

Técnicas de Modelagem de Sistemas Dinâmicos: Trabalho 1

Rúbia Reis Guerra

2013031143

27/03/2019

1 Modelagem Fenomenológica e Formulação do Problema

Algumas características observáveis em sistemas reais podem ser representados por relações matemáticas entre as variáveis de entrada e saída do sistema, que caracterizam os *modelos matemáticos*. A metodologia de modelagem e identificação de sistemas busca estabelecer relações empíricas entre variáveis observadas de um sistema dinâmico - sistema em que os valores dos sinais de saída dependem tanto dos valores instantâneos das entradas quanto do comportamento anterior do sistema - e geralmente compreende o seguinte processo:

- Medição dos sinais de entrada e saída do sistema, no tempo ou no domínio da frequência;
- Seleção de uma estrutura de modelo;
- Aplicação de um método de estimação para ajustar os parâmetros da estrutura de modelo escolhida;
- Avaliação do modelo estimado.

Um exemplo de aplicação de identificação de sistemas é o estudo do comportamento de estruturas hidráulicas, como a observada na Figura 1, permitindo maior entendimento das características do sistema e, por sua vez, possibilitando melhor dimensionamento dos diversos componentes envolvidos no projeto de uma estrutura.

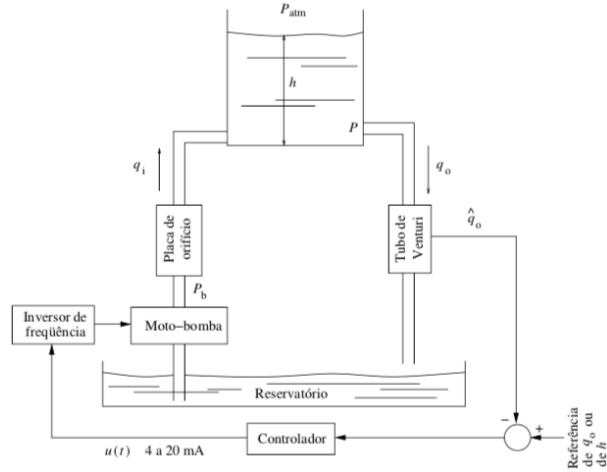


Figura 1: Esquema de planta piloto de bombeamento

A modelagem do sistema da Figura 1, por meio de uma abordagem caixa-branca simplificada, é descrita em [2]. Após simulação, aplicando um degrau na entrada do sistema, obtém-se o resultado conforme observado na figura 2.

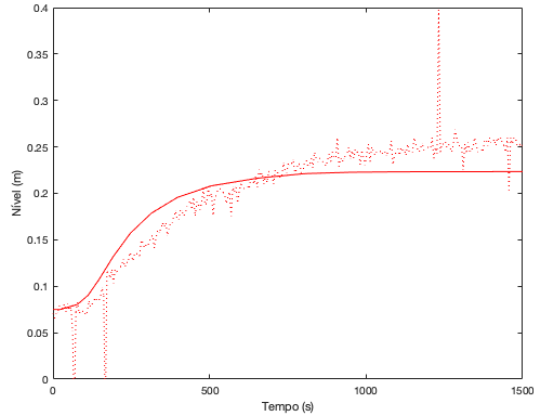
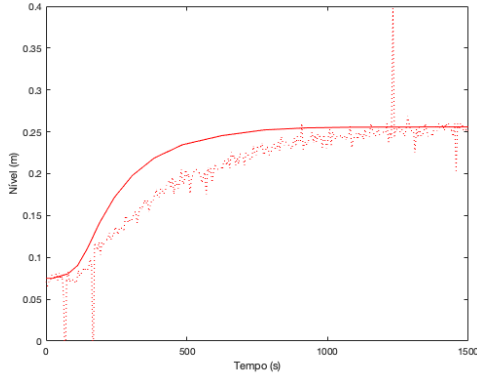


Figura 2: Esquema de planta piloto de bombeamento

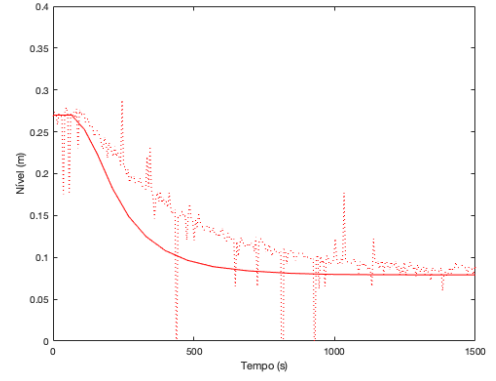
A resposta obtida com o modelo possui forma relativamente similar ao sinal medido, porém, observa-se que:

1. o ganho do modelo é menor que o ganho do processo;
2. a resposta do modelo é mais rápida que a do processo.

