Rešene izpitne naloge

Optimizacijske Metode 2020/21

David Rubin

23. januar 2021

Kazalo

1 Uvod

Dokument predstavlja zapisnik dela, ki se je izvajalo na vajah predmeta. Poleg tega dokumenta so dostopne tudi podmape, v katerih se nahajajo `m file`, ki vsebujejo nekatere definicije za izvedbo ukazov, ki pripeljejo do ustreznih rešitev.

2 Splošni napotki vaj

V kolikor uporabljaš simbolične funkcije, je potrebno spremenljivke inicializirati s `syms`. V kolikor bi si rad izrisal neko funkcijo, to storiš najlažje tako, da si definiraš simbolične spremenljivke s `syms`, definiraš neko funkcijo in kličeš izris s `ezmesh` (ali `fmesh`). Malo je treba tudi ugibati pri definiciji intervala, na katerem je izris, da dobiš dobro predstavitev. Glej kodo 1

Listing 1: Splošna uporaba Matlab na 1. vajah

```
% Inicializiraj spremenljivke za simbolicne funkcije
syms x y

% Definiraj neko funkcijo
f = x^4 - 16*x^2 - 5*x + y^4 - 16*y^2 - 5*y;

% Odvajaj parcialni odvod 1. stopnje po 'x'
diff(f, x, 1);

% jacobian -> v dveh stopnjah za pridobitev matrike
%jacobian(jacobian(f));

% Vstavi vrednost 3 v funkcijo in ostane samo spremenljivka 'y'
simpleF = subs(f,x,3);
% Vstavi se vrednost v 'y' in ostane nam neka vrednost
subs(simpleF, 4);

% roots izracuna nicle - tukaj imamo kompleksne nicle (f ne seka X osi)
roots([3 4 29 4 2 9])

% Izrisi graf na intervalu -5 5
fmesh(f, [-5, 5]);
```

Še nekaj koristnih napotkov pri uporabi funkcij:

- `fminsearch(@(`x`) function(`x`),` x_0`)` ... Uporabimo, ko iščemo minimume funkcij. `@(`x`)` nam pove, da je x neodvisna spremenljivka. `function(`x`)` je definicija neke funkcije (v večini primerov skozi ta dokument, bo ta funkcija shranjena v ločenem m-file). x_0 nam določa, kje bo postopek pričel, torej našo začetno točko. Priporočljivo je, da se uporabijo različne točke, saj se lahko nekatere *ujamejo* v lokalne minimume, mi pa si želimo poiskati globalnega. Dovolj dobro je, da vzamemo kar nekaj naključno generiranih točk, si shranimo rešitve za vsak klic in jih med sabo primerjamo. Če so vse vrednosti enake, potem to tipično pomeni, da je algoritem našel globalni minimum v vseh primerih, rešitev je potem katerakoli izmed pridobljenih. V kolikor niso vse rešitve enake, pa vzamemo najmanjšo vrednost, saj je tam globalni minimum. Za iskanje maksimumov lahko uporabimo isto funkcijo in ji spremenimo le parametre: `fminsearch(@(`x`) -function(`x`),` x_0`)` (dodali smo -). Paziti je potrebno, da ima tudi rezultat potem spremenjen (negativen) predznak.

- `fmincon(@(`x`) function(`x`),` x_0`,` A`,` b`,` A_{eq}`,` b_{eq}`, LB, UB, NONLCON)` ... pa je funkcija, kjer išemo minimume ob podanih omejitvah. Enako kot prej sta defirnirani `function(`x`)` in x_0, dodajo pa se še naslednji členi. Matrika A predstavlja omejitve, pri katerih gre za relacijo $\leq$. V matriko A zapišemo števila na levi strani pred spremenljivkami, paziti pa je potrebno, da če katera spremenljivka ni označena v omejitvi jo v matriki predstavimo s členom 0. Vektor b predstavlja desno stran omejitev (torej vrednosti ki so na desni strani relacije *leq*). V kolikor je relacija $\geq$ je potrebno vse člene ustrezno pomnožiti z -1. Matrika A_{eq} in vektor b_{eq} predstavljata omejitve kjer je relacija $=$. `LB` in `UB` predstavljata spodnjo (*Lower Bound*) in zgornjo mejo (*Upper Bound*). `NONLCON` pa uporabimo kadar omejitve niso linearne (*non linear constraints)*. V tem primeru se tipično definirajo v ločenem *m-file*. Glej primer na nalogi 3.1.3 ali nalogi 3.5.2.

Poglejmo si primer iskanja minimuma za funkcijo `bana` definirano v ločenem *m-file*:

```
function y = bana(x)
    % Elemente v vektorjah dosegas s vektor(INDEX) ... index je seveda 1..N
    y = x(1)^4 - 16*x(1)^2 - 5*x(1) + x(2)^4 - 16*x(2)^2 - 5*x(2);
end
```

Uporabimo klic in določimo nek interval (pri tem lahko za enostavne funkcije pomaga izris):

```
% Funkcija vraca tocko x, vrednost minimuma fval, in zastavico flag (katero
    opazujemo da je 1 - pomeni da je najdena ustrezna resitev)
[x, fval, flag] = fminsearch(@(x)bana(x), [-3, -3])
% Vrne:
%       x =[-2.7468   -2.7468]
%       fval = -100.1178
%       flag = 1
% Imamo se en lokalni minimum, ce ponovimo iskanje v drugi tocki
[x, fval, flag] = fminsearch(@(x)bana(x), [-3, 3])
% Vrne:
%       x =[-2.7468   2.9035]
%       fval = -128.3912
%       flag = 1
```

3 Izpitne naloge

V nadaljevanju sledijo izpitne naloge in postopki za pridobitev rešitev.

3.1 Izpit 23. maj 2008

3.1.1 Naloga 1.)

Navodila:
Minimiziraj funkcijo:

$$f(x) = (x_1 - 0.5)^2(x_1 + 1)^2 + (x_2 + 1)^2(x_2 - 1) \quad (1)$$

Ali ima funkcija samo en lokalni minimum oziroma maksimum? Če jih ima morda več, jih poišči! Kolikšna je vrednost funkcije v točki minimuma. Pomagaš si lahko z risanjem funkcije.

Rešitev:
Funkcijo si lahko izrišemo s pomočjo ukazov

```
syms x y
f = (x - 0.5)^2 * (x + 1)^2 + (y + 1)^2 * (y - 1)^2;
fmesh(f, [-3, 3])
```

V novem `maj2008_1.m` si definiramo funkcijo:

```
function y = maj2008_1(x)
    y = (x(1) - 0.5)^2 * (x(1) + 1)^2 + (x(2) + 1)^2 * (x(2) - 1)^2;
end
```

Potem lahko napišemo skripto (oziroma preverimo v zanki) iskanje minimuma iz večih točk:

```
resitve = [];  % vnaprej pripravljen vektor resitev
for i=1:100  % 100 iteracij
        random_x0 = 20 * rand(1:2) - 10  % nakljucna zacetna tocka iz intervala
             [-10, 10]
        [x, fval, flag] = fminsearch(@(x)maj2008_1(x), random_x0)
        if flag == 1
                resitve = [resitve; [x fval]]  % shrani si dobre resitve
        end
end
b = uniquetol(resitve, 1e-6, 'byrows', true)  % izloci duplikatne resitve
% Vrne v stilu:
% b =
%    -1.00   -1.00   0
%    -1.00    1.00   0
%     0.50    1.00   0
%     0.50   -1.00   0
```

Te unikatne rešitve so potem vrednosti za naše minimume. Prva dva stolpca sta vrednosti x_1 in x_2, tretji stolpec pa vrednost funkcije v tej točki $f(x_1, x_2)$. Za iskanje maksimuma vidimo na grafu da je samo 1 in se nahaja v bližini točke $[0, 0]$, zato uporabimo le 1 klic:

```
[x, fval, flag] = fminsearch(@(x)-maj2008_1(x), [0, 0])
% Vrne v stilu:
% x = [-0.2500    0.0000]
% fval = -1.3164
% flag = 1
```

Kar pomeni da je točka $[-0.25, 0]$ lokalni maksimum z vrednostjo -1.3164.

