

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

# Técnicas de Modelagem de Sistemas Dinâmicos

## Tarefa 4: Métodos Não Paramétricos

***Autor***

*João Pedro Araújo Ferreira Campos*

***Professor Dr.***

*Bruno Otávio Soares Teixeira*

# 1 Introdução

Em identificação de sistemas, métodos não paramétricos são aqueles que não fornecem um modelo matemático dado por uma equação, mas sim uma representação gráfica do que está sendo modelado [1]. Representações gráficas, como a resposta ao impulso e a resposta em frequência, são úteis para observar a dinâmica da planta e também para se estimar modelos paramétricos do sistema. Neste trabalho são tratadas algumas técnicas de obtenção de modelos não paramétricos, em especial usando sinais de entrada pseudo-aleatórios (PRBS) e dando atenção às funções de correlação cruzada e de autocorrelação, de grande interesse em identificação de sistemas graças à sua robustez ao ruído.

## 2 Função de Autocorrelação

Dado o sinal:

$$u(k) = 0.9e(k-1) + 0.8e(k-2) + 0.7e(k-3) + e(k)$$

em que  $e(k)$  é ruído branco que segue a distribuição normal padrão  $\mathcal{N}(0, 1)$ , deseja-se estimar sua  $r_u(k)$  numericamente. O resultado, obtido por meio da função `@myccf`, pode ser visto na figura 1.

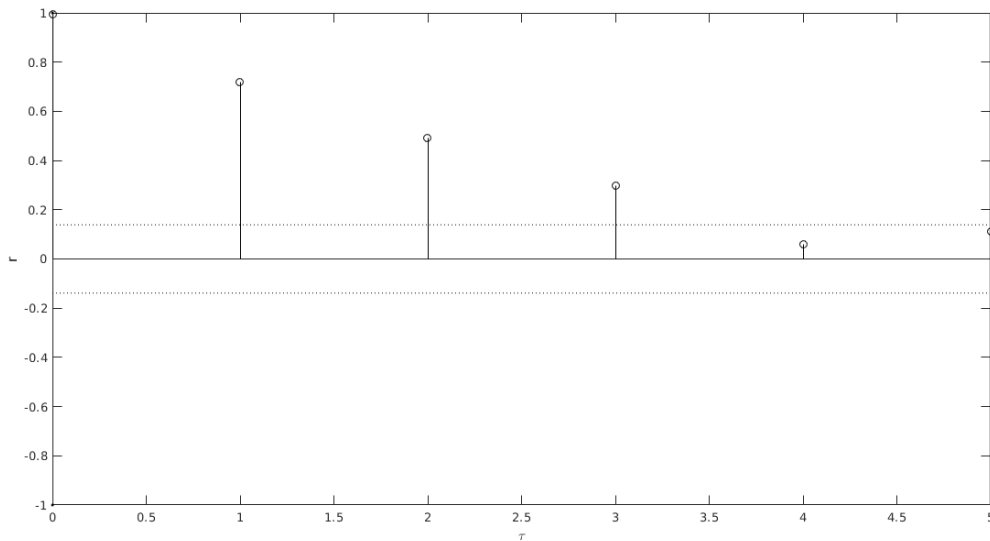


Figura 1: Autocorrelação do sinal  $u(k)$

Da figura, percebe-se que para um atraso  $\tau$  de 0, 1, 2 e 3 a função de autocorrelação fornece valores fora do intervalo de confiança, indicando correlação. Para  $\tau = 4$  e  $\tau = 5$  não se vê mais correlação, o que é esperado pois  $u(k)$  é descrito por uma equação de diferenças de ordem 3. Importante também notar que para um atraso de 0 a correlação é máxima, e diminui conforme o atraso aumenta.

## 3 Sinal Binário Pseudoaleatório

Foi gerado um sinal binário pseudoaleatório (PRBS) de 6 bits e intervalo entre bits  $T_b = 1$ . Por ser gerado com 6 bits, o sinal é periódico com período  $T = 2^6 - 1 = 63$ . A figura 2

mostra o sinal gerado; a partir dela é possível perceber sua peridiocidade.

