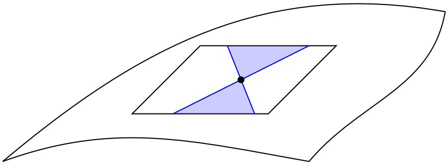
Soluzioni fondamentali per equazioni di tipo onda su varietà curve

Rubens Longhi

$$\Box u = \delta$$



Gli operatori di tipo ondulatorio P appaiono in molti sistemi fisici

- Operatore d'onda: il d'Alembertiano

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

- Equazioni di Maxwell

$$\Box A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 4\pi J^\mu$$

- Equazione di Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\psi = 0$$

Gli operatori di tipo ondulatorio P appaiono in molti sistemi fisici

- Operatore d'onda: il d'Alembertiano

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

- Equazioni di Maxwell

$$\Box A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 4\pi J^\mu$$

- Equazione di Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\psi = 0$$

Gli operatori di tipo ondulatorio P appaiono in molti sistemi fisici

- Operatore d'onda: il d'Alembertiano

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{n-1} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

- Equazioni di Maxwell

$$\Box A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 4\pi J^\mu$$

- Equazione di Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\psi = 0$$

Vogliamo risolvere su una varietà M una qualsiasi equazione differenziale non omogenea

$$Pf = \psi$$

nell'incognita f con generica sorgente ψ.

La studiamo nel caso di una sorgente elementare deltiforme nel punto x

$$Pu_x = \delta_x$$

e cerchiamo soluzioni distribuzionali $u_x \in \mathcal{D}'(\mathrm{M})$.

Troviamo una soluzione a $Pf = \psi$ integrando opportunamente la soluzione fondamentale su tutti i punti $x \in \operatorname{supp} \psi$.

Vogliamo risolvere su una varietà M una qualsiasi equazione differenziale non omogenea

$$Pf = \psi$$

nell'incognita f con generica sorgente ψ.

La studiamo nel caso di una sorgente elementare deltiforme nel punto x

$$Pu_x = \delta_x$$

e cerchiamo soluzioni distribuzionali $u_x \in \mathcal{D}'(\mathrm{M})$.

Troviamo una soluzione a $Pf = \psi$ integrando opportunamente la soluzione fondamentale su tutti i punti $x \in \operatorname{supp} \psi$.

Vogliamo risolvere su una varietà M una qualsiasi equazione differenziale non omogenea

$$Pf = \psi$$

nell'incognita f con generica sorgente ψ.

La studiamo nel caso di una sorgente elementare deltiforme nel punto x

$$Pu_x = \delta_x$$

e cerchiamo soluzioni distribuzionali $u_x \in \mathcal{D}'(\mathrm{M})$.

Troviamo una soluzione a $Pf = \psi$ integrando opportunamente la soluzione fondamentale su tutti i punti $x \in \operatorname{supp}\psi$.

La simmetria per traslazione ci consente di limitare il problema per $\Box$ all'origine:

$$\Box u_0 = \delta_0$$

e di utilizzare la tecnica della trasformata di Fourier.

La PDE in $(t, \mathbf{x})$ diventa l'equazione algebrica nello spazio delle fasi $(\omega, \mathbf{k})$

$$(|\mathbf{k}|^2 - \omega^2)\widehat{u} = 1,$$

della quale troviamo **due soluzioni indipendenti**, che danno luogo a due soluzioni fondamentali G^+ e G^- dette **ritardata** e **avanzata**.

La simmetria per traslazione ci consente di limitare il problema per $\Box$ all'origine:

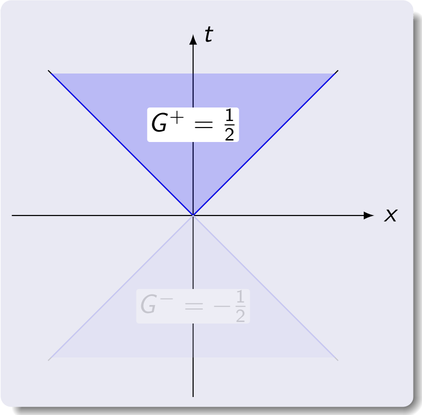
$$\Box u_0 = \delta_0$$

e di utilizzare la tecnica della trasformata di Fourier.

La PDE in $(t, \mathbf{x})$ diventa l'equazione algebrica nello spazio delle fasi $(\omega, \mathbf{k})$

$$(|\mathbf{k}|^2 - \omega^2)\widehat{u} = 1,$$

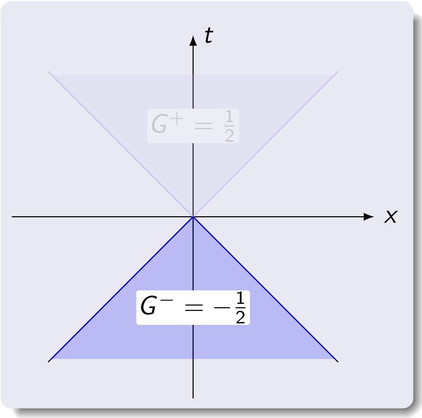
della quale troviamo **due soluzioni indipendenti**, che danno luogo a due soluzioni fondamentali G^+ e G^- dette **ritardata** e **avanzata**.