3.1.2 Naloga 2.)

Navodila:

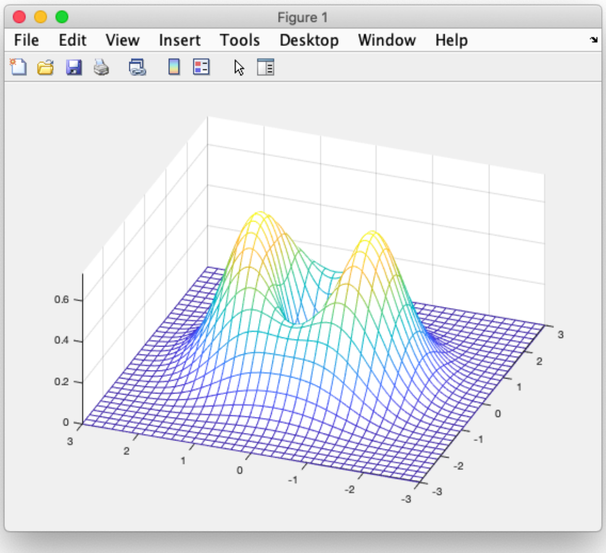
Maksimiziraj funkcijo in izračunaj njeno vrednost v točki maksimuma:

$$f(x) = (x_1^2 + 2x_2^2)e^{-(x_1^2+x_2^2)} \tag{2}$$

Rešitev:

Podobno kot v nalogi 3.1.1 si najprej narišemo funkcijo, in potem poskušamo identificirati število in postopek iskanja maksimumov:

```
syms x y
f = (x^2 + 2*y^2) * exp( -(x^2 + y^2) );
fmesh(f, [-3, 3])
```



Slika 1: Izris funkcije 2 na intervalu $[-3, 3]$.

Pri izrisu (glej sliko 1) vidimo, da ima funkcija 2 vrhova in to v bližini točk $[0, -1]$ in $[0, 1]$. Funkcijo definiramo v ločenem *m-file* (`maj2008_2.m`):

```
function y = maj2008_2(x)
    y = (x(1)^2 + 2*x(2)^2) * exp( -(x(1)^2 +x(2)^2) );
end
```

... in uporabimo informacijo iz izrisa v naslednjem klicu:

```
[x, fval, flag] = fminsearch(@(x)-maj2008_2(x), [0, 1])
% Vrne v stilu:
% x =  [0    1]
% fval = -0.7358
% flag = 1
[x, fval, flag] = fminsearch(@(x)-maj2008_2(x), [0, -1])
% Vrne v stilu:
% x =  [0   -1]
```

```
% fval = -0.7358
% flag = 1
```

Točke, ki smo jih ocenili na grafu, so očitno maksimumi. Treba pa je paziti, saj je vrednost maksimumov v `fval` obratna - pravina vrednost obeh maksimumov je torej $f_{max} = 0.7358$.

3.1.3 Naloga 3.)

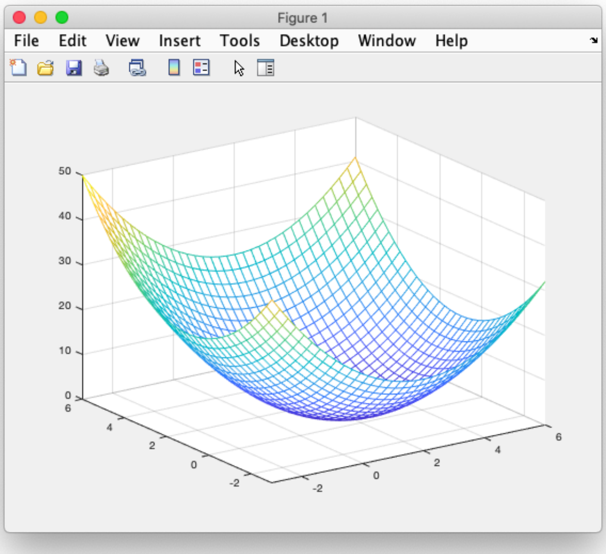
Navodila:
Določi minimum funkcije in njeno vrednost v točki minimuma:

$$f(x) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2 \tag{3}$$

ob naslednjih omejitvah

$$\begin{aligned} -x_1 - x_2 + 2 &\geq 0 \\ -x_1^2 + x_2 &\geq 0 \end{aligned} \tag{4}$$

Rešitev:
Najprej si izrišimo funkcijo, da dobimo vpogled s čem imamo opravka (glej sliko 2). Vidimo, da imamo 1 globalni minimum nekje relativno blizu točke $[0, 0]$.



Slika 2: Izris funkcije 3 na intervalu $[-3, 6]$.

V ločenem *m-file* si sedaj definiramo funkcijo (`maj2008_3.m`):

```
% Definicija funckije ki jo minimiziramo
function y = maj2008_3(x)
    y = (x(1) - 2)^2 + (x(2)-1)^2;
end

%
```

... in omejitve (`maj2008_3_con.m`):

```
% Omejitve za funkcijo
function [c, ceq] = maj2008_3_con(x)
    c = [x(1)+x(2)-2; x(1)^2-x(2)]; % <- ze pomnozeno z -1
    ceq = [];
end
```

Omejitve so tipa $\geq$, zato smo jih pomnožili s -1 preden smo jih vstavili v spremenljvko `c`. Sedaj lahko poženemo iskanje minimuma v bližini $[0, 0]$:

```
[x, fval, flag] = fmincon(@(x)maj2008_3(x), [0, 0], [], [], [], [], [], [], @(x
    )maj2008_3_con(x))
% Vrne v stilu:
% x =  [1.000   -1.000]
% fval = 1.0000
% flag = 1
```

kar nam vrne rešitev $f_{min} = 1.000$ v točki $[1, -1]$.

3.1.4 Naloga 4.)

Navodila:
Poišči vse ničle enačbe:

$$f(x) = x^5 - 6x^4 - 92x^3 + 402x^2 + 91x - 396 \tag{5}$$

Rešitev:
Uporabimo funkcijo `roots` in ji podamo koeficiente za vsako stopnjo x:

```
roots([1 -6 -92 402 91 -396])
% Vrne v stilu:
% ans =
%     -9.0000
%     11.0000
%      4.0000
%     -1.0000
%      1.0000
```

Rešitev (ničle) so torej pri $x \in \{-9, -1, 1, 4, 11\}$

3.1.5 Naloga 5.)

Navodila:
Letalska družba kupuje gorivo za letala pri treh različnih prodajalcih. Družba potrebuje v naslednjem mesecu na vsakem od treh letališč, kjer pristaja, naslednje količine goriva: 100.000l na letališču 1, 180.000l na letališču 2 ter 350.000l na letališču 3. Gorivo prodajajo trije prodajalci, njihovo ceno goriva na posameznem letališču podaja naslednja tabela (cene so v centih na liter):

Vsak prodajalec pa ima na voljo omejene količine goriva, ki ga skupno lahko dostavi v posameznem mesecu. Te količine so 320.000l prvi prodajalec, 270.000l drugi ter 190.000l tretji prodajalec. Določi pravilo za nakup goriva letalske družbe, ki bo zadovoljilo njihovim potrebam na vsakem od letališč ter bo ekonomsko čimbolj ugodno.

	Letališče 1	Letališče 2	Letališče 3
Prodajalec 1	92	89	90
Prodajalec 2	91	91	95
Prodajalec 3	87	90	92

Rešitev:
Najprej si zastavimo spremenljivke x_i, kjer $i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, pri čemer je x_1 količina goriva kupljenega na letališču 1 pri prodajalcu 1, x_2 je količina goriva kupljenega na letališču 2 pri prodajalcu 1, ... in x_9 je količina goriva kupljenega na letališču 3 pri prodajalcu 3. Iz tega sledijo omejitve:

$$
\begin{aligned}
x_1 + x_2 + x_3 &\geq 320.000 \\
x_4 + x_5 + x_6 &\geq 270.000 \\
x_7 + x_8 + x_9 &\geq 190.000 \\
x_1 + x_4 + x_7 &= 100.000 \\
x_2 + x_5 + x_8 &= 180.000 \\
x_3 + x_6 + x_9 &= 350.000 \\
x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6, x_7, x_8, x_9 &\geq 0
\end{aligned} \tag{6}
$$

... in funkcija, ki jo minimiziramo:

$$f(x) = 92x_1 + 89x_2 + 90x_3 + 91x_4 + 91x_5 + 95x_6 + 87x_7 + 90x_8 + 92x_9 \tag{7}$$

Vključili smo tudi omejitev nenegativnosti, saj smatramo, da letalska družba ne želi preprodajati goriva iz enega letališča na drugo (torej kupiti negativno količino). Problem lahko rešimo s funkcijo `intlinprog`:

```
% Koeficienti funkcije, ki jo minimiziramo
f = [92 89 90 91 91 95 87 90 92];

% Matrika in vektor, kjer je relacija <=
A = [1 1 1 0 0 0 0 0 0; 0 0 0 1 1 1 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 1 1 1];
b = [320000 270000 190000];

% Matrika in vektor, kjer je relacija =
Aeq = [1 0 0 1 0 0 1 0 0; 0 1 0 0 1 0 0 1 0; 0 0 1 0 0 1 0 0 1];
beq = [100000 180000 350000];

% X so kolicine kupljenega goriva, fval pa strosek
% (zeros(1, 9) - LB, zelis nenegativne resitve)
[x, fval] = intlinprog(f, [], A, b, Aeq, beq, zeros(1, 9));
% Vrne v stilu:
% x =
%             0
%             0
%        320000
%             0
%        120000
%             0
%        100000
```

```
%         60000
%         30000
%
% fval = 56580000
```

Iz tega lahko razberemo, da je najugodneje na letališu 1 kupiti 100.000l pri prodajalcu 3, na letališču 2 120.000l pri prodajalcu 2 in 60.000l pri prodajalcu 3, na letališču 3 pa 320.000l pri prodajalcu 1 in 30.000l pri prodajalcu 3. Skupno bomo porabili 565.800,00 €.

