QXD0017 - Lógica para Computação
– Lista de exercícios –

Paulo T. Guerra

1. Encontre predicados apropriados e suas especificações para codificar as frases a seguir na Lógica de Primeira Ordem. (Siga o modelo do exemplo.)

   Exemplo: Todas as coisas vermelhas estão na caixa.

$V(x)$:	x é uma coisa vermelha
$C(x)$:	x está na caixa

   $$\forall x(V(x) \to C(x))$$

   (a) Só coisas vermelhas estão na caixa.
   (b) Todas as medalhas foram ganhas por brasileiros.
   (c) Um brasileiro ganhou todas as medalhas.
   (d) Os primatas tem pelos, mas nem sempre tem calda.

2. Suponha que $F(x, y)$ significa que x é pai de y; $M(x, y)$ significa que x é a mãe de y. Analogamente, $H(x, y)$, $S(x, y)$ e $B(x, y)$ dizem que x é marido, irmã e irmão de y. Você pode também usar constantes e e p para denotar indivíduos, como "Edu" e "Paula", respectivamente. No entanto, não é permitido usar outros símbolos predicados diferentes dos aqui enunciados para codificar as frases a seguir na lógica de predicados:

   (a) Todos têm uma mãe
   (b) Todos têm um pai e uma mãe
   (c) Todos que tem uma mãe têm um pai
   (d) Edu é um avô
   (e) Todos os pais são pais ou mães
   (f) Nenhum tio é tia
   (g) Todos os irmãos são irmãos ou irmãs
   (h) Nenhuma avó é pai de alguém
   (i) Edu e Paula são marido e mulher
   (j) Carlos é cunhado de Monique

3. Seja $\mathbb{F} = \emptyset$ e $\mathbb{P} = \{E\}$ o conjunto de símbolos funcionais e de predicado, respectivamente. Seja $M = (A, l, v)$ a interpretação tal que

   - $A = \{a, b, c, d\}$
   - $v(E) = \{(a, b), (b, a), (b, c), (c, c)\}$

   Indique para cada fórmulas abaixo se M a satisfaz ou não. Justifique.

(a) $\exists x E(x,x)$ *(Exemplo: $\exists x E(x,x)$ é satisfeito, pois para $x = c$, $E(x,x)$ é verdade.)*

(b) $\forall x E(x,x)$

(c) $\forall x \exists y E(x,y)$

(d) $\forall x \forall y (E(x,y) \leftrightarrow E(y,x))$

(e) $\exists x \forall y \neg E(y,x)$

4. Para cada fórmula φ abaixo, encontre dois modelos M_1 e M_2 tais que $M_1 \models \varphi$ e $M_2 \not\models \varphi$.

   (a) $\exists z \forall x \forall y Q(g(x,y), g(y,y), z)$

   (b) $\forall x \exists y \exists z (P(x,y) \wedge P(z,y) \wedge (P(x,z) \to P(z,x)))$

5. Mostre que os sequentes a seguir **não** são consequências lógicas, apresentando um modelo sobre o conjunto concreto A $= \{a, b, c\}$ que satisfaz todas as premissas, mas não a conclusão.

   (a) $\forall x \exists y S(x,y) \not\models \exists y \forall x S(x,y)$

   (b) $\forall x (P(x) \vee Q(x)) \not\models \forall x P(x) \vee \forall x Q(x)$

   (c) $\forall x (P(x) \to Q(x)) \not\models \exists x (\neg P(x) \wedge Q(x))$

   (d) $\exists x (\neg P(x) \wedge Q(x)) \not\models \forall x (P(x) \to Q(x))$

   (e) $\exists x (\neg P(x) \vee \neg Q(x)) \not\models \forall x (P(x) \vee Q(x))$

   (f) $(\forall x P(x)) \to L \not\models \forall x (P(x) \to L)$

   (g) $\exists x P(x), \exists y Q(y) \not\models \exists z (P(z) \wedge Q(z))$

   (h) $\exists x P(x), \forall x \exists y S(x,y), \forall x \neg S(x,x) \not\models \forall x (P(x) \to \exists y S(y,x))$

   (i) $\forall x (P(x) \to R(x)), \forall x (Q(x) \to R(x)) \not\models \exists x (P(x) \wedge Q(x))$

6. Prove os seguintes itens por meio do sistema de dedução natural.

   (a) $\forall x (P(x) \wedge Q(x)) \vdash (\forall x P(x) \wedge \forall x Q(x))$

   (b) $\forall x \forall y P(x,y) \vdash \forall y \forall x P(x,y)$

   (c) $\forall x (P \to Q(x)) \vdash (P \to \forall x Q(x))$

   (d) $\exists x (P(x) \vee Q(x)) \vdash (\exists x P(x) \vee \exists x Q(x))$

   (e) $\exists x (P(x) \wedge Q) \vdash (\exists x P(x)) \wedge Q$

   (f) $(\exists x P(x)) \wedge Q \vdash \exists x (P(x) \wedge Q)$

   (g) $\forall x (P(x) \vee Q) \vdash (\forall x P(x)) \vee Q$

   (h) $(\forall x P(x)) \vee Q \vdash \forall x (P(x) \vee Q)$

   (i) $\exists x (P(x) \to Q) \vdash (\forall x P(x)) \to Q$

   (j) $(\forall x P(x)) \to Q \vdash \exists x (P(x) \to Q)$

   (k) $\exists x (P \to Q(x)) \vdash P \to \exists x Q(x)$

   (l) $P \to \exists x Q(x) \vdash \exists x (P \to Q(x))$

   (m) $\vdash \exists x (P(x) \to \forall x P(x))$

   (n) $\forall x (P(x) \vee \exists y Q(y)) \vdash (\forall x P(x)) \vee (\exists y Q(y))$

   (o) $(\forall x P(x)) \vee (\exists y Q(y)) \vdash \exists y (\forall x P(x) \vee Q(y))$

   (p) $\exists y (\forall x P(x) \vee Q(y)) \vdash \exists y \forall x (P(x) \vee Q(y))$