MPRI 2017–2018
Game Theory Techniques in Computer Science

Olivier Serre
serre@liafa.univ-paris-diderot.fr
`www.irif.fr/~serre`

September 21, 2017

Chapter 1

Two-player games on finite graphs: basic definitions

Contents

In this chapter, we introduce the basic objects. We start with the notion of two-player games on graphs, introducting the notion of graphs, arenas, plays and winning conditions. We then introduce the main winning condition that we consider in this course. We finally conclude by giving the notionf of strategies (together with special cases) and of winning positions.

1.1 Graph, arena, game

Let Σ be a possibly infinite set. We denote by Σ^* the set of finite sequences (or words depending on the context) over Σ and by Σ^ω the set of infinite sequences indexed by $\mathbb{N}$ (or infinite words depending on the context). Finally, $\Sigma^\infty = \Sigma^* \cup \Sigma^\omega$. For a word $u \in \Sigma^*$, we let u^ω denote the infinite word obtained by repeating ad infinitum the word u: $u^\omega = u \cdots u \cdots u \cdots$. Finally, we let ε denote the empty word.

DFINITION 1.1 *A **graph** is a pair $G = (V, E)$ where V is a set of vertices and $E \subseteq V \times V$ is a set of edges. A graph is finite iff V is finite*

The graphical representation of a graph is given in the example below.

EXAMPLE 1.1 Figure 1.1 gives the graphical representation of the graph $G = (V, E)$ where:

- $V = \{1, 2, 3, 4\}$.
- $E = \{(1, 2), (1, 2), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (4, 2)\}$.

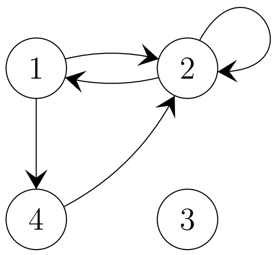


Figure 1.1: Graphical representation of a graph

The two players of our games will be called Eve and Adam (Other terminology are 0 and 1, Éloïse and Abelard, existential player and universal player…).

We fix a graph $G = (V, E)$ and a partition of the vertices $V = V_{\mathbf{E}} \uplus V_{\mathbf{A}}$ among the two players : the vertices (positions) in $V_{\mathbf{E}}$ belong to (are controlled by) Eve while those in $V_{\mathbf{A}}$ belong to Adam.

A triple $\mathcal{G} = (G, V_{\mathbf{E}}, V_{\mathbf{A}})$ is called an **arena** (alternatively a **game graph**). The graphical representation of an arena is the same as a graph except that we represent by circles those vertices that belong to Eve and by squares those vertices that belong to Adam. Figure 1.2 provide such a representation for $\mathcal{G} = (G, V_{\mathbf{E}}, V_{\mathbf{A}})$ where $V_{\mathbf{E}} = \{2, 4, 7, 8\}$ and $V_{\mathbf{A}} = \{1, 3, 5, 6\}$.

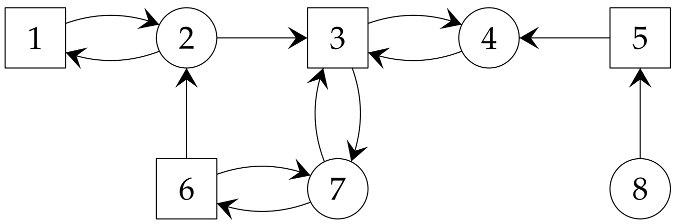


Figure 1.2: Example of an arena

1.2 Winning conditions

A **winning condition** on $\mathcal{G}$ is a subset Ω of V^ω.

Finally, a **two-player (perfect information) game** on an arena $\mathcal{G}$ is a pair $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega)$, where $\mathcal{G}$ is an arena and Ω is a winning condition on $\mathcal{G}$.

A **play** in a game $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega)$ starting in v_0 is defined as follows. The players move a token along edges of the graph, and at the beginning the player who controls the initial vertex v_0 chooses, if exists, an edge $e_1 = (v_0, v_1)$ with origin v_0. If such an edge does not exists, the play ends. Otherwise, the token goes in v_1 and the player who controls v_1 chooses the next edge (v_1, v_2), if exists, and so on. Hence a play is a maximal (finite or infinite) path $v_0 v_1 v_2 \cdots$ in G. A **partial play** is a prefix of a play, *i.e.* a finite path in G. In the following we use λ to denote (partial) plays.

