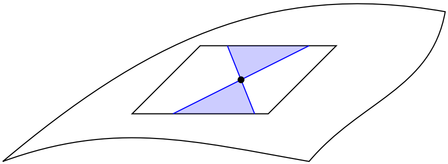
Soluzioni fondamentali per equazioni di tipo onda su varietà curve

Rubens Longhi

$$\Box u = \delta$$



Equazioni di tipo ondulatorio

Gli operatori di tipo ondulatorio P appaiono in molti sistemi fisici

- Operatore d'onda: il d'Alembertiano

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

- Equazioni di Maxwell

$$\Box A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 4\pi J^\mu$$

- Equazione di Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\psi = 0$$

Equazioni di tipo ondulatorio

Gli operatori di tipo ondulatorio P appaiono in molti sistemi fisici

- Operatore d'onda: il d'Alembertiano

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

- Equazioni di Maxwell

$$\Box A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 4\pi J^\mu$$

- Equazione di Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\psi = 0$$

Equazioni di tipo ondulatorio

Gli operatori di tipo ondulatorio $\not{P}$ appaiono in molti sistemi fisici

- Operatore d'onda: il d'Alembertiano

$$\Box = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_j^2}$$

- Equazioni di Maxwell

$$\Box A^\mu - \partial^\mu \partial_\nu A^\nu = 4\pi J^\mu$$

- Equazione di Klein-Gordon

$$(\Box + m^2)\psi = 0$$

- Vogliamo risolvere su una varietà M una qualsiasi equazione differenziale non omogenea

$$Pf = \psi$$

nell'incognita f con generica sorgente ψ.

- La studiamo nel caso di una sorgente elementare deltiforme nel punto x

$$Pu_x = \delta_x$$

e cerchiamo soluzioni distribuzionali $u_x \in \mathcal{D}'(\mathrm{M})$.

- Troviamo una soluzione a $Pf = \psi$ integrando opportunamente la soluzione fondamentale su tutti i punti $x \in \operatorname{supp} \psi$.

- Vogliamo risolvere su una varietà M una qualsiasi equazione differenziale non omogenea

$$Pf = \psi$$

nell'incognita f con generica sorgente ψ.

- La studiamo nel caso di una sorgente elementare deltiforme nel punto x

$$Pu_x = \delta_x$$

e cerchiamo soluzioni distribuzionali $u_x \in \mathcal{D}'(\mathrm{M})$.

- Troviamo una soluzione a $Pf = \psi$ integrando opportunamente la soluzione fondamentale su tutti i punti $x \in \operatorname{supp} \psi$.

- Vogliamo risolvere su una varietà M una ~~qualsiasi~~ equazione differenziale non omogenea

$$Pf = \psi$$

nell'incognita f con generica sorgente ψ.

- La studiamo nel caso di una sorgente elementare deltiforme nel punto x

$$Pu_x = \delta_x$$

e cerchiamo soluzioni distribuzionali $u_x \in \mathcal{D}'(\mathrm{M})$.

- Troviamo una soluzione a $Pf = \psi$ integrando opportunamente la soluzione fondamentale su tutti i punti $x \in \operatorname{supp}\psi$.

Spaziotempo piatto di Minkowski $\mathbb{M}^n \to 1$ dimensione temporale e n dimensioni spaziali

La simmetria per traslazione ci consente di limitare il problema per $\Box$ all'origine:

$$\Box u_0 = \delta_0$$

e di utilizzare la tecnica della trasformata di Fourier.

Spaziotempo piatto di Minkowski $\mathbb{M}^n \to 1$ dimensione temporale e n dimensioni spaziali

La simmetria per traslazione ci consente di limitare il problema per $\Box$ all'origine:

$$\Box u_0 = \delta_0$$

e di utilizzare la tecnica della trasformata di Fourier.

Spaziotempo piatto di Minkowski $\mathbb{M}^n \to 1$ dimensione temporale e n dimensioni spaziali

La simmetria per traslazione ci consente di limitare il problema per $\Box$ all'origine:

$$\Box u_0 = \delta_0$$

e di utilizzare la tecnica della trasformata di Fourier.

