

UNIVERSIDADE FEDERAL DE SANTA CATARINA
CENTRO TECNOLÓGICO DE JOINVILLE

Carlos Eduardo Bibow Corrêa
Rubens Heryson de Lima Lavor
Thaiz Izidoro Antunes

**METODOS NUMERICOS PARA SOLUÇÃO DE EDO's
MODELO DE SUSPENSÃO DE UM AUTOMÓVEL**

JOINVILLE

2020
RESUMO

Este trabalho trata sobre métodos numéricos utilizados para a solução de Equações Diferenciais Ordinárias (EDOs). Dentre destes métodos numéricos estão os métodos de Euler, Euler Melhorado, Runge-Kutta e Runge-Kutta-Fehlberg. O tema escolhido foi o Modelo de Suspensão de um Automóvel onde este é modelado por duas E.D.O.s de segunda ordem, sendo assim se fez necessária a conversão das EDOs em equações de primeira ordem para que se fizesse possível a utilização dos métodos numéricos acima citados. Para a implementação este trabalho utiliza a ferramenta Simulink para formulação dos gráficos em que é possível ver as diferenças entre os métodos e a variação de h .

Palavras-chave: Método de Euler, Métodos de Runge-Kutta, Simulink

INTRODUÇÃO

Métodos numéricos podem ser definidos como um conjunto de ferramentas, artifícios matemáticos ou métodos usados para se obter a solução de problemas matemáticos, obtendo resultados muito próximos ou até mesmo exatos, de modelos ou sistemas. É possível sua implementação em computadores, basta transcrevê-los em uma linguagem de programação específica, o que os torna extremamente importante para soluções de problemas matemáticos. A eficácia, tempo de execução e esforço exigido depende significativamente do método numérico utilizado

Neste trabalho o modelo estudado e implementado é uma versão simplificada do sistema de suspensão de um automóvel, este que foi retirado do livro Modelagem de Sistemas Dinâmicos Contínuos no Tempo de Fernando J. Von Zuben. Abaixo na figura 1 é possível observar a representação do sistema em que são utilizadas duas massas (m_1 e m_2), duas molas (k_s e k_w) com constantes “e”, e um amortecedor com constante de amortecimento “b”. A constante de compressibilidade do pneu é representada pela mola com constante k_w . Já x e y são as variáveis que representam as posições, em relação a suas posições iniciais, das massas m_1 e m_2 respectivamente.

Valores de x e y diferente de zero retratam deslocamentos das massas m_1 e m_2 , respectivamente, da condição de equilíbrio. Já a mola com coeficiente k_w retrata a compressibilidade do pneu, a qual vai ser proporcional a diferença entre a posição da roda e o nível da superfície. O deslocamento e a velocidade de deslocamento percebidas, respectivamente, pela mola com coeficiente k_s e amortecedor com coeficiente b são medidas relativas ao deslocamento entre as duas massas (há acoplamento físico), dadas por:

$$\text{deslocamento} = y - x \quad (1)$$

$$\text{velocidade de deslocamento} = y' - x' \quad (2)$$

Os diagramas de corpo livre na figura 2 encontrada abaixo não incluem a força de reação a aceleração de massa, dada pela segunda lei de Newton.