Ambas as situações podem ser corrigidas empiricamente, através de simulações. No primeiro caso, o ganho pode ser ajustado multiplicando-se a amplitude de entrada por uma constante $\alpha = 1,012$:



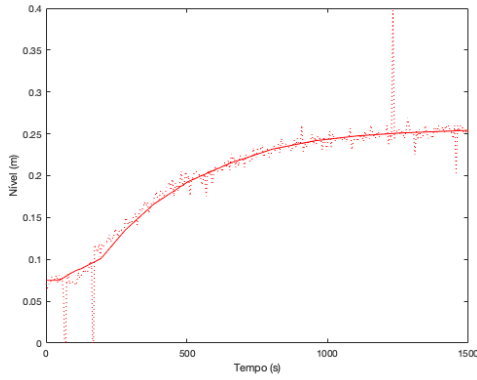
(a) $u(t)$: degrau positivo



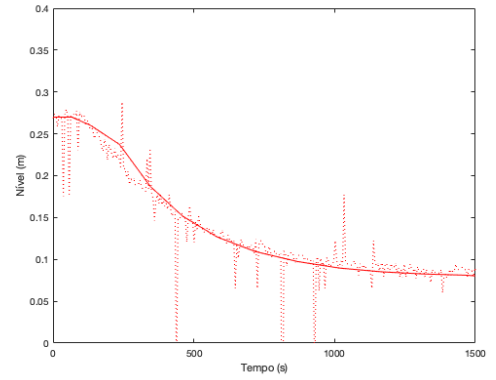
(b) $u(t)$: degrau negativo

Figura 3: Resposta do sistema após ajuste de ganho

No segundo caso, a constante de tempo pode ser ajustada para tornar a resposta mais lenta. Abaixo tem-se a resposta do sistema após o ajuste $h_{sint} = 0,5\dot{h}$:



(a) $u(t)$: degrau positivo



(b) $u(t)$: degrau negativo

Figura 4: Resposta do sistema após a sintonização

1.1 Estudo de Caso: Dinâmica de uma cadeia alimentar

Conforme [3], a dinâmica de uma cadeia alimentar pode ser descrita pelo modelo:

$$\begin{cases} \dot{x} = x(1 - x) - \frac{xy}{x-a} \\ \dot{y} = -by + \frac{cxy}{x+d} - \frac{yz}{y+e} \\ \dot{z} = fz^2 - \frac{gz^2}{y+h} \end{cases} \quad (1)$$

em que x é a densidade normalizada da presa ao fim da cadeia alimentar, y é a densidade normalizada do predador especialista e z é a densidade normalizada do predador generalista. Os parâmetros do modelo são:

$$a = 0,311 \quad e = 0,161 \quad b = 0,518 \quad f = 4,599 \quad (2)$$

$$c = 1,036 \quad g = 2,469 \quad d = 0,311 \quad h = 0,322 \quad (3)$$

O modelo pode ser caracterizado como:

- Dinâmico;
- Contínuo;
- Autônomo;
- Multivariável;
- Parâmetros concentrados;
- Determinístico;
- Paramétrico.