The sequence $12376(21)^\omega$ is an infinite play in the arena given in Figure 1.2.

REMARK 1.1 In the following we should use terminology *game* without precising that there are two-player. It is however important to note that there are many other games: some with more than two players (multiplayer games), randomized/stochastic games, imperfect information games (where the player may not know about the exact vertex of the play), concurrent games (where the players play simultaneously an action and where the new vertex depends on the previous one and on the actions chosen by the players). We may discuss some of these variants much later in this course

Eve **win** an infinite play iff it belongs to Ω, otherwise it is Adam who wins. We may say that the play is **winning** for Eve (of for Adam otherwise). In the case of a finite play (hence ending in a dead-end vertex) the player that cannot move looses the play.

For some given winning condition Ω, we consider the **dual winning condition** $\overline{\Omega}$ as the one $\overline{\Omega} = V^\omega \setminus \Omega$.

We now give some example of winning conditions. We start with reachability and safety winning conditions.

DFINITION 1.2 *Let $F \subseteq V$ be a subset of* ***final states***. *The winning condition V^*FV^∞ is said to be a* ***reachability condition***. *Hence, Eve wins a play iff a final state is eventually visited.*

The dual winning condition $(V \setminus F)^\omega$ of a reachability condition is said to be a ***safety condition***. *In this setting we say that those vertices in F are the* ***forbidden vertices***. *Hence, Eve wins a play iff it never visits a forbidden state.*

We define now the Büchi, co-Büchi, parity and Muller winning conditions.

DFINITION 1.3 *Let $F \subseteq V$ be a subset of* ***final vertices***. *The winning condition $(V^*F)^\omega$ is said to be a* ***Büchi condition***. *Hence, Eve wins a play iff it visits infinitely often a final state.*

The dual condition $\bigcup_{i\geq 0}(V^*F)^i(V \setminus F)^\omega$ of a Büchi condition is a ***co-Büchi condition***. *In this setting we say that those vertices in F are the* ***forbidden vertices***. *Hence, Eve wins a play iff it visits only finitely often forbidden states.*

DFINITION 1.4 *Let $C \subseteq \mathbb{N}$ be a finite subset of integers, often called* ***coulours*** *and let ρ be an application from V into C, called* ***colouring function***. *The winnign condition*

$$\{v_0v_1v_2\cdots \in V^\omega \mid \liminf(\rho(v_i))_{i\geq 0} \text{ is even}\}$$

is said to be a ***parity condition***. *Hence, Eve wins a play iff the smallest colour infinitely often visited is even.*

The dual condition

$$\{v_0v_1v_2\cdots \in V^\omega \mid \liminf(\rho(v_i))_{i\geq 0} \text{ is odd}\}$$

is a ***co-parity winning condition***. *Hence, Eve wins a play iff the smallest colour infinitely often visited is odd.*

REMARK 1.2 Consider a co-parity winning condition Ω given by a colouring function ρ. Consider the colouring function ρ' defined by $\rho'(v) = \rho(v) + 1$. One easily check that the parity condition induced by ρ' is the same as Ω.

REMARK 1.3 A variant of the parity condition consists in considering the largest infinitely often visited colour. Such a condition is known as a **max-parity** condition by opposition with **min-parity** (that we simply refer to as parity condition in this document). It is easily seen that in the context of finite arenas those conditions are equi-expressive. Nevertheless, this is no longer the case if we allow infinitely many colours (here one needs to adapt the definition to handle the case where no colour is inifnitely often visisted), and here the min-parity condition has better properties. This is why we consider the min-parity condition in this document.

EXERCISE 1.1 Prove that any min-parity condition can be expressed as a max-parity condition.

EXERCISE 1.2 Prove that any parity condition can be expressed as a Boolean combination of Büchi conditions.