Le soluzioni fondamentali ritardata e avanzata

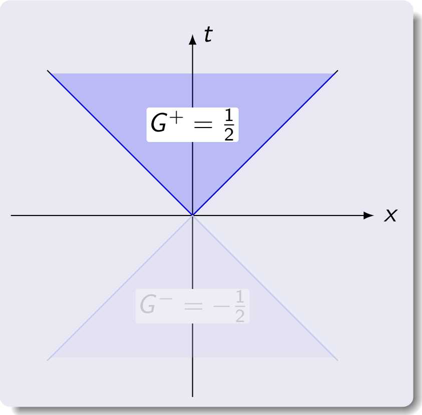
La PDE in $(t, \mathbf{x})$ diventa l'equazione algebrica nello spazio delle fasi $(\omega, \mathbf{k})$

$$(|\mathbf{k}|^2 - \omega^2)\widehat{u} = 1$$

Troviamo due soluzioni **indipendenti**, che danno luogo a due soluzioni fondamentali G^+ e G^- dette **ritardata** e **avanzata**

supp G^+ è nel **futuro causale**

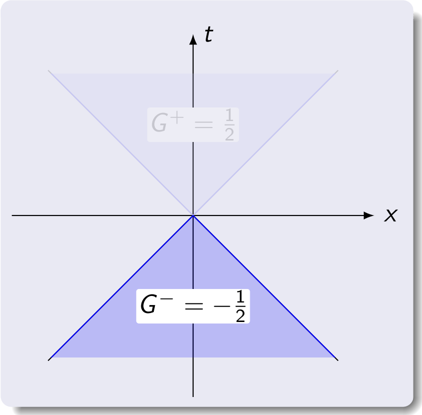
supp G^- è nel **passato causale**



La soluzione fondamentale **ritardata**

$$G^+(t, x) = \frac{\Theta(t - |x|)}{2}$$

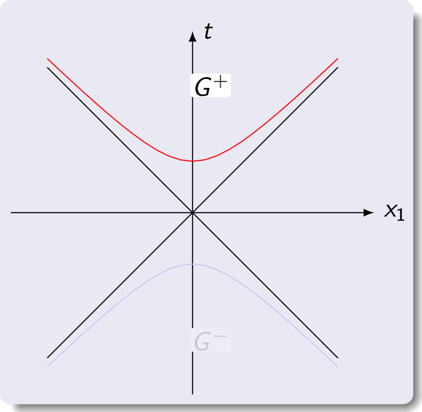
supp G^+ è il cono luce **futuro**



La soluzione fondamentale **avanzata**

$$G^-(t,x) = -\frac{\Theta(t+|x|)}{2}$$

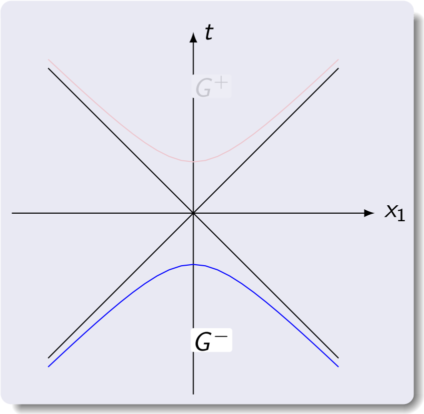
supp G^- è il cono luce **passato**



Un insieme di livello della soluzione fondamentale **ritardata**

$$G^+(t, \mathbf{x}) = \frac{\Theta(t)}{2\pi} \frac{\Theta(t^2 - |\mathbf{x}|^2)}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{x}|^2}}$$

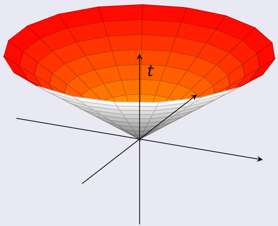
supp $G^+ \subset$ cono luce **futuro**



Un insieme di livello della soluzione fondamentale **avanzata**

$$G^-(t, \mathbf{x}) = \frac{\Theta(-t)}{2\pi} \frac{\Theta(t^2 - |\mathbf{x}|^2)}{\sqrt{t^2 - |\mathbf{x}|^2}}$$

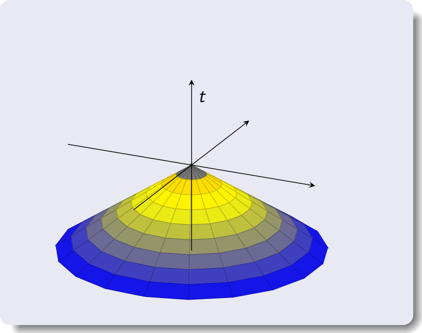
supp $G^- \subset$ cono luce **passato**



