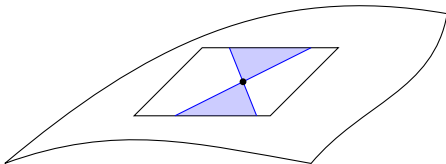


Soluzioni fondamentali per equazioni di tipo onda su varietà curve

Rubens Longhi

$$\square u = \delta$$



Equazioni di tipo ondulatorio

Gli operatori di tipo ondulatorio governano la dinamica di molti sistemi fisici

- Operatore d'onda: il d'Alembertiano

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

- Equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} \square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 4\pi J^\mu \\ \partial_\mu J^\mu = 0 \end{cases}$$

- Equazione di Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\psi = f$$

Equazioni di tipo ondulatorio

Gli operatori di tipo ondulatorio governano la dinamica di molti sistemi fisici

- Operatore d'onda: il d'Alembertiano

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

- Equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} \square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 4\pi J^\mu \\ \partial_\mu J^\mu = 0 \end{cases}$$

- Equazione di Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\psi = f$$

Equazioni di tipo ondulatorio

Gli operatori di tipo ondulatorio governano la dinamica di molti sistemi fisici

- Operatore d'onda: il d'Alembertiano

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

- Equazioni di Maxwell

$$\begin{cases} \square A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 4\pi J^\mu \\ \partial_\mu J^\mu = 0 \end{cases}$$

- Equazione di Klein-Gordon

$$(\square + m^2)\psi = f$$

Le soluzioni fondamentali

Un metodo costruttivo

- Vogliamo risolvere in \mathbb{R}^N una qualsiasi equazione differenziale scalare non omogenea

$$P\psi = f$$

nell'incognita ψ con sorgente f .

- Le soluzioni saranno date da

$$\psi = \psi_0 + \psi_f$$

dove ψ_0 risolve l'omogenea associata e ψ_f è una soluzione particolare

Le soluzioni fondamentali

Un metodo costruttivo

- Vogliamo risolvere in \mathbb{R}^N una qualsiasi equazione differenziale scalare non omogenea

$$P\psi = f$$

nell'incognita ψ con sorgente f .

- Le soluzioni saranno date da

$$\psi = \psi_0 + \psi_f$$

dove ψ_0 risolve l'omogenea associata e ψ_f è una soluzione particolare

Le soluzioni fondamentali

Un metodo costruttivo

- Risolviamo per un punto $x \in \mathbb{R}^N$

$$Pu_x = \delta_x$$

con $u_x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. u_x è detta **soluzione fondamentale** per P in x

- Troviamo una soluzione particolare tramite la **convoluzione**

$$\psi_f = u_x * f$$

- Nel caso di operatori d'onda, otteniamo una soluzione per l'omogenea dalla differenza di due soluzioni fondamentali

Le soluzioni fondamentali

Un metodo costruttivo

- Risolviamo per un punto $x \in \mathbb{R}^N$

$$Pu_x = \delta_x$$

con $u_x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. u_x è detta **soluzione fondamentale** per P in x

- Troviamo una soluzione particolare tramite la **convoluzione**

$$\psi_f = u_x * f$$

- Nel caso di operatori d'onda, otteniamo una soluzione per l'omogenea dalla differenza di due soluzioni fondamentali

Le soluzioni fondamentali

Un metodo costruttivo

- Risolviamo per un punto $x \in \mathbb{R}^N$

$$Pu_x = \delta_x$$

con $u_x \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^N)$. u_x è detta **soluzione fondamentale** per P in x

- Troviamo una soluzione particolare tramite la **convoluzione**

$$\psi_f = u_x * f$$

- Nel caso di operatori d'onda, otteniamo una soluzione per l'omogenea dalla differenza di due soluzioni fondamentali

L'operatore d'onda in Minkowski

Il caso dello spaziotempo piatto

Equazione di Klein-Gordon con massa nulla

$$\square \psi = f$$

Spaziotempo piatto di Minkowski $\mathbb{M}^n \rightarrow 1$ dimensione temporale e n dimensioni spaziali

L'invarianza traslazionale ci consente di limitare il problema per \square all'origine:

$$\square u_0 = \delta_0$$

e di utilizzare la tecnica della trasformata di Fourier.