DFINITION 1.5 *Let $C \subseteq \mathbb{N}$ be a set of integers, and let $\rho : V \to C$, be a **colouring function**. Let $\mathcal{F}$ be a collection of subsets of C, called **final sets**. The winning condition*

$$\{v_0 v_1 v_2 \cdots \in V^\omega \mid \{c \mid \exists^\infty i,\ \rho(v_i) = c\} \in \mathcal{F}\}$$

*is a **Muller condition**. Hence, Eve wins a play iff the set of colours infinitely often visited belongs to $\mathcal{F}$.*

The dual of a Muller condition $\mathcal{F}$ is again a Muller condition given by $\mathcal{P}(C) \setminus \mathcal{F}$.

1.3 Strategies et winning positions

For the rest of this section, we fix an arena $\mathcal{G} = (G, V_{\mathbf{E}}, V_{\mathbf{A}})$, where $G = (V, E)$.

Strategies

A **strategy** for Eve is a partial function $\varphi : V^* \to V$ such that, for all partial play λ ending in some vertex $v \in V_{\mathbf{E}}$, $(v, \varphi(\lambda)) \in E$, *i.e.* a strategy should provide a valid move. Strategies for Adam are defined as functions $\psi : V^* \to V$ such that, for all partial play λ ending in some vertex $v \in V_{\mathbf{A}}$, $(v, \varphi(\lambda)) \in E$

Given a strategy φ for Eve, she can **respect it** by always moving as indicated by φ. Formally, we shall say that Eve respects φ during a play $\lambda = v_0 v_1 v_2 \cdots$ if, for all $0 \leq i < |\lambda|$, $v_{i+1} = \varphi(v_0 \cdots v_i)$ whenever $v_i \in V_{\mathbf{E}}$. In a similar way we define the fact that Adam respects some strategy ψ.

Interesting strategies are those that can be used all along a play. We shall say that a strategy is **usable** from a vertex v if, for all partial play λ starting from v where Eve respects φ, and ending in a vertex in $V_{\mathbf{E}}$, $\varphi(\lambda)$ is defined.

Consider now a game $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega)$, an initial position v_0 and a strategy φ for Eve. We say that φ is a **winning strategy for Eve in $\mathbb{G}$ from** v_0 if any play starting from v_0 where Eve respects φ is won by Eve. We defined in a similar way winning strategies for Adam. The game $\mathbb{G}$ is **determined** if, for all initial vertex, one of the two player has a winning strategy from that position.

REMARK 1.4 In any game, there is, for any initial vertex, at most one player who has a winning strategy. Indeed, if both had one, the play where they follow their respective winning strategy would be both inside and outside the winning condition.

In this course, all the game we shall considered are determined.

1.3.1 Winning positions

A vertex v in a game $\mathbb{G}$ is a **winning position** for Eve if she has a winning strategy in $\mathbb{G}$ from v. The set of winning positions for Eve will be often denoted $W_{\mathbf{E}}$. Similarly we define the set $W_{\mathbf{A}}$ of winning vertices for Adam. A game is determined iff $V = W_{\mathbf{E}} \cup W_{\mathbf{A}}$.

1.3.2 Some specific winning strategies

We fix an arena $\mathcal{G} = ((V, E), V_{\mathbf{E}}, V_{\mathbf{A}})$ and a game $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, \Omega)$. In the following we discuss special kind of strategies.

We start with *memoryless* or *positional* strategies. A strategy is memoryless if the move it provides only depend on the current vertex, not on the past.

DFINITION 1.6 *A strategy φ is* ***memoryless*** *(or* ***positional****) if for all partial play λ and λ' ending in the same vertex, $\varphi(\lambda) = \varphi(\lambda')$. Hence, memoryless strategies for Eve (resp. for Adam) can be identified with those maps φ from $V_{\mathbf{E}}$ (resp. $V_{\mathbf{A}}$) such that for all $v \in V_{\mathbf{E}}$ $(v, \varphi(v) \in E$.*

In the case of a finite arena, a memoryless strategy admits a finite description. This is no longer true if the arena is infinite.

An intermediate notion is the one of finite memory strategy.