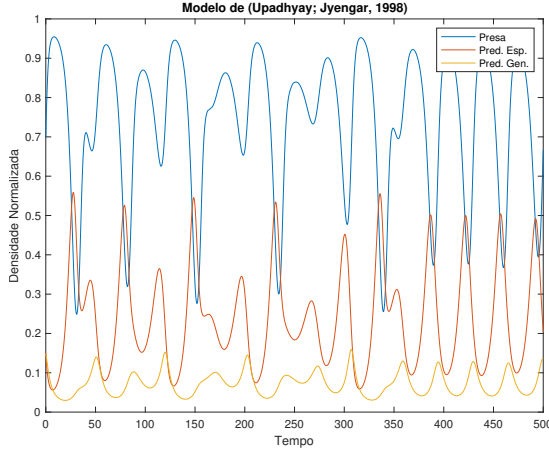
A partir de dados referentes à observação da evolução da densidade de presas no modelo de [3], o seguinte modelo foi obtido [4]:

$$\begin{aligned}
x(k) = & 3,38040x(k-1) - 4,30812x(k-2) + 2,5616x(k-3) \\
& - 1,06161x(k-4) - 1,21955x^2(k-5) \\
& + 2,56978x(k-1)x(k-5)x(k-6) \\
& - 3,26196x(k-3)x(k-4)x(k-6) + 0,48632x(k-5) \\
& + 2,53047x^2(k-4)x(k-5) + 0,80920x(k-4)x(k-7) \\
& - 4,55223 \times 10^{-3}x^2(k-1)x(k-8) + 1,47483x(k-3)x(k-6) \\
& - 0,23716x^2(k-5)x(k-6) - 0,74444x(k-1)x(k-7) \\
& - 0,45312x^2(k-6) + 0,50283x^2(k-2)x(k-3) \\
& - 2,02429x(k-1)x(k-4)x(k-5).
\end{aligned}$$

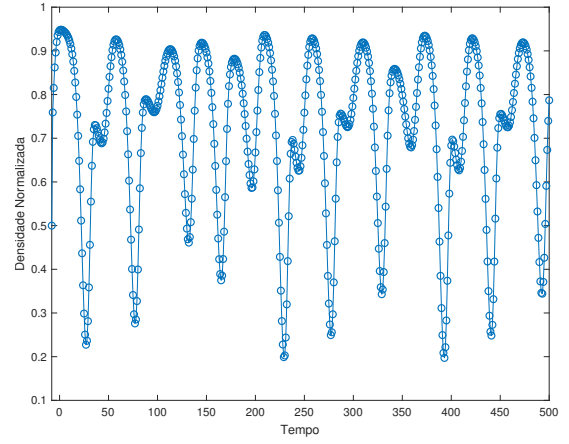
O modelo acima pode ser caracterizado como:

- Dinâmico;
- Discreto;
- Autônomo;
- Monovariável;
- Parâmetros concentrados;
- Determinístico;
- Paramétrico.

Comparando os resultados da simulação para as duas abordagens, é possível observar que o modelo discreto de [4] aproxima-se bem do comportamento da presa no modelo contínuo de [3]:



(a) Modelo contínuo



(b) Modelo discreto

Figura 5: Resultados da simulação dos modelos contínuo e discreto

Para o modelo contínuo, foram definidas as condições iniciais:

$$x(0) = 0.7, y(0) = z(0) = 0.15$$

enquanto para o modelo discreto, foi utilizado:

$$y(k - 8) = 0.5$$

2 Representações Lineares

Uma representação é a forma em que o modelo matemático é expresso. A partir do circuito:

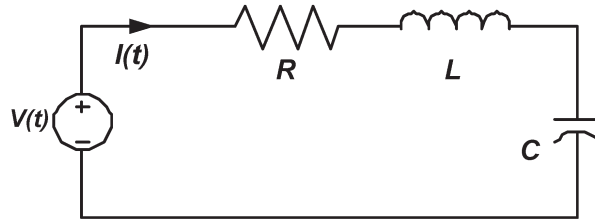


Figura 6: Circuito RLC

descrito por:

$$L \frac{di(t)}{dt} + Ri(t) + v_c(t) = v(t) \quad (4)$$

$$C \frac{dv_c(t)}{dt} = i(t) \quad (5)$$

pode-se obter as funções de transferência que relacionam a tensão no capacitor ($v_c(t)$) com a tensão de entrada ($v(t)$) e a corrente ($i(t)$) com a tensão de entrada ($v(t)$). As transformadas de Laplace das equações que descrevem o circuito são dadas por:

$$LI(s)s + RI(s) + V_c(s) = V(s) \quad (6)$$

$$CV_c(s)s = I(s) \quad (7)$$

Para função de transferência de $v_c(t)$ em relação à $v(t)$, tem-se o sistema de 2ª ordem:

$$H_1(s) = \frac{V_c(s)}{V(s)} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad (8)$$

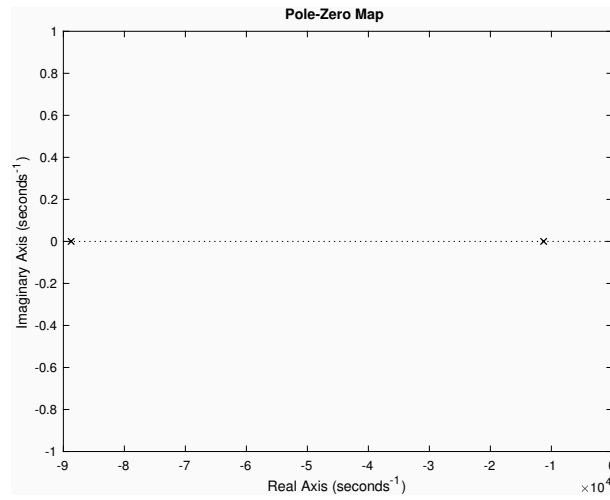
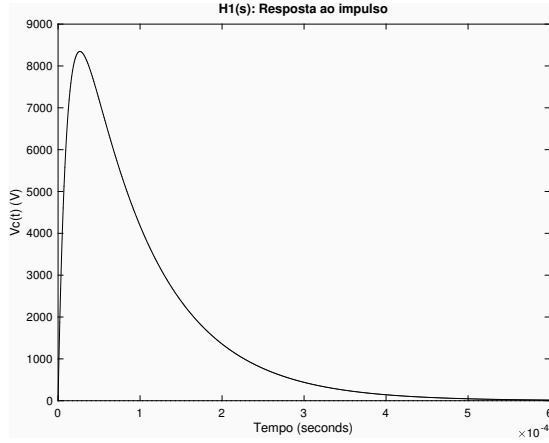
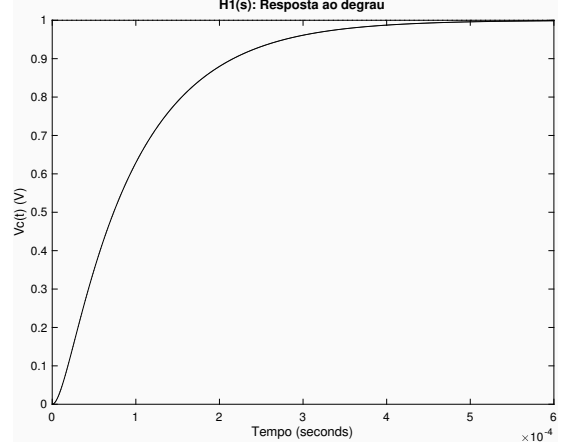


Figura 7: $H_1(s)$: diagrama de polos e zeros

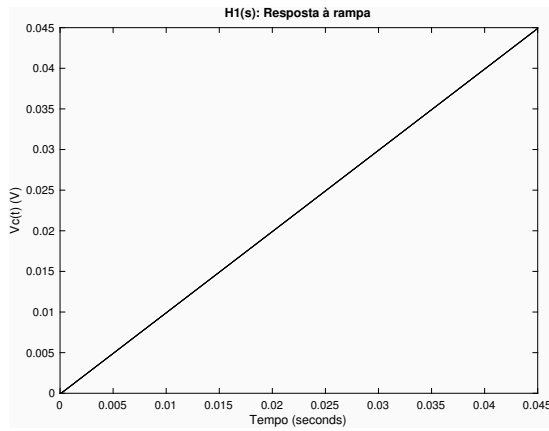
com dois polos reais $p_1 = 10^4(-5 - \sqrt{15})$ e $p_2 = 10^4(\sqrt{15} - 5)$.



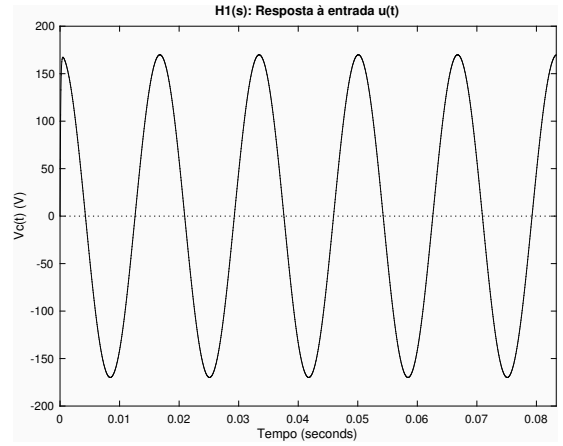
(a) $H_1(s)$: resposta ao impulso



(b) $H_1(s)$: resposta ao degrau



(c) $H_1(s)$: resposta à rampa



(d) $H_1(s)$: resposta à entrada $u(t) = 170\cos(2\pi 60t)$

Figura 8: Resposta de $H_1(s)$

Observa-se na Figura 8b que, para uma entrada em degrau, tem-se $v_c(\infty) = 1V$.

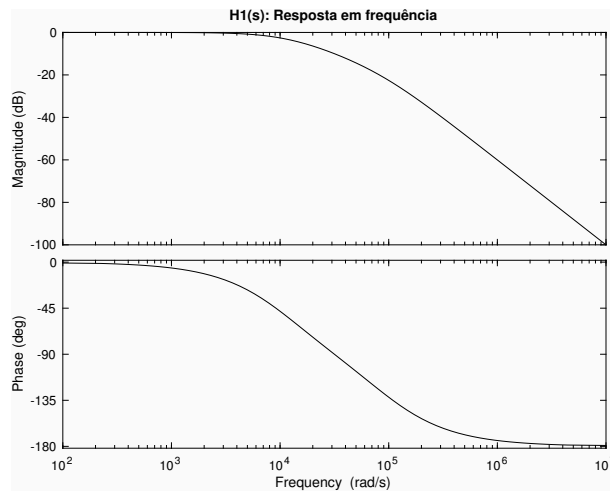


Figura 9: $H_1(s)$: Diagrama de Bode

Para o segundo caso, tem-se também um sistema de 2ª ordem:

$$H_2(s) = \frac{I(s)}{V(s)} = \frac{Cs}{CLs^2 + RCs + 1} \quad (9)$$

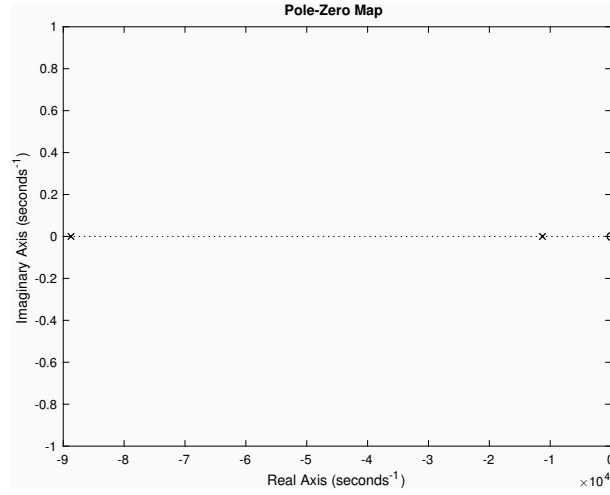
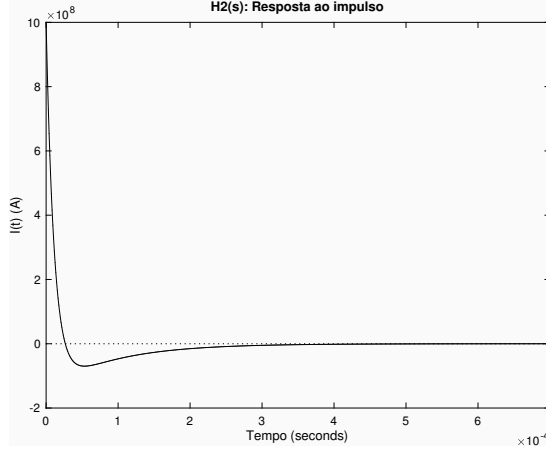
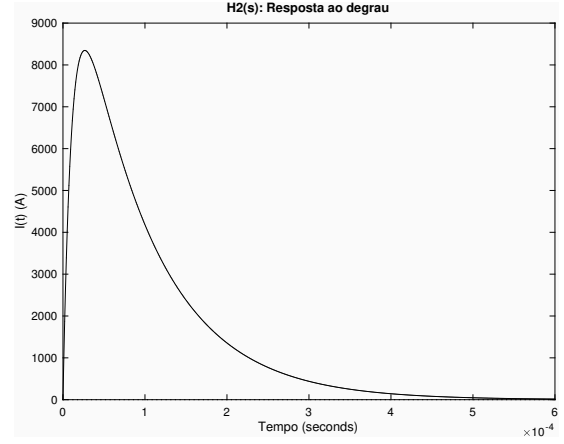