La soluzione fondamentale **ritardata**

$$G^+(t, x) = \frac{\Theta(t - |x|)}{2}$$

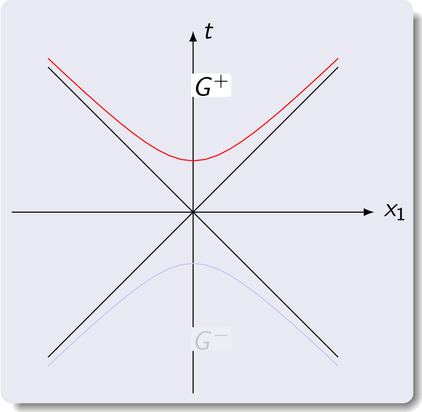
supp G^+ è il cono luce **futuro**



La soluzione fondamentale **avanzata**

$$G^-(t,x) = -\frac{\Theta(t+|x|)}{2}$$

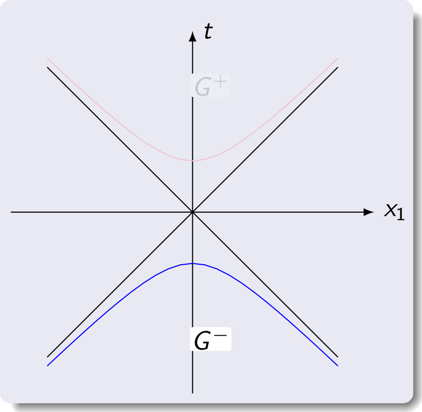
supp G^- è il cono luce **passato**



Un insieme di livello della soluzione fondamentale **ritardata**

$$G^+(t, \mathbf{x}) = \frac{\Theta(t)}{2\pi} \frac{\Theta(t^2 - |\mathbf{x}|^2)}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{x}|^2}}$$

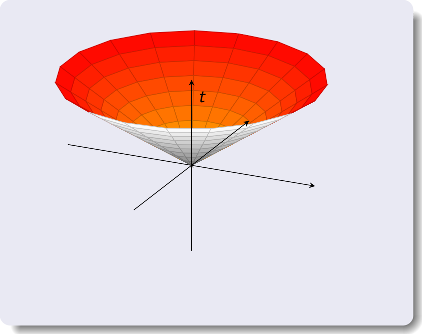
supp $G^+ \subset$ cono luce **futuro**



Un insieme di livello della soluzione fondamentale **avanzata**

$$G^-(t, \mathbf{x}) = \frac{\Theta(-t)}{2\pi} \frac{\Theta(t^2 - |\mathbf{x}|^2)}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{x}|^2}}$$

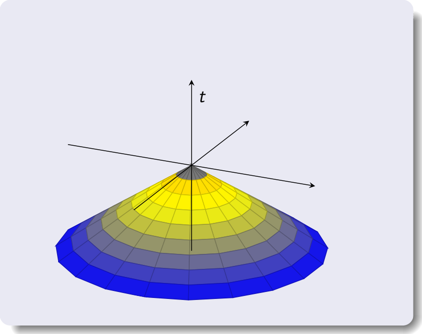
supp $G^- \subset$ cono luce **passato**



Il supporto della soluzione fondamentale **ritardata**

$$G^+(t, \mathbf{x}) = \frac{\Theta(t)}{4\pi} \frac{\delta(t - |\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}$$

supp G^+ è il **bordo** del cono luce **futuro**



Il supporto della soluzione fondamentale **avanzata**

$$G^{-}(t, \mathbf{x}) = \frac{\Theta(-t)}{4\pi} \frac{\delta(t + |\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}$$

supp G^{-} è il **bordo** del cono luce **passato**

Il supporto di $G^{\pm}$ coincide con il bordo del cono luce solo se $n > 2$ è pari.

Le onde luminose in 3D si propagano solo sulla **superficie sferica** del fronte d'onda.

Su di una superficie 2D l'effetto dell'onda viene percepito anche dopo che il segnale è arrivato.

Il supporto di $G^{\pm}$ coincide con il bordo del cono luce solo se $n > 2$ è pari.

Le onde luminose in 3D si propagano solo sulla **superficie sferica** del fronte d'onda.

Su di una superficie 2D l'effetto dell'onda viene percepito anche dopo che il segnale è arrivato.

Il supporto di $G^{\pm}$ coincide con il bordo del cono luce solo se $n > 2$ è pari.

Le onde luminose in 3D si propagano solo sulla **superficie sferica** del fronte d'onda.

Su di una superficie 2D l'effetto dell'onda viene percepito anche dopo che il segnale è arrivato.