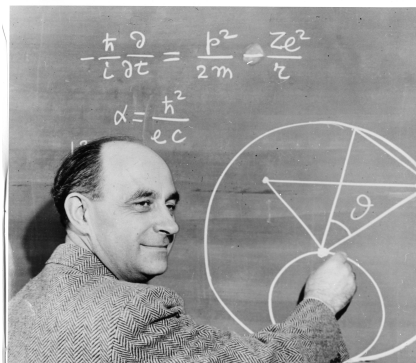


# La Teoria di Fermi sul Decadimento $\beta$

Angelo Caravano



Il decadimento  $\beta$  è una reazione nucleare nella quale avviene una trasformazione tra due nuclei isobari.

La trasformazione segue la legge esponenziale dei decadimenti radioattivi:

$$n(t) = n_0 e^{-\lambda t}$$

- $\beta^-$

$$A(Z, N) \rightarrow A(Z + 1, N - 1) + e^- + \bar{\nu}$$

# I tipi di decadimento

- $\beta^-$

$$A(Z, N) \rightarrow A(Z + 1, N - 1) + e^- + \bar{\nu}$$

- $\beta^+$

$$A(Z, N) \rightarrow A(Z - 1, N + 1) + e^+ + \nu$$

# I tipi di decadimento

- $\beta^-$

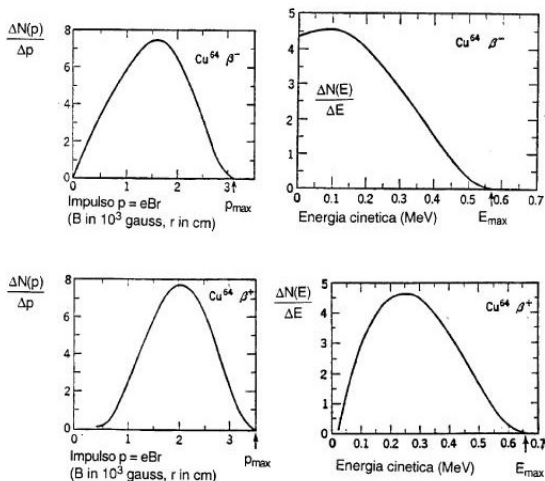
$$A(Z, N) \rightarrow A(Z + 1, N - 1) + e^- + \bar{\nu}$$

- $\beta^+$

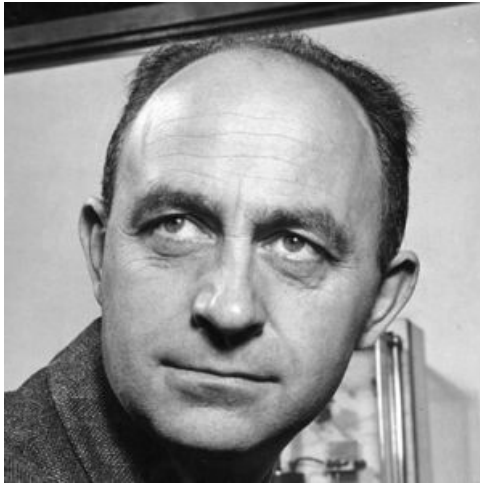
$$A(Z, N) \rightarrow A(Z - 1, N + 1) + e^+ + \nu$$

- Cattura elettronica (CE)

$$A(Z, N) + e^- \rightarrow A(Z - 1, N + 1) + \nu$$



**Fig. 7.1.** Esempi di spettro d'impulso e di energia cinetica per i decadimenti  $\beta^-$  e  $\beta^+$  del  $^{64}\text{Cu}$ . L'impulso è dato in unità Br con r raggio di curvatura misurato con lo spettrometro (vedi fig. 7.9 e relativa didascalia). [1]



**FERMI tutti, vi spiego io!**

Secondo la teoria di Fermi il decadimento  $\beta$  è il risultato dell'interazione del nucleone con il campo di forze prodotto dalla coppia elettrone-neutrino, che non esisteva nel nucleo ma è creata solo al momento della trasformazione.

Questa, a causa della sua natura, è chiamata **interazione "debole"**.

Ciò permette di utilizzare i risultati della teoria delle perturbazioni.