DFINITION 1.7 *Let M be a set called* ***memory****. A* ***strategy with memory*** *M for Eve is a tuple (m_0, φ, up) made of an element $m_0 \in M$ called* initial memory*, of a map φ from $V \times M$ into V and such that for all (v, m), $(v, \varphi(v, m)) \in E$, and of an application up from $M \times V$ into M called* update function*. Eve respects φ during a play $\lambda = v_0 v_1 v_2, \cdots$ if for all $i < |\lambda|$, $v_{i+1} = \varphi(v_i, m_i)$, where we let $m_i = up(m_{i-1}, v_i)$ for all $i \geq 1$. In other words, whenEve has to play she considers the value of the memory and the current vertex to chose her move (thanks to φ); and afeter every move (made either by Eve or Adam), Eve updates the memory thanks to the function up by considering the former value and the new vertex reached.*

When M is a singleton, we obtain memoryless strategies.

Let φ be a (general) strategy and let v_0 be an initial position. Consider the strategy with memory M, (m_0, ψ, up) where we let $M = V^*$, $m_0 = v_0$, $\psi(v, m) = \varphi(m)$ and $up(v_0 \cdots v_n, v_{n+1}) = (v_0 \cdots v_n v_{n+1})$. This strategy save in the memory the history of the play, hence it is straightforward to prove that the set of plays where Eve respects strategy (m_0, ψ, up) are exactly those where Eve respects φ.

A very interesting case is the one of **finite memory strategies**, that is those strategy with memory M where M is finite. When the arena is finite, those strategies can be implemented using a finite transducer (finite automaton with output).

Chapter 2

Two-player games on finite graphs: ω-regular winning conditions

Contents

In this chapter we consider two-player games on finite graphs equipped with an ω-regular winning conditions: reachability, safety, Büchi, co-Büchi, parity and Muller. We study them from an algorithmic point of view, looking from algorithms to compute the winning regions. We will also prove that we can construct memoryless strategies for all winning condition but Muller conditions (which require finite memory).

2.1 Reachability games

We fix a graph $G = (V, E)$ *without dead-ends*, a partition $V_{\mathbf{E}} \uplus V_{\mathbf{A}}$ of V defining an arena $\mathcal{G}$. We fix a subset $F \subseteq V$ of final vertices and we denote by $\mathbb{G}$ the corresponding reachability game

We have the following result.

THEOREM 2.1 *One can compute the winning positions in $\mathbb{G}$ and construct memoryless winning strategies for both players.*

The rest of the section is devoted to the proof of this result. We defined by induction the following increasing sequence of subsets of V.

$$\begin{cases} Attr_0^{\mathbf{E}}(F) = & F \\ Attr_{i+1}^{\mathbf{E}}(F) = & Attr_i^{\mathbf{E}}(F) \cup \{v \in V_{\mathbf{E}} \mid \exists v' \in Attr_i^{\mathbf{E}}(F) \text{ s.t. } (v,v') \in E\} \\ & \cup \{v \in V_{\mathbf{A}} \mid \forall v' \in V,\ (v,v') \in E \Rightarrow v' \in Attr_i^{\mathbf{E}}(F)\} \end{cases}$$

As the previous sequence is increasing and bounded, it converges: denote by $Attr^{\mathbf{E}}(F)$ its limit. We will show that $Attr^{\mathbf{E}}(F) = W_{\mathbf{E}}$ is the winning region for Eve. The set $Attr^{\mathbf{E}}(F)$ is called **Attractor for Eve to** F and its complement is said to be a **trap for Eve**.

We define the function $rk : V \to \mathbb{N}$ by letting $rk(v) = \min\{i \mid v \in Attr_i^{\mathbf{E}}(F)\}$ (with the convention that $\min \emptyset = \infty$). Then we have the following property.

PROPERTY 2.1 *For all $v \in Attr^{\mathbf{E}}(F)$, let $v \notin F$. Then the following holds*

- *Either $v \in V_{\mathbf{E}}$ and v has a successor v' in $Attr^{\mathbf{E}}(F)$ such that $rk(v') < rk(v)$;*
- *Or $v \in V_{\mathbf{A}}$ and for all successor v' of v, v' belongs to $Attr^{\mathbf{E}}(F)$ and $rk(v') < rk(v)$.*

We finally define a memoryless strategy φ for Eve by letting for all $v \in Attr^{\mathbf{E}}(F) \cap V_{\mathbf{E}}$, $\varphi(v) = v'$ for some v' such that $rk(v') < rk(v)$ (such a v' exists thanks to Property 2.1). For those vertices outside of $Attr^{\mathbf{E}}(F)$ or in F, φ can take any value.

