WuS - Lecture Notes Week 11

Ruben Schenk, ruben.schenk@inf.ethz.ch

June 25, 2022

1 Konfidenzintervalle

Die Grundidee ist wie folgt: Wie im vorigen Abschnitt suchen wir aus einer Familie $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \Theta}$ von Modellen eines, das zu unseren Daten $x_1, ..., x_n$ passt. Ein Schätzer für θ gibt uns dabei einen einzelnen zufälligen möglichen Parameterwert. Weil es schwirig ist, mit diesem einen Wert den richtigen Parameter zu treffen, suchen wir nun stattdessen eine **zufällige Teilmenge des Parameterbereichs,** die hoffentlich den wahren Parameter enthält.

1.1 Definitionen

Eir reichhaltig sind diese Schätzer? Werfen wir zum Beispiel eine Münze 100 mal, ohne die Wahrscheinlichkeit p von Kopf zu kennen. Falls wir 70 mal Kopf erhalten, ist der Maximum-Likelihood-Schätzer für p $T_{ML} = 0.7$. Wie weit ligt T_{ML} von dem wahren Wert p entfernt? Um diese Art von Fragen zu beantworten, führen wir den Begriff der Konfidenzintervalle ein.

Def: Sei $\alpha \in [0, 1]$. Ein **Konfidenzintervall für θ mit Niveau** $1 - \alpha$ ist ein Zufallsintervall $I = [A, B]$, sodass gilt

$$\forall \theta \in \Theta \quad \mathbb{P}_\theta[A \leq \theta \leq B] \geq 1 - \alpha,$$

wobei A, B Zufallsvariablen der Form $A = a(X_1, ..., X_n)$, $B = b(X_1, ..., X_n)$ mittels $a, b : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ sind.

Beispiel (Konfidenzintervall für normales Modell mit bekannter Varianz): Seien $X_1, ..., X_n$ u.i.v. normalverteilte Zufallsvariablen mit Parametern m und $\sigma^2 = 1$. Wir betrachten somit ein stochastisches Modell mit bekannter Varianz ($\sigma^2 = 1$) aber unbekanntem Mittelwert μ ($X_1 \sim \mathcal{N}(\mu, 1)$). Mann kann zeigen, dass der Maximum-Likelihood Schätzer gegeben ist durch

$$T = T_{ML} = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n},$$

mit