ELT016: Trabalho 4

Rúbia Reis Guerra
2013031143

05/05/2019

1 Métodos Não-Paramétricos

1.1 Exercício 4.8

Dado o sinal

$$u(k) = 0,9e(k-1) + 0,8e(k-2) + 0,7e(k-3) + e(k), \tag{1}$$

sendo e(k) ruído branco, com distribuição gaussiana de média zero e variância unitária ($\sigma_e^2 = 1$). É possível estimar a função de autocorrelação (FAC) $r_u(k)$, $k = 0, 1, \ldots, 5$, analiticamente usando-se:

$$r_u(\tau) = \mathrm{E}[e(k)e(k+\tau)]$$

Assumindo estacionariedade, tal que $r_u(\tau) = r_u(-\tau)$, a função de autocorrelação pode ser determinada como:

$$\begin{aligned}
r_u(0) &= \mathrm{E}[(0,9e(k-1) + 0,8e(k-2) + 0,7e(k-3) + e(k))^2] \\
&= 0,9^2\mathrm{E}[e(k-1)^2] + 0,8^2\mathrm{E}[e(k-2)^2] + 0,7^2\mathrm{E}[e(k-3)^2] + \mathrm{E}[e(k)^2] \\
&= (0,9^2 + 0,8^2 + 0,7^2 + 1)\sigma_e^2 = 2,94 \\
r_u(1) &= \mathrm{E}[(0,9e(k-1) + 0,8e(k-2) + 0,7e(k-3) + e(k))(0,9e(k)+ \\
&\quad 0,8e(k-1) + 0,7e(k-2) + e(k+1))] \\
&= 0,9 \cdot 0,8\mathrm{E}[e(k-1)^2] + 0,8 \cdot 0,7\mathrm{E}[e(k-2)^2] + 0,9\mathrm{E}[e(k)^2] \\
&= (0,72 + 0,56 + 0,9)\sigma_e^2 = 2,18 \\
r_u(2) &= \mathrm{E}[(0,9e(k-1) + 0,8e(k-2) + 0,7e(k-3) + e(k))(0,9e(k+1)+ \\
&\quad 0,8e(k) + 0,7e(k-1) + e(k+2))] \\
&= 0,9 \cdot 0,7\mathrm{E}[e(k-1)^2] + 0,8\mathrm{E}[e(k)^2] \\
&= (0,63 + 0,8)\sigma_e^2 = 1,43 \\
r_u(3) &= \mathrm{E}[(0,9e(k-1) + 0,8e(k-2) + 0,7e(k-3) + e(k))(0,9e(k+2)+ \\
&\quad 0,8e(k+1) + 0,7e(k) + e(k+3))] \\
&= 0,7\mathrm{E}[e(k)^2] \\
&= 0,7\sigma_e^2 = 0,7
\end{aligned}$$

Enfim, observa-se que para $\tau > 3$, tem-se:

$$\begin{aligned} r_u(\tau) = \mathrm{E}[(0,9e(k-1) + 0,8e(k-2) + 0,7e(k-3) + e(k))(0,9e(k-1+\tau) + \\ 0,8e(k-2+\tau) + 0,7e(k-3+\tau) + e(k+\tau))] \\ = 0, \forall \tau > 3 \end{aligned}$$

O resultado acima deve-se pelo fato de $e(k)$ constituir ruído branco, logo, a função de autocorrelação de $e(k)$ é nula para todos os atrasos fora da origem. A Figura 1 exemplifica graficamente o $r_u(k)$ normalizado, calculado a partir da função **@myccf2**:

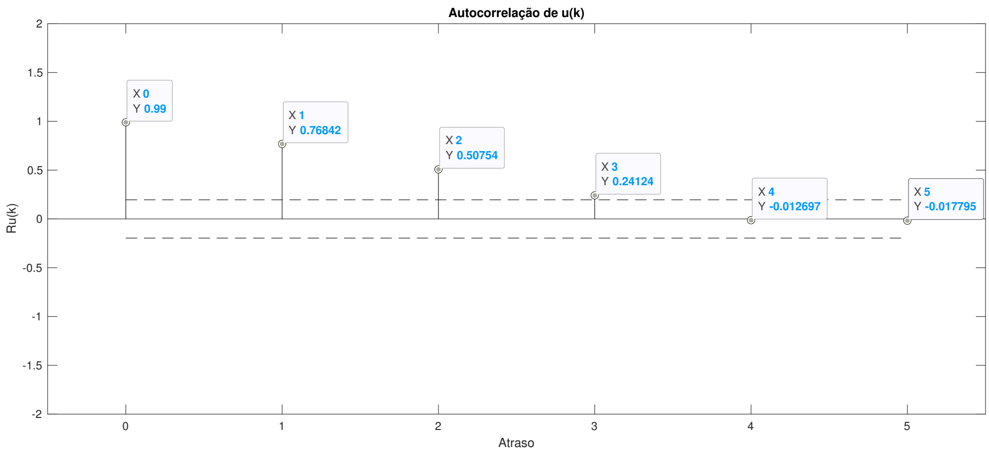

Figura 1: Autocorrelação de u(k)

Multiplicando pelo valor máximo de autocorrelação encontrado B, observa-se que a abordagem numérica aproxima-se bem da analítica:

$$\begin{aligned} B &= 2,9802 \\ r_u(0) &= 2,9504 \\ r_u(1) &= 2,2900 \\ r_u(2) &= 1,5126 \\ r_u(3) &= 0,7189 \\ r_u(4) &= -0,0378 \\ r_u(5) &= -0,0530 \end{aligned}$$

1.2 Exercício 4.15

Sinais binários pseudoaleatórios (PRBS) são bastante utilizados na identificação de sistemas. Tais sinais possuem apenas dois valores possíveis (+V, -V) e são periódicos com período $T = NT_b$, sendo N um número ímpar. A Figura 2 demonstra um exemplo de PRBS de 6 bits de resolução e período $T = 63$ ($T_b = 1$), gerado com a função **@prbs**.

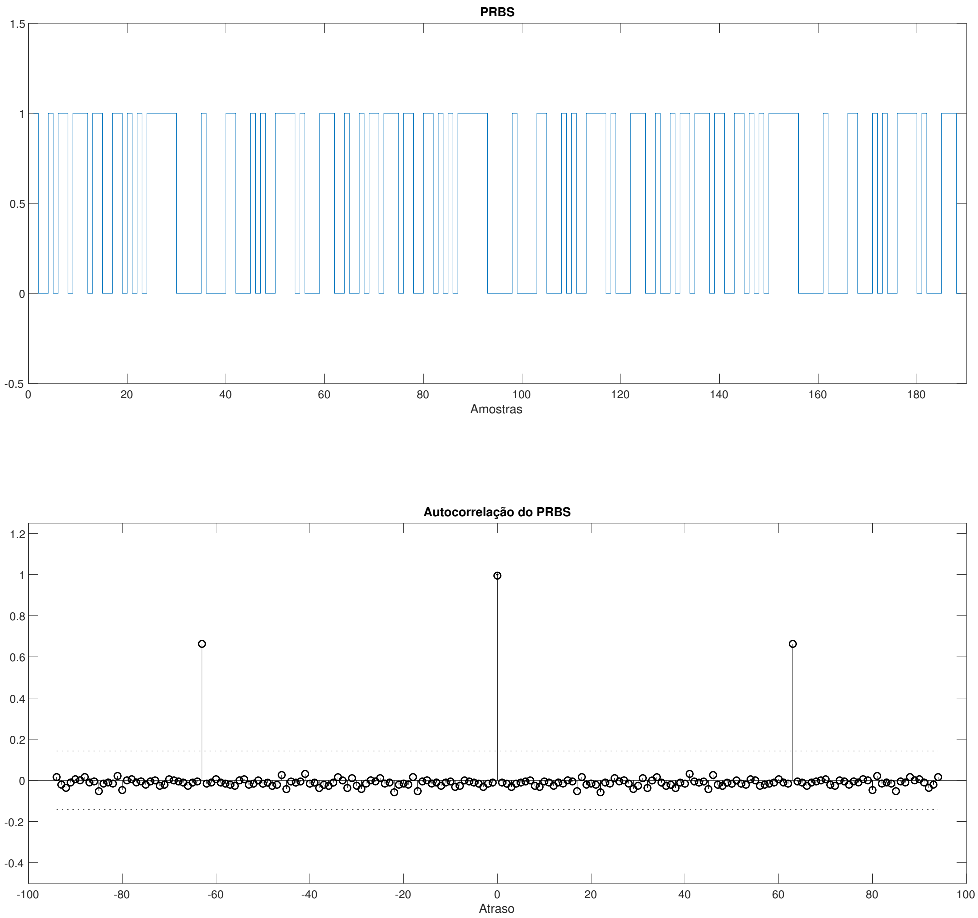

Figura 2: Sinal PRBS com período T = 63

Nota-se, também na Figura 2, a característica pseudoaleatória do sinal evidenciada a partir da função de autocorrelação do PRBS. Para sinais puramente aleatórios é esperado que a autocorrelação seja nula para qualquer valor de atraso diferente de zero, em que a autocorrelação é máxima. Contudo, apesar de assumir $r_u(k)$ máxima em $\tau = 0$, observa-se que o PRBS apresenta valores não nulos de autocorrelação em atrasos múltiplos do período T (para o exemplo acima: $\tau = -63$ e $\tau = 63$).

1.3 Exercício 4.16

Repetindo o sinal da PRBS da Figura 2 com $T_b = 2$, observa-se que o período aumenta proporcionalmente:

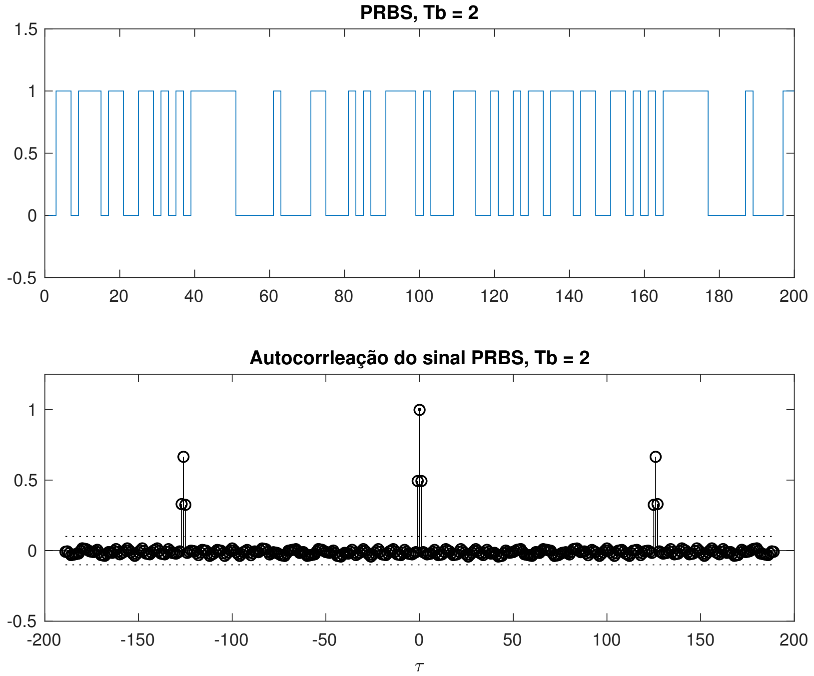

Figura 3: PRBS e FAC para $T_b = 2$

À medida que T_b aumenta, é esperado que a FAC apresente valores não nulos próximos à $\tau = 0$, visto que a frequência com que o período se repete em um intervalo finito diminui. De certa forma, pode-se dizer que o sinal apresenta maior aleatoriedade dentro do intervalo, o que pode ser observado nas Figuras 4 e 5:

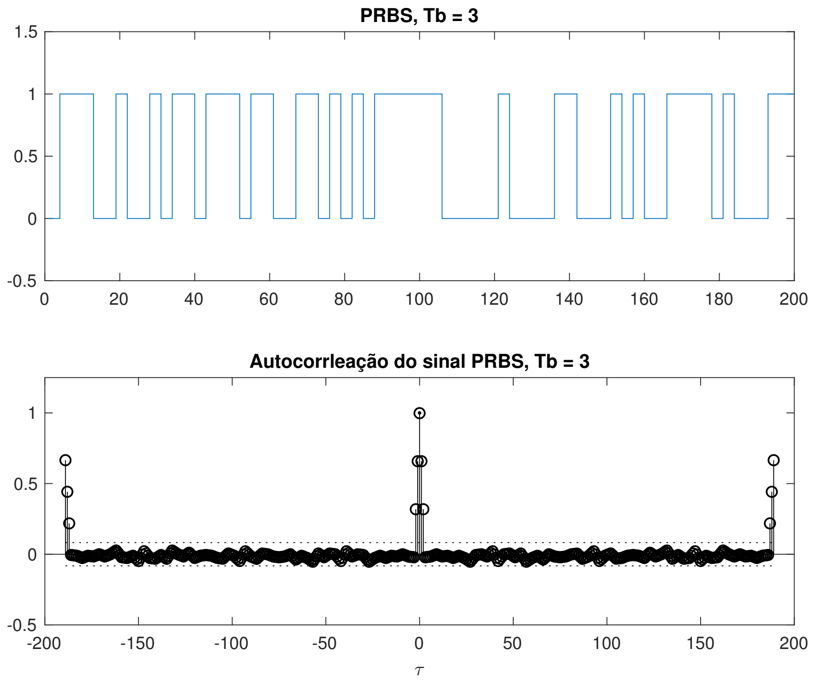

Figura 4: PRBS e FAC para $T_b = 3$

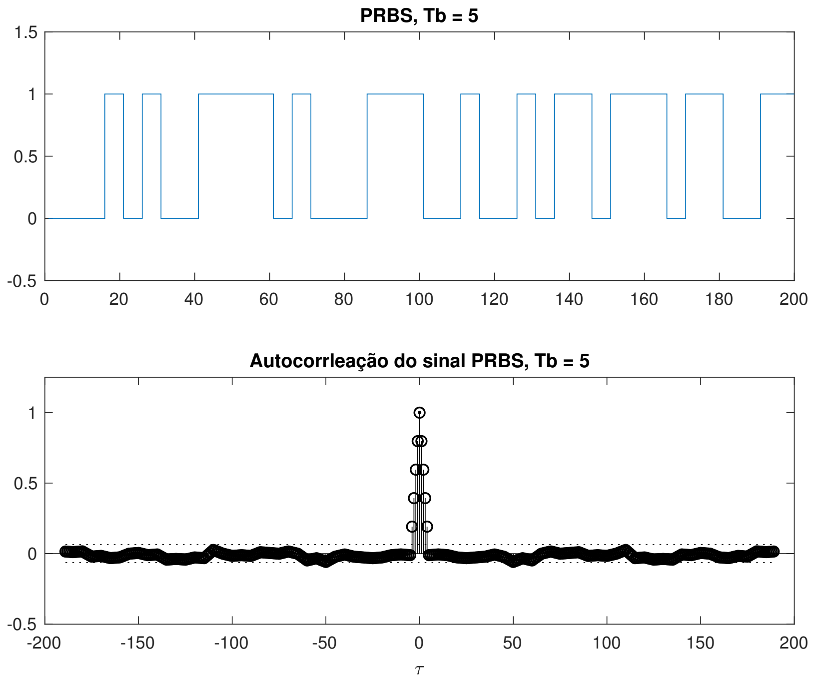

Figura 5: PRBS e FAC para $T_b = 5$

Para $T_b = 10$, é possível observar que o sinal perde sua característica oscilatória, aproximando-se de um pulso unitário:

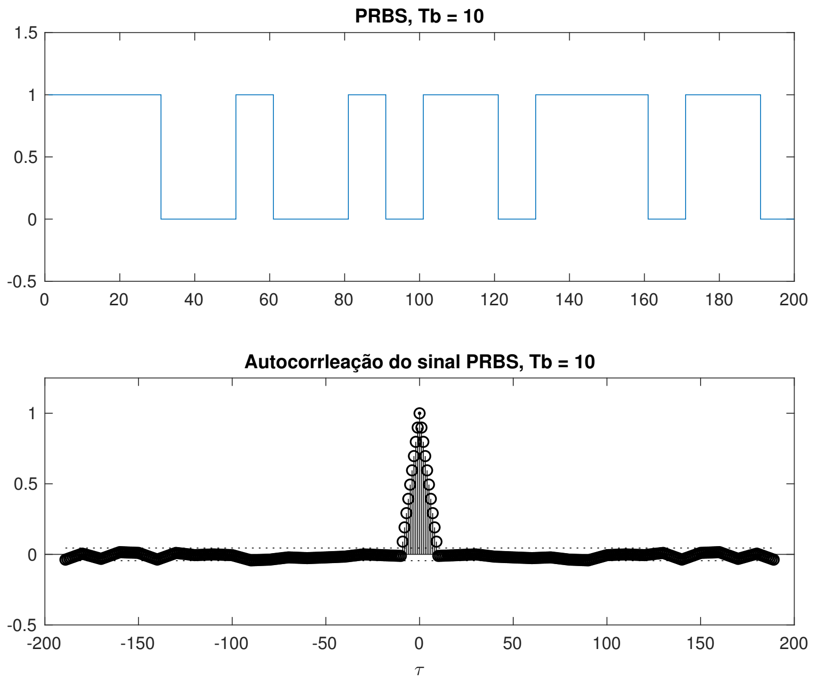

Figura 6: PRBS e FAC para $T_b = 10$

1.4 Exercício 4.20

Os sinais pseudo-aleatórios binários apresentam duas características interessantes quanto da aplicação em identificação de sistemas:

- são limitados pela amplitude. Se presume-se que o processo está operando em uma condição operacional em torno da qual uma linearização pode ser feita sob a restrição de amplitude, este limite de amplitude pode ser usado como uma restrição do sinal de entrada. Isto possibilita evitar a excitação da dinâmica não-linear do sistema. Além disso, o fato da própria amplitude dos atuadores serem restritas por suas configurações físicas torna vantajoso o controle da amplitude do sinal de entrada, evitando o desgaste dos componentes;

- os sinais são binários e, portanto, tem potência máxima sob uma restrição de amplitude limitada. Isso é vantajoso, já que se pode esperar que a precisão das estimativas do modelo melhore quando a potência de entrada for aumentada, criando assim uma relação sinal-ruído maior na saída.

Ao contrário do ruído aleatório branco, que possui todas as frequências e, portanto, o espectro de amplitude de saída média de um sistema excitado por uma fonte de ruído branco dará a resposta de frequência de amplitude desse dispositivo, um sinal PRBS sempre possui um espectro plano. Se é desejável influenciar este espectro, por exemplo, através da amplificação de componentes de frequência particulares, um filtro linear geral pode ser aplicado. No entanto, dessa maneira, tanto a característica binária quanto o limite de amplitude do sinal são perdidos. Uma alternativa para influenciar o conteúdo de frequência do sinal, mantendo essas propriedades é mudando o período do sinal a partir de T_b.