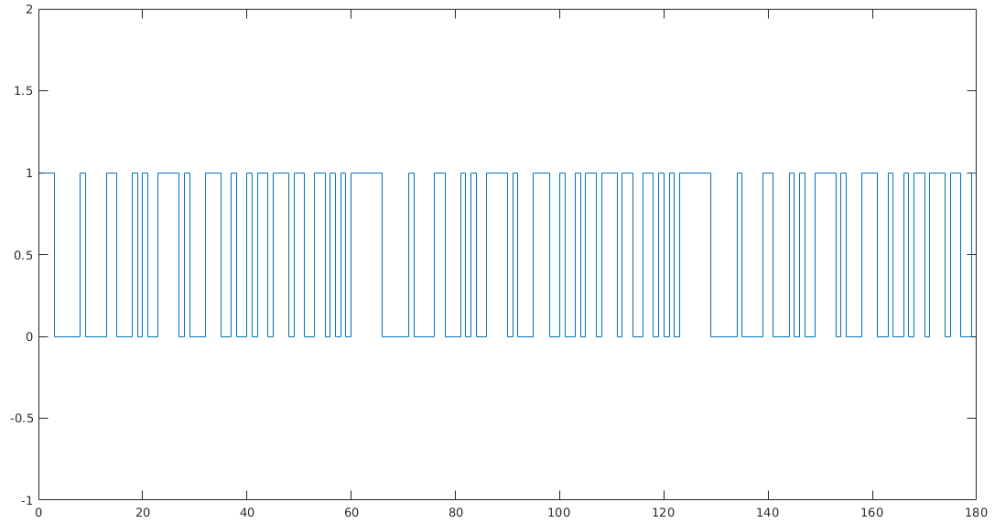


Figura 2: Sinal PRBS

A função `@myccf` foi utilizada para se obter a função de autocorrelação do sinal. O resultado é visto na figura 3.

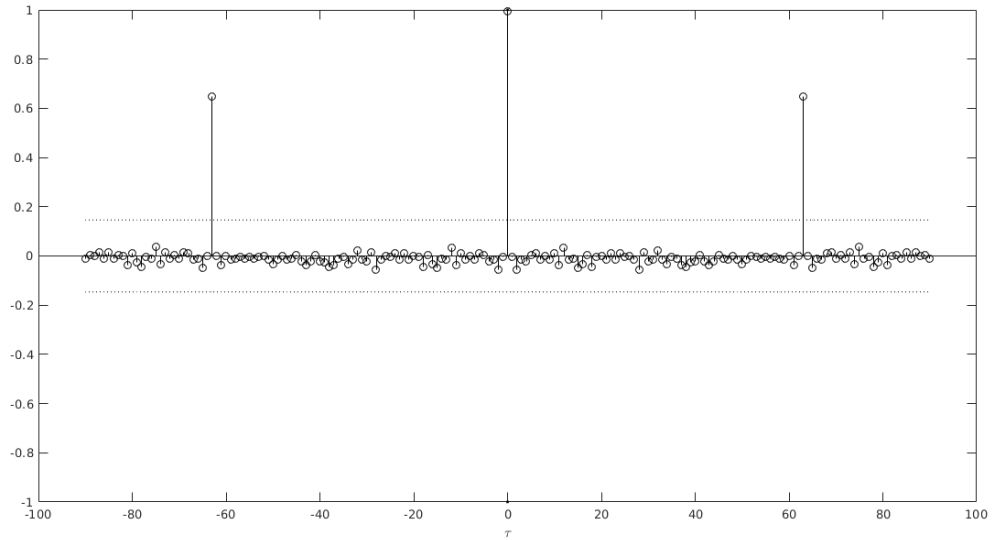


Figura 3: Autocorreção do sinal PRBS

Para um sinal aleatório "verdadeiro", isto é, um sinal em que não se encontra nenhuma peridiocidade, é esperado que sua função de autocorrelação seja diferente de zero apenas para  $\tau = 0$ , pois qualquer atraso faria com que o sinal não apresentasse qualquer relação com si mesmo. Da figura 3 percebe-se que de fato o ponto em que a função assume seu maior valor é para  $\tau = 0$ , o que indica a semelhança entre o PRBS e um sinal puramente aleatório. Entretanto, por ser pseudoaleatório com período  $T = 63$ , vemos que para  $\tau = -63$  e  $\tau = 63$  a função também apresenta valores diferentes de zero.

### 3.1 Efeitos da variação de $T_b$

Deseja-se, agora, observar o efeito de se aumentar gradativamente o intervalo entre bits  $T_b$  do sinal binário pseudoaleatório da seção anterior. São observadas as mudanças na função de autocorrelação e no espectro do sinal. Primeiramente, foram feitas as simulações com  $T_b = 2$ .

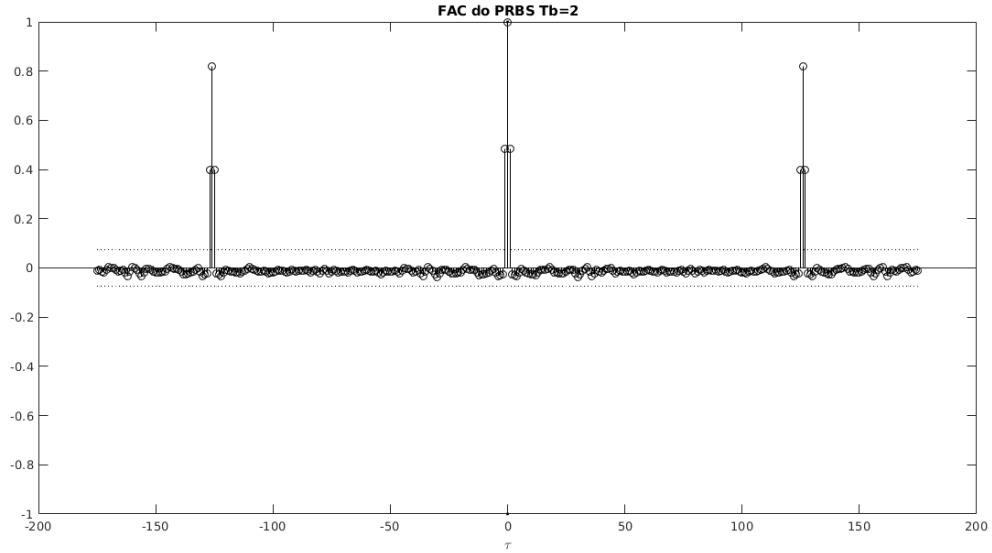


Figura 4: Autocorreção do sinal PRBS,  $T_b=2$

Se o sinal PRBS com  $T_b = 1$  possui período  $T = 63$ , o sinal com  $T_b = 2$  possui  $T = 126$ , já que o tempo de permanência dobrou. Isso é corroborado pela figura 4. Na figura 5, pode-se ver o espectro do sinal.

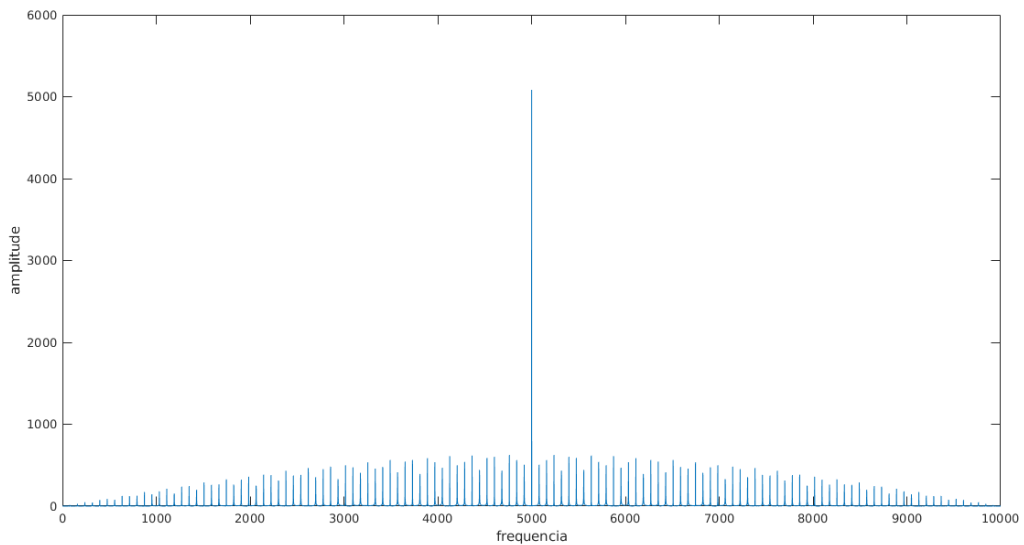


Figura 5: Espectro do sinal PRBS,  $T_b=2$

Ao aumentar o tempo de permanência para  $T_b = 3$ , o período do sinal aumenta ainda mais, de forma que a função de correlação apresenta valores diferentes de zero apenas

em torno de  $\tau = 0$ , conforme a figura 6. O esperado é que, com o aumento do período, o sinal PRBS comece a ganhar características de um pulso unitário. Isso significa que seu espectro deve começar a apresentar semelhanças com o espectro do pulso, que é uma função sinc no domínio da frequência. Esse efeito começa a ser observável na figura 7

