WuS - Lecture Notes Week 12

Ruben Schenk, ruben.schenk@inf.ethz.ch

July 4, 2022

0.1 Approximative Konfidenzintervalle

Einen allgemeinen **approximativen Zugang** liefert der zentralge Grenzwertsatz. Oft ist ein Schätzer T eine Funktion einer Summe $\sum_{i=1}^{n} Y_i$, wobei die Y_i im Modell $\mathbb{P}_\theta$ i.i.d. sind. Das einfachste Beispiel ist $T = \bar{Y_n} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$. Nach dem zentralen Grenzwertsatz ist dann für grosse n

$$\sum_{i=1}^{n} Y_i \quad \text{approximativ normalverteilt unter } \mathbb{P}_\theta$$

mit Parametern $\mu = n \cdot \mathbb{E}_\theta[Y_i]$ und $\sigma^2 = n \cdot \text{Var}_\theta[Y_i]$. Das kann man benutzen, um für die Verteilung von T approximative Aussagen zu bekommen und damit gewisse Fragen zumindest approximativ zu beantworten.

1 Tests

Tagesproblem: Sophie ist Statistikstudentin und Velokurier. Sie hat eine Lieferung mit einem Beutel fairer Münzen ($p = 0.5$) und einem Beutel gezinkter Münzen ($p = 0.7$). Die fairen Münzen sollen ins Casion, die gezinkten sollen entsorgt werden. Bei einem Velounfall werden alle Münzen vermischt. Wie kann Sopie entscheiden, welche Münzen ins Casion sollen, und welche entsorgt werden (ohne jede Münzen 10'000 Mal zu werfen)?

1.1 Null- und Alternativhypothese

Ausgangspunkt ist wieder eine Stichprobe $X_1, ..., X_n$. Wir betrachten wieder eine Familie von Wahrscheinlichkeiten $\mathbb{P}_\theta$ mit $\theta \in \Theta$, die unsere möglichen Modelle beschreiben. Wie bisher kann θ eine ein- oder mehrdimensionaler Parameter sein.

Das Grundproblem ist, eine Entscheidung zwischen zwei konkurrierenden Modellklassen zu treffen – der **Nullhypothese** $\Theta_0 \subseteq \Theta$ und der **Alternativhypothese** $\Theta_A \subseteq \Theta$, wobei $\Theta_0 \cap \Theta_A = \emptyset$. Meist schreibt man das als

$$\text{Nullhypothese } H_0 : \theta \in \Theta_0,$$
$$\text{Alternativhypothese } H_A : \theta \in \Theta_A.$$

Ist keine explizite Alternative spezifiziert, so hat man $\Theta_A = \Theta_0^C = \Theta \setminus \Theta_0$. Null- und/oder Alternativhypothese heissen **einfach,** falls Θ_0 bzw. Θ_A aus einem einzelnen Wert, θ_0 bzw. θ_A, bestehen. Sonst heissen sie **zusammengesetzt.**

Beispiel: In unserem Tagesproblem sind also:

$$H_0 : \theta = 0.7 \quad (\theta \in \Theta_0 = \{0.7\})$$
$$H_A : \theta = 0.5 \quad (\theta \in \Theta_A = \{0.5\})$$

1.2 Test und Entscheidung

Def: Ein **Test** ist ein Paar (T, K), wobei

- T eine Z.V. der Form $T = t(X_1, ..., X_n)$ ist, und
- $K \subseteq \mathbb{R}$ eine (deterministische) Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist.

Die Z.V. $T = t(X_1, ..., X_n)$ heisst dann **Teststatistik,** und K heisst **kritischer Bereich** oder **Verwerfungsbereich.**

Def: Die **Entscheidungsregel** ist wie folgt:

- die Hypothese H_0 wird verworfen, falls $T(\omega) \in K$,
- die Hypothese H_A wird nicht verworfen, bzw. angenommen, falls $T(\omega) \notin K$.

Die Entscheidung bei einem Test kann auf zwei verschiedene Arten falsch herauskommen:

1. Bei einem **Fehlert 1. Art** wir die Nullhypothese zu Unrecht verworfen, d.h. obwohl sie richtig ist. Das passiert für $\theta \in \Theta_0$ und $T \in K$, deshalb heisst $\mathbb{P}_\theta[T \in K]$ für $\theta \in \Theta_0$ die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 1. Art.
2. Bei einem **Fehler 2. Art** wird die Nullhypothese zu Unrecht nicht verworfen, d.h. man akzeptiert die Nullhypothese, obwohl sie falsch ist. Das passiert für $\theta \in \Theta_A$ und $T \notin K$, und deshalb heisst $\mathbb{P}_\theta[T \notin K] = 1 - \mathbb{P}_\theta[T \in K]$ für $\theta \in \Theta_A$ die Wahrscheinlichkeit für einen Fehler 2. Art.

Beispiel: In unserem Tagesproblem ist:

- Fehler 1. Art: Sophie bringt eine gezinkte Münze ins Casino.
- Fehler 2. Art: Sophie entsorgt eine faire Münze.

1.3 Signifikanzniveau und Macht

Def: (Fehler 1. Art vermeiden) Sei $\alpha \in (0, 1)$. Ein Test (T, K) besitzt **Signifikanzniveau** α, falls

$$\forall \theta \in \Theta_0 \quad \mathbb{P}_\theta[T \in K] \leq \alpha.$$

Def: (Fehler 2. Art vermeiden) Die **Macht** eines Tests (T, K) wird definiert als folgende Funktion

$$\beta : \Theta_A \to [0, 1], \quad \theta \to \beta(\theta) := \mathbb{P}_\theta[T \in K].$$

Bemerkung:

- α *klein* bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 1. Art klein ist
- β *gross* bedeutet, dass die Wahrscheinlichkeit eines Fehlers 2. Art klein ist

Wir können das **asymmetrische Verhalten** zwischen Null- und Alternativhypothese anhand unseres Tagesproblems beobachten:

Beispiel: Betrachten wir nochmals unser Tagesproblem. Wir nehmen an, dass Sophie jede Münze $n = 10$ Mal wirft. $T = \sum_{i=1}^{10} X_i$ ist die Anzahl der Kopf-Würfe und $K = (-\infty, j)$, wobei $j \in \{0, 1, ..., 10\}$ fixiert wird.

j	Signifikanzniveau $\alpha = \mathbb{P}_{0.7}[T \leq j]$	Macht $\beta(0.5) = \mathbb{P}_{0.5}[T \leq j]$
4	$\approx 4.7\%$	$\approx 62.3\%$
5	$\approx 15\%$	$\approx 37.7\%$
6	$\approx 35\%$	$\approx 17.2\%$
7	$\approx 62\%$	$\approx 5.5\%$