LINEAIRE STELSELS VERGELIJKINGEN

1) Los in standaard dubbele precisie het volgende 3×3 stelsel op:

$$\begin{pmatrix} 3.021 & 2.714 & 6.913 \\ 1.031 & -4.273 & 1.121 \\ 5.084 & -5.832 & 9.155 \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} 12.648 \\ -2.121 \\ 8.407 \end{pmatrix}$$

Verander nu $a_{2,2}$ in -4.275 en los opnieuw het stelsel op. Wat stel je vast? Verklaar grafisch (zoals in de les voor een 2×2 stelsel dat het snijpunt bepaalde van bijna parallelle rechten).

2) Beschouw de 8×8 matrix $A = (a_{ij})$ met

$$a_{ij} = (1+i)^{j-1}, \qquad i, j = 1, \ldots, 8.$$

Gebruik `GEPP` om de inverse van de matrix te berekenen. Bespreek de nauwkeurigheid van je oplossing.

3) Beschouw het benchmark probleem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = \psi(n+i) - \psi(i) \qquad i = 1, \ldots, n$$

$$a_{ij} = \frac{1}{i+j-1} \qquad x_j = 1$$

waar $\psi(n)$ de digamma functie is (C code beschikbaar). Bereken voor de opgegeven matrix A waarbij $n = 3, 6, 9, 12$ een schatting van het conditiegetal. Los het opgegeven stelsel voor $n = 3, 6, 9, 12$ op in dubbele precisie en bereken residu en error vector. Vergelijk de norm van de error vector met de bovengrens voor de voorwaartse fout uit de cursus.

4) Beschouw de $n \times n$ Hilbert matrix

$$H_n = (h_{ij})_{i,j=1}^{n} \qquad h_{ij} = \frac{1}{i+j-1}$$

- Bereken de determinant voor $n = 3, 6, 9, 12$ (leg uit hoe GEPP hierbij kan helpen).
- Bereken een schatting voor het conditiegetal $\kappa(H_n)$ voor verschillende waarden van n.

- Kies als rechterlid een kolom uit de eenheidsmatrix en los het stelsel op met `GEPP`. We noteren de exacte oplossing x en de berekende oplossing $\tilde{x}$.
- Bereken linker- en rechterlid uit de foutenafschatting (enkel C is ongekend)

$$||x - \tilde{x}|| \leq C\ \kappa(H_n)\ ||\tilde{x}||\ \texttt{ULP}.$$

- Ga na dat de residu vector $y - H_n\tilde{x}$ voldoet aan (constante C blijft ongekend)

$$||y - H_n\tilde{x}|| \leq C\ ||H_n||\ ||\tilde{x}||\ \texttt{ULP}$$

5) Beschouw het benchmark probleem

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = \binom{n+i-1}{i} \qquad i = 1, \ldots, n$$
$$a_{ij} = \binom{i+j-2}{j-1} \qquad x_j = 1$$

Bereken een schatting van het conditiegetal voor de opgegeven matrix A waarbij $n = 3, 6, 9, 12$. Los het opgegeven stelsel voor $n = 3, 6, 9, 12$ op in dubbele precisie ($1/2$ `ULP` $= 2^{-53}$) en bereken residu en error vector. Bespreek residu, error, conditiegetal en de relatie tussen deze grootheden.

6) Beschouw de tridiagonale matrix met de waarden -1 op de bovendiagonaal, de entries $+1$ op de benedendiagonaal en op de diagonaal zelf de waarden $b_i, i = 1, \ldots, n$ gegeven door

$$b_i = \frac{2(i+1)}{3}, \qquad i+1 = 3, 6, 9, \ldots$$
$$b_i = 1, \qquad i+1 = 2, 4, 5, 7, 8, \ldots$$

Het rechterlid van het lineaire stelsel is gegeven door de vector $y = (y_1, \ldots, y_n)$ met $y_i = \delta_{i1}$. We noemen de onbekende vector $x^{(n)}$. De component $x_1^{(n)}$ is dan een benadering voor het getal $e - 2$. Gebruik `GEPP` (en kies een voldoende grote n) om een benadering voor $e - 2$ te berekenen met 10 beduidende cijfers.