Opgave "Wetenschappelijk Programmeren"

tweede zittijd 2016–2017

De volgende opgaven moeten afgewerkt worden tegen uiterlijk 24/08 om 14.00 uur en het verslag en de gebruikte code dienen tegen dan per email ingestuurd te zijn. Van het verslag en de code wordt ook een afdruk meegebracht naar het theorie-examen. Gebruik de numerieke library GSL voor de floating-point bewerkingen. Wanneer exacte resultaten gevraagd worden, staat Maple ter beschikking.

(1) Beschouw de functie $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[0, \pi]$. Evalueer $f(x)$ in een voldoende aantal equidistante punten om een interpolerende veelterm $p(x)$ en een natuurlijke kubische splinebenadering $s(x)$ te bekomen zodanig dat de foutenkrommen $|(f-p)(x)|$ en $|(f-s)(x)|$ (waarvan je een plot mee afgeeft) voldoen aan

$$\begin{aligned} |(f-p)(x)| &\leq 10^{-10} \qquad 0 \leq x \leq \pi, \\ |(f-s)(x)| &\leq 10^{-10} \qquad 0 \leq x \leq \pi. \end{aligned}$$

Geef het aantal datapunten voor p en s. Dat kan natuurlijk verschillend zijn voor p en s. Waarom is de tweede afgeleide van de splinefunctie in begin- en eindpunt gelijk aan nul een goede keuze?

(2) We noemen $n+1$ het aantal datapunten dat in de eerste opgave de splinefunctie $s(x)$ opleverde. Bereken nu de beste parabool-benadering $q(x) = a + bx + cx^2$ op $[0, \pi]$ in de zin van de kleinste kwadraten (euclidische norm) met behulp van deze $n+1$ datapunten. Vergelijk met de veelterminterpolant en de spline en geef tevens een plot af van $|(f-q)(x)|$ voor $0 \leq x \leq \pi$.

(3) Beschouw de functie

$$f(x) = \begin{cases} -1, & -\pi \leq x < 0, \\ +1, & 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

We hebben van deze $f(x)$ nu de beschikking over een groot aantal waarden $f(x_i)$, in equidistante punten $x_i = -\pi + 2\pi i/n, i = 0, \ldots, n \geq 120$.

- Bereken een aantal veelterminterpolanten. Welke graad gebruik je? Welke interpolatiepunten?
- Bereken een aantal kleinste-kwadraten veeltermbenaderingen. In welke basis druk je de veelterm uit?
- Bereken een trigonometrische veelterminterpolant. Wat is het voordeel van equidistante datapunten te hebben?
- Bereken een trigonometrische kleinste-kwadraten approximant. Wat is het verschil tussen een even/oneven aantal termen?

(4) We noemen nu $n+1$ het aantal datapunten dat in de eerste opgave de interpolerende veelterm $p(x)$ opleverde. Schrijf het lineaire stelsel interpolatievoorwaarden neer

waarbij we voor $p(x)$ de notatie

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$$

hanteren. De coëfficiëntenmatrix A van dit lineaire stelsel heeft een Vandermonde structuur. Los het stelsel op voor de a_i m.b.v. GEPP en bereken eveneens het conditiegetal van A. Bepaal hiermee de orde van de relatieve fout op de oplossing.

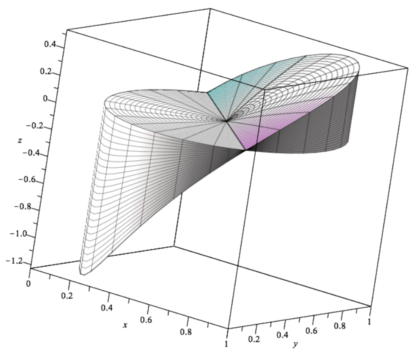
(5) Hieronder tonen we het cilindrisch volume met als grondvlak

$$\Omega = (x - 0.5)^2 + (y - 0.5)^2 \leq 0.25$$

en als hoogte $\ln(x + y)$. De inhoud I van dat volume is gegeven door

$$I = \int \int_{\Omega} |\ln(x + y)| \, dx \, dy.$$

Bereken de inhoud I numeriek met behulp van random number generatie. Bereken ook de exacte waarde van het volume in Maple en vergelijk hoeveel random getallen je moet genereren om twee beduidende cijfers te bekomen.



Succes!