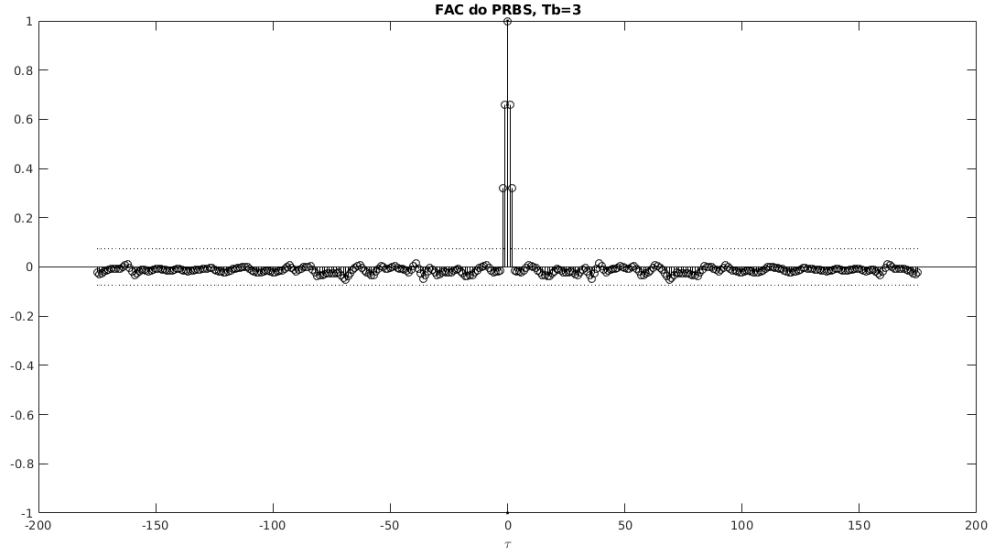


Figura 6: Autocorrelação do sinal PRBS,  $T_b=3$

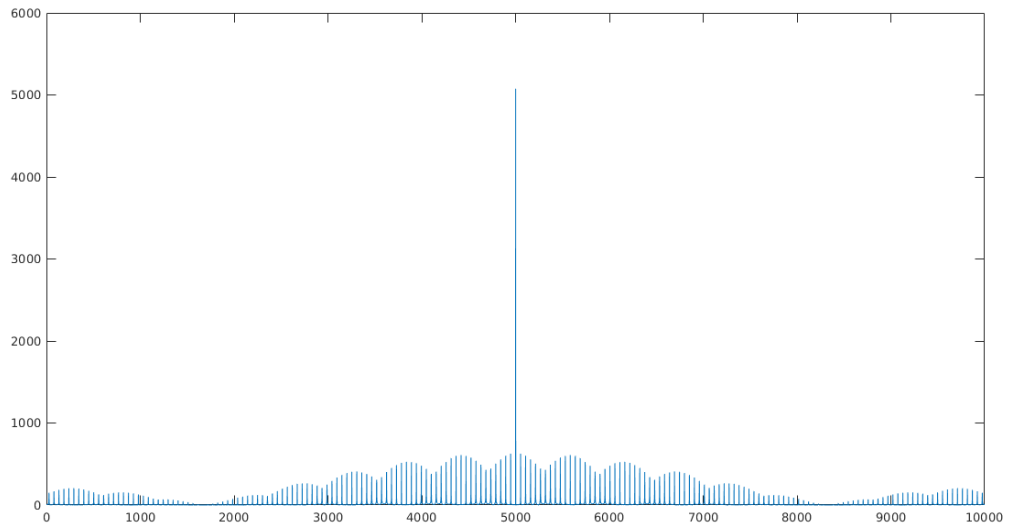


Figura 7: Espectro do sinal PRBS,  $T_b=3$

Aumentando ainda mais o tempo de permanência, fica mais claro a tendência do sinal PRBS de se comportar como um pulso. Para  $T_b = 10$ , vemos como o sinal perde sua característica de rápida oscilação, conforme a figura 8.

