$\boxed{1^a \text{ forma}}$

- $$x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)} \, B \cdot 1 \, d\tau$$

Como $e^{A(t-\tau)} = e^{At} \cdot e^{-A\tau}$.

$$x(t) = \int_0^t e^{At} \cdot e^{-A\tau} \cdot B \cdot 1 \, d\tau \underset{B \cdot 1 = w}{=} e^{At} \cdot \int_0^t e^{-A\tau} d\tau \cdot w$$

$$= e^{At} \cdot (-A)^{-1} \cdot \int_0^t -A \cdot e^{-A\tau} d\tau \cdot w = e^{At} \cdot (-A)^{-1} \cdot \left[e^{-A\tau} \right]_0^t \cdot w$$

$$= e^{At} \cdot (-A)^{-1} \cdot \Big[e^{-At} - \underbrace{e^{A0}}_{I} \Big] \cdot w \underset{(-A)^{-1} = -A^{-1}}{=} e^{At} \cdot -A^{-1} \cdot \left[e^{-At} - I \right] \cdot w$$

Usamos ahora que $B e^{At} = e^{At} \cdot B \leftrightarrow AB = BA$ con $B = A^{-1}$

Como $A^{-1} \cdot A = A \cdot A^{-1} = I$ se cumple.

Entonces:

$$x(t) = -A^{-1} \cdot e^{At} \cdot \left[e^{-At} - I \right] \cdot w = -A^{-1} \cdot \left[I - e^{At} \right] w = \boxed{A^{-1} \cdot \left[e^{At} - I \right] \cdot w}$$

• $\boxed{2^a \text{ forma}}$ (descomponiendo $e^{At} = I + t\cdot A + \frac{t^2}{2!}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots$)

Tenemos inicialmente que $x(t) = \int_0^t e^{A(t-\tau)}\, B\cdot 1 \, d\tau$

Nombrando $B\cdot 1 = w$ y usando la misma propiedad que en la 1ª forma ($e^{A(t-\tau)} = e^{At}\cdot e^{-A\tau}$)

$$\boxed{x(t) = e^{At}\cdot \int_0^t e^{-A\tau}\, d\tau \cdot w} \quad (1)$$

El desarrollo de $e^{-A\tau}$ es $I - tA + \frac{t^2}{2!}A^2 - \frac{t^3}{3!}A^3 + \cdots$

Por tanto,

$$\int_0^t e^{-A\tau}\, d\tau = \int_0^t \left(I - \tau A + \frac{\tau^2}{2!}A^2 - \frac{\tau^3}{3!}A^3 + \cdots\right) d\tau = \left[I\tau - \frac{\tau^2}{2}A + \frac{\tau^3}{3\cdot 2!}A^2 - \frac{\tau^4}{4\cdot 3!}A^3 + \cdots\right]_0^t$$

$$= It - \frac{t^2}{2}A + \frac{t^3}{3!}A^2 - \frac{\tau^4}{4!}A^3 + \cdots = A^{-1}\cdot A\left[It - \frac{t^2}{2}A + \frac{t^3}{3!}A^2 - \cdots\right]$$

$$= A^{-1}\cdot\left[At - \frac{t^2}{2}A^2 + \frac{t^3}{3!}A^3 - \frac{t^4}{4!}A^4 + \cdots\right] = -A^{-1}\cdot\left[-At + \frac{t^2}{2}A^2 - \frac{t^3}{3!}A^3 - \frac{t^4}{4!}A^4 + \cdots\right]$$

$$= -A^{-1}\cdot\left[\underbrace{I - At + \frac{t^2}{2}A^2 - \frac{t^3}{3!}A^3 - \frac{t^4}{4!}A^4 + \cdots}_{e^{-At}} - I\right] = -A^{-1}\cdot\left[e^{-At} - I\right]$$

sumo y resto I

$$= \boxed{A^{-1}\cdot\left[I - e^{-At}\right]}$$

Sustituyendo esta última expresión en (1) queda:

$$x(t) = e^{At}\cdot A^{-1}\cdot\left[I - e^{-At}\right]w = A^{-1}\cdot e^{At}\cdot\left[I - e^{-At}\right]w = \boxed{A^{-1}\cdot\left[e^{At} - I\right]w}$$

$e^{At}\cdot A^{-1} = A^{-1}e^{At}$ ya que A^{-1} y A conmutan