

# ELT016: Trabalho 5

Rúbia Reis Guerra

2013031143

23/05/2019

## 1 Mínimos Quadrados

### 1.1 Exerício 1

Deseja-se testar o método de mínimos quadrados e a função de correlação cruzada (FCC) para estimar os parâmetros da função de transferência de um sistema de primeira ordem com atraso puro de tempo. Inicialmente, as técnicas serão validadas em um sistema em que os parâmetros são previamente conhecidos:

$$G(s) = \frac{5}{20s + 1} e^{-30s} \quad (1)$$

O sistema apresenta ganho  $K = 5$ , constante de tempo  $\tau = 20$  e atraso puro de tempo  $t_d = 30$ . O intervalo de amostragem foi definido como  $T_s = \frac{\tau}{10} = 2$ .

O sinal de entrada  $u(k)$  escolhido para excitar o sistema é um PRBS de 500 amostras, 9 bits e tempo de amostragem de 1 bit. O sinal escolhido é suficientemente grande para não apresentar periodicidade antes que o sistema vença o regime transitório ( $T = 2^9 - 1 = 512$ ). A Figura 1 apresenta o comportamento da resposta ao degrau da função de transferência 1 com e sem atraso e o sinal PRBS gerado.

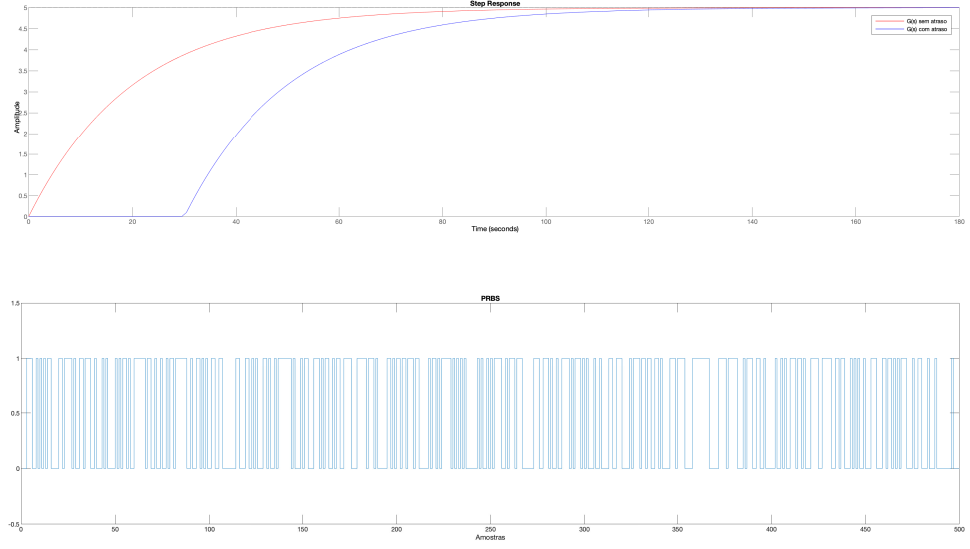


Figura 1: Resposta de  $G(s)$  ao degrau e PRBS ( $u(k)$ )

O atraso puro de tempo pode ser estimado a partir da FCC entre a resposta do sistema ao PRBS ( $y(k)$ ) e o PRBS de entrada. Espera-se que a primeira amostra não-nula da FCC apareça em:

$$k = \frac{t_d}{T_s} + 1 \quad (2)$$

A relação apresentada baseia-se no fato de no intervalo de  $t_0$  a  $t_d$ , ou seja, até o início da resposta transitória do sistema, a FCC entre  $y(k)$  e  $u(k)$  seja nula, visto que  $u(k)$  não apresenta periodicidade no intervalo e  $G(s)$  é constante até  $t_d$ . O atraso  $t_d$  é dividido por  $T_s$  para que seja considerado o efeito da amostragem. Por fim, cabe destacar que a implementação do PRBS utilizada gera um sinal que se inicia em  $t_0 = 1$ , logo, a estimativa do atraso puro de tempo obtida pela FCC apresenta um viés de 1 unidade de tempo.