Figura 1: Suspensão Simplificada de um Automovel

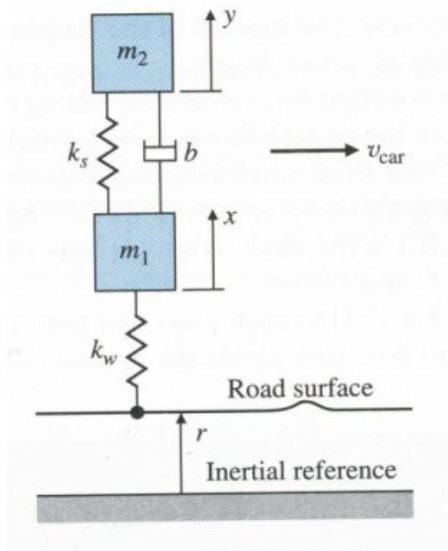
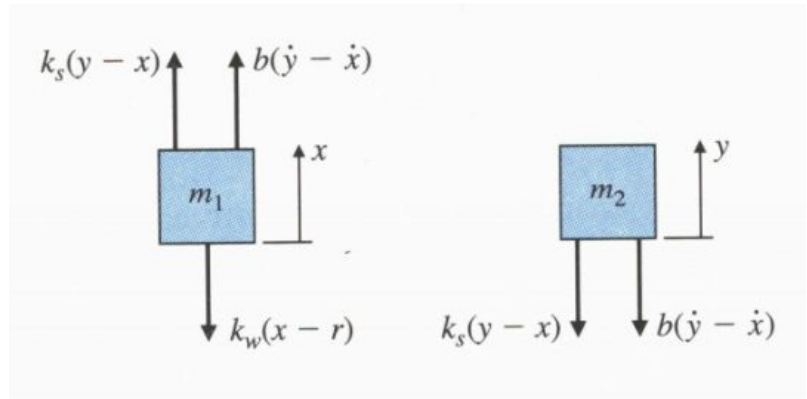


Figura 2: Diagramas de Corpo Livre do sistema



Fonte: VON ZUBEN

Fonte: VON ZUBEN

Após aplicação da segunda lei de newton e manipulação do sistema foi obtida a seguinte equação em que no lado direito os primeiros termos das equações representam a força relacionada à ação de diminuição da velocidade exercida pelo amortecedor, e os outros relacionados à força elástica das molas. O termo r está associado a função $r(t)$ (figura 3) na qual descreve a superfície em que o sistema está em contato, um bom exemplo é o automóvel passando por um quebra-molas, situação que requer o bom funcionamento do sistema de amortecimento:

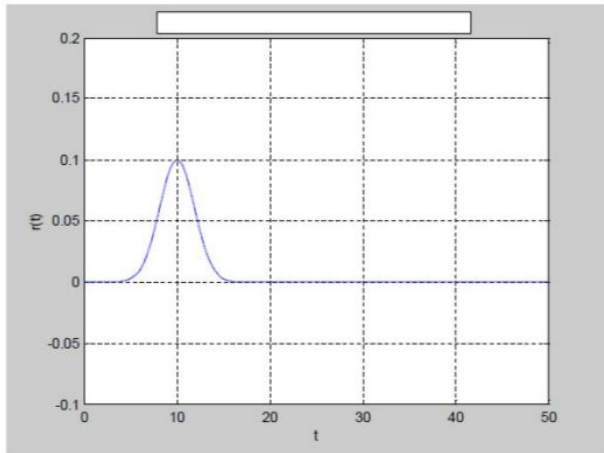
$$x'' = -\frac{b}{m_1} (x' - y') - \frac{k_s}{m_1} (x - y) - \frac{k_w x}{m_1} + \frac{k_w}{m_1} r \quad (3)$$

$$y'' = -\frac{b}{m_2} (y' - x') - \frac{k_s}{m_2} (y - x) \quad (4)$$

Para implementação as constantes das equações acima são consideradas com os valores descritos abaixo e para as condições iniciais assume-se valores de posição e velocidade como nulos e as molas em posição de relaxamento.

$m_1 = 25 \text{ kg}$
 $m_2 = 300 \text{ kg}$
 $b = 30 \text{ kg/s}$
 $k_2 = 7.5 \text{ kg/s}^2$
 $k_w = 50 \text{ kg/s}^2$