3.2 Izpit 11. junij 2008

3.2.1 Naloga 1.)

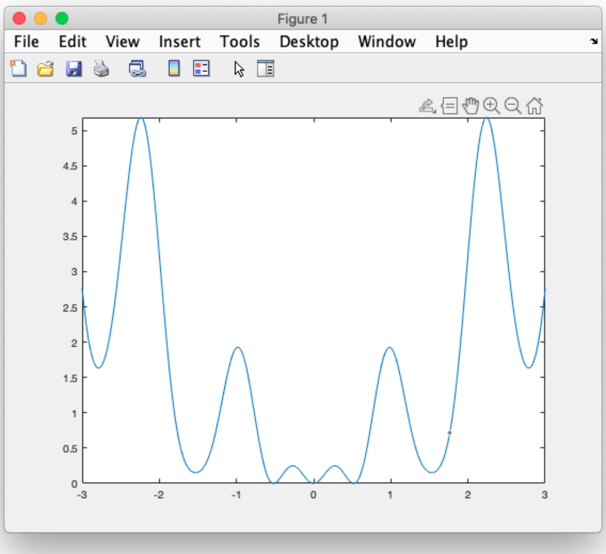
Navodila:

Poišči vse lokalne ekstreme funkcije na intervalu $[-3, 3]$ in njene vrednosti v teh točkah:

$$f(x) = \frac{1}{2}(\sin(5x) - x)^2 \tag{8}$$

Rešitev:

Izrišimo funkcijo:



Slika 3: Izris funkcije 8 na intervalu $[-3, 3]$.

Vidimo, da imamo 7 lokalnih minimumov in 6 lokalnih maksimumov. **TODO**

3.2.2 Naloga 2.)

Navodila:

Reši naslednji sistem enačb:

$$\begin{aligned} \sin(x+y) &= 0 \\ \cos(x-y) &= 0 \end{aligned} \tag{9}$$

Rešitev:

V novem *m-file* si definiramo enačbi (`junij2008_2.m`):

```
function y = junij2008_2(x)
    % Novo vrstico oznacimo s ';'
    y = [sin(x(1) + x(2)); cos(x(1) - x(2))];
end
```

... in nato kličemo funkcijo `fsolve`:

```
% Poskusimo najprej s [0, 0]
x = fsolve(@(x)junij2008_2(x), [0, 0])
% Kar vrne, da ni resitve ...
% Premaknimo se v negativni del
xL = fsolve(@(x)junij2008_2(x), [-.5, -.5])
% ... in v pozitivni
xR = fsolve(@(x)junij2008_2(x), [.5, .5])
% In dobimo najmanjsi resitvi (ostale so periodicne)
% xL =  [0.7854    -0.7854]
% xR =  [-0.7854    0.7854]
```

Rešitev so torej točke $x_1 = \frac{\pi}{4}$, $y_1 = -\frac{\pi}{4}$ in $x_2 = -\frac{\pi}{4}$, $y_2 = \frac{\pi}{4}$. Rešitve se periodično ponavljajo vsake $\frac{\pi}{2}$.

3.2.3 Naloga 3.)

Navodila:

Določi minimum funkcije in njeno vrednost v točki minimuma:

$$f(x) = x_1^2 + 5x_2^2 + 10x_3^2 - 4x_1x_2 + 6x_1x_3 - 12x_2x_3 - 2x_1 + 10x_2 - 5x_3 \tag{10}$$

ob naslednjih omejitvah:

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 4 \\ x_1, x_2, x_3 &\geq 0 \end{aligned} \tag{11}$$

Rešitev:

V novem *m-file* si definiramo funkcijo (`junij2008_3.m`):

```
function y = junij2008_3(x)
    y = x(1)^2 + 5*x(2)^2 + 10*x(3)^2 - 4*x(1)*x(2) + 6*x(1)*x(3) - 12*x(2)*x
        (3) - 2*x(1) + 10*x(2) - 5*x(3);
end
```

In kličemo funkcijo `fmincon`:

```
[x, fval] = fmincon(@(x)junij2008_3(x), [1 1 1], [-1 -2 -1], -4, [], [], [0 0
    0])
% Vrne v stilu:
% x = [2.9412    0.5294    0.0000]
```

```
% fval = 3.2353
```

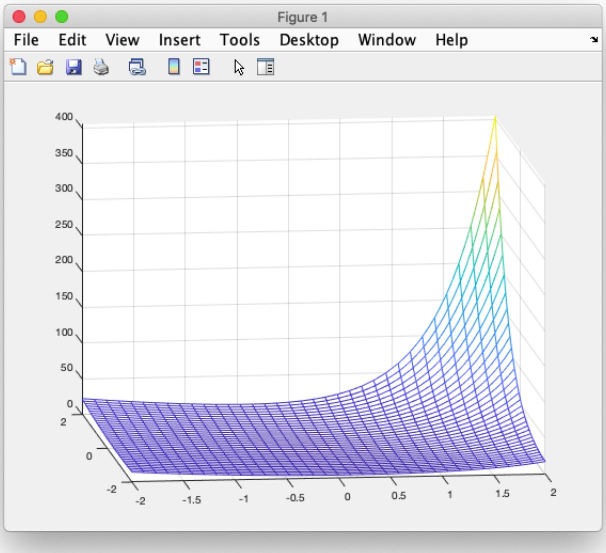
Začnemo v naključni točki $[1, 1, 1]$, omejitve (matrika A in vektor b) morajo upoštevati relacijo $\leq$, zato so vrednosti obratne, A_{eq} in b_{eq} pustimo prazne, nastavimo pa še spodnjo mejo z $[0, 0, 0]$. Rešitev je torej točka $x_{min} = [2.9412, 0.5294, 0.0000]$, v kateri imamo vrednost $f(x_{min}) = 3.2353$

3.2.4 Naloga 4.)

Navodila:
Poišči minimum funkcije in njeno funkcijsko vrednost v točki minimuma:

$$f(x) = 2x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 - 3x_1 + e^{2x_1+x_2} \tag{12}$$

Rešitev:
Ker imamo le 2 spremenljivki, si izrišimo funkcijo (glej sliko 4).



Slika 4: Izris funkcije 12 na intervalu $[-2, 2]$.

Vidimo, da je nekje v bližini točke $[0, 0]$ morda minimum. Deifinirajmo nov *m-file* (`junij2008_4.m`):

```
function y = junij2008_4(x)
    y = 2 * x(1)^2 - x(1) * x(2) + x(2)^2 - 3*x(1) + exp(2*x(1) + x(2));
end
```

... in kličemo funkcijo `fminsearch`:

```
[x, fval, flag] = fminsearch(@(x)junij2008_4(x), [0, 0])
% Vrne v stilu:
% x = [0.1737    -0.3915]
% fval = 0.7174
% flag = 1
```

... ki nam poda našo rešitev: $x_{min} = [0.1737, -0.3915]$, $f(x_{min}) = 0.7174$.

3.2.5 Naloga 5.)

Navodilo:
Trgovina z malimi živalmi je ugotovila, da potrebuje hrček najmanj 70 enot beljakovin, 100 enot ogljikovih hidratov ter 20 enot maščob dnevno. Trgovina ima na zalogi 6 različnih vrst hrane za hrčke z naslednjimi lastnostmi: Kakšno razmerje posameznih vrst hrane bo mešanica hrane

Hrana	Beljakovin/dozo	Ogljikovih hidratov/dozo	Maščob / dozo	Cena / dozo
A	20	50	4	2
B	30	30	9	3
C	40	20	11	5
D	40	25	10	6
E	45	50	9	8
F	30	20	10	8

za hrčka, ki bo zadovoljila njegove dnevne potrebe in bo cenovno najbolj ugodna za trgovino? Napiši sistem enačb in ga reši z MATLAB-om!

textbfRešitev:
Najprej določimo spremenljivke: x_N, kar pomeni koliko doz hrane N bomo kupili (N predstavlja vrsto hrane, torej A, B, C ... F). Funkcija ki jo minimiziramo je cena:

$$f(x) = 2x_1 + 3x_2 + 5x_3 + 6x_4 + 8x_5 + 8x_6 \tag{13}$$

omejitve pa so sledeče:

$$\begin{gathered} 20x_1 + 30x_2 + 40x_3 + 40x_4 + 45x_5 + 30x_6 \geq 70 \\ 50x_1 + 30x_2 + 20x_3 + 25x_4 + 50x_5 + 20x_6 \geq 100 \\ 4x_1 + 9x_2 + 11x_3 + 10x_4 + 9x_5 + 10x_6 \geq 20 \\ x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6 \geq 0 \end{gathered} \tag{14}$$

Enačno lahko rešimo s pomočjo funkcije `intlinprog`:

```
% Koeficienti funkcije
f = [ 2 3 5 6 8 8];
% Matrika A, obrnemo predznak
A = [-20 -30 -40 -40 -45 -30; -50 -30 -20 -25 -50 -20; -4 -9 -11 -10 -9 -10];
% Vektor b (desna stran omejitev) tudi obrnemo predznak
b = [-70 -100 -20];
% Aeq in beq sta prazna, prav tako ne potrebujemo celostevilskih resitev,
   nastavimo pa se spodnjo mejo
[x, fval] = intlinprog(f, [], A, b , [], [], zeros(1, 6))
% Vrne v stilu:
% x = 0.9091
%     1.8182
%          0
%          0
%          0
%          0
```

```
% fval = 7.2727
```

Ugotovimo, da je cenovno najbolj ugodno kupiti 0.9091 doz hrane A in 1.8182 doz hrane B za skupno ceno 7.2727.