# Teoria delle perturbazioni

Supponiamo che un sistema non perturbato abbia due stati  $\psi_a$  e  $\psi_b$ , autostati dell'hamiltoniana non perturbata  $H_0$  con autovalori  $E_a$  e  $E_b$  tali che  $E_a < E_b$ . Questo equivale a dire

$$H_0\psi_a = E_a\psi_a \quad H_0\psi_b = E_b\psi_b \quad \langle\psi_a|\psi_b\rangle = \delta_{ab}$$

e che una generica  $\psi$  può essere scritta come:

$$\psi(0) = c_a\psi_a + c_b\psi_b \quad \psi(t) = c_a\psi_a e^{-\frac{i}{\hbar}E_a t} + c_b\psi_b e^{-\frac{i}{\hbar}E_b t} \quad |c_a|^2 + |c_b|^2 = 1$$

Se ora perturbiamo il sistema aggiungendo un'hamiltoniana  $H'(t)$ , abbiamo lo stesso risultato con l'unica differenza che i coefficienti dipenderanno dal tempo:

$$\psi(t) = c_a(t)\psi_a e^{-\frac{i}{\hbar}E_a t} + c_b(t)\psi_b e^{-\frac{i}{\hbar}E_b t}$$

Per trovare i coefficienti useremo l'equazione di Schrödinger:

$$H\psi = i\hbar \frac{\partial \psi}{\partial t} \quad H = H_0 + H'(t)$$

ottenendo, grazie a  $H_0\psi_a = E_a\psi_a$ ,  $H_0\psi_b = E_b\psi_b$ :

$$c_a[H'\psi_a]e^{-\frac{i}{\hbar}E_a t} + c_b[H'\psi_b]e^{-\frac{i}{\hbar}E_b t} = i\hbar[\dot{c}_a\psi_a e^{-\frac{i}{\hbar}E_a t} + \dot{c}_b\psi_b e^{-\frac{i}{\hbar}E_b t}]$$

# Teoria delle perturbazioni

Prendendo il prodotto interno dell'espressione precedente con  $\psi_a$  e sfruttando l'ortogonalità:

$$c_a \langle \psi_a | H' | \psi_a \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_a t} + c_b \langle \psi_a | H' | \psi_b \rangle e^{-\frac{i}{\hbar} E_b t} = i \hbar \dot{c}_a e^{-\frac{i}{\hbar} E_a t}$$

Definiamo ora  $H'_{if} = \langle \psi_i | H' | \psi_j \rangle$  e moltiplichiamo tutto per  $-\frac{i}{\hbar} e^{\frac{i}{\hbar} E_a t}$ :

$$\dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar} [c_a H'_{aa} + c_b H'_{ab} e^{-\frac{i}{\hbar} (E_b - E_a) t}]$$

Immaginiamo di aver fatto lo stesso con  $\psi_b$  e inoltre supponiamo che  $H'_{aa} = H'_{bb} = 0$ , ottenendo:

$$\dot{c}_a = -\frac{i}{\hbar} H'_{ab} e^{-i\omega_0 t} c_b \quad \dot{c}_b = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} c_a \quad \omega_0 = \frac{E_b - E_a}{\hbar}$$

Supponiamo ora che  $H'$  sia una perturbazione molto debole, e cerchiamo di approssimare al prim'ordine  $c_a$  e  $c_b$  ponendo  $c_a = c_a^0 + c_b^1$  e  $c_b = c_b^0 + c_b^1$ , dove i  $c_i^1$  sono le correzioni al prim'ordine. Supponiamo che prima della perturbazione il sistema si trovi nello stato a energia più bassa:  $c_a(0) = 1$  e  $c_b(0) = 0$ . Calcoliamo ora i coefficienti dell'espansione usando le formule ricavate prima:

$$c_a^0(t) = 1 \quad c_b^0(t) = 0$$

$$\frac{dc_a}{dt} = 0 \Rightarrow c_a^1(t) = 1$$

$$\frac{dc_b}{dt} = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} e^{i\omega_0 t} \Rightarrow c_b^1(t) = -\frac{i}{\hbar} \int_0^t H'_{ba}(t') e^{i\omega_0 t'} dt'$$

La probabilità di trovare il sistema nello stato eccitato  $b$  dopo un tempo  $t$  sarà data quindi da  $|c_b(t)|^2 = |c_b^0(t) + c_b^1(t)|^2 = |c_b^1(t)|^2$

Consideriamo ora un potenziale del tipo

$$H'(t) = 0 \text{ se } t < 0, H'(t) = H' \text{ se } t \geq 0$$

ovvero un potenziale costante che accendiamo al tempo  $t = 0$ . Così facendo abbiamo:

$$c_b^1(t) = -\frac{i}{\hbar} H'_{ba} \int_0^t e^{i\omega_0 t'} dt' = \frac{H'_{ba}}{E_b - E_a} (1 - e^{i\omega_0 t})$$

e

$$|c_b^1(t)|^2 = \frac{|H'_{ba}|^2}{|E_b - E_a|^2} (2 - 2 \cos(\omega_0 t)) = \frac{4|H'_{ba}|^2}{|E_b - E_a|^2} \sin^2 \left[ \frac{(E_b - E_a)t}{2\hbar} \right]$$

Dalla quale si nota che la probabilità che avvenga una transizione dipende anche dal salto di energia. Facciamo ora un'ulteriore ipotesi: lo stato finale  $b$  non è isolato, ma c'è un continuo di stati finali con energia  $E \approx E_b$ .

Le considerazioni fatte fin'ora non cambiano, con l'eccezione che la probabilità che avvenga una transizione non è più semplicemente  $|c_b^1(t)|^2$  ma è

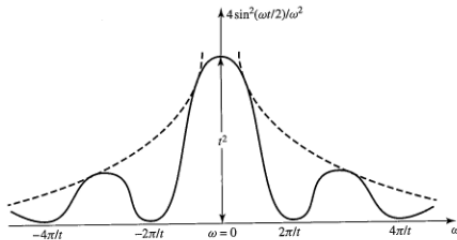
$$P_{a \rightarrow b} = \int |c_b^1(t)|^2 \frac{dN}{dE} dE_b$$

dove  $\frac{dN}{dE}$  è la densità di stati finali con energia  $\approx E_b$   
Consiamo inoltre il seguente limite:

$$\lim_{a \rightarrow \infty} \frac{\sin^2(ax)}{\pi ax^2} = \delta(x)$$

grazie al quale, per t molto grandi:

$$\frac{1}{|E_b - E_a|^2} \sin^2 \left[ \frac{(E_b - E_a)t}{2\hbar} \right] \approx \frac{\pi t}{2\hbar} \delta(E_b - E_a)$$



**FIGURE 5.8** Plot of  $4 \sin^2(\omega t/2)/\omega^2$  versus  $\omega$  for a fixed  $t$ , where in  $\omega = (E_n - E_i)/\hbar$  we have regarded  $E_n$  as a continuous variable.

Grazie a questo abbiamo, solo per tempi lunghi:

$$P_{a \rightarrow b} = \int |c_b^1(t)|^2 \frac{dN}{dE} dE_b \approx \frac{2\pi}{\hbar} |H'_{ba}|^2 \frac{dN}{dE} t$$

# La regola d'oro di Fermi

Riassumendo, la probabilità per unità di tempo che un sistema perturbato passi da uno stato iniziale a uno stato finale è data da quella che viene chiamata regola d'oro di Fermi:

$$\frac{P_{a \rightarrow b}}{t} = w = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{fi}|^2 \frac{dN}{dE} \quad (1)$$

Dove:

- $H_{fi}$  è l'elemento di matrice di transizione
- $\frac{dN}{dE}$  è la densità di stati finali

Sarà utile considerare anche la seguente densità di probabilità:

$$\frac{dw}{dp_e} = \frac{2\pi}{\hbar} |H_{fi}|^2 \frac{d^2 N}{dE dp_e} \quad (2)$$

Che rappresenta, nel nostro caso, la probabilità che un elettrone venga emesso con impulso compreso tra  $p_e$  e  $p_e + dp_e$ .

# Densità degli stati finali

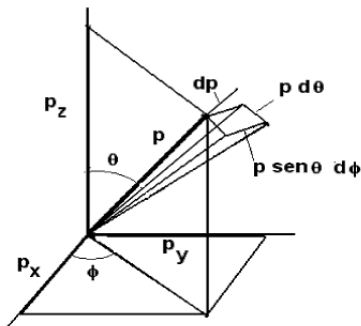


Fig. 7.19. Spazio degli impulsi.

Per particelle che si muovono liberamente in un volume  $\Omega$  il numero di stati con valori di impulso  $p_x, p_y, p_z$  contenuti nel volumetto infinitesimo  $dp_x dp_y dp_z$  dello spazio degli impulsi è:

$$d^3N = \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3} dp_x dp_y dp_z = \frac{\Omega}{(2\pi\hbar)^3} p^2 dp \sin \theta d\theta d\phi$$



Se integriamo su  $\theta$  e  $\phi$  otteniamo il numero di stati con modulo di impulso compreso tra  $p$  e  $p + dp$  posseduti da una particella che si muove liberamente nel volume  $\Omega$ :

$$dN = \frac{4\pi\Omega}{(2\pi\hbar)^3} p^2 dp$$

Nel nostro caso consideriamo il numero di stati disponibili per la coppia elettrone-antineutrino:

$$d^2N = \left( \frac{4\pi\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \right)^2 p_e^2 dp_e p_{\bar{\nu}}^2 dp_{\bar{\nu}} \quad (3)$$

Grazie alla conservazione della quantità di moto nel sistema nucleo-elettrone-antineutrino questa quantità rappresenta anche il numero di stati finali disponibili per il decadimento del nucleo.

# Densità degli stati finali

Oppure, considerando le relazioni

$$E_0 = E_e + E_{\bar{\nu}} = E_e + \sqrt{p_{\bar{\nu}}^2 c^2 + m_{\bar{\nu}}^2 c^4}$$

$$c^2 p_{\bar{\nu}}^2 = (E_0 - E_e)^2 - m_{\bar{\nu}}^2 c^4 \quad c^2 p_{\bar{\nu}} dp_{\bar{\nu}} = (E_0 - E_e) dE_0$$

La (3) diventa:

$$d^2 N = \left( \frac{4\pi\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \right)^2 \frac{1}{c^3} p_e^2 (E_0 - E_e) \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_{\bar{\nu}}^2 c^4} dp_e dE_0$$

E quindi:

$$\frac{d^2 N}{dp_e dE_0} = \left( \frac{4\pi\Omega}{(2\pi\hbar)^3} \right)^2 \frac{1}{c^3} p_e^2 (E_0 - E_e) \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_{\bar{\nu}}^2 c^4} \quad (4)$$

# Elemento di matrice di transizione

L'elemento di matrice di transizione che compare nella (1) risulta essere, per definizione:

$$H_{fi} = \langle \psi_f | H | \psi_i \rangle = \int \psi_f^* H \psi_i d\tau$$

Dove  $H$  è l'operatore responsabile dell'interazione,  $\psi_i = u_i$  è l'autofunzione del nucleo iniziale e  $\psi_f = u_f \psi_e \psi_{\bar{\nu}}$  è il prodotto delle autofunzioni finali del nucleo, dell'elettrone e dell'antineutrino. L'ipotesi fondamentale della teoria è che l'interazione avvenga solamente quando l'elettrone, il neutrino e il nucleone sono praticamente sovrapposti. Ciò si traduce matematicamente in:

$$H = g \delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_{\bar{\nu}} - \mathbf{r})$$

e quindi

$$H_{fi} = g \int \psi_e^*(\mathbf{r}_e) \psi_{\bar{\nu}}^*(\mathbf{r}_{\bar{\nu}}) u_f^*(\mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r}) \delta(\mathbf{r}_{\bar{\nu}} - \mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}_e d\mathbf{r}_{\bar{\nu}} d\mathbf{r}$$

$$H_{fi} = g \int \psi_e^*(\mathbf{r}_e) \psi_{\bar{\nu}}^*(\mathbf{r}_{\bar{\nu}}) u_f^*(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r}$$

# Elemento di matrice di transizione

Funzione d'onda di elettrone e antineutrino

Trascurando per un attimo l'interazione coulombiana tra l'elettrone e il nucleo, l'elettrone e il neutrino possono essere scritte come onde piane:

$$\psi_e = \frac{1}{\Omega^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_e \cdot \mathbf{r}} \quad \psi_{\bar{\nu}} = \frac{1}{\Omega^{\frac{1}{2}}} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{p}_{\bar{\nu}} \cdot \mathbf{r}}$$

$$\psi_e \psi_{\bar{\nu}} = \frac{1}{\Omega} e^{\frac{i}{\hbar} (\mathbf{p}_{\bar{\nu}} + \mathbf{p}_e) \cdot \mathbf{r}} = \frac{1}{\Omega} e^{\frac{i}{\hbar} \mathbf{k} \cdot \mathbf{r}}$$

Sappiamo inoltre che un'onda piana può essere sviluppata in armoniche sferiche. Infatti, se  $\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \ll 1$  abbiamo:

$$\begin{aligned} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{r} \cos \theta} &= \sum_{\ell=0}^{\infty} i^{\ell} \frac{(2\ell+1)}{(2\ell+1)!!} (kr)^{\ell} P_{\ell}(\cos \theta) = \\ &= 1 + ikr \cos \theta + i^2 \frac{1}{3} (kr)^2 \frac{1}{2} (3 \cos^2(\theta) - 1) + \dots \end{aligned}$$

Dove il primo termine è un'onda sferica con momento angolare orbitale  $\ell = 0$ , il secondo con momento  $\ell = 1$  e così via.

