right\rangle$. Portanto, as equações paramétricas da reta tangente são $x = 2 + \frac{1}{2}t$, $y = \ln 4 + \frac{1}{2}t$, $z = 1 + t$

27 - Encontre uma equação para a reta tangente à curva de intersecção dos cilindros $x^2 + y^2 = 25$ e $y^2 + z^2 = 20$ no ponto $(3, 4, 2)$.

Resposta:

Primeiro, parametrizamos a curva C de interseção. A projeção de C no xy-plano está contida no círculo $x^2 + y^2 = 25$, $z = 0$; então podemos escrever $x = 5\cos(t)$, $y = 5\sin(t)$. C também se encontra no cilindro $y^2 + z^2 = 20$, e $z \geq 0$ perto do ponto $(3, 4, 2)$, possamos escrever $z = \sqrt{20 - y^2} = \sqrt{20 - 25\sin^2(t)}$. Uma equação vetorial para C é: $\mathbf{r}(t) = \langle 5\cos(t), 5\sin(t), \sqrt{20 - 25\sin^2(t)}\rangle \Rightarrow$ $\mathbf{r}'(t) = \langle -5\sin(t), 5\cos(t), \frac{1}{2}(20 - 25\sin^2(t)^{-1/2})(-50\sin(t)\cos(t))\rangle$

A reta tangente é paralela a este vetor e passa por $(3, 4, 2)$, então uma equação vetorial para a reta é

$\mathbf{r}(t) = (3 - 4t)\mathbf{i} + (4 + 3t)\mathbf{j} + (2 - 6t)\mathbf{k}$

28 - Encontre o ponto na curva de $\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos(t), 2\sin(t), e^t\rangle$, $0 \leqslant t \leqslant \pi$, em que a reta tangente é paralela ao plano $\sqrt{3} + y = 1$

Resposta:

$\mathbf{r}(t) = \langle 2\cos(t), 2\sin(t), e^t \rangle \Rightarrow \mathbf{r}'(t) = \langle -2\sin(t), 2\cos(t), e^t \rangle$. A reta tangente à curva é paralela ao plano quando o

o vetor tangente da curva é ortogonal ao vetor normal do plano.

Portanto, exigimos que $\langle -2\sin(t), 2\cos(t), e^t \rangle \cdot \langle \sqrt{3}, 1, 0 \rangle = 0 \Rightarrow -2\sqrt{3}\sin(t) + 2\cos(t) + 0 = 0$

$\Rightarrow \text{tg}(t) = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow t = \frac{\pi}{6}$ com $[0 \leq t \leq \pi]$

$\mathbf{r}(\frac{\pi}{6}) = \langle \sqrt{3}, 1, e^{\pi/6} \rangle$, então o ponto é $(\sqrt{3}, 1, e^{\pi/6})$.