Il supporto della soluzione fondamentale **ritardata**

$$G^+(t, \mathbf{x}) = \frac{\Theta(t)}{4\pi} \frac{\delta(t - |\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}$$

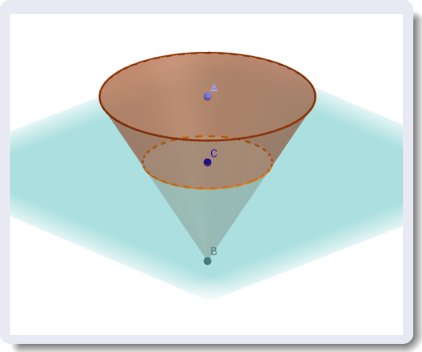
supp G^+ è il **bordo** del cono luce **futuro**



Il supporto della soluzione fondamentale **avanzata**

$$G^{-}(t, \mathbf{x}) = \frac{\Theta(-t)}{4\pi} \frac{\delta(t + |\mathbf{x}|)}{|\mathbf{x}|}$$

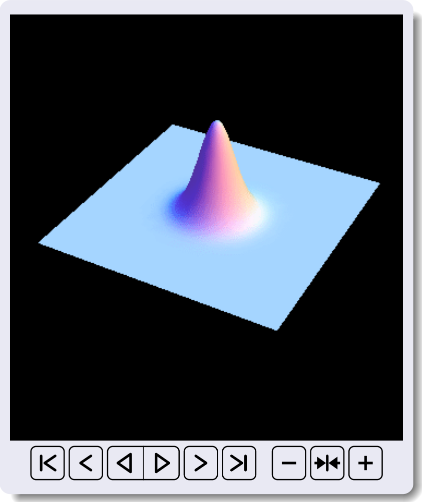
supp G^{-} è il **bordo** del cono luce **passato**



Il supporto di $G^{\pm}$ coincide con il bordo del cono luce solo se $n > 1$ è dispari.

In 2D l'effetto dell'onda viene percepito **anche dopo** che il segnale è arrivato.

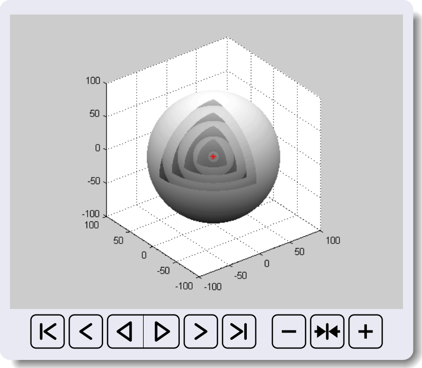
Le onde 3D si propagano solo sulla **superficie sferica** del fronte d'onda.



Il supporto di $G^{\pm}$ coincide con il bordo del cono luce solo se $n > 1$ è dispari.

In 2D l'effetto dell'onda viene percepito **anche dopo** che il segnale è arrivato.

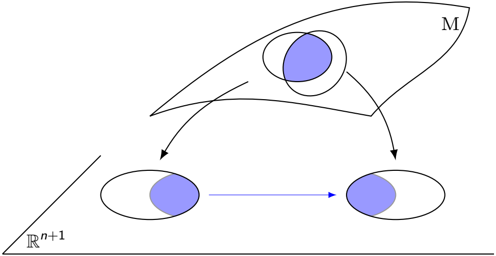
Le onde 3D si propagano solo sulla **superficie sferica** del fronte d'onda.

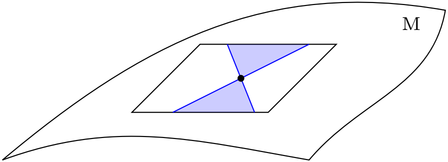


Il supporto di $G^{\pm}$ coincide con il bordo del cono luce solo se $n > 1$ è dispari.

In 2D l'effetto dell'onda viene percepito **anche dopo** che il segnale è arrivato.

Le onde 3D si propagano solo sulla **superficie sferica** del fronte d'onda.



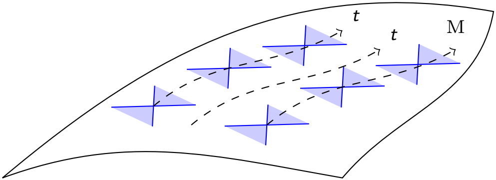


Una varietà differenziabile $\mathbb{M}$ è **localmente omeomorfa** allo spaziotempo piatto

Il tangente è Minkowski

Gli spazitempi fisici possiedono **un'orientazione temporale** ben definita

Lo spaziotempo come varietà differenziabile



Una varietà differenziabile M è **localmente omeomorfa** allo spaziotempo piatto

Il tangente è Minkowski

Gli spazitempi fisici possiedono **un'orientazione temporale** ben definita

Operatori d'onda in ambiente curvo

Gli operatori di tipo ondulatorio si generalizzano in base alla **metrica** locale g

Operatore generalizzato di d'Alembert

$$P = -g^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + a^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j} + b(x)$$

Cade la simmetria traslazionale. La soluzione fondamentale

$$Pu_x = \delta_x$$

deve essere cercata **punto per punto** senza poter usare Fourier

Operatori d'onda in ambiente curvo

Gli operatori di tipo ondulatorio si generalizzano in base alla **metrica** locale g

Operatore generalizzato di d'Alembert

$$P = -g^{ij}(x)\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j} + a^j(x)\frac{\partial}{\partial x^j} + b(x)$$

Cade la simmetria traslazionale. La soluzione fondamentale

$$Pu_x = \delta_x$$

deve essere cercata **punto per punto** senza poter usare Fourier

Operatori d'onda in spazitempi di interesse fisico

- Lo spaziotempo **cosmologico**

$$\mathrm{M}_c = \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$$

con metrica $g_c = -\mathrm{d}t^2 + f^2(t)\,\mathrm{d}\mathbf{x}^2$ e operatore d'onda

$$P_c = \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{1}{f^2(t)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial^2}{\partial x_i^2},$$

descrive un universo con fattore di espansione $f(t)$

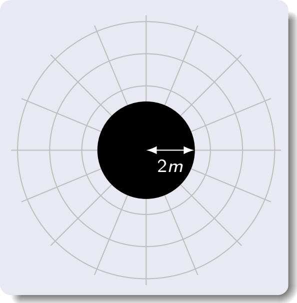
- Lo spaziotempo di **Schwartzschild**

$$\mathrm{M}_s = \mathbb{R} \times (2m, +\infty) \times S^2$$

con operatore d'onda

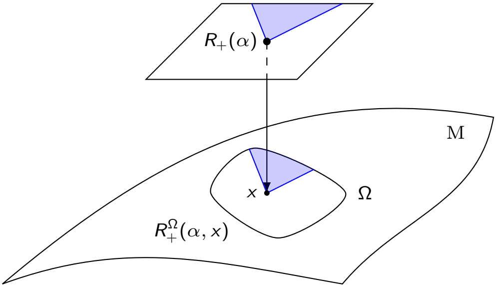
$$P_s = \left(1 - \frac{2m}{r}\right)^{-1} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \left(1 - \frac{2m}{r}\right) \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \Delta_{\vartheta,\varphi}$$

descrive l'esterno di un **buco nero** non rotante di massa m e raggio $2m$



La soluzione fondamentale locale

Troviamo la soluzione fondamentale sul tangente sfruttando le **distribuzioni di Riesz** $R_{\pm}(\alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{C}$, trasportabili in un intorno Ω di $x \in \mathrm{M}$.

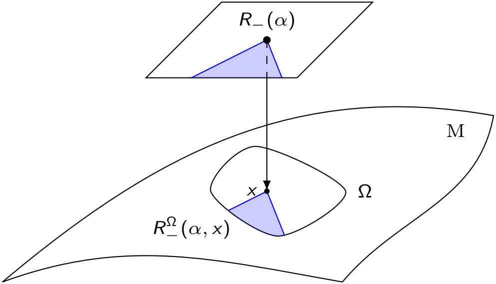


La soluzione fondamentale locale **ritardata** G^{+} in x per P è trovata combinando opportunamente

$$R_{+}^{\Omega}(2 + 2k, x)$$

La soluzione fondamentale locale

Troviamo la soluzione fondamentale sul tangente sfruttando le **distribuzioni di Riesz** $R_{\pm}(\alpha)$, con $\alpha \in \mathbb{C}$, trasportabili in un intorno Ω di $x \in \mathrm{M}$.