Para elucidar a aplicação do PRBS na identificação de sistemas, considerou-se o sistema de 1ª ordem:

$$H(s) = \frac{1}{1000s + 1} \tag{2}$$

com ganho unitário e constante de tempo igual à:

$$\tau = 1000$$

Uma aproximação do tempo que o sistema demora para atingir o regime permanente pode ser adotada como 5τ. Logo, para que o PRBS não se repita antes de que o sistema passe do regime transitório, é interessante tomar o número de bits $b = 12$, de forma que o período do sinal seja $T = 2^b - 1 = 4095$, uma aproximação razoável de 5τ. Dadas as configurações constantes do PRBS de entrada, foi simulada a resposta do sistema H(s) para $T_b = 1,\ 100,\ 1000,\ \text{e}\ 10000$.

Para $T_b = 1$, observa-se que o PRBS oscilou muito rapidamente, de forma que o sistema só foi capaz de perceber um degrau de aplitude igual à amplitude média do PRBS ($A = 0,5$). O comportamento pode ser visto na Figura 7:

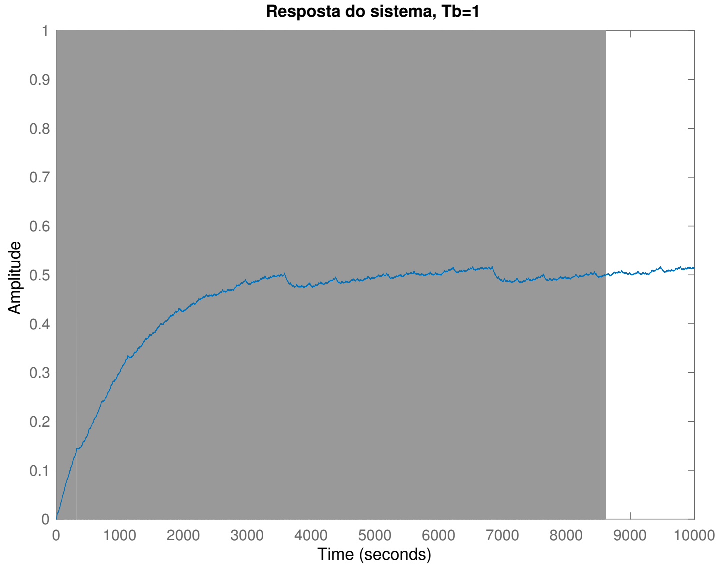

Figura 7: Resposta do sistema H(s) ao PRBS com $T_b = 1$

Para $T_b = 100$, observa-se na Figura 8 que a resposta do sistema apresenta um caráter mais aleatório, indicando que a planta teve melhor capacidade de responder à oscilação da entrada:

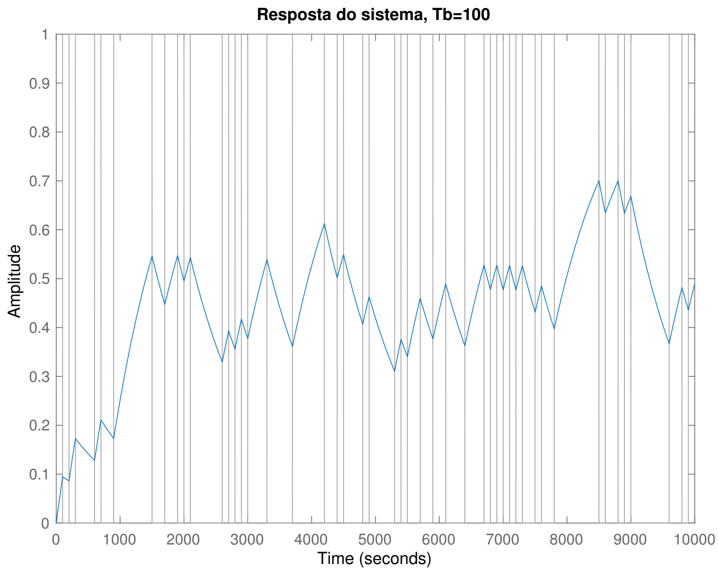

Figura 8: Resposta do sistema H(s) ao PRBS com $T_b = 100$

À medida que T_b aumenta, o caráter aleatório da resposta diminui (Figura 9):

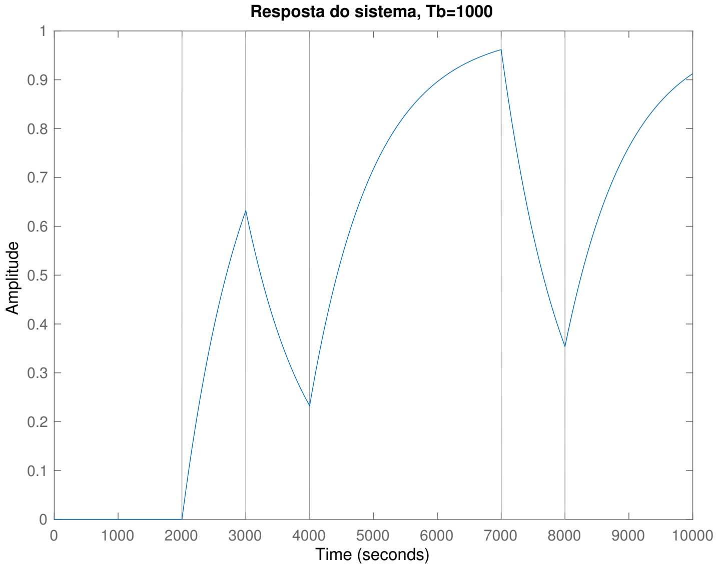

Figura 9: Resposta do sistema H(s) ao PRBS com $T_b = 1000$

Para valores mais elevados de T_b, a dinâmica do PRBS apresenta-se cada vez mais lenta em relação ao sistema, até atingir $T_b = 10000$, em que a entrada se comporta similarmente a um degrau unitário. O resultado pode ser observado na Figura 10:

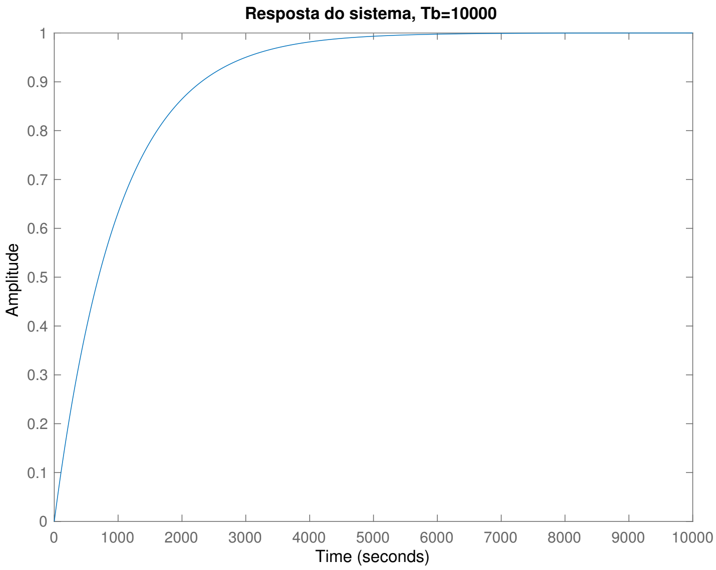

Figura 10: Resposta do sistema H(s) ao PRBS com $T_b = 10000$

Referências

[1] L. A. Aguirre, "Introdução à Identificação de Sistemas". Editora UFMG, 2015.