Figura 10: $H_2(s)$: diagrama de polos e zeros

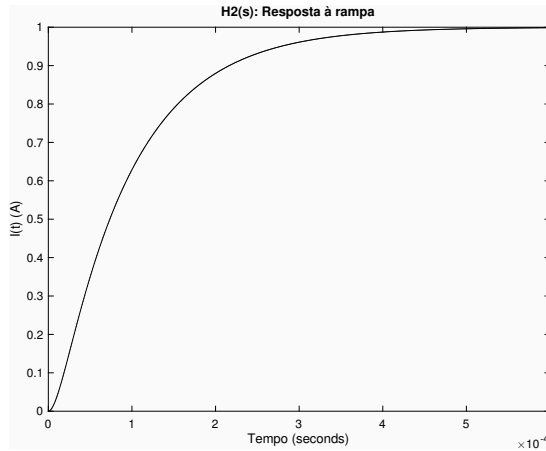
com dois polos reais $p_1 = 10^4(-5 - \sqrt{15})$ e $p_2 = 10^4(\sqrt{15} - 5)$, e um zero $z_1 = 0$.



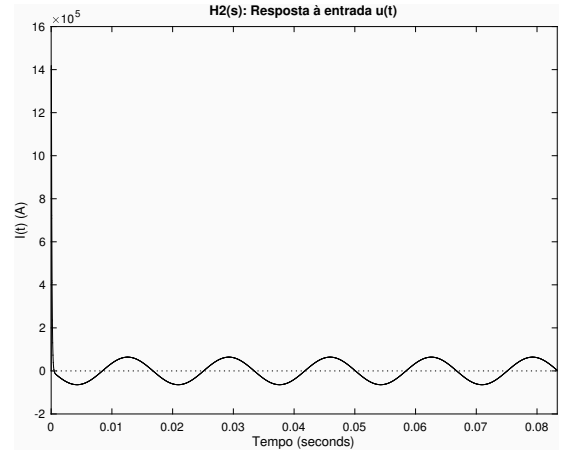
(a) $H_2(s)$: resposta ao impulso



(b) $H_2(s)$: resposta ao degrau



(c) $H_2(s)$: resposta à rampa



(d) $H_2(s)$: resposta à entrada $u(t) = 170\cos(2\pi 60t)$

Figura 11: Resposta de $H_2(s)$

Em ambos os casos, tem-se um sistema superamortecido (polos reais distintos, $\zeta > 1.00$) e com constante de tempo igual à $\tau_s = 5 \times 10^{-5}$.

Observa-se na Figura 11b que, para uma entrada em degrau, tem-se $i(\infty) = 0\text{A}$. A presença de um zero na função $H_2(s)$ pode ser traduzida como uma derivada do sinal $v_c(t)$ no domínio do tempo, em decorrência do que pode ser observado na Equação 5. Dessa forma, é consistente que quando $v_c(\infty)$ tenda a um valor constante, $i(\infty) \rightarrow 0$. A situação também é consistente com a física do processo: uma vez que a tensão de entrada $v(t)$ deixa de ser aplicada, e até que o capacitor seja carregado completamente, a corrente $i(t)$ tende a zero. O circuito entrará em equilíbrio no momento que $v_c(\infty) \rightarrow v(0)$.

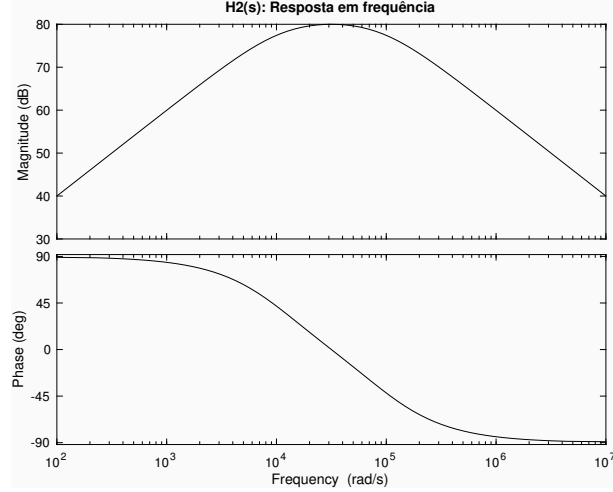


Figura 12: $H_2(s)$: Diagrama de Bode

As equações que descrevem o circuito podem ser reescritas na forma de equações de espaço de estado:

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{L}(-Ri(t) - v_c(t) + v(t)) \quad (10)$$

$$\frac{dv_c(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C} \quad (11)$$

e representadas na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \dot{i}(t) \\ \dot{v}_c(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} v(t) \quad (12)$$

É possível, então representar a resposta natural do circuito com tensão no capacitor inicialmente carregado ($y_1(t)$, $V_0 = 1V$) e com entrada em curto, capacitor descarregado e uma corrente unitária fluindo pelo indutor:

$$\begin{bmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} i(t) \\ v_c(t) \end{bmatrix} \quad (13)$$

A Figura 13 mostra a resposta do sistema, obtida por simulação.

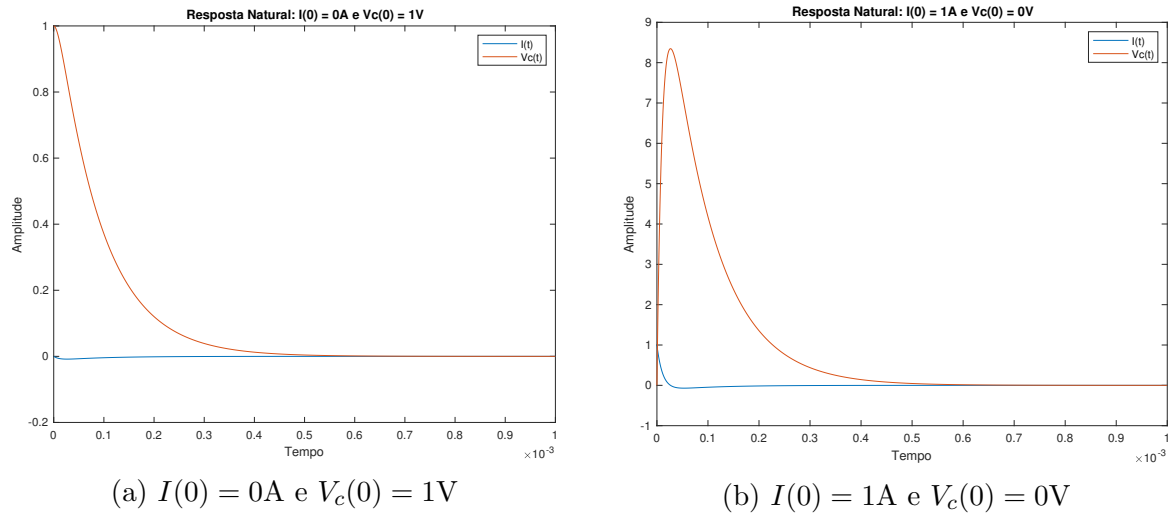


Figura 13: Resposta natural do circuito RLC

Referências

- [1] "System Identification Overview- MATLAB & Simulink", Mathworks.com, 2019. [Online]. Disponível em: <https://www.mathworks.com/help/ident/gs/about-system-identification.html>. [Acesso: 26-Mar-2019].
- [2] L. A. Aguirre, "Introdução à Identificação de Sistemas". Editora UFMG, 2015.
- [3] R. K. Upadhyay, S. R. K. Iyengar e V. Rai. "Chaos: an ecological reality?". International Journal of Bifurcation and Chaos, 8(06) (2002) 1325-1333.
- [4] C. Letellier, L. A. Aguirre, J. Maquet, e M. A. Aziz-Alaoui. "Should all the species of a food chain be counted to investigate the global dynamics?". Chaos, Solitons & Fractals 13, no. 5 (2002): 1099-1113.