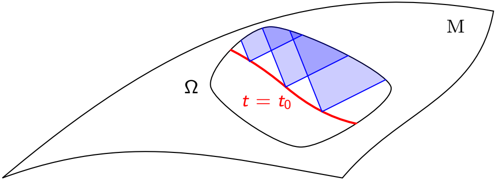


La soluzione fondamentale locale **avanzata** G^{-} in x per P è data combinando opportunamente

$$R_{-}^{\Omega}(2 + 2k, x)$$

Il problema ai dati iniziali locale

Poniamo il problema ai dati iniziali in un sottoinsieme $\Omega \subset \mathrm{M}$ nel quale possiamo trovare un'ipersuperficie a **tempo fissato** $t = t_0$.



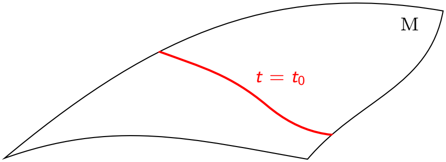
Problema ai dati iniziali

$$\begin{cases} Pu = \psi \\ u(t_0, \cdot) = u_0 \\ \frac{\partial}{\partial t} u(t_0, \cdot) = u_1 . \end{cases}$$

Il problema in avanti è risolto in Ω propagando i dati iniziali con G^+.
Se sorgente e dati iniziali (ψ, u_0, u_1) sono regolari, la soluzione è **liscia** e **unica**

Il problema ai dati iniziali globale

- Nonostante l'orientazione temporale, non è sempre possibile trovare un tempo comune globale per impostare il problema

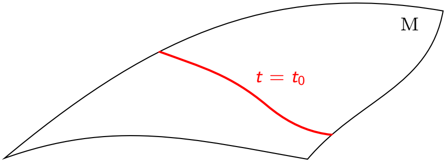


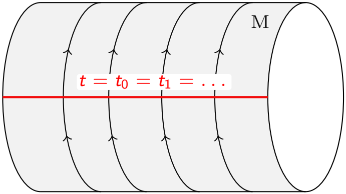
- Se lo spaziotempo è *avvolto* su se stesso, un evento può corrispondere a tempi diversi $\longrightarrow$ **Paradossi spaziotemporali**

Uno spaziotempo con tempo globale e senza paradossi è detto **globalmente iperbolico**

Il problema ai dati iniziali globale

- Nonostante l'orientazione temporale, non è sempre possibile trovare un ~~tempo comune globale~~ per impostare il problema

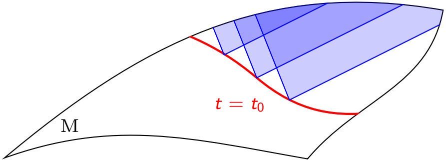




- Se lo spaziotempo è ~~*avvolto* su se stesso,~~ un evento può corrispondere a tempi diversi $\longrightarrow$ **Paradossi spaziotemporali**

Uno spaziotempo con tempo globale e senza paradossi è detto **globalmente iperbolico**

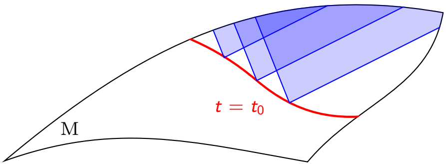
- Se lo spaziotempo è globalmente iperbolico, combinando opprotunamente le soluzioni fondamentali locali si ottiene una soluzione **globale** al problema di Cauchy

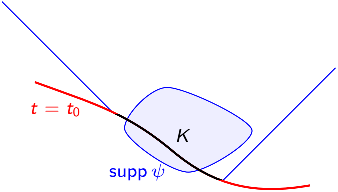


- La soluzione esiste, è unica e si propaga solo nel **futuro causale** del supporto dei dati iniziali

Il problema ai dati iniziali globale

- Se lo spaziotempo è globalmente iperbolico, combinando opprotunamente le soluzioni fondamentali locali si ottiene una soluzione **globale** al problema di Cauchy





- La soluzione esiste, è unica e si propaga solo nel **futuro causale** del supporto dei dati iniziali