# Elemento di matrice di transizione

Funzione d'onda di elettrone e antineutrino

Tuttavia l'elemento di matrice ha il suo valore massimo per  $\ell = 0$  e con l'aumentare di  $\ell$  diminuisce molto velocemente. Consideriamo dunque le transizioni che sono caratterizzate da  $\ell = 0$ , che vengono dette transizioni "favorite". Con questo ragionamento abbiamo dunque:

$$\psi_e \psi_{\bar{\nu}} \approx \frac{1}{\Omega}$$

Dobbiamo ora tenere conto dell'effetto coulombiano. Visto che l'integrale nell'elemento di matrice è ridotto al nucleo, consideriamo solamente dell'effetto coulombiano per  $r$  molto piccoli, ovvero ponendo:

$$\psi_e \psi_{\bar{\nu}} = \frac{1}{\Omega} |\psi_e(0)|$$

# Elemento di matrice di transizione

Dove  $\psi_e(0)$  è la funzione d'onda dell'elettrone per  $\mathbf{r} = 0$ , che è una quantità nota:

$$|\psi_e(0)|^2 = \frac{2n\pi}{e^{2n\pi} - 1}$$

con

$$n = \mu \frac{zz'e^2}{\hbar k_e}, \quad z' = +1 \quad \text{per} \quad \beta^+, \quad z' = -1 \quad \text{per} \quad \beta^-$$

nelle quali  $k_e = \frac{p_e}{\hbar}$  e  $\mu$  = massa ridotta del sistema. Abbiamo quindi comportamenti diversi per i cari tipi di decadimenti:

- Nel decadimento  $\beta^-$ ,  $|\psi_e(0)|^2 > 1$ , cresce per  $p_e \rightarrow 0$  e tende a 1 al crescere di  $p_e$ ;
- nel decadimento  $\beta^+$ ,  $|\psi_e(0)|^2 < 1$ , decresce per  $p_e \rightarrow 0$  e tende a 1 al crescere di  $p_e$ .

# Elemento di matrice di transizione

Così facendo l'elemento di matrice diventa:

$$H_{fi} = |\psi_e(0)| \frac{g}{\Omega} \int u_f^*(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}) d\mathbf{r} \quad (5)$$

Quantità molto più facile da calcolare in quanto l'integrale dipende solamente dagli stati iniziale e finale del nucleo.

# Spettro energetico degli elettroni

Grazie ai risultati discussi la (2) diventa, utilizzando la (4) e la (5):

$$N(p_e) = \frac{dw}{dp_e} = \frac{g^2 |\psi_e(0)|^2}{\pi^3 c^3 \hbar^7} \left| \int u_f^*(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}) \right|^2 p_e^2 (E_0 - E_e) \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_{\bar{\nu}}^2 c^4} \quad (6)$$

Che si riduce, se si assume  $m_{\bar{\nu}} = 0$ :

$$N(p_e) = \frac{dw}{dp_e} = \frac{g^2 |\psi_e(0)|^2}{\pi^3 c^3 \hbar^7} \left| \int u_f^*(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}) \right|^2 p_e^2 (E_0 - E_e)^2$$



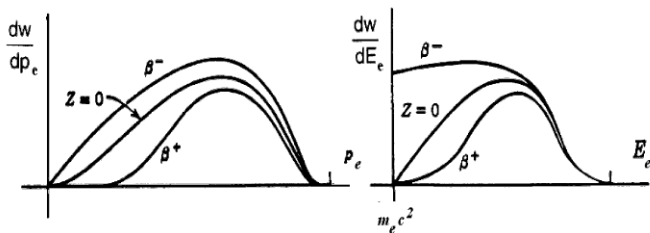
# Spettro energetico degli elettroni

Effetto del fattore  $|\psi_e(0)|^2$

Il risultato, come è possibile vedere in figura, è una funzione a campana nell'intervallo che va da  $p_e = 0$  a un certo  $p_e^{max}$  che corrisponde alla massima energia cinetica che possono avere gli elettroni:

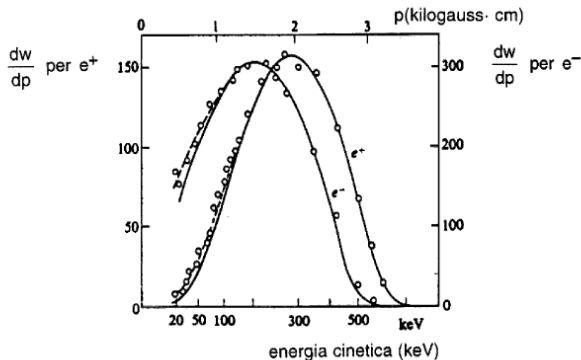
$T_e^{max} = E_0 - m_e$ , visto che  $E_0$  è la massima energia accessibile alla coppia elettrone-antineutrino.

Si evince anche l'importante effetto del fattore correttivo  $|\psi_e(0)|^2$ , che cambia a seconda del tipo di decadimento  $\beta$ .



**Fig. 7.11.** Effetto del fattore correttivo coulombiano sullo spettro d'impulso e d'energia totale degli elettroni nel decadimento  $\beta$ .

# Conferma sperimentale



**Fig. 7.12.** Spettri d'impulso degli elettroni e dei positroni nel decadimento  $\beta$  del  $^{64}\text{Cu}$  (eq. (7.51)). I cerchi sono dati sperimentali e le linee sono curve teoriche. Sull'ordinata le unità sono arbitrarie. [5]

# Conferma sperimentale

Costante di decadimento e vita media

Per il suo significato, la probabilità data dalla regola d'oro di Fermi (1) coincide con la costante di decadimento  $\lambda$ . Il suo inverso  $\tau = \frac{1}{\lambda}$  è detta costante di tempo e rappresenta il tempo necessario a ridurre la quantità iniziale di particelle di circa il 63,21%. Quindi:

$$w(p_e^{max}) = \lambda = \frac{1}{\tau} = \int_0^{p_e^{max}} \frac{dw}{dp_e} dp_e = \frac{g^2}{2\pi^2 c^3 \hbar^7} \left| \int u_f^*(\mathbf{r}) u_i(\mathbf{r}) \right|^2 f(z, p_e^{max})$$

dove

$$f(z, p_e^{max}) = \int_0^{p_e^{max}} |\psi_e(0)|^2 p_e^2 (E_0 - E_e) \sqrt{(E_0 - E_e)^2 - m_{\bar{\nu}}^2 c^4}$$

o, ponendo di nuovo  $m_{\bar{\nu}} = 0$ :

$$f(z, p_e^{max}) = \int_0^{p_e^{max}} |\psi_e(0)|^2 p_e^2 (E_0 - E_e)^2$$

Che ci spiega come mai il tempo di dimezzamento del decadimento  $\beta$  abbia un così grande campo di variabilità, ovvero da  $\approx 10^{-2} s$  a  $\approx 10^{24} s$  ( $10^{17}$  anni)

Fermi era dunque riuscito a spiegare le osservazioni riguardo il decadimento  $\beta$ , introducendo una teoria sorprendente: aveva dovuto ammettere l'esistenza di un nuovo tipo di interazione fondamentale, l'interazione debole, apparentemente indipendente dalle altre interazioni note (elettromagnetica e gravitazionale). Questa ha la forma:

$$H = g\delta(\mathbf{r}_e - \mathbf{r})\delta(\mathbf{r}_{\bar{\nu}} - \mathbf{r})$$

La costante  $g$  può essere determinata sperimentalmente e può assumere due valori diversi a seconda dei possibili valori di spin (sempre compatibili con  $\ell = 0$ ). Il primo quando lo spin complessivo di elettrone e antineutrino ha valore 0 (transizione di Fermi), l'altro in caso lo spin complessivo sia uguale a 1 (transizione di Gamow-Teller). Le costanti risultano essere:

$$g_F = 1.4156(6) \cdot 10^{-62} J \cdot m^3 = 0.883 \cdot 10^{-4} MeV \cdot fm^3$$

$$g_{GT} = -1.7908(22) \cdot 10^{-62} J \cdot m^3 = -1.117 \cdot 10^{-4} MeV \cdot fm^3$$

**Fermi vinse, grazie ai suoi studi, il premio Nobel nel 1938**



**"La professione del ricercatore deve tornare alla sua tradizione di ricerca per l'amore di scoprire nuove verità. Poiché in tutte le direzioni siamo circondati dall'ignoto e la vocazione dell'uomo di scienza è di spostare in avanti le frontiere della nostra conoscenza in tutte le direzioni, non solo in quelle che promettono più immediati compensi o applausi."**