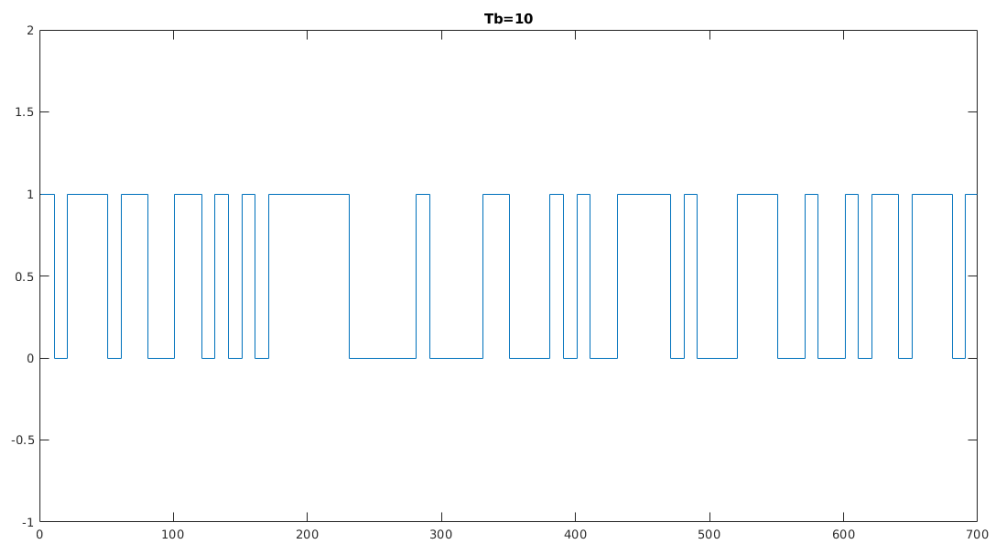


Figura 8: Sinal PRBS,  $T_b=10$

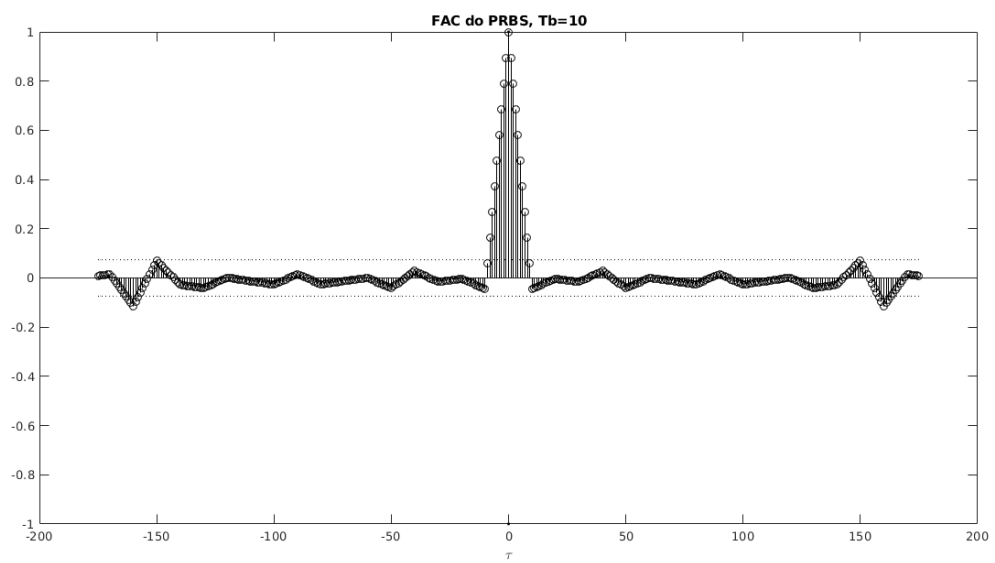


Figura 9: Autocorrelação do PRBS,  $T_b=10$

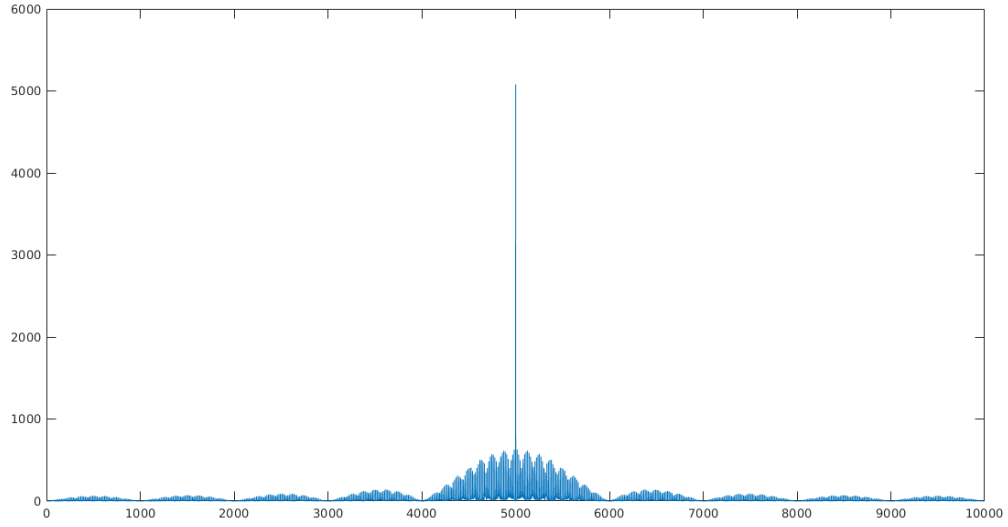


Figura 10: Espectro do PRBS,  $T_b=10$

Na figura 10, vemos que o espectro já se aproxima daquele de um pulso.

## 4 O sinal PRBS na Identificação de Sistemas

Deseja-se agora estudar como o sinal binário pseudoaleatório pode ser útil na identificação de sistemas. É dado um sistema dinâmico representado pela seguinte função de transferência:

$$H(s) = \frac{1}{1000s + 1}$$

dessa FT, extrai-se facilmente a informação de que o ganho do sistema é 1 e sua constante de tempo,  $\tau$ , é

$$\tau = 1000$$

Sabe-se, conforme discutido nas seções anteriores, que o PRBS é um sinal periódico. Entretanto, no problema de identificação de sistemas o cenário ideal seria aquele em que o sistema é excitado com um sinal puramente randômico. Na prática, isso é inviável, pois sinais aleatórios podem gerar desgastes nas partes físicas durante o ensaio, além de possíveis problemas de instabilidade. Portanto, as características do sinal desejáveis para o problema de identificação são aquelas que o aproximam de um sinal aleatório verdadeiro. Assim, é interessante gerar um PRBS com número de bits tal que a periodicidade do sinal não seja "sentida" pela sistema. Em geral, um sistema chega ao regime permanente após um tempo aproximadamente igual a cinco vezes sua constante de tempo. Então, para que o PRBS não se repita antes de o sistema ter vencido sua dinâmica transitória, foi escolhido um número de bits  $n = 12$ , gerando um sinal de período  $T = 4095$ , razoavelmente próximo de  $5 \times \tau = 5000$ .

O sistema  $H(s)$  foi então simulado usando-se como entrada quatro sinais PRBS diferentes, todos com 12 bits, variando o tempo de permanência:  $T_b = 1, 100, 1000$  e  $10000$ .