We verify that if Eve respect φ during a play starting from some vertex in $Attr^{\mathbf{E}}(F)$, then the play stays in $Attr^{\mathbf{E}}(F)$ until it reaches F. Indeed, consider a play $\lambda = v_0 v_1 \cdots$ where she respects φ. By definition, one has, for all $i \geq 0$, that $v_i \in Attr^{\mathbf{E}}(F) \setminus F \Rightarrow v_{i+1} \in Attr^{\mathbf{E}}(F)$. Indeed, we have two possible cases: either λ visits F (hence is winning), or it never visits F and thus $v_i \in Attr^{\mathbf{E}}(F)$ for all $i \geq 0$. In this latter case, one has $rk(v_0) < rk(v_1) < rk(v_2) < \cdots$ which leads an infinite decreasing sequence in $\mathbb{N}$, leading a contradiction. The strategy φ is therefore winning from any vertex in $Attr^{\mathbf{E}}(F)$.

It remains to prove that for any vertex in $V \setminus Attr^{\mathbf{E}}(F)$, Adam has a memoryless winning strategy. We have a dual version of Property 2.1

PROPERTY 2.2 *For all $v \notin Attr^{\mathbf{E}}(F)$,*

- *if $v \in V_{\mathbf{E}}$, for all successor v' of v, $v' \notin Attr^{\mathbf{E}}(F)$,* i.e. $rk(v') = \infty$.
- *if $v \in V_{\mathbf{A}}$, v has a successor $v' \notin Attr^{\mathbf{E}}(F)$,* i.e. $rk(v') = \infty$;

We define a memoryless strategy ψ for Adam by letting for all $v \notin Attr^{\mathbf{E}}(F) \cap V_{\mathbf{A}}$, $\psi(v) = v'$ for some v' such that $v' \notin Attr^{\mathbf{E}}(F)$ (such a v' exists from Property 2.2).

We verify that if Adam respects ψ in a play starting from a vertex not in $Attr^{\mathbf{E}}(F)$, then it stays outside of $Attr^{\mathbf{E}}(F)$ forever. Indeed, let $\lambda = v_0 v_1 \cdots$ be a play where Adam respects ψ and starting from $v_0 \notin Attr^{\mathbf{E}}(F)$. Property 2.2 and definition of ψ, imply directly that $v_i \notin Attr^{\mathbf{E}}(F)$ for all i. This concludes the proof.

REMARK 2.1 The set $V \setminus Attr^{\mathbf{E}}(F)$ is said to be a **trap for Eve**. This terminology comes from the fact that Adam has a strategy to *trap* Eve in $V \setminus Attr^{\mathbf{E}}(F)$, *i.e.* to maintain the play in the set.

2.2 Büchi Games

We fixe a graph $G = (V, E)$ *without dead-end*, a partition $V_{\mathbf{E}} \uplus V_{\mathbf{A}}$ of V that defines an arena $\mathcal{G}$. We fix a subset $F \subseteq V$ of final states and we denote by $\mathbb{G}$ the associated Büchi game.

We have the following result.

THEOREM 2.2 *One can compute the winning positions in $\mathbb{G}$ and construct memoryless winning strategies for both players.*

We first start by defining a variant of the attractor. Let S be a subset of states. We define the following increasing sequence

$$\begin{cases} Attr_0^{+\mathbf{E}}(S) = & \{v \in V_{\mathbf{E}} \mid \exists v' \in S \text{ s.t. } (v, v') \in E\} \cup \{v \in V_{\mathbf{A}} \mid (v, v') \in E \Rightarrow v' \in S\} \\ Attr_{i+1}^{+\mathbf{E}}(S) = & Attr_i^{+\mathbf{E}}(S) \cup \{v \in V_{\mathbf{E}} \mid \exists v' \in Attr_i^{+\mathbf{E}}(S) \text{ s.t. } (v, v') \in E\} \\ & \cup \{v \in V_{\mathