WuS - Lecture Notes Week 13

Ruben Schenk, ruben.schenk@inf.ethz.ch

July 4, 2022

0.1 Konstruktion von Tests

Seien $\theta_0 \neq \theta_A$ zwei fixierte Zahlen. In diesem Abschnitt nehmen wir stets an, dass sowohl die Nullhypothese als auch die Alternativhypothese von der einfachen From

$$H_0 : \theta = \theta_0,$$
$$H_A : \theta = \theta_A,$$

ist. Ferner nehmen wir an, dass die Z.V. $X_1, ..., X_n$ entweder diskret, oder gemeinsam stetig unter $\mathbb{P}_{\theta_0}$ und unter $\mathbb{P}_{\theta_A}$ sind.

Die Grundidee ist wie folgt: Wir fixieren α (klein), da wir unbedingt den Fehler 1. Art klein halten wollen. Danach suchen wir einen Test, sodass β möglichst gross ist.

Def: Für jedes $x_1, ..., x_n$ definieren wir den **Likelihood-Quotienten** durch

$$R(x_1, ..., x_n) := \frac{L(x_1, ..., x_n; \theta_A)}{L(x_1, ..., x_n; \theta_0)}.$$

Dabei ist $L(x_1, ..., x_n; \theta)$ die Likelihood-Funktion und wir setzen als Konvention $R(x_1, ..., x_n) = +\infty$, falls $L(x_1, ..., x_n; \theta_0) = 0$.

Es ligt somit nahe, als Teststatistik $T := R(X_1, ..., X_n)$ und als kritischen Bereich $K := (c, \infty)$ zu wählen, wenn man θ_0 gegen θ_A testen will. Schliesslich wird gerade dann die Hypothese H_0 verworfen, falls der Quotient R gross ist.

Def: Sei $c \geq 0$. Der **Likelihood-Quotienten-Test (LQ-Test) mit Parameter** c ist ein Test (T, K), wobei Teststatistik und Verwerfungsbereich gegeben sind durch

$$T = R(X_1, ..., X_n) \quad \text{und} \quad K = (c, \infty).$$

Beispiel: Betrachten wir das Tagesbeispiel von letzter Woche. Seien $X_1, ..., X_n \sim Ber(\theta)$. Zudem haben wir:

- $H_0 : \theta = 0.7$
- $H_A : \theta = 0.5$

Für $X_i \sim Ber(\theta)$ gilt:

$$L(x_1, ..., x_n; \theta) = \mathbb{P}_\theta[X_1 = x_1, ..., X_n = x_n] = \mathbb{P}[X_1 = x_1] \cdots \mathbb{P}[X_n = x_n] = \theta^{|X|}(1-\theta)^{n-|X|},$$

wobei $|X| = \sum_{i=1}^n X_i$. In unserem Fall ist nun:

$$R(x_1, ..., x_n) = \left(\frac{3}{7}\right)^{|X|} \frac{1}{0.6^n}.$$

Somit erhalten wir für $n = 10$ und $c = 1$

- $\alpha = 0.35$
- $\beta = 0.82$

sowie für $c = 10$

- $\alpha = 0.0101$
- $\beta = 0.1719$

Theorem (Neyman-Pearson-Lemma): Sei $c \geq 0$. Sei (T, K) ein Likelihood-Quotienten-Test mit Parameter c und Signifikanzniveau $\alpha^* := \mathbb{P}_{\theta_0}[T > c]$. ist (T', K') ein anderer Test mit Signifikanzniveau $\alpha \leq \alpha^*$, dann gilt

$$P_{\theta_A}[T' \in K'] \leq \mathbb{P}_{\theta_A}[T \in K].$$

0.2 Beispiele

Betrachten wir folgendes Modell: $(\mathbb{P}_\theta)_{\theta \in \mathbb{R}}$ und $X_1, ..., X_n$ u.i.v. $\sim \mathcal{N}(\theta, 1)$ unter $\mathbb{P}_\theta$. Zudem gilt:

- $H_0 : \theta = 0$
- $H_A : \theta \neq 0$

Betrachten wir nun zwei verschiedene Tests:

- Test 1: $T = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$ und $K = (1.65, \infty)$
- Test 2: $T = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{\sqrt{n}}$ und $K = (2.33, \infty)$

Bemerkung: Unter $\mathbb{P}_0$ ist $T \sim \mathcal{N}(0, 1)$.
Für die Signifikanz gilt:

- Test 1: $\alpha = \mathbb{P}_{H_0}[H_0 \text{ verworfen}] = \mathbb{P}_{\theta=0}[T > 1.65] = 5\%$
- Test 2: $\alpha = \mathbb{P}_{H_0}[H_0 \text{ verworfen}] = \mathbb{P}_{\theta=0}[T > 2.33] = 1\%$

Beobachten wir nun verschiedene Daten. Wir haben $T(\omega) = 2.967$. Dann wird H_0 sowohl für Test 1, sowie auch für Test 2 verworfen. Somit ist unsere Aussage viel kräftiger als wenn wir z.B. nur Test 1 betrachtet hätten.

Für dieses Beispiel ist der **p-Wert** definiert als:

$$p\text{-Wert} := \mathbb{P}_0[T > 2.976] = 0.2\%.$$

In anderen Worten gibt uns der p-Wert in diesem Fall das Signifikanzniveau vom "besten" Test, der H_0 verwirft.

0.3 p-Wert

Def: Sei $X_0 : \theta = \theta_0$ eine einfache Nullhypothese. Sei $(T, K_t)_{t \geq 0}$ eine geordnete Familie von Tests. Der p**-Wert** ist definiert alls die Z.V.

$$p\text{-Wert} = G(T),$$

wobei $G : \mathbb{R}_+ \to [0, 1]$ mittels $G(t) = \mathbb{P}_{\theta_0}[T \in K_t]$ definiert ist.