L'operatore d'onda in Minkowski

Il caso dello spaziotempo piatto

Equazione di Klein-Gordon con massa nulla

$$\square \psi = f$$

Spaziotempo piatto di Minkowski $\mathbb{M}^n \rightarrow 1$ dimensione temporale e n dimensioni spaziali

L'invarianza traslazionale ci consente di limitare il problema per \square all'origine:

$$\square u_0 = \delta_0$$

e di utilizzare la tecnica della trasformata di Fourier.

La tecnica della trasformata di Fourier

La PDE in (t, \mathbf{x}) diventa l'equazione algebrica nello spazio delle fasi (ω, \mathbf{k})

$$(|\mathbf{k}|^2 - \omega^2)\hat{u} = 1$$

Troviamo due soluzioni linearmente **indipendenti**, che danno luogo a due soluzioni fondamentali G^+ e G^- dette **ritardata** e **avanzata**

$$G^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{e^{i\langle k, x \rangle}}{|\mathbf{k}|^2 - (\omega \pm i\varepsilon)^2} dk$$

La PDE in (t, \mathbf{x}) diventa l'equazione algebrica nello spazio delle fasi (ω, \mathbf{k})

$$(|\mathbf{k}|^2 - \omega^2)\hat{u} = 1$$

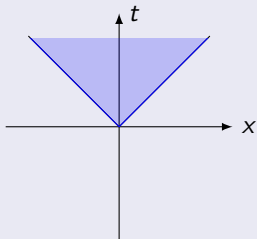
Troviamo due soluzioni linearmente **indipendenti**, che danno luogo a due soluzioni fondamentali G^+ e G^- dette **ritardata** e **avanzata**

$$G^\pm(x) = \frac{1}{(2\pi)^{n+1}} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}^{n+1}} \frac{e^{i\langle k, x \rangle}}{|\mathbf{k}|^2 - (\omega \pm i\varepsilon)^2} dk$$

Le soluzioni fondamentali ritardata e avanzata

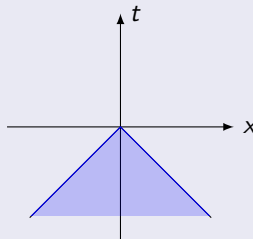
La soluzione ritardata

$\text{supp } G^+$ è nel **futuro causale**



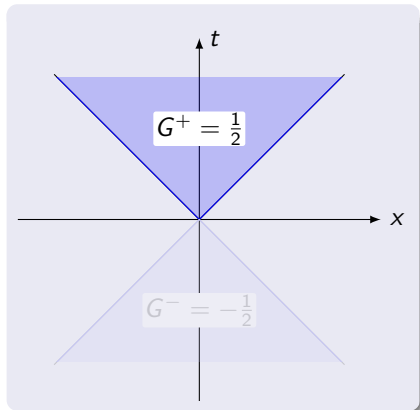
La soluzione avanzata

$\text{supp } G^-$ è nel **passato causale**



Il caso $n = 1$ - onde su una corda

Le soluzioni fondamentali in Minkowski



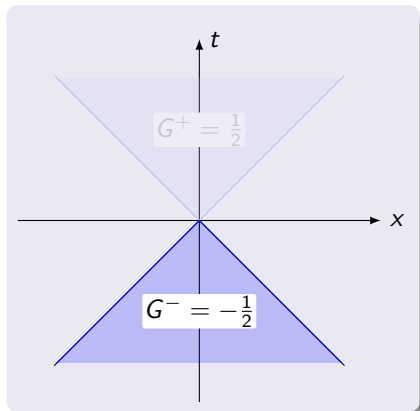
La soluzione fondamentale
ritardata

$$G^+(t, x) = \frac{\Theta(t - |x|)}{2}$$

$\text{supp } G^+$ è il cono luce **futuro**

Il caso $n = 1$ - onde su una corda

Le soluzioni fondamentali in Minkowski



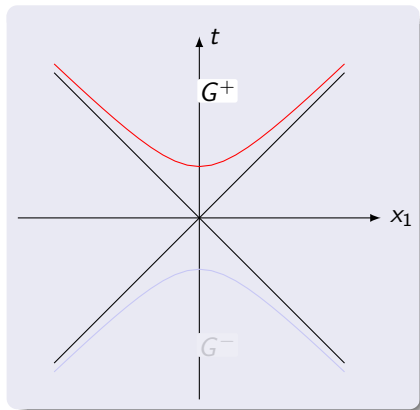
La soluzione fondamentale
avanzata

$$G^-(t, x) = -\frac{\Theta(t + |x|)}{2}$$

$\text{supp } G^-$ è il cono luce **passato**

Il caso $n = 2$ - onde su una superficie

Le soluzioni fondamentali in Minkowski



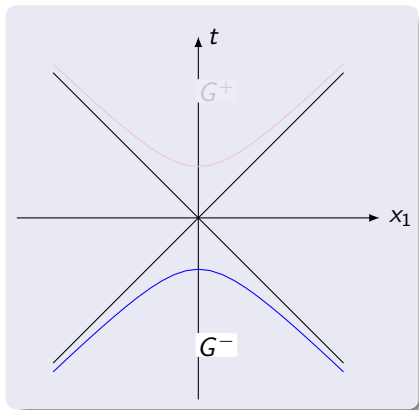
Un insieme di livello della soluzione fondamentale **ritardata**

$$G^+(t, \mathbf{x}) = \frac{\Theta(t)}{2\pi} \frac{\Theta(t^2 - |\mathbf{x}|^2)}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{x}|^2}}$$

$\text{supp } G^+ \subset$ cono luce **futuro**

Il caso $n = 2$ - onde su una superficie

Le soluzioni fondamentali in Minkowski



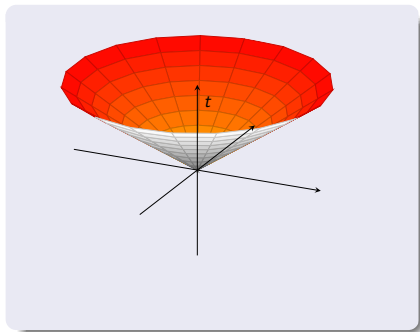
Un insieme di livello della soluzione fondamentale **avanzata**

$$G^-(t, \mathbf{x}) = \frac{\Theta(-t)}{2\pi} \frac{\Theta(t^2 - |\mathbf{x}|^2)}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{x}|^2}}$$

$\text{supp } G^- \subset$ cono luce **passato**

Il caso $n = 3$ - onde nello spazio

Le soluzioni fondamentali in Minkowski



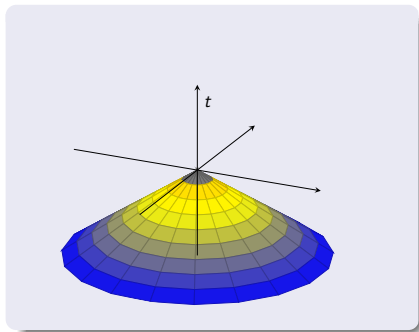
Il supporto della soluzione
fondamentale **ritardata**

$$G^+(t, \mathbf{x}) = \frac{\Theta(t)}{4\pi} \frac{\delta(t - |\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}$$

$\text{supp } G^+$ è il **bordo** del cono luce
futuro

Il caso $n = 3$ - onde nello spazio

Le soluzioni fondamentali in Minkowski



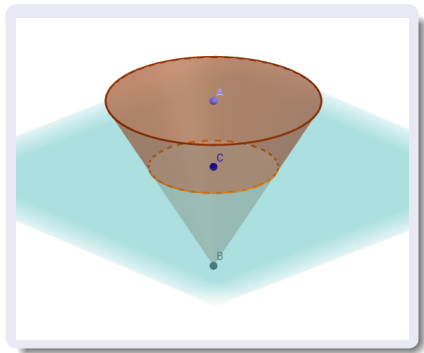
Il supporto della soluzione
fondamentale **avanzata**

$$G^{-}(t, \mathbf{x}) = \frac{\Theta(-t)}{4\pi} \frac{\delta(t + |\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}$$

$\text{supp } G^{-}$ è il **bordo** del cono luce
passato

Il Principio di Huygens

Le soluzioni fondamentali in Minkowski



Il supporto di G^\pm coincide con il bordo del cono luce solo se $n > 1$ è dispari.

In 2D l'effetto dell'onda viene percepito **anche dopo** che il segnale è arrivato.

Le onde 3D si propagano solo sulla **superficie sferica** del fronte d'onda.