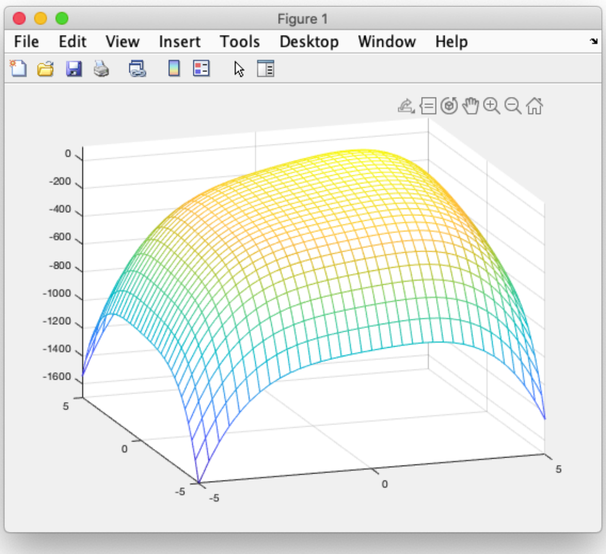
3.3 Izpit 3. september 2008

3.3.1 Naloga 1.)

Navodila:
Poišči vse lokalne minimume in maksimume funkcije na intervalu ter njene vrednosti v teh točkah. Pomagaš si lahko z risanjem funkcije. Ali obstaja globalni maksimum?

$$f(x) = 3x_1x_2 + 40x_1 + 30x_2 - 4x_1^2 - x_1^4 - 3x_2^2 - x_2^4 \tag{15}$$

Rešitev:
Najprej si narišimo funkcijo (slika 5).



Slika 5: Izris funkcije 15 na intervalu $[-5, 5]$.

Iz grafa je razvidno, da imamo opravka z 1 globalnim maksimumom, ki ga poiščemo s `fminsearch`. Deifiniramo si funkcijo v ločenem *m-file* (`september2008_1.m`):

```
function y = september2008_1(x)
    y = 3*x(1)*x(2) + 40*x(1) + 30*x(2) - 4*x(1)^2 - x(1)^4 - 3*x(2)^2 - x(2)
       ^4;
end
```

... in pokličemo funkcijo v okolici $[-3, -3]$:

```
[x, fval] = fminsearch(@(x)-september2008_1(x), [-3, -3])
% Vrne v stilu:
% x = [1.9548    1.8380]
```

```
% fval = -92.6766
```

Ne smemo pozabiti, ker smo obrnili predznak za maksimizacijo, je obrnjen tudi predznak vrednosti. Pravilna rešitev je torej pri $x_{max} = [1.9548, 1.8380]$ z vrednostjo $f(x_{max}) = 92.6766$.

3.3.2 Naloga 2.)

Navodila:
Maksimiziraj funkcijo in izračunaj njeno vrednost v točki maksimuma:

$$f(x) = -(x_1 - x_2)^2 - (x_3 - 1)^2 - 1 - 0.02(x_1^5 + x_2^5 + x_3^5 - 16)^2 \tag{16}$$

Rešitev:
Funkcija ima preveč dimenzij za risanje, zato kar poskusimo z nekaj sreče. Definiramo si nov *m-file* (`september2008_2.m`:

```
function y = september2008_2(x)
    y = -(x(1) - x(2))^2 - (x(3) - 1)^2 - 1 - 0.02*(x(1)^5 + x(2)^5 + x(3)^5 -
        16)^2;
end
```

... in kličemo funkcijo `fminsearch` (z obratno vrednostjo ker maksimiziramo):

```
% Seznam vseh resitev
s = [];
for i=1:100
    randX0 = 20 * rand(1, 3) - 10; % nakljucna zacetna tocka
    [x, fval, flag] = fminsearch(@(x)-september2008_2(x), randX0);
    if flag == 1
        % Dodaj pravilno resitev v seznam vseh
        s = [s; [x fval]];
    end
end
ss = sortrows(s, 4); % Sortiraj resitve po velikosti
ss(1:10,:) % izpisi prvih 10 vrstic
% Vrne 10 identicnih vrstic
% ans =
%      1.4963     1.4963     1.0000     1.0000
```

Ker smo v tem primeru iskali maksimum funkcije, lahko rezultat sortiramo kar naraščujoče, saj je potrebno spremeniti predznak in je najmanjša vrednost enaka največi. Vidimo, da je prvih 10 najdenih točk identičnih, torej lahko vzamemo maksimum $x_{max} = [1.4963, 1.4963, 1.0000]$ in vrednost $f_{max} = -1$ (ne pozabimo na $-$).

3.3.3 Naloga 3.)

Navodila:
Določi minimum funkcije in njeno vrednost v točki minimuma:

$$f(x) = 2x_1 + x_2^3 + x_3^2 \tag{17}$$

ob naslednjih omejitvah:

$$x_1^2 + 2x_2^2 + x_3^2 \geq 4x_1, x_2, x_3 \geq 0 \tag{18}$$

Rešitev:

V ločenih *m-file* si definiramo funkcijo (`september2008_3.m`):

```
function y = september2008_3(x)
    y = 2*x(1) + x(2)^3 + x(3)^2;
end
```

... in omejitve (`september2008_3_con.m`):

```
function [c, ceq] = september2008_3_con(x)
    % Cleni imajo spremenjen predznak, prestavilo pa smo se 4 iz leve na desno
        stran (ostane pozitivna)
    c = [-x(1)^2 -2*x(2)^2 - x(3)^2 + 4];
    ceq = [];
end
```

... in kličemo funkcijo `fmincon`:

```
[x, fval, flag] = fmincon(@(x)september2008_3(x), [1 1 1], [], [], [], [],
    zeros(1, 3), [], @(x)september2008_3_con(x))
% Vrne v stilu:
%  x = [0.0000    1.3333    0.6667]
%  fval = 2.8148
%  flag = 1
```

Matrike A, b, A_{eq}, B_{eq} smo pustili prazne, dodali smo spodnjo mejo ničel, zgornjo mejo nedefinirano in podali omejitve v ločenem *m-file*. Pridobljena rešitev je očitno veljavna (`flag = 1`): $x_{min} = [0.0000, 1.3333, 0.6667]$, vrednost pa je $f(x_{min}) = 2.8148$.

3.4 Izpit 19. Januar 2012

3.4.1 Naloga 3.)

Narisemo si skico. (Slika na namizju) Imamo dva podobna trikotnika, narisemo si kote in uporabimo kotne funkcije da racunamo l1 + l2 = l. Funkcijo racunamo kot minimum ??? Ker ce racunamo maksimum dobimo resitev neskoncno. Resitev naloge je f = 7.621m, $\alpha = 0.7482 RAD$

3.4.2 Naloga 4.)

Startamo v 1 in hocemo prit v 9. Povezave so usmerjene, lahko gres le v doloceno smer (ni negativnih povezav). Nastavit je treba neke enacbe. Lahko imamo spremenljivke vozlisca, druga moznost pa je da so spremenljivke povezave. Tu je logicno da je spremenljivka povezave. Iz vsakega vozlisca se lahko odlocimo da gremo po eni poti ali ne. Torej 1 -¿ 2 povezava (recimo ji x(1)) pove ali smo sli po poti (=1) ali ne (=0).

