

Orthogonale basisfuncties

24 november 2017

1. Beschouw de functie $f(x) = e^{-x} \sin(\pi x)$ op het interval $[-1, 1]$. Bereken voor deze functie de kleinste kwadraten veeltermbenadering van graad 4 waarbij de data $f(x_i), i = 0, \dots, 10$ gegeven zijn in de nulpunten van de Chebyshev veelterm $T_{11}(x)$.

Transformeer de veranderlijke zodat dezelfde functie $f(x)$ nu gedefinieerd is op $[-\pi, \pi]$. Bereken de kleinste kwadraten trigonometrische benadering van graad 2 (basisfuncties $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x$) door de equidistante datapunten $-\pi + 2\pi i/11, i = 0, \dots, 10$.

Maak telkens van de functie en de benadering een plot.

2. Beschouw de functie $f(x) = x(\pi - x)e^{-x}$ in het interval $[0, 2\pi]$. Bereken en plot de beste trigonometrische benadering van graad $n = 4$ voor $m + 1$ equidistante punten, met $m = 8, 16, 32$.

3. Beschouw de Runge functie $f(x) = \frac{1}{1 + 25(x/\pi)^2}$ op het interval $[-\pi, \pi]$. Bereken en plot de beste trigonometrische benadering van graad $n = 5$ voor $m + 1$ equidistante punten met $m = 20$.

Bereken en plot ook de kleinste kwadraten veeltermbenadering van graad $2n$ voor dezelfde equidistante punten.

4. Beschouw de functie $f(x) = x$ in het interval $[-\pi, \pi]$. Beschouw de $m + 1$ equidistante punten $x_i = -\pi + 2\pi(i - 1)/m$ met $i = 1, \dots, m + 1$ (maak de data periodisch door in de eindpunten de functiewaarde te vervangen door het gemiddelde van $f(-\pi)$ en $f(\pi)$). Bereken en plot de beste trigonometrische benadering van graad n voor $n = 1, \dots, 5$, gebaseerd op de discrete data in de punten x_i voor $i = 1, \dots, m$ met $m = 11$.

5. Beschouw de equidistante punten $x_k = 2k\pi/8, k = 0, \dots, 7$ en daarin de functiewaarden $f(x_k) = 1, k = 0, \dots, 3$ en $f(x_k) = -1, k = 4, \dots, 7$ die komen van de functie

$$f(x) = \begin{cases} +1, & 0 \leq x < \pi \\ -1, & \pi \leq x < 2\pi \end{cases}$$

Bereken de beste trigonometrische veelterm van de vorm

$$t(x) = \frac{a_0}{2} + a_1 \cos(x) + b_1 \sin(x).$$

Bereken tevens de interpolerende trigonometrische veelterm waarin de 8 basisfuncties $1, \cos(x), \sin(x), \dots, \sin(3x), \cos(4x)$ worden gebruikt. Plot beide benaderingen ten opzichte van de 8 datapunten.

6. Beschouw de functie $\cos(11x)$ op het interval $[0, 2\pi]$. Maak een grafiek. Welke zijn de nulpunten van deze functie? En welke zijn de extrema? Selecteer de datapunten $x_0 = 0, x_1 = \pi/2, x_2 = \pi$ en bereken de trigonometrische interpolant van de vorm

$$\frac{a_0}{2} + a_1 \cos x + b_1 \sin x$$

Plot de grafiek van de interpolant samen met die van de gegeven functie. Wat denk je dat de grote discrepantie veroorzaakt?