Il Principio di Huygens

Le soluzioni fondamentali in Minkowski

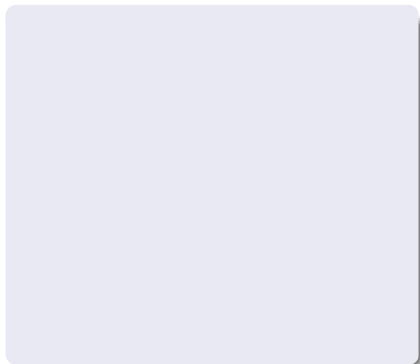
Il supporto di G^\pm coincide con il bordo del cono luce solo se $n > 1$ è dispari.

In 2D l'effetto dell'onda viene percepito **anche dopo** che il segnale è arrivato.

Le onde 3D si propagano solo sulla **superficie sferica** del fronte d'onda.

Il Principio di Huygens

Le soluzioni fondamentali in Minkowski

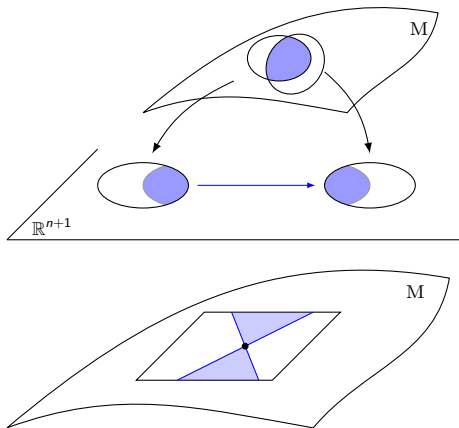


Il supporto di G^\pm coincide con il bordo del cono luce solo se $n > 1$ è dispari.

In 2D l'effetto dell'onda viene percepito **anche dopo** che il segnale è arrivato.

Le onde 3D si propagano solo sulla **superficie sferica** del fronte d'onda.

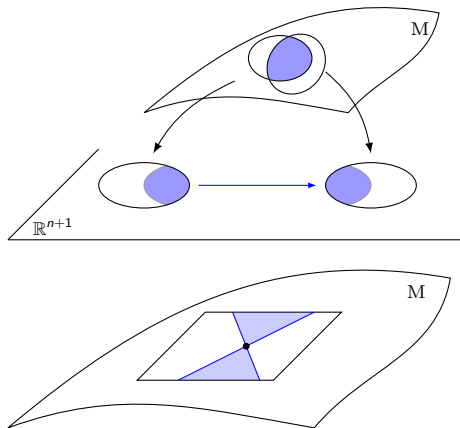
Lo spaziotempo come varietà differenziabile



Una varietà differenziabile M è **localmente omeomorfa** a \mathbb{R}^{n+1} e decorata con

- spazio tangente Minkowskiano
- metrica g
- orientazione temporale (**spaziotempo**)

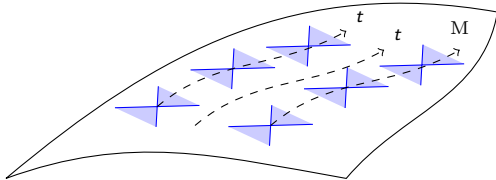
Lo spaziotempo come varietà differenziabile



Una varietà differenziabile M è **localmente omeomorfa** a \mathbb{R}^{n+1} e decorata con

- spazio tangente Minkowskiano
- metrica g
- orientazione temporale (**spaziotempo**)

Lo spaziotempo come varietà differenziabile

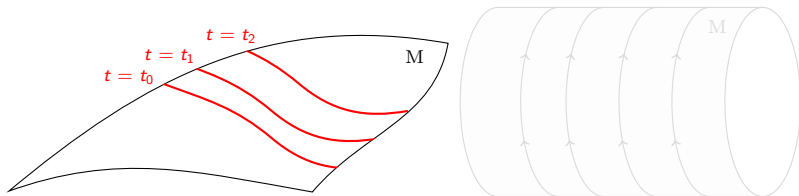


Una varietà differenziabile M è **localmente omeomorfa** a \mathbb{R}^{n+1} e decorata con

- spazio tangente Minkowskiano
- metrica g
- orientazione temporale (**spaziotempo**)