Figura 3: Função $r(t)$



$$r(t) = \frac{1}{10} e^{-\frac{(t-10)^2}{7}}$$

Fonte: VON ZUBEN

Metodologia

Para a resolução do problema abordado faz-se necessária a conversão da EDO/Sistema em um sistema de primeira ordem e para isso ser possível foram realizadas a seguinte mudança de variável nas equações (3) e (4) apresentadas na introdução do problema:

$$x_1 = x, \quad x_2 = x', \quad x_3 = y, \quad x_4 = y', \quad \text{logo tem-se que:}$$

$$x_1' = x', \quad x_2' = x'', \quad x_3' = y', \quad x_4' = y''$$

Portanto as EDOs na forma

$$x'' = -\frac{b}{m_1} (x' - y') - \frac{k_s}{m_1} (x - y) - \frac{k_w x}{m_1} + \frac{k_w}{m_1} r \quad (3)$$

$$y'' = -\frac{b}{m_2} (y' - x') - \frac{k_s}{m_2} (y - x) \quad (4)$$

Ficaram

$$x_1' = x_2 \quad (5)$$

$$x_2' = -\frac{k_s + k_w}{m_1} x_1 - \frac{b}{m_1} x_2 + \frac{k_s}{m_1} x_3 + \frac{b}{m_1} x_4 + \frac{k_w}{m_1} r \quad (6)$$

$$x_3' = x_4 \quad (7)$$

$$x_4' = -\frac{ks}{m2} x_1 - \frac{b}{m2} x_2 - \frac{ks}{m2} x_3 - \frac{b}{m2} x_4 \quad (8)$$

Nesta solução foram utilizados os métodos de Euler, Euler Melhorado, Runge-Kutta e Runge-Kutta-Fehlberg. As quatro técnicas dividem o eixo das ordenadas, que representará o tempo, em pequenos intervalos h conhecidos como passos, e que as EDOs são expressas na forma $y' = f(t, y)$ porém com as mudanças de variáveis vistas acima a função será expressa por $y' = f(t, x_1, x_2, x_3, x_4)$ nos algoritmos implementados.

Método de Euler:

Utiliza retas tangentes para encontrar o valor da função em um ponto adjacente. Conhecido o valor da função em um ponto y_n pode-se estimar no ponto y_{n+1} por meio da seguinte relação de recorrência:

$$y_{n+1} = y_n + f(t_n, y_n) * h.$$

No código, para cada x_n (x_1, x_2, x_3 e x_4) foram estimados os respectivos x_{n+1} . Este método também pode ser interpretado ao integrar a E.D.O. $y' = f(t_n, y_n)$ entre t_n e t_{n+1} onde a área embaixo da curva $f(t, y)$ é aproximada por um retângulo de lados h e $f(t_n, y_n)$.

Método de Euler Melhorado:

A partir dessa visualização, é possível notar que uma maneira de melhorar esse método é aproximando a área de uma maneira melhor, como pelo método do trapézio: esta é a base do método de Euler Melhorado, que fornece a fórmula de recorrência

$$y_{n+1} = y_n + (K1 + K2)/2$$

onde

$$K1 = f(t_n, y_n) \text{ e } K2 = f(t_{n+1}, y_n + hK1)$$

Método de Runge-Kutta:

O método de Runge-Kutta também é conhecido por Runge-Kutta de quarta ordem pois utiliza de uma média ponderada calculada a partir de quatro retas tangente para aproximar o valor da função no ponto y_{n+1} , em que

$$y_{n+1} = y_n + \frac{h}{6}(K1 + 2K2 + 2K3 + K4)$$

onde

$$\begin{aligned} K1 &= f(t_n, y_n), \\ K2 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hK1), \\ K3 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + \frac{1}{2}hK2), \\ K4 &= f(t_n + h, y_n + hK3) \end{aligned}$$

Método de Runge-Kutta-Fehlberg:

No método de Runge-Kutta-Fehlberg, varia-se o parâmetro h de forma que o erro seja menor que uma tolerância ε . Seja q uma fração de h dada por

$$q = \alpha (\varepsilon h / |y_{n+1}^k - y_{n+1}^{k+1}|)^{1/k}$$

o erro é estimado pelo denominador composto pelo valor da função calculada por um método de ordem k e por um método de ordem $k+1$, o passo ótimo é dado por qh onde

$$q \approx 0.84 (\varepsilon h / |y_{n+1}^4 - y_{n+1}^5|)^{1/4}$$

Sendo y^4 o método de Runge-Kutta de quarta ordem e y^5 o de quinta ordem. Se q for menor que 1 diminui-se o passo original, além disso, a iteração para calcular y_{n+1} precisa ser refeita; caso q for maior que 1 pode-se aumentar o passo que o erro continuará menor que a tolerância e a iteração não precisa ser refeita. y_{n+1}^4 e y_{n+1}^5 são calculados da seguinte forma:

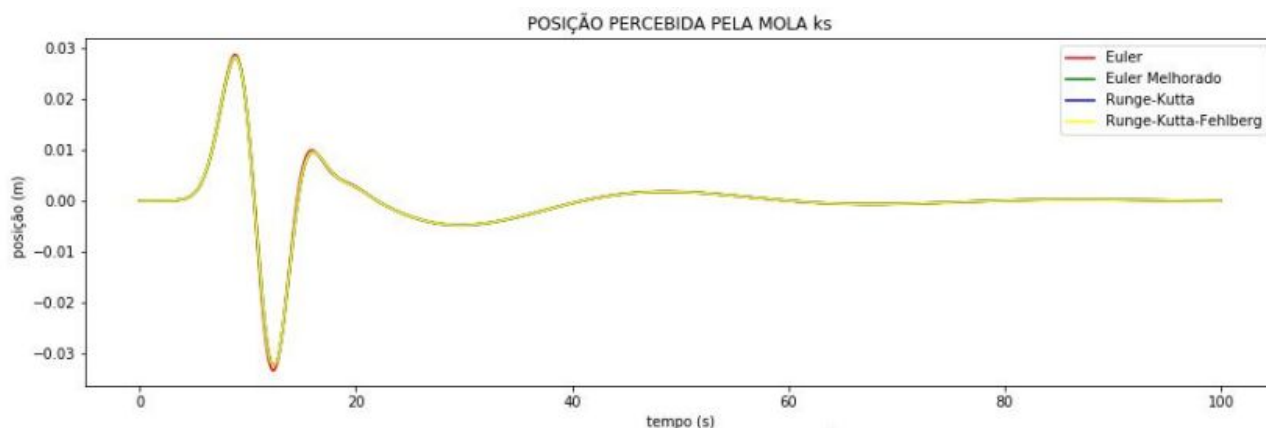
$$\begin{aligned} y_{n+1}^5 &= y_n + \left(\frac{16}{135}K1 + \frac{6656}{12825}K3 + \frac{28561}{56430}K4 - \frac{9}{50}K5 + \frac{2}{55}K6 \right) \\ y_{n+1}^4 &= y_n + \left(\frac{25}{216}K1 + \frac{1408}{2565}K3 + \frac{2197}{4104}K4 - \frac{1}{5}K5 \right) \end{aligned}$$

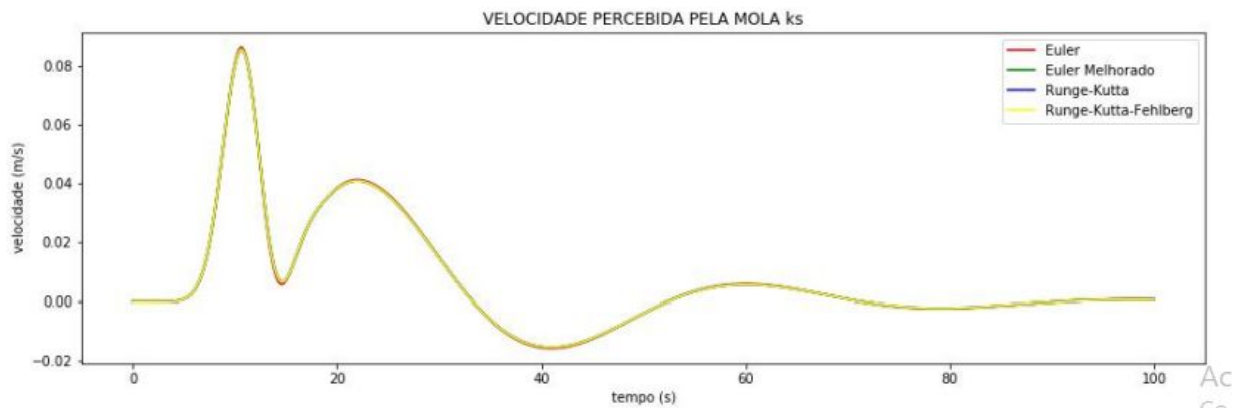
onde:

$$\begin{aligned} K1 &= f(t_n, y_n), \\ K2 &= f(t_n + \frac{h}{4}, y_n + \frac{h}{4}K1), \\ K3 &= f(t_n + \frac{3h}{8}, y_n + \frac{h}{32}(3K1 + 9K2)), \\ K4 &= f(t_n + \frac{12h}{13}, y_n + \frac{h}{2197}(1932K1 - 7200K2 + 7296K3)), \\ K5 &= f(t_n + h, y_n + h(\frac{439}{216}K1 - 8K2 + \frac{3680}{513}K3 - \frac{845}{4104}K4)), \\ K6 &= f(t_n + \frac{h}{2}, y_n + h(-\frac{8}{27}K1 + 2K2 - \frac{3544}{2565}K3 + \frac{1859}{4104}K4 - \frac{11}{40}K5)) \end{aligned}$$

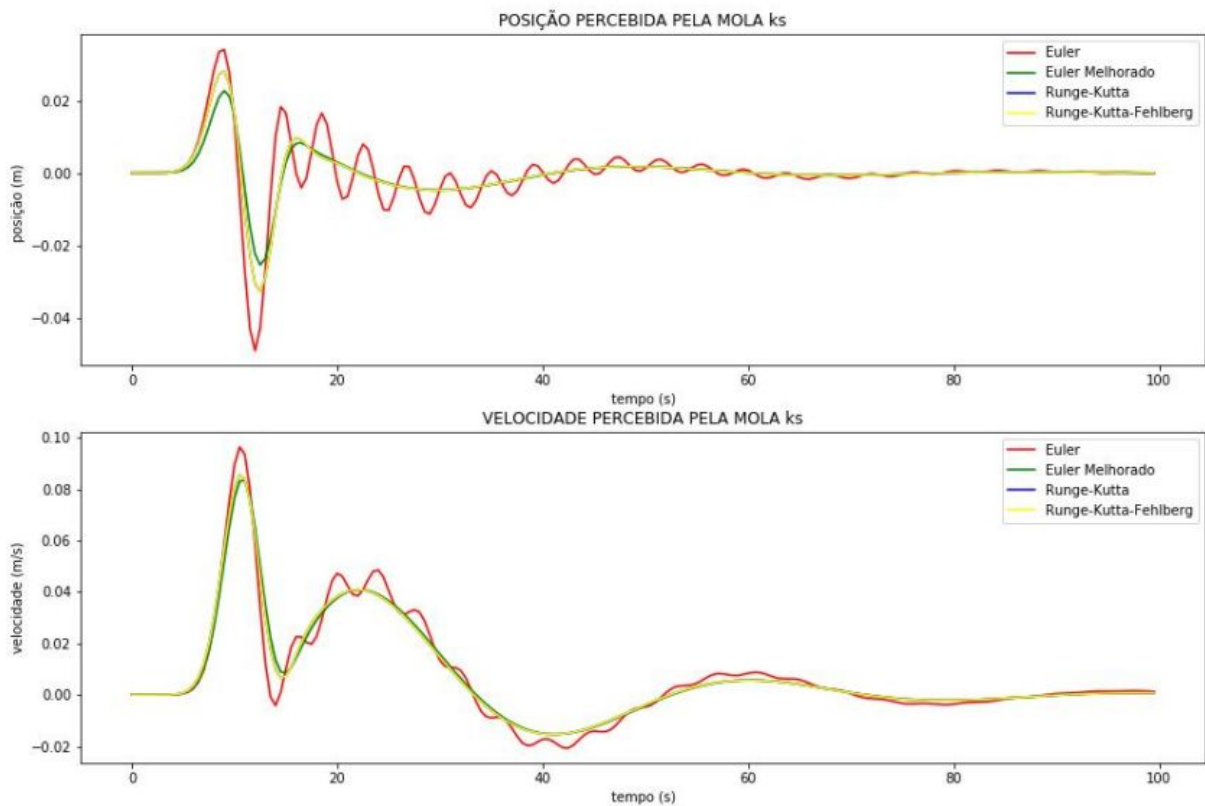
Resultados e Discussão

Quanto menor for o h espera-se que o erro entre os métodos diminua. Nas simulações foram plotados os gráficos da variação da posição ao passar do tempo respectivos as equações (1) e (2). Ao utilizar $h = 0.05$ foi notado convergência entre os métodos e leves desvios entre Euler e os demais nos locais onde é possível observar que a curva vermelha se afasta (figura 4).

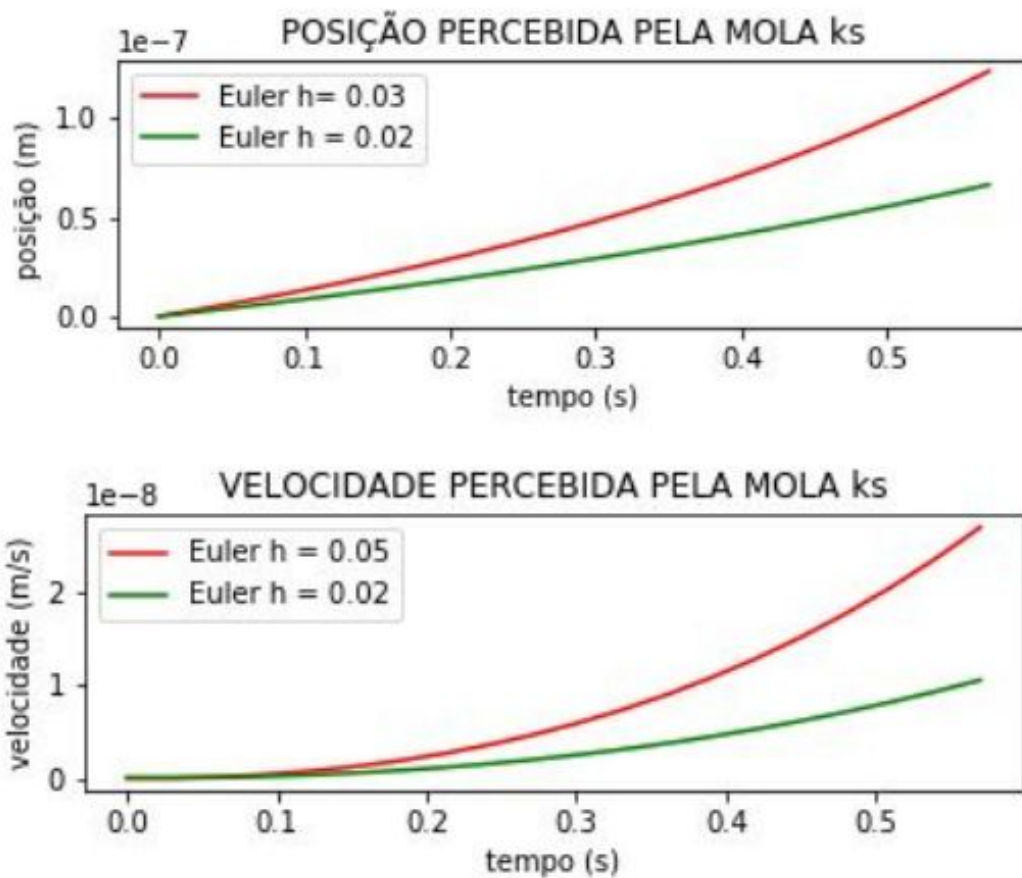




Em um passo $h=0.5$ (figura 5) é notável a diferença entre os métodos Euler, Euler Melhorado e os métodos de Runge-Kutta (que convergiram mesmo em um passo maior). É interessante observar a diferença entre os métodos de Euler que apesar de serem muito semelhantes nas suas formulações, enquanto um (Euler) apresentou um comportamento oscilador o outro (Euler Melhorado) assumiu uma forma próxima do esperado.

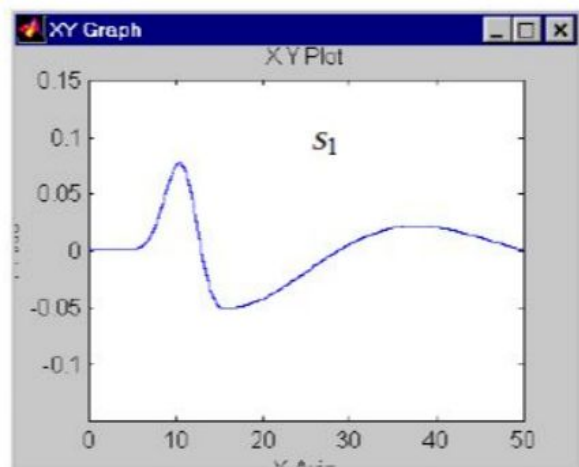


Mesmo ao impor grandes passos de tempo tais como $h=1$ e $h=2$, e avaliando em intervalos menores (menor número de passos) não foi observado divergência entre os métodos de Runge-Kutta e Runge-Kutta-Fehlberg neste problema, embora Runge-Kutta-Fehlberg seja uma melhoria do método anterior. Já os métodos de Euler, apresentam diferenças que dependem do passo escolhido. Tendo em vista que os métodos numéricos estão sujeitos a erros devido ao uso de um computador tais como erros de truncamento e erros de arredondamento, é necessário escolher um passo adequadamente pequeno para que o erro não se torne grande o suficiente de forma que interfira na solução esperada. É possível visualizar esse erro no método de Euler em uma escala menor na figura 6, onde foram comparados os valores em um passo $h=0.03$ e $h=0.02$. Nota-se que inicialmente os valores convergem, no entanto, ao passar do tempo o erro vai aumentando causando discordância entre as curvas.

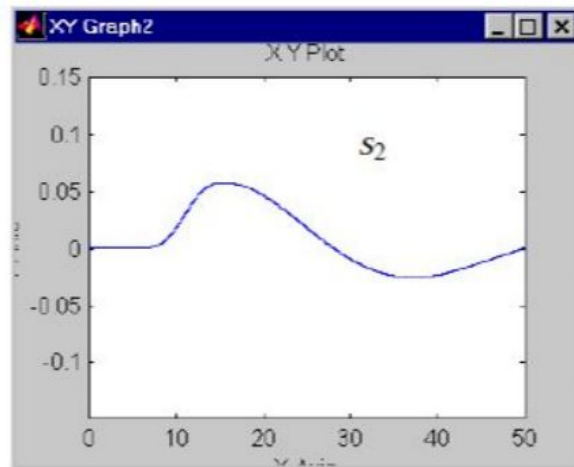


Conclusão

Os resultados obtidos são coerentes com o trabalho original onde os dados foram implementados na ferramenta Simulink onde S1 representa o deslocamento (1) e S2 a velocidade (2).



Fonte: VON ZUBEN



Fonte: VON ZUBEN

Referências

VON ZUBEN, Fernando J.. Modelagem de Sistemas Dinâmicos Contínuos no Tempo. Disponível em:. Acesso em: 13 novembro. 2020.

Referências BOYCE, William E.; DIPRIMA, Richard C. Equações diferenciais elementares e problemas de valores de contorno. Guanabara Dois, 1985.

MATHEWS, John H.; Fink, K. D. Numerical methods using MATLAB. Upper Saddle River, NJ: Pearson Prentice Hall, 2004.