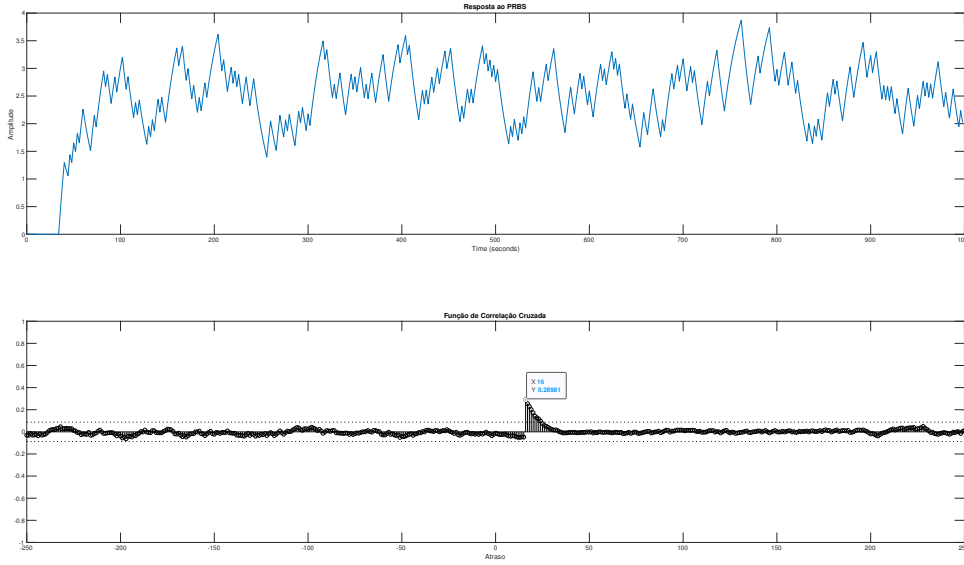


Figura 2:  $y(k)$  e FCC entre  $y(k)$  e  $u(k)$

A partir da relação da Equação 2 e para  $k = 16$  encontrado, tem-se  $\hat{t}_d = t_d = 30$ . Os demais parâmetros podem ser estimados utilizando o Método dos Mínimos Quadrados e a aproximação descrita no Exemplo 8.5.1 do livro texto [1]:

$$y(k) = a_1 y(k-1) + b_1 u(k-1) \quad (3)$$

$$a_1 = 1 - \frac{T_s}{\tau}; \quad b_1 = \frac{T_s K}{\tau} \quad (4)$$

Logo, a matriz de regressores  $\Psi$  é tal que:

$$\Psi = [y_0(k-1) \ u(k-1)]^T \quad (5)$$

$$\hat{\Theta}_{MQ} = [\Psi^T \Psi]^{-1} \Psi^T \mathbf{y} = [a_1 b_1]^T \quad (6)$$

Para o PRBS da Figura 1, obteve-se  $\hat{\Theta}_{MQ} = [0,9048 \ 0,4758]^T$ , tal que  $\hat{\tau} = 21,02$  e  $\hat{K} = 5,00$ , bem próximos dos parâmetros reais. É oportuno destacar que para a aplicação do Método dos Mínimos Quadrados foi considerado o sistema  $G(s)$  sem atraso puro de tempo. Visto que apenas dois parâmetros estão sendo estimados, o método busca encontrar a “melhor reta” que descreva o comportamento dos dados. A presença das amostras correspondentes ao intervalo até o início da resposta transitória acarreta em viés indesejado na estimação da inclinação da reta, que, no caso, corresponde à constante de tempo do sistema ( $a_1$ ).

### 1.1.1 Sistema com Ruído

O experimento foi repetido adicionando ruído gerado pela função **randn**, multiplicado por uma constante  $\alpha = 0,3$ :