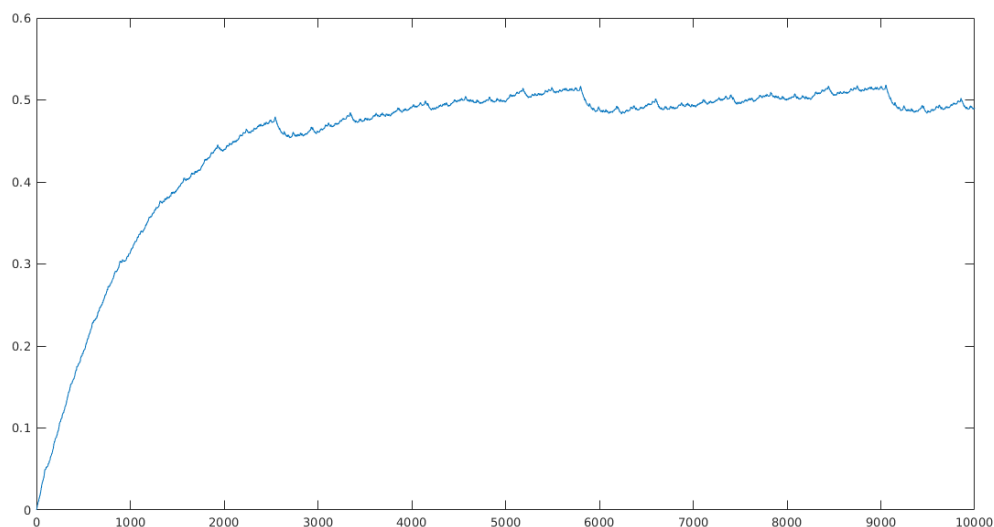


Figura 11: Simulação com  $T_b=1$

Na primeira simulação, ilustrada pela figura 11, é possível notar que o sistema de primeira ordem respondeu como se excitado por um degrau de amplitude 0.5. A oscilação do sinal de entrada foi intensa demais para que o sistema perceba-se que o sinal varia, fazendo com que a média 0.5 fosse a única componente a estimular de fato o sistema.

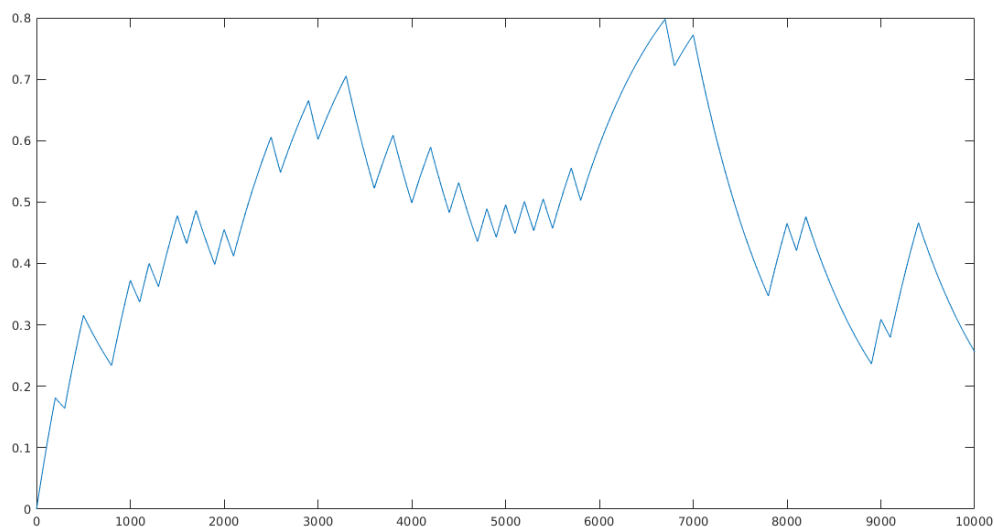


Figura 12: Simulação com  $T_b=100$

Para  $T_b = 100$ , conforme a figura 12, o comportamento do sistema é completamente diferente: ao incrementar  $T_b$ , o período do sinal aumentou e sua oscilação tornou-se lenta o suficiente para que o sistema respondesse como responderia a um sinal aleatório, i.e, a oscilação pode ser "sentida" pela planta.



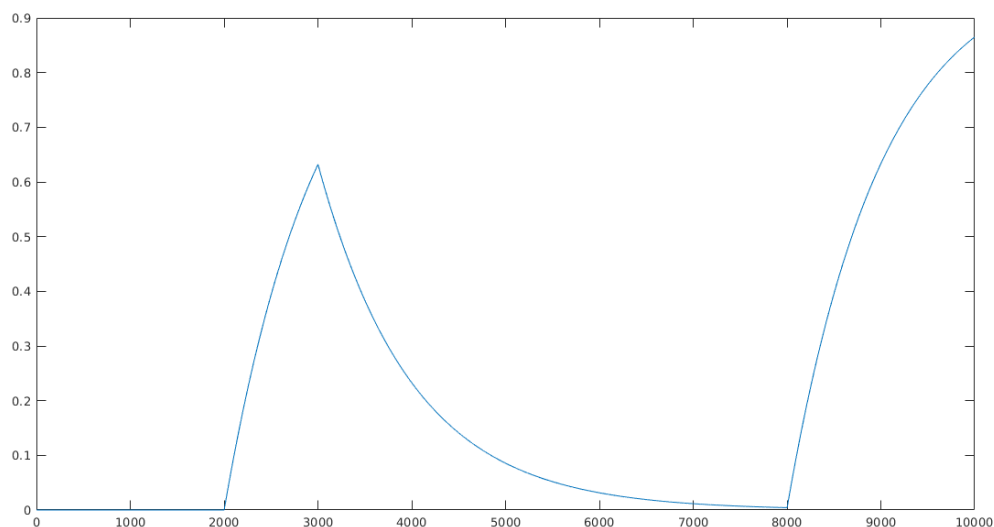


Figura 13: Simulação com  $T_b=1000$

Com  $T_b = 1000$ , o aumento do período e a diminuição na intensidade da oscilação começa a fazer com que o sinal perca sua característica de sinal aleatório, causando menos variações na saída do sistema. Finalmente, com  $T_b = 10000$ , a oscilação se torna tão lenta que o sistema reage como se a entrada fosse um degrau unitário, ou seja, nenhuma oscilação da entrada é percebida pela planta. Esse resultado é ilustrado pela figura 14, que é idêntica à simulação de uma resposta ao degrau unitário de sistema de primeira ordem.

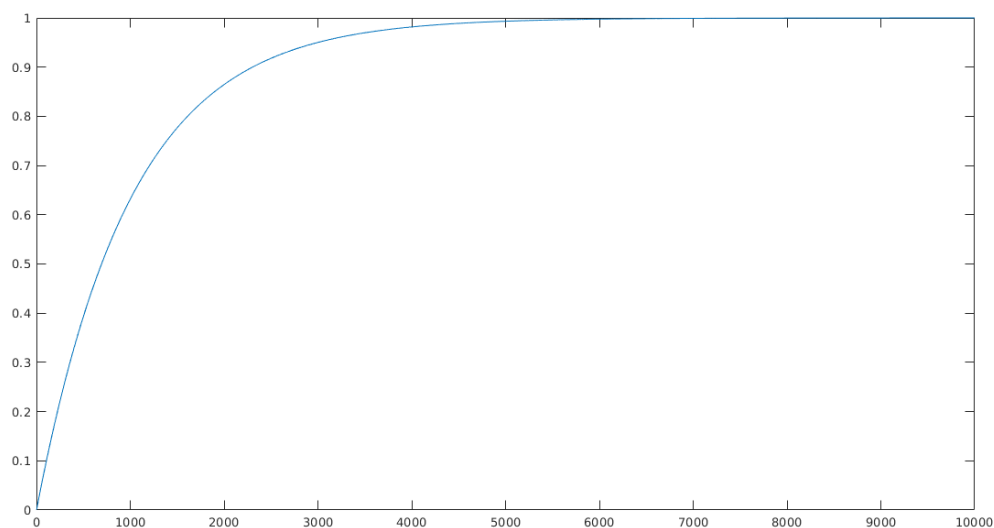


Figura 14: Simulação com  $T_b=10000$

Das simulações feitas, pode-se perceber que é preciso cuidado na aplicação de um sinal PRBS na identificação de sistemas: se o desejável é fazer com que a saída varie o máximo possível, um sinal de entrada com oscilação rápida demais é ruim pois o sistema responde apenas ao valor médio do sinal. Com a oscilação lenta demais, por outro lado, a entrada

não possui qualquer característica de sinal aleatório, e se comporta como um degrau. No caso estudado aqui, o valor ideal de  $T_b$  é  $T_b = 100$ , pois foi o PRBS que mais fez variar a saída do sistema.

## 5 Conclusão

Este trabalho foi importante no entendimento do que são sinais pseudoaleatórios, e qual sua utilidade no contexto de modelagem de sistemas. Pode-se concluir que funções de correlação e sinais do tipo PRBS são ferramentas poderosas, mas um bom entendimento do assunto é fundamental; conhecer bem as ferramentas e a planta permitem ao engenheiro tomar as decisões corretas, já que um PRBS mal escolhido pode levar a resultados ruins, como mostrado na seção 4.

## Referências

- [1] ANTONIO AGUIRRE, Luis. *Intrudução à identificação de sistemas*. Editora UFMG, 4<sup>a</sup> Ed, 2015