Spazitempi Globalmente Iperbolici

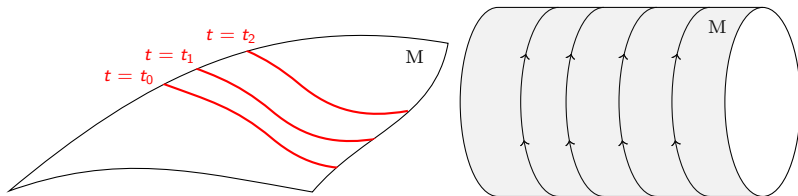
- $M \simeq \mathbb{R} \times S \longrightarrow \{t\} \times S$ è **ipersuperficie** a tempo costante su cui porre dati iniziali



- Assenza di curve chiuse causali \longrightarrow no **paradossi temporali**

Spazitempi Globalmente Iperbolici

- $M \simeq \mathbb{R} \times S \longrightarrow \{t\} \times S$ è **ipersuperficie** a tempo costante su cui porre dati iniziali



- Assenza di curve chiuse causali \longrightarrow no **paradossi temporali**

Spazitempi di interesse fisico

- Lo spaziotempo **cosmologico**

$$M_c = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

con metrica

$$g_c = -dt^2 + f^2(t) d\mathbf{x}^2$$

descrive un universo con fattore di espansione $f(t)$

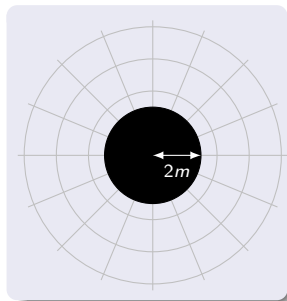
- Lo spaziotempo di **Schwarzschild**

$$M_s = \mathbb{R} \times (2m, +\infty) \times S^2$$

con metrica

$$g_s = -\left(1 - \frac{2m}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2$$

descrive l'esterno di un **buco nero** non rotante di massa m e raggio $2m$



Operatori d'onda in ambiente curvo

Gli operatori di tipo ondulatorio si generalizzano in base alla **metrica** locale g

Operatore generalizzato di d'Alembert

$$P = -g^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + a^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} + b(x)$$

In particolare l'operatore d'onda diventa

$$\square = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j \right)$$

Operatori d'onda in ambiente curvo

Gli operatori di tipo ondulatorio si generalizzano in base alla **metrica** locale g

Operatore generalizzato di d'Alembert

$$P = -g^{ij}(x) \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + a^j(x) \frac{\partial}{\partial x^j} + b(x)$$

In particolare l'operatore d'onda diventa

$$\square = -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \partial_i \left(\sqrt{|g|} g^{ij} \partial_j \right)$$

Operatori d'onda in ambiente curvo

Spaziotempo cosmologico

$$\square = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{3}{f(t)} \frac{\partial}{\partial t} + \frac{1}{f^2(t)} \Delta$$

Spaziotempo di Schwarzschild

$$\square = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 - 2mr) \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \Delta_{\vartheta, \varphi}$$

Cade la simmetria traslazionale. La soluzione fondamentale

$$Pu_x = \delta_x$$

deve essere cercata **punto per punto** senza poter usare Fourier

Le distribuzioni di Riesz

Ritroviamo le soluzioni fondamentali su Minkowski sfruttando le **distribuzioni di Riesz**, definite per $\alpha \in \mathbb{C}$ a partire dalla formula

$$R_{\pm}(\alpha)(x) := \frac{2^{1-\alpha} \pi^{\frac{1-n}{n+1}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{\alpha-n+1}{2})} (-\langle x, x \rangle)^{\frac{\alpha-n-1}{2}}$$

se x è nel cono luce futuro (+)/passato (-) e 0 altrimenti, con
 $\operatorname{Re} \alpha > n + 1$

$$\square R_{\pm}(2) = \delta_0$$

$R_{\pm}(2)$ sono le soluzioni fondamentali **ritardata** (+) e **avanzata** (-)

Le distribuzioni di Riesz

Ritroviamo le soluzioni fondamentali su Minkowski sfruttando le **distribuzioni di Riesz**, definite per $\alpha \in \mathbb{C}$ a partire dalla formula

$$R_{\pm}(\alpha)(x) := \frac{2^{1-\alpha} \pi^{\frac{1-n}{n+1}}}{\Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{\alpha-n+1}{2})} (-\langle x, x \rangle)^{\frac{\alpha-n-1}{2}}$$

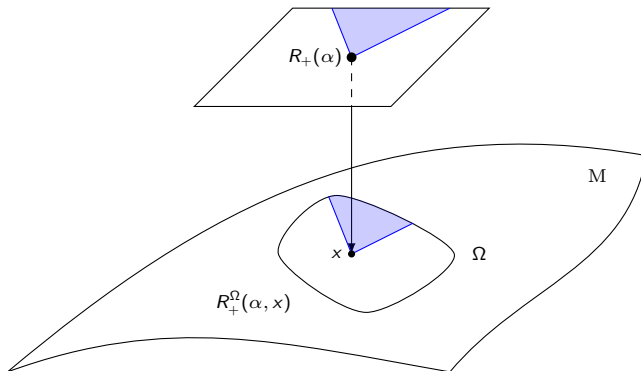
se x è nel cono luce futuro (+)/passato (-) e 0 altrimenti, con
 $\operatorname{Re} \alpha > n + 1$

$$\square R_{\pm}(2) = \delta_0$$

$R_{\pm}(2)$ sono le soluzioni fondamentali **ritardata** (+) e **avanzata** (-)

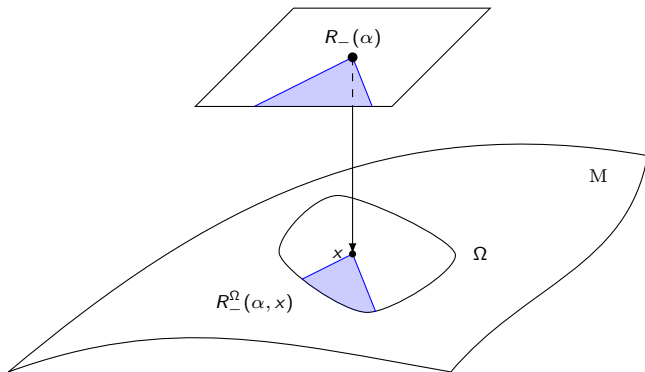
La soluzione fondamentale locale

Le distribuzioni di Riesz si estendono localmente dal tangente Minkowskiano al curvo.



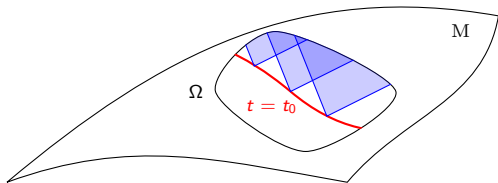
La soluzione fondamentale locale

Le distribuzioni di Riesz si estendono localmente dal tangente Minkowskiano al curvo.



Il problema ai dati iniziali locale

Con le soluzioni fondamentali trovate risolviamo il problema di Cauchy localmente

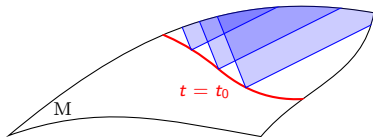


Problema ai dati iniziali

$$\begin{cases} P\psi = f \\ \psi(t_0, \cdot) = \psi^0 \\ \frac{\partial}{\partial t}\psi(t_0, \cdot) = \psi^1. \end{cases}$$

Il problema ai dati iniziali globale

Se lo spaziotempo è globalmente iperbolico, si ottengono soluzioni fondamentali **globali** G^\pm



- la soluzione ψ è unica e liscia
- supporto nel futuro causale e nel passato causale

Risultati ottenuti:

- Costruzione delle soluzioni fondamentali per \square in Minkowski attraverso
 - trasformata di Fourier
 - distribuzioni di Riesz
- Estensione locale e globale delle soluzioni fondamentali su spazitempi globalmente iperbolici

Possibili sviluppi:

- Estensione ad altri operatori (Dirac D)

Risultati ottenuti:

- Costruzione delle soluzioni fondamentali per \square in Minkowski attraverso
 - trasformata di Fourier
 - distribuzioni di Riesz
- Estensione locale e globale delle soluzioni fondamentali su spazitempi globalmente iperbolici

Possibili sviluppi:

- Estensione ad altri operatori (Dirac D)

Risultati ottenuti:

- Costruzione delle soluzioni fondamentali per \square in Minkowski attraverso
 - trasformata di Fourier
 - distribuzioni di Riesz
- Estensione locale e globale delle soluzioni fondamentali su spazitempi globalmente iperbolici

Possibili sviluppi:

- Estensione ad altri operatori (Dirac D)