DATA FITTING

1) In de volgende tabel staat het gewicht van een baby genoteerd zoals gemeten op de aangegeven data:

x_i	f_i
27/10/2001	2.8
19/11/2001	3.6
03/12/2001	4.4
20/12/2001	5.5
09/01/2002	6.4
23/01/2002	7.2
06/03/2002	8.3

Zet de datums om in een tijdsveranderlijke gemeten in dagen. Bereken dan de interpolerende veelterm, de stuksgewijs lineaire spline en de natuurlijke kubische spline. Stel ieder van deze functies samen met de data grafisch voor. Welke van de berekende functies verkies je en waarom?

2) Voor een polygonale spline $S(x)$ van graad 1 met knooppunten $t_1 < t_2 < \ldots < t_n$ geldt:

$$\delta = \max_{1\leq i\leq n-1}(t_{i+1} - t_i), \qquad \sup_{[t_1,t_n]} |f'(x)| = M, \qquad |f(x) - S(x)| \leq M\delta/2.$$

Schrijf een programma dat voor $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[0, \pi]$ de knooppunten voor een spline van graad 1 berekent zodat zodat

$$|f(x) - S(x)| < 10^{-2}.$$

Gebruik die knooppunten ook om de interpolerende veelterm door te trekken (je mag kiezen welke voorstelling je voor de veelterm gebruikt: power basis, Newton basis, Lagrange basis). Bespreek de resultaten.

3) Beschouw de functie $f(x) = \sin(x)$ op het interval $[0, 2\pi]$. Sample deze functie in 11 equidistante punten en bereken de Newtonvoorstelling en de Lagrangevoorstelling van de interpolerende veelterm $p_{10}(x)$ van graad 10. Plot f en de interpolerende veelterm p_{10}. Bereken nu enerzijds de natuurlijke kubische spline en anderzijds de kubische spline waarbij als extra voorwaarden $s"_0(x_0) = \sin"(x_0)$ en $s"_9(x_{10}) = \sin"(x_{10})$ wordt opgegeven. Plot de foutencurve ten opzichte van $f(x)$ voor beide splinevarianten.

4) De volgende tabel geeft de evolutie van het bevolkingscijfer van de USA weer:

t	1900	1910	1920	1930	1940	1950
y	75.995	91.972	105.711	123.203	131.669	150.697
t	1960	1970	1980	1990	2000	2010
y	179.323	203.212	226.505	249.633	281.422	308.745

Bereken de interpolerende veelterm en de natuurlijke kubische spline door die data. Plot beide modellen samen met de data. Kan je de modellen gebruiken om een voorspelling te maken voor de toekomstige groei van het bevolkingscijfer?

5) Gegeven is $f(x) = \arctan(x)$ op het interval $[-1, 1]$ voor x. Neem in dit interval 17 equidistante punten $x_i, i = 0, \ldots, 16$, dus met onderlinge afstand $\frac{2}{16}$. Beschouw tevens de 17 Chebyshev punten $t_i = \cos\left((2i+1)\pi/34\right), i = 0, \ldots, 16$ en creëer een equidistant grid dat 17 mock-Chebyshev interpolatiepunten $s_i, i = 0, \ldots, 16$ oplevert. Bereken:

- de interpolerende veelterm $P(x)$ van graad 16 door de equidistante interpolatiepunten x_i;
- de interpolerende veelterm $Q(x)$ van graad 16 door de mock Chebyshev interpolatiepunten s_i;
- de 16 kubische functievoorschriften van de natuurlijke kubische spline $S(x)$ door de interpolatiepunten x_i.

Maak een grafiek van de foutenkrommen

- $(P(x) - \arctan(x))/\arctan(x)$,
- $(Q(x) - \arctan(x))/\arctan(x)$,
- $(S(x) - \arctan(x))/\arctan(x)$.

6) Neem $f(x) = \cos^{10}(x)$ op het interval $[-2, 2]$. Plot alle hieronder gevraagde functies en vergelijk.

- Bereken door equidistante datapunten de interpolerende veeltermen van graad 2, 4, 6 en 8. Waarom kiezen we even graden?
- Bereken de natuurlijke kubische spline in de datapunten $x_0 = -2, x_1 = -1, x_2 = -0.5, x_3 = 0, x_4 = 0.5, x_5 = 1, x_6 = 2$.
- Herbereken de interpolerende veelterm van graad 6 door deze punten en geef ook de interpolerende veelterm van graad 6 door de punten $x_i = 2\cos(i\pi/6), i = 0, \ldots, 6$.