Nastavit moramo nek sistem enacb. Spremenljivke bomo oznacevali z $x_{vhod,izhod}$. Ker v x1 zacnemo je prva omejitev: $x_1 2 + x_1 3 + x_1 4 = 1$ // ¡- tocno po eni izmed poti mormo Podnobna enacba dobimo za zadnje vozlisce $x_7 9 + x_6 9 + x_8 9 = 1$ // ¡- tocno po eni povezavi moramo prit v sink

Podobne enacbe moramo spisat za vas vmesna vozlisca. Recimo za vozlisce st. 3: vsota prihodnih mora bit enaka vsoti izhodnih (ce smo prisli v neko vozlisce potem moramo iz njega tudi oditi) $x_2 5 + x_3 5 = x_5 6 + x_5 7 + x_{58}$

treba je prestet vse puscice pa prestevilcit spremenljivke -¿ x1, x2, x3, x4 ... x16 A, b sta prazni -¿ vse omejitve so tipa je enako Aeq ima 16 stolpcev in 9 vrstic -¿ pri 7 so desne strani 0, pri source pa sink pa je desna stran 1

3.5 Izpit 10. februar 2014

Izpit je profesor pokazal na vajah.

3.5.1 Naloga 1.)

Navodila:
Poišči vsaj dvajset različnih globalnih minimumov funkcije in njihovo vrednost (vse so enake) v teh točkah.

$$f(x) = \left(\sum_{i=1}^{5} i\cos((i+1)x_1 + i)\right)\left(\sum_{i=1}^{5} i\cos((i+1)x_2 + i)\right)\left(\sum_{i=1}^{5} i\cos((i+1)x_3 + i)\right)\left(\sum_{i=1}^{5} i\cos((i+1)x_4 + i)\right) \tag{19}$$

in omejitvijo spremenljivk $-10 \leq x_i \leq 10$.

POMOČ: Ker bo ročno iskanje minimumov z različnimi starnimi točkami preveč zamudno, si lahko pomagaš s kratkim programčkom za iskanje najoljših rešitev! Po elektronski pošti oddaj tudi vse izdelane programe in dobljene rešitve!

Rešitev:
Definiramo si funkcijo v novem *m-file* (`februar2014_1_script.m`):

```
function y = februar2014_1(x)
    sum1 = 0;
    sum2 = 0;
    sum3 = 0;
    sum4 = 0;
    for i=1:5
        sum1 = sum1 + i * cos((i+1) * x(1) + i);
        sum2 = sum2 + i * cos((i+1) * x(2) + i);
        sum2 = sum2 + i * cos((i+1) * x(3) + i);
        sum2 = sum2 + i * cos((i+1) * x(4) + i);
    end
    % Vrni zmnozek vsot
    y = sum1 * sum2 * sum3 * sum4;
end
```

... in pomožno skripto, ki požene iskanje nad naključno generiranim vhodom. Meje naključnega generiranja postavimo v omejitev, ki je omenjena v navodilih.

```
resitve = []; % Seznam najdenih resitev
for i=1:100
    % Pozene iskanje s nakljucnim vektorjem velikosti 1x4 (uposteva omejitev
      -10 <= x(i) <= 10)
    [x, fval, flag] = fminsearch(@(x)februar2014_1(x), 20*rand(1,4)-10);
    if flag == 1 % Vkljuci samo dobre resitve
        resitve = [resitve; [x fval]];
    end
end
% resitve =
```

```
%    -4.5601   -5.3684    7.9907    8.1739         0
%     2.0729   -2.6953    1.9718    3.3697         0
%     7.8913   -8.2533    0.7802   -1.4310         0
%     2.3431    1.1775   -5.4830   -7.9096         0
```

Po končanem klicu skripte se nam v spremenljivko `resitve` shranijo vse veljavne vrednosti, v našem primeru je to 100 vrstic (število ponovitev zanke).

3.5.2 Naloga 2.)

Navodila:
Poišči maksimum[1] podane funkcije in njeno vrednost v tej točki ob navedenih omejitvah za $n = 2, 3, 4, 5$.

$$f(x) = \left(\sqrt{n}\right)^n \prod_{i=1}^{n} x_i \tag{20}$$

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^2 = 1$$
$$0 \leq x_i \leq 1 \quad i = 1, ..., n \tag{21}$$

Rešitev:
Kreiramo si nov *m-file* z definicijo funkcije (`februar2014_2.m`):

```
function y = februar2014_2(x)
    [~, n] = size(x); % Uporabi velikost vektorja za drug parameter
    y = sqrt(n)^n * prod(x); % Naredi produkt vseh elementov tega vektorja
end
```

... datoteko z omejitvami (`februar2014_2_con.m`):

```
function [c, ceq] = februar2014_2_con(x)
    % . pomeni da delamo operacijo nad vsakim posameznih elementon (ne
        kvadriramo vektorsko ampak po elementah)
    c = [];
    ceq = sum(x.^2)-1;
end
```

... in vse skupaj poženemo v nekem skriptu

```
resitve = [];
n = 4; % Vrednost n iz navodil
for i=1:20 % Veckrat poisci resitev
    [x, fval, flag] = fmincon(@(x)-februar2014_2(x), rand(1,n), [], [], [], [],
         zeros(1,n), ones(1,n), @(x)februar2014_2_con(x));
    if flag == 1
       % Pomnozi resitev z obratno vrednost (maksimum) in koren od n na n
       resitve = [resitve; [x -fval]];
    end
end
% (vse vrstice enake):
% resitve = 0.5774    0.5774    0.5774    1.0000
```

V skriptu upoštevamo omejitev z naključnim generiranjem med 0 in 1, prvo pa smo eksplicitno zapisali v omejitvah (`ceq`). V skriptu spreminjamo n vrednost in dobimo rezultate zanje.

[1] V originalnem izpitu je bilo navodilo iskanje minimuma, na vajah je profesor omenil, da je ta problem trivialen in je popravil navodila, da se išče maksimum

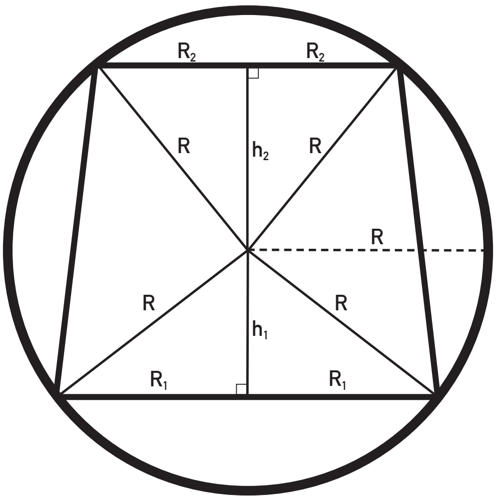
3.5.3 Naloga 3.)

Navodila:
Iz lesene krogle s polmerom 10cm želimo s pomočjo obrezovanja izdelati prisekani stožec, ki bo imel čim večjo možno prostornino (volumen). Koliko bosta znašala polmera osnovnih ploskev takega prisekanega stožca in koliko njegova višina, da bo volumen dobljenega prisekanega stožca maksimalen? Poskusi rešiti nalogo še za minimalni volumen prisekanega stožca, če želimo, da je vsota obeh polmerov osnovnih ploskev v prisekanem stožcu večja kot 12cm.
POMOČ: Volumen prisekanega stožca se izračuna po enačbi:

$$V = \frac{\pi h}{3}\left(R_1^2 + R_2^2 + R_1 R_2\right),$$

kjer sta R_1 in R_2 polmera osnovnik ploskev prisekanega stožca, h pa njegova višina.

Rešitev:
Za takšne geometrijske naloge si je najbolje narisati skico (glej sliko 6). Iz skice lahko opazimo,



Slika 6: Skica z oznakami stranic za pogled iz strani na prisekani stožec vstavljen v kroglo.

da lahko stožec razstavimo na pravokotne trikotnike ($\triangle R_1 R h_1$ in $\triangle R_2 R h_2$). Ker je polmer krogle (R) podan, bodo naše spremenljivke očitno (R_1, R_2, h_1 in h_2). Omejitve lahko zapišemo s pomočjo Pitagorovega izreka:

$$\begin{aligned} R_1^2 + h_1^2 &= R^2 \\ R_2^2 + h_2^2 &= R^2 \\ R_1 + R_2 &> 12\text{cm } * \end{aligned} \tag{22}$$

To zadnjo omejitev uporabimo le v drugem delu naloge (iskanje najmanjšega stožca, kjer še to drži) in jo v prvem delu izpustimo. Uporabili bomo funkcijo `fmincon`, zato si definiramo nov *m-file* za definicijo funkcije (`februar2014_3.m`):

```
function y = februar2014_3(x)
    % Enacba za volumen, kjer je:
    % x1 ... h1
    % x2 ... h2
    % x3 ... R1
    % x4 ... R2
    y = pi * (x(1) + x(2)) / 3 * (x(3)^2 + x(4)^2 + x(3)*x(4));
end
```

... in ločenega za definicijo omejitev (`februar2014_3_con.m`):

```
function [c, ceq] = februar2014_3_con(x)
    c = [12 - x(3) - x(4)]; % omejitev tipa manjse ali enako imamo v drugem delu naloge (za prvi del pustimo prazno)
    ceq = [x(3)^2 + x(1)^2 - 100; x(4)^2 + x(2)^2 - 100]; % omejitev tipa enako iz prvega dela (maks. stozec)
end
```

Paziti je treba, da prvotne omejitve 22 v Matlabu pretvorimo v ustrezno obliko (vse morajo biti tipa $\leq$ in na desni strani želimo 0). Kar sledi je še iskanje maksimuma (prvi del naloge):

```
[x, fval, flag] = fmincon(@(x)-februar2014\_3(x), [8 7 9 8], [], [], [], [], zeros(1,4), [10 10 10 10], @(x)februar2014\_3\_con(x))
% Vrne:
% x = 5.7735    5.7735    8.1650    8.1650
% fval = -2.4184e+03
% flag = 1
```

Ne smemo pozabiti na minus pri definiciji funkcije, začetno točko izberemo naključno, A, b, A_{eq} in b_{eq} pustimo prazne, za spodnjo omejitev postavimo 0, za zgornjo lahko dodamo desetice (stožec ne sme presegati krogle), vstavimo pa še omejitve c in c_{eq}. Rešitev je potemtakem $h_1 = h_2 = 5.7735$ in $R_1 = R_2 = 8.1650$, kar pomeni da največji prisekan stožec je očitno valj.

Da rešimo drugi del naloge (najmanjši volumen ob omejitvi skupnega premera ploskev stožca), pustimo omejitev 3 v c in zopet poženemo `fmincon`:

```
[x, fval, flag] = fmincon(@(x)februar2014_3(x), [5 5 9 1], [], [], [], [], zeros(1,4), [10 10 10 10], @(x)februar2014_3_con(x))
% Vrne:
% x = 0.0000    9.7980   10.0000    2.0000
% fval = 1.2723e+03
% flag = 1
```

Klic je enak kot prej, razlika je da tokrat izpustimo minus in malce preuredimo začetno točko (da ne presežemo Matlabovih omejitev pri iskanju). Dobimo še drugo rešitev: $h_1 = 0$, $h_2 = 9.798$, $R_1 = 10$ in $R_2 = 2$.

3.5.4 Naloga 4.)

Navodila:
lastnik tovorjnjaka, ki ima nosilnost tovora 21 ton, ima zahteve po prevozu od štirih podjetij, da bi prepeljal njihove izdelke iz kraja A na kraj B. Vsaka firma lahko dobavi toliko kosov svojih izdelkov, kot jih je prevoznik pripravljen prepeljati. Izdelki so nedeljivi (morajo biti prepeljani v celih kosih), tabela podaja teže izdelkov posameznih podjetij in ceno za prevoz enega izdelka. Koliko kosov izdelka posameznega podjetja naj prevoznik sprejme, da bo maksimiziral svoj

Podjetje	Teža izdelka v tonah na kos	Prevozni stošek v EUR na kos
1	1	13
2	2	27
3	3	41
4	4	55

zaslužek pri prevozu in tem ne bo presegel nosilnosti tovornjaka? (Nastavi enačbe za reševanje naloge s pomočjo linearnega celoštevilčnega programa in ga reši! Oddaj tudi enačbe in opiši pomen posameznih spremenljivk!)

Rešitev:
Opisan problem spada v kategorijo ILP. Opravka bomo imeli torej z `intlinprog`. Nastavimo si najprej enačbe. Maksimizirati želimo dobiček, zato je cenitvena funkcija:

$$f(x) = 13x_1 + 27x_2 + 41x_3 + 55x_4,$$

pri čemer x_i predstavlja količino kupljenega izdelka i. Omejitve so nosilnost tovornjaka, prepeljemo lahko le cele izdelke (nedeljivost) in ne moremo prepeljati negativno količino:

$$1x_1 + 2x_2 + 3x_3 + 4x_4 \leq 21$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \in \mathbb{N}^0$$

Za rešitev v MATLAB ne rabimo posenih skript, lahko si samo definiramo f, A, b, in intcon:

```
% Koeficienti cenitvene funkcije
f = [13, 27, 41, 55];

% Omejitve (leva stran)
A = [1, 2, 3, 4];
% Omejitve (desna stran)
b = [21];
intcon = ones(4);

% Maksimiziramo, zato dodamo '-' pred f, intcon so indeksi celostevilcnih
% spremenljivk, A, b so omejitve (samo teza), zeros na koncu pa predstavlja
% nenegativnost (ne moremo voziti -N izdelkov)
[x, fval, flag] = intlinprog(-f, 1:4, A, b, [], [], zeros(1, 4));
% Vrne fval = -288
% x = [1.0, 0, 0, 5.0]
```

Dobimo maksimalni zaslužek 288 (nasprotna vrednost, zaradi maksimiziranja) pri količinah $x_1 = 1$ in $x_4 = 5$.

3.6 4. november 2015

3.6.1 Naloga 4.

Navodila:
Odvetniška pisarna je sprejela pet novih primerov. Vsakega od primerov lahko rešuje katerikoli izmed petih pravnikov zaposlenih v tej pisarni, a bodo predvidoma potrebovali različno število ur za njihovo rešitev. Tabela podaja ocene potrebnega števila ur za posameznega pravnika pri posameznem primeru: Določi optimalno prireditev primerov posameznim pravnikom, tako da

	Primer 1	Primer 2	Primer 3	Primer 4	Primer 5
Pravnik 1	145	122	130	95	110
Pravnik 2	80	63	85	68	78
Pravnik 3	121	107	93	69	95
Pravnik 4	118	93	116	80	105
Pravnik 5	117	85	120	80	111

dobi vsak pravnik drug primer in da je skupno število predvidevih porabljenih ur minimalno. Pomagaj si z linearnim programom.

Rešitev:
Definirajmo si najprej spremenljivke. Ker bomo minimirali število porabljenih ur in lahko vsak pravnik rešuje le enega izmed primerov, si izberemo binarne spremenljivke (imajo vrednost 0 ali 1):

$$
\begin{gathered}
x_1 \text{ ... pravnik 1 rešuje primer 1} \\
x_2 \text{ ... pravnik 1 rešuje primer 2} \\
\text{...} \\
x_6 \text{ ... pravnik 2 rešuje primer 1} \\
\text{...} \\
x_{25} \text{ ... pravnik 5 rešuje primer 5}
\end{gathered}
$$

Cenitvena funkcija (minimiziranje ur) postane tako:

$$
\begin{multlined}
f(x) = 145x_1 + 122x_2 + 130x_3 + 95x_4 + 110x_5 + \\
+ 80x_6 + 63x_7 + 85x_8 + 68x_9 + 78x_{10} + \\
+ 121x_{11} + 107x_{12} + 93x_{13}69x_{14} + 95x_{15} + \\
+ 118x_{16} + 93x_{17} + 116x_{18} + 80x_{19} + 105x_{20} + \\
+ 117x_{21} + 85x_{22} + 120x_{23} + 80x_{24} + 111x_{25}
\end{multlined} \tag{23}
$$

Omejitve pa je potrebno zapisati tako, da vsaka vrstica v zgornji tabeli vrne seštevek 1 in prav tako vsak stolpec!

$$\sum_{i=1}^{5} x_i = 1,\ \sum_{i=6}^{10} x_i = 1,\ \sum_{i=11}^{15} x_i = 1,\ \sum_{i=16}^{20} x_i = 1,\ \sum_{i=21}^{25} x_i = 1$$

$$x_1 + x_6 + x_{11} + x_{16} + x_{21} = 1$$

$$\dots$$

Zgoraj so zapisane omejitve za vse vrstice in primer omejitve za prvi stolpec. Omejitve za preostale 4 stolpce niso zapisane, so pa upoštevane v kodi v nadaljevanju.

Za rešitev je potrebno definirati matriko A_{eq} in vektor b_{eq}, poženemo pa intlinprog:

```
% Cenitvena funkcija
f = [145 122 130 95 110 80 63 85 68 78 121 107 93 69 95 118 93 116 80 105 117 85 120 80 111];
% Omejitve tipa enako za vrstice in stolpce
Aeq = [
    1 1 1 1 1 zeros(1, 20);
    zeros(1, 5) ones(1,5) zeros(1, 15);
    zeros(1, 10) ones(1, 5) zeros(1, 10);
    zeros(1, 15) ones(1, 5) zeros(1, 5);
    zeros(1, 20) ones(1, 5);
    1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0;
    0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0;
    0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0;
    0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0;
    0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1 0 0 0 0 1;
];
% Desne strani so vedno 1
beq = [1 1 1 1 1 1 1 1 1 1];
% Iscemo celostevilske resitve in nenegativne
intcon = 1:25;
LB = zeros(1, 25);

[x, fval, flag] = intlinprog(f, intcon, [], [], Aeq, beq, LB);
% Vrne fval = 458
% x = [0 0 0 0 1 1 0 0 0 0 0 0 1 0 0 0 0 0 1 0 0 1 0 0 0]
```

Rešitev pride 448 porabljenih ur in pravnik 1 rešuje primer 5, pravnik 2 rešuje primer 1, pravnik 3 rešuje primer 3, pravnik 4 rešuje primer 4 in pravnik 5 rešuje primer 2.