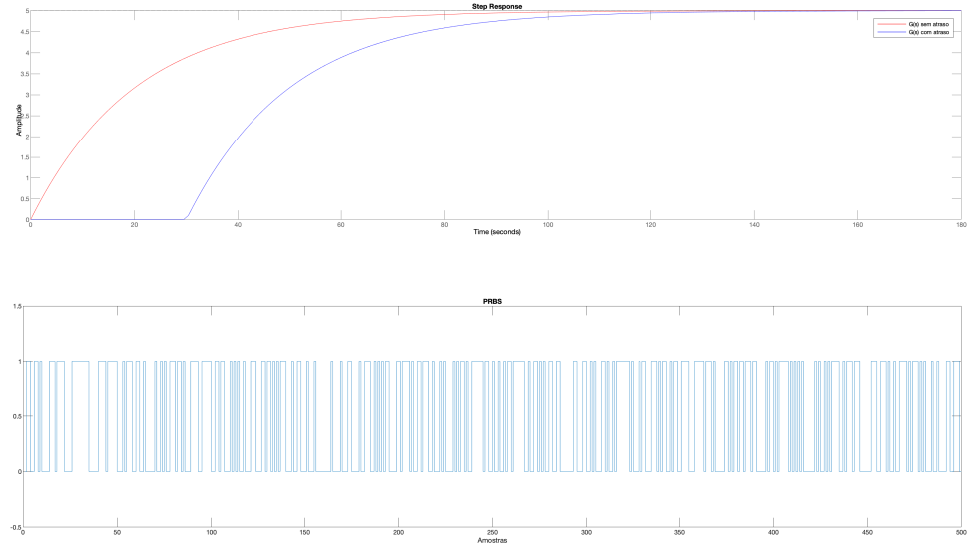


Figura 3: Resposta de  $G(s)$  ao degrau e PRBS ( $u(k)$ ) no experimento com ruído baixo

Observa-se que o atraso estimado  $\hat{t}_d$  continua próximo do parâmetro real, ainda que a FCC apresente mais variabilidade dentro do intervalo de confiança:

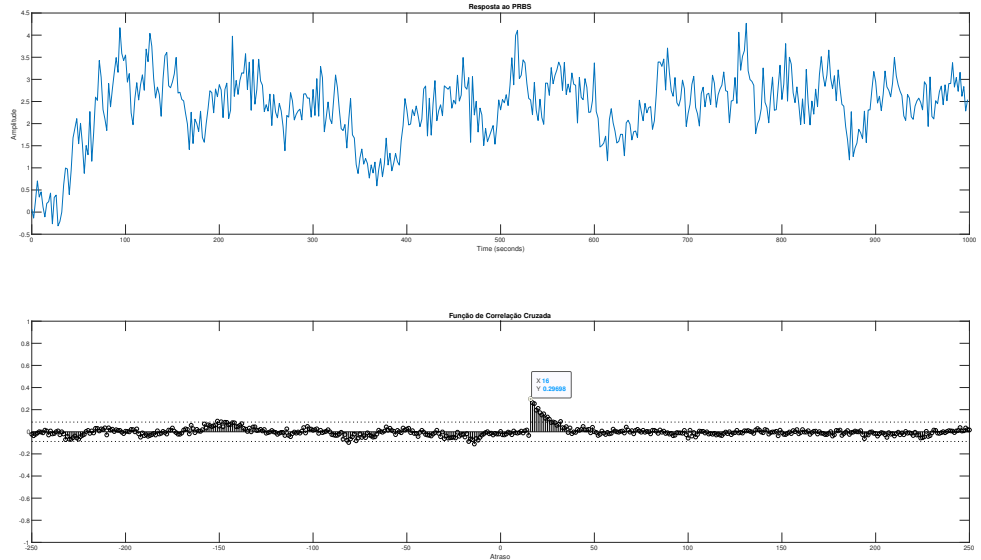


Figura 4:  $y(k)$  adicionada de ruído baixo e FCC entre  $y(k)$  e  $u(k)$

Contudo, nota-se o efeito do ruído nas estimativas da constante de tempo e do ganho:  $\hat{\tau} = 17,7471$  e  $\hat{K} = 4,4069$ . Aumentando drasticamente o fator de escala do ruído para  $\alpha = 3$ , tem-se:

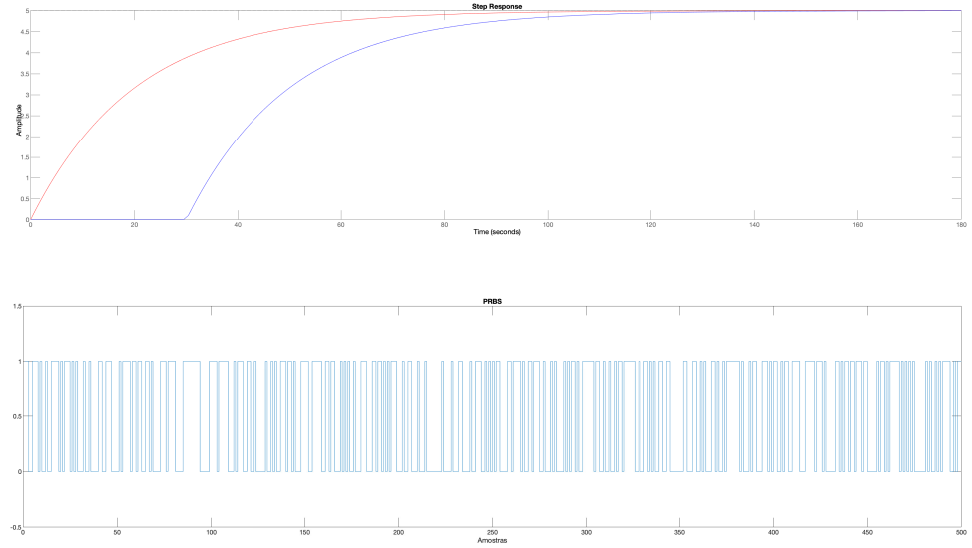


Figura 5: Resposta de  $G(s)$  ao degrau e PRBS ( $u(k)$ ) no experimento com ruído alto

Observa-se que a o atraso puro de tempo nessa situação não pode ser mais estimado pela Função de Correlação Cruzada para um sinal PRBS com os mesmos parâmetros descritos anteriormente:

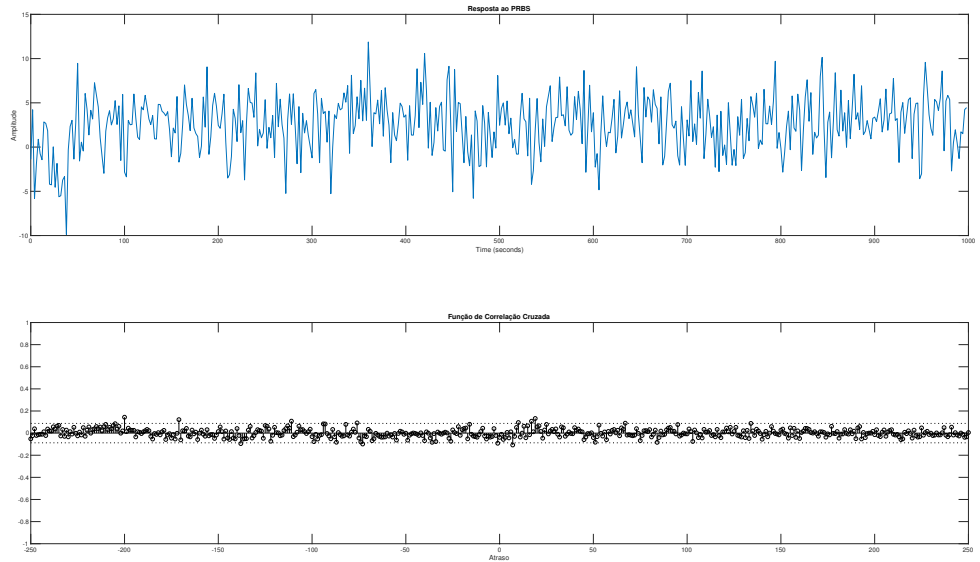


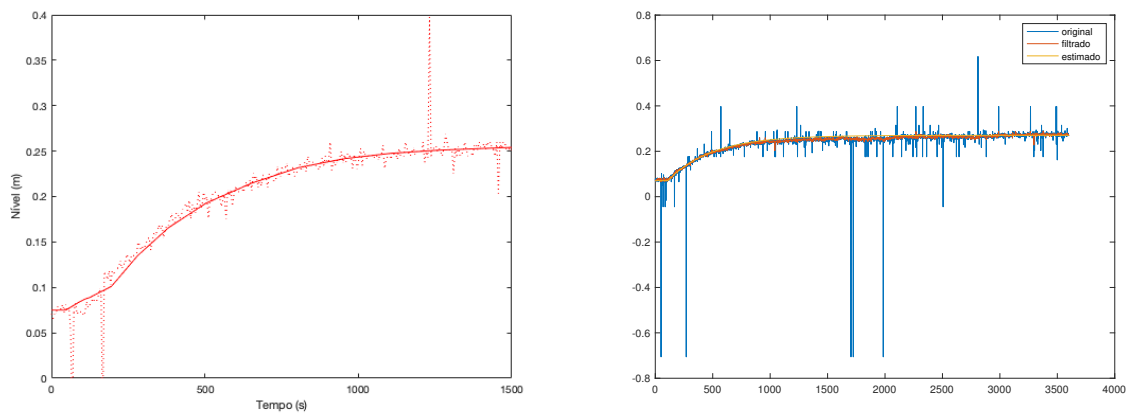
Figura 6:  $y(k)$  adicionada de ruído alto e FCC entre  $y(k)$  e  $u(k)$

Ainda, a exatidão das estimativas da constante de tempo do sistema e do ganho sofreu consideravelmente com o aumento do ruído:  $\hat{\tau} = 2,9118$  e  $\hat{K} = 3,0072$ . O comportamento da “reta” descrita pelos parâmetros  $a_1$  e  $b_1$  aproxima-se cada vez mais de uma reta paralela ao eixo horizontal ao passo que o sistema é descaracterizado pelo ruído. É possível que o Método dos Mínimos Quadrados encontre resultados melhores se utilizado

em conjunto com filtros passa-baixa ou passa-banda, para reduzir o efeito do ruído no sistema, ou ainda que seja utilizado apenas uma porção do conjunto de dados mais representativa do período transitório do sistema - possivelmente até  $t = 200$ , na Figura 6. Outra alternativa, caso não seja interessante reduzir a massa de dados, é utilizar o Método de Mínimos Quadrados Ponderados, atribuindo maior peso às amostras do intervalo que possivelmente tenha mais efeito nos parâmetros a serem estimados.

## 1.2 Exercício 5.14

O Método dos Mínimos Quadrados foi utilizado para estimar um modelo ARX da planta de bombeamento estudada nos trabalhos 1 e 2. As estimativas do modelo realizada nos trabalhos anteriores, obtidas por meio de modelagem fenomenológica (Trabalho 1) e pelo método determinístico de Sundaresan-Krishnaswamy (Trabalho 2) podem ser vistas na Figura 7 abaixo:



(a) Trabalho 1: Modelagem Fenomenológica

(b) Trabalho 2: Método Determinístico

Figura 7: Modelos estimados em trabalhos anteriores

Visto que a massa de dados para o Exercício 5.14 é diferente daquela fornecida nos exercícios dos trabalhos anteriores, realizou-se uma análise exploratória dos dados antes da aplicação do método. A Figura 8 mostra a entrada  $u(k)$ , gerada por um PRBS adicionado de ruído e a resposta do sistema  $y(k)$ :

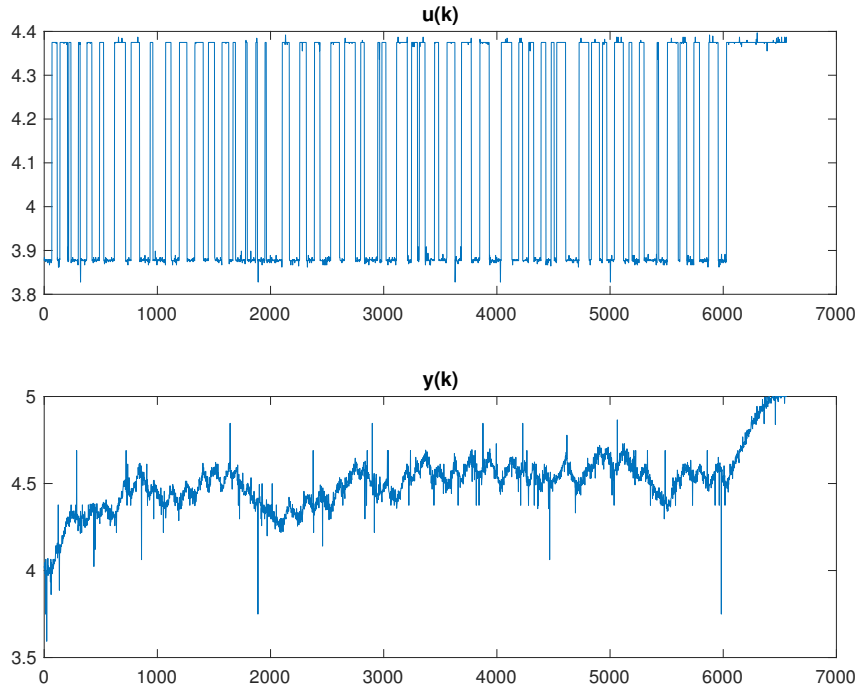


Figura 8: Massa de dados disponibilizada

A partir da Função de Autocorrelação, verificou-se se  $u(k)$  apresenta periodicidade dentro do intervalo amostrado. A FAC da Figura 9 indica que  $u(k)$  não apresenta periodicidade, visto que o sinal apresenta correlação significativa apenas em  $k = 0$ , desconsiderando-se efeitos do ruído. A estimação de parâmetros a partir da FCC entre  $y(k)$  e  $u(k)$  é pouco informativa devido, possivelmente, ao ruído do presente no sistema.

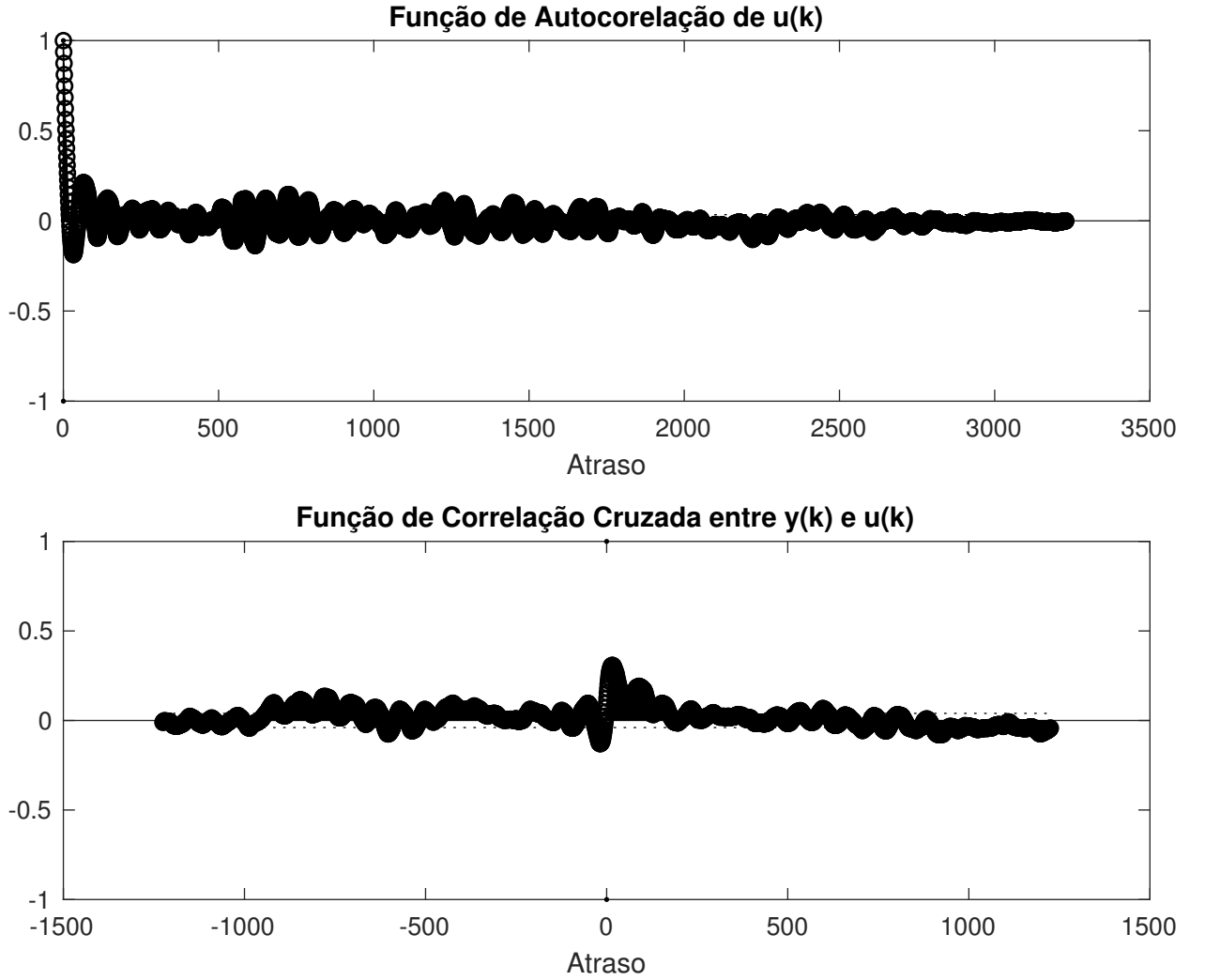


Figura 9: FAC de  $u(k)$  e FCC entre  $u(k)$  e  $y(k)$

A partir da análise exploratória, observa-se três situações:

1. O sistema aparenta ter um atraso puro de tempo, que dura até  $t = 100$ ;
2. Após  $t = 6000$ , a entrada  $u(k)$  permanece em nível alto, que gera um comportamento similar a o de uma rampa no sistema;
3. O ganho, constante de tempo e as unidades de escala apresentadas na nova massa de dados parecem não condizer com o que foi observado nos conjuntos de dados disponibilizados anteriormente, impossibilitando a comparação direta dos resultados obtidos;
4. Estima-se que o tempo de amostragem é de  $T_s \approx 2$ .

Sobre os itens 1 e 2, optou-se por excluir as amostras relacionadas aos intervalos  $t < 100$  e  $t > 6000$ . A massa de dados foi então tratada utilizando-se um filtro linear de suavização (filtro da mediana), para remover valores extremos de ruído, e normalizando a entrada  $u(k)$  e a resposta  $y(k)$ . O resultado obtido pode ser visto na Figura 10:



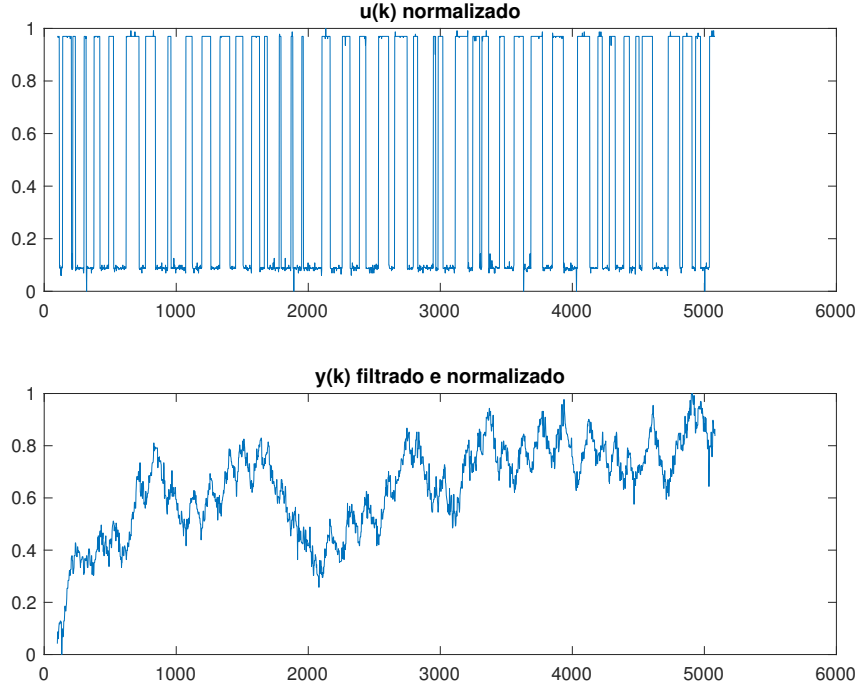


Figura 10: Massa de dados tratada

Aplicando o Método dos Mínimos Quadrados, utilizando as relações apresentadas nas Equações 3 a 6 para obter um modelo ARX de um sistema de 1ª ordem, obteve-se:

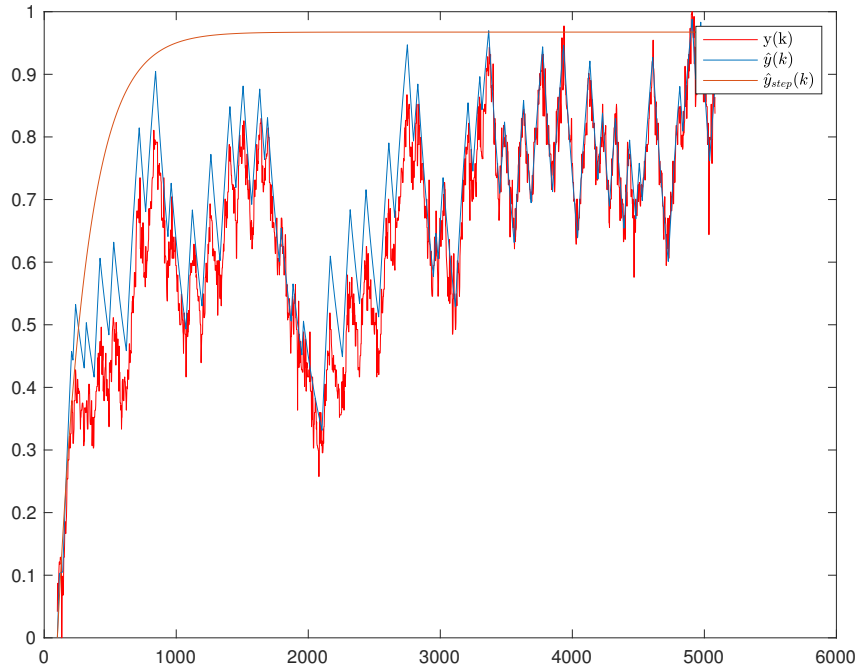


Figura 11: Resultados do modelo estimado pelo Método dos Mínimos Quadrados

Os parâmetros estimados obtidos foram  $\hat{\tau} = 223$  e  $\hat{K} = 1.5$ . Observa-se que o comportamento de  $\hat{y}(k)$  foi similar àquele que se queria estimar, indicando que o método utilizado é robusto à presença de ruído no sistema.

A abordagem de Mínimos Quadrados é uma alternativa interessante em relação à apresentada em 7a visto que demanda pouco conhecimento do processo. Ainda, o método

permite a obtenção de um modelo robusto ao ruído e capaz de se adaptar a novas massas de dados, uma vez que as abordagens empíricas como a adotada no Trabalho 1 não extrapolam bem além do conjunto utilizado para validar o modelo.

Em relação ao método determinístico empregado no Trabalho 2, o método de MQ é interessante no sentido de que pode ser estendido para casos mais gerais, por exemplo, em sistemas com mais de uma entrada ou mais de uma saída. O método de MQ também apresenta-se como uma ferramenta relativamente simples que pode ser extrapolada para sistemas de ordem mais alta e com mais parâmetros de interesse. Cabe ressaltar, contudo, que, nesses casos, é importante que a representação do modelo seja cuidadosamente escolhida e que exista uma quantidade de dados suficientemente grande, de forma que o sistema possua graus de liberdade o bastante para que todos os parâmetros possam ser estimados. Ainda, é importante ressaltar que o método de MQ está sujeito à sobre-determinação, ou seja, a estimação de modelos que não generalizam bem para massas de dados além da que foi utilizada para validação do método. Assim, a aplicação deve ser feita com cautela, avaliando os possíveis *trade-offs* entre a quantidade e a qualidade dos dados disponíveis e levando em consideração o que se deseja obter do modelo.

## Referências

- [1] L. A. Aguirre, “Introdução à Identificação de Sistemas”. Editora UFMG, 2015.