3.7 Poskusni kolokvij 2020

3.7.1 Naloga 1.

Glej nalogo 3.5.1

3.7.2 Naloga 2.

Glej nalogo 3.5.2

3.7.3 Naloga 3.

Glej nalogo 3.5.3

3.7.4 Naloga 4.

Napiši funkcijo `[x fval] = najkrajsa_pot(c, i, j)`, ki poišče najkrajšo pot med vozliščema i in j grafa, če je v matriki c podan seznam cen povezav, vrednost c_{ij} je cena poti iz vozlišča i v vozlišče j. Funkcija bo vrnila matriko x dimenzije $n \times n$, kjer bo za vsako spremenljivko z 1 ali 0 označeno, če se ta veja nahaja v optimalni poti od vozlišča i do vozlišča j, fval pa bo najnižja cena (vsota označenih povezav).

Namig: Znotraj svoje funkcije lahko uporabiš klic MATLAB-ove funkcije `intlinprog`, podatke za klic pa moraš znotraj svoje funkcije v tem primeru pravilno pripraviti (spremenljivke f, A, b, ...).

Nato s pomočjo napisane funkcije poišči rešitev za najkrajši poti med vozliščema 2 in 7 ter med vozliščema 6 in 1. Uporabi cene povezav iz spodaj podane matrike c:

Izvor\Cilj	1	2	3	4	5	6	7
1	1000	24	9	13	8	36	4
2	9	1000	12	3	31	7	75
3	12	16	1000	11	5	9	23
4	20	43	3	1000	22	18	21
5	2	18	6	39	1000	18	13
6	82	5	1	12	26	1000	7
7	45	27	14	37	8	17	1000

Rešitev: Za rešitev tega problema si rabimo najprej definirati spremenljivke. Naj bodo to binarne odločitvene spremenljivke, ki povedo ali smo šli po povezavi iz vozlišča ki pripada vrstici v vozlišče, ki pripada stolpcu. Tako dobimo n^2 spremenljivk. Cenitvena funkcija naj bo kar matrika zložena v vektor po vrsticah. Torej če gremo po povezavi e_{ij}, bo cena takšnega potovanja c_{ij}. Vozlišči izvora in ponora morata imeti po en prihod oziroma odhod, zato ti omejitvi pišemo ločeno. Ostale vrstice (za vsako vozlišče po ena) pa imajo odhod enak prihodu ($omejitev_{ij}$ mora biti enaka $omejitev_{ji}$). Ostale posebnosti v kodi so le spreminjanje dimenzij vektorjev in matrik:

```
function [x, fval] = najkrajsa_pot(c, i, j)
    % Spremenljivke so binarne, vsaka celica pove ce smo sli iz source
    % (stevilka vrstice) v sink (stevilka stolpca)
    f = reshape(c.', 1, []);
    % vrednost n (stevilo vrstic ali stolpcev, c je kvadratna matrika)
    n = max(size(c));

    % Omejitve so tipa = in pomenijo da moramo zaceti v vozliscu i, koncati
    % v j in da lahko v vozlisce odtece le toliko kolikor pritece
    Aeq = zeros(n, n*n);
    % Omjeitev source
    Aeq(1, (i-1)*n+1:i*n) = ones(1, n);
    % Omejitev sink je stolpec, zato loop
    for k=1:n
       Aeq(2, (k-1)*n+j) = 1;
    end
    % Preostale n-2 vrstice povejo za vsako vozlisce da je stolpec =
    % vrstici (pomeni da odtece toliko koliko odtece)
```

```
    line = 3;
    for k=1:n
        if k ~= i && k~=j
            for l=1:n
                Aeq(line, (l-1)*n+k) = 1;
                Aeq(line, (k-1)*n+l) = -1;
            end
            line = line+1;
        end
    end
    % Desna stran so enice za izvor in ponor in nicle za ostala
    beq = [1 1 zeros(1, n-2)];
    % Celostevilcne so vse spremenljivke
    intcon = 1:n*n;
    LB = zeros(1, n*n);
    UB = ones(1, n*n);
    [x1, fval] = intlinprog(f, intcon, [], [], Aeq, beq, LB, UB);

    % Izhod je enako velik kot vhodna matrika - pove katere povezave smo sli
    x = reshape(x1, n, n).';
end
```

Vse skupaj pa lahko poženemo s:

```
% Tabela povezav iz navodil
c = [1000 24 9 13 8 36 4; 9 1000 12 3 31 7 75; 12 16 1000 11 5 9 23; 20 43 3 1000 22 18 21; 2 18 6 39 1000 18 13; 82 5 1 12 26 1000 7; 45 27 14 37 8 17 1000];

% Poisci pot iz 2 v 7
[x27, fval27] = najkrajsa_pot(c, 2, 7);
% Poisci pot iz 6 v 1
[x61, fval16] = najkrajsa_pot(c, 6, 1);

% Namig:
% g = digraph(c);
% [path, d] = shortestpath(g, 2, 7)
```

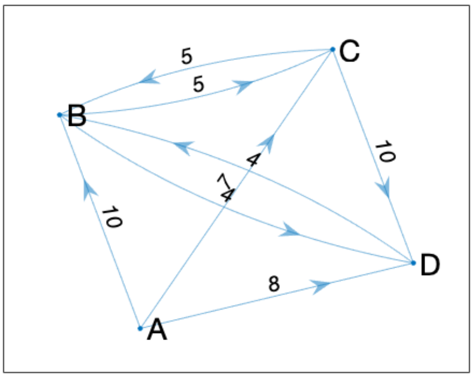
3.8 Neuvrščene

3.8.1 Maksimalni pretok v grafu

Navodila:

Podan imamo usmerjen graf, na katerem želimo izračunati največji možen pretok iz izvora A v ponor D. Povezave so dvosmerne, vendar lahko po eni povezavi peljemo le toliko kolikor je označeno na povezavah (primer: A v B sprejme 10, B v A pa 0). (Namig: v kolikor ni podano v navodilih, da je potrebno pridobiti rešitev s pomočjo linearnega programa, lahko uporabimo MATLAB `graph` ali `digraph` in funkcijo `maxflow`).

Rešitev:



Slika 7: Graf povezav. V kolikor povezava ni označena na grafu pomeni, da po njej ne moremo peljati toka (ima utež 0).

Označimo si najprej spremenljivke na grafu:

$$A \to B \ldots x_1$$
$$A \to C \ldots x_2$$
$$A \to D \ldots x_3$$
$$B \to C \ldots x_4$$
$$B \to D \ldots x_5$$
$$C \to B \ldots x_6$$
$$D \to B \ldots \text{ ignoriramo, ker iz ponora ne želimo vzeti toka}$$
$$C \to D \ldots x_7$$

Naslednji korak je spisati cenitveno funkcijo. Maksimizirati želimo tok ki priteče v ponor, torej želimo maksimizirati tok, ki teče po povezavah katerih cilj je ponor:

$$f(x) = x_3 + x_5 + x_7$$

Omejitve je potrebno definirati tako, da lahko iz vozlišča odteče le toliko toka kolikor ga je na voljo (vozlišče A - izvor ima na voljo neskončno veliko toka):

$$x_1 + x_6 = x_4 + x_5$$
$$x_2 + x_4 = x_6 + x_7$$

Prva omejitev je za vozlišče B, na levi strani so povezave, ki pripeljejo tok, na desni pa tiste ki ga odpeljejo. Druga omejitev je spisana po istem načinu za vozlišče C. Seveda je potrebno omejitve spraviti v MATLAB obliko (vse na levo stran in $\leq$ ali $=$).

Spišemo precej enostaven program, paziti je le potrebno na predznak funkcije ker maksimiziramo:

```
% Imamo podan graf
% A = [0 10 7 8; 0 0 5 4; 0 5 0 10; 0 4 0 0]
% g = digraph(A, {'A', 'B', 'C', 'D'})
% namig: [mf, gf] = maxflow(g, 1, 4)

% Cenitvena funkcija ... povezave v SINK
f = [0 0 1 0 1 0 1];

% Omejitve za vmesna vozlisca
Aeq = [1 0 0 -1 -1 1 0; 0 1 0 1 0 -1 -1];
beq = [0 0];

LB = zeros(1, 7);
% Peljemo lahko le toliko toka kot je dovoljeno na povezavi x_i
UB = [10 7 8 5 4 5 10];
[x, fval, flag] = intlinprog(-f, 1:7, [], [], Aeq, beq, LB, UB);
% Vrne fval = -22
% x = [7 7 8 3 4 0 10], moznih je vec resitev
```

Prišli smo do rešitve, maksimalen pretok je 22, x pa vsebuje koliko toka smo prepeljali po vsaki povezavi

3.8.2 Transportni problem

Imamo Rent-a-Car ponudnika, ki ima dva vira (skladišča) avtomobilov. Na prvem ima parkiranih 15 avtov, na drugem pa 13. Imajo tudi 4 poslovalnice (cilji), pri katerih si stranke lahko izposojajo avtomobile. Predvidevajo, da potrebujejo na na cilju 1 9 avtov, na cilju 2 6 avtov, na cilju 3 7 avtov in na cilju 4 9 avtov. Opazimo, da je zaloge avtomobilov manj, imamo pa tudi stroške da pripeljemo avto iz skladišča v poslovalnico: Z upoštevanjem potreb poslovalnic

Vir \Cilj	1	2	3	4
1	45	17	21	30
2	14	18	19	31

po avtomobilih in stroškov, da prepeljemo avtomobil iz enega izmed skladišč najdite najcenejšo rešitev prevažanja avtomobilov.

Rešitev:
Želimo minimizirati stroške prevoza, zato bodo naše spremenljivke koliko avtov smo pripeljali iz katerega skladišča v katero poslovalnico. Definirajmo torej x_1 je število avtomobilov pripeljanih iz vira 1 v cilj 1, x_2 je količina avtomobilov pripeljanih iz vira 1 v cilj 2, ... in x_8 je količina avtomobilov pripeljanih iz vira 2 v cilj 4. Naša cenitvena funkcija tako postane:

$$f(x) = 45x_1 + 17x_2 + 21x_3 + 30x_4 + 14x_5 + 18x_6 + 19x_7 + 31x_8$$

Prvi omejitvi sta količini avtov na vsakem izmed virov:

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 15$$
$$x_5 + x_6 + x_7 + x_8 = 13$$

Pomemben je predznak =, saj imamo premalo zalogo. Ker minimiziramo stroške pa upoštevamo tudi potrebe na ciljih (po nepotrebnem ne prevažamo avtov):

$$x_1 + x_5 \leq 9$$
$$x_2 + x_6 \leq 6$$
$$x_3 + x_7 \leq 7$$
$$x_4 + x_8 \leq 9$$

Ker imamo zaloge manj kot je potrebe moramo paziti na predznak $\leq$. V kolikor bi imeli dovolj zaloge ali pa preveč, bi lahko uporabili predznak =. Manjkajo še omejitve nenegativnosti in pa celoštevilčnosti (polovica avta na enem cilju in polovica na drugem nam ne koristi).

Uporabimo MATLAB in `intlinprog`:

```
% Koeficienti cenitvene funkcije
f = [45 17 21 30 14 18 19 31];
% Omejitve manjse ali enako
A = [1 0 0 0 1 0 0 0; 0 1 0 0 0 1 0 0; 0 0 1 0 0 0 1 0; 0 0 0 1 0 0 0 1];
b = [9 6 7 9];
% Omejitve enako
Aeq = [1 1 1 1 0 0 0 0; 0 0 0 0 1 1 1 1];
beq = [15 13];
% Nenegativnost, cela stevila
LB = zeros(1, 8);
intcon = 1:8;

[x, fval, flag] = intlinprog(f, intcon, A, b, Aeq, beq, LB);
% Vrne fval = 547
% x = [0 6 3 6 9 0 4 0], moznih je vec resitev
```

Najcenejši strošek je torej 547, uporabili pa smo 9 avtov iz vira 2 na cilj 1, 6 avtov iz vira 1 na cilj 2, 3 avte iz vira 1 na cilj 3, 4 avte iz vira 2 na cilj 3 in 6 avtov iz vira 1 na cilj 4.

3.8.3 Graf problem

(slika na namizju graf_problem.png) Kombiniran problem dostave izdelkov. Imamo 6 transportnih vozlisc. Stevilke na vozliscih (+ pomeni da je toliko izdelkov v tem skladisci na zalogi), ciljna vozlisca pa so tista kjer je minus (koliko izdelkov rabi). Oznake na povezavah pomenijo ceno za transport enega izdelka po tej povezavi. Cilj naloge je poiskati najcenejso varianto da pripeljemo potrebne kolicine izdelkov iz skladisc v sink (iz + vozlisc v - vozlisca). Vozlisce 4 je vmesno vozlisce, pomeni da ni ne skladisce in ne ponor - preko njega se samo peljemo.

Problem je podoben najkrajse poti in maks flow, s tem da je to vse skombinirano skupaj. Najprej si spet definiramo spremenljivke (katera povezava je katera spremenljivka) 1-¿2 .. x1 1-¿3 .. x2 1-¿4 .. x3 3-¿2 .. x4 3-¿4 .. x5 4-¿2 .. x6 4-¿6 .. x7 4-¿5 .. x8 5-¿6 .. x9 2-¿6 .. x10 Cenitvena funkcija f: f = [5 3 3 14 10 3 8 6 15 4];

Ker imamo dovolj zaloge (70 zloage, potrebujemo 60) lahko uporabimo enacaje -¿ v primeru da ni dovolj zaloge uporabimo $\leq$ Enacba za ciljno vozlisce 2 x1 + x4 + x6 - x10 = 25 Aeq Enacba za ciljno vozlisce 6 x7 + x9 +x10 = 35 Aeq

Za vsa vozlisca je treba napisati taksne enacbe Enacba za vozlisce 3 x2 + 20 ¿= x4 + x5

... lahko kaj ostane v zalogi (na levi strani), ker je imamo vec, zato damo $\geq$ A Enacba vozlisce 4 (odhodne povezave smo premaknili na levo stran)) x3 + x5 + x8 - x6 - x7 = 0 Aeq Enacba vozlisce 5 x8 + x9 ¡= 30 A Enacba za vozlisce 1 x1 + x2 + x3 ¡= 20 A

A = [0 -1 0 1 1 0 0 0 0 0; 0 0 0 0 0 0 0 1 1 0; 1 1 1 0 0 0 0 0 0 0] b = [20; 30; 20] Aeq = [1 0 0 1 0 1 0 0 0 -1; 0 0 0 0 0 0 1 0 1 1; 0 0 1 0 1 -1 -1 1 0 0] .. 1 in -1 so odvisne ker das enacbe na isto stran in znak mora biti vseposod $\leq$ beq = [25; 35; 0] LB = zeros(1,10) UB .. je prazen (ne vemo neke dobre omejitve) vse resitve zelimo celostevilcne [x, fval] = intlinprog(f, ones(1,9), A, b, Aeq, beq, LB) f* = 640 x* = [20 0 0 0 10 40 0 30 0 35]

3.8.4 Geometrijska naloga

Slika na namizju (skica-geometrijska.png) Posici dolzini diagonal tako, da bo ploscina stirikotnika s podanimi stranicami maksimalna. Nato posici se dolzini diaognal za min ploscino stirikotnika ob dodanih pogojih (e ¡= c+d-0.5, f ¡ a+d-0.5). Koliko znasata maksimalna in minimalna ploscina?

Bretschneider's formula -¿ katerokili stirikotnik ... obstaja bolj preprost nacin Razdelis ga na 2 trikotnika -¿ ABD in BCD, pa sestavis ploscino iz dveh trikotnikov (Heron's formula) (v splosnem -¿ S = sqrt(s(s-a)(s-b)(s-c)), pri cemer je s = (a+b+c)/2)

S = S1 + S2 = sqrt(s1 (s1-a) (s1-f) (s1-d)) + sqrt(s2 (s2-b) (s2-c) (s2-x)) s1 = (a + d + x) / 2 s2 = (b + c + x) / 2 ... spremenili smo f v x kriterijska funkcija f = S1 + S2 Omejitve: trikotniska neenakost x ¡ 13 (a+d —— b+c) -¿ lahko kar recemo UB = 13 (malo manj ko 13)

Maksimum x=9.33 cm, S = 40.9878 cm2 y = 8.896 cm (diagonala e) ... ploscino sestavis iz drugih dveh trikotnikov (naceloma dobis isto ploscino, ali pa iz 2 stranic zracunas drugo diagonalo)

Minimum ima dodatne omejitve -¿ lik razpade ce ne bi blo dodatnih omejitev (manjka se pogoj konkavnosti ... recimo noben notranji kot ne sme bit ¿ π). konveksen lik: S=36.5591 x=11.1399, y=10.5 konkavni lik (se ni iskalo, se pa lahko naredi (ena diagonala je zunaj lika) S=11.7264, x=3.1, y=??

3.8.5 Graf maksimalna neodvisna mnozica (barvanje)

Imamo nek graf (maks-neodvisna-mnozica.png). Iskalne maksimalne neodvisne mnozice: Zelimo dolocena vozlisca pobarvat z 1 eno barvo -¿ tako da niti dve pobarvani vozlisci nista sosedi (med pobarvanima vozliscema ne sme biti direktne povezave). Lahko se lotis z linearnim programiranjem, hevristiko, evolucijski algoritmi ... ali pa SAT Solver (Boolovi izrazi -¿ ce so vsi true potem si nasel resitev, das na vsako povezavo da ne sme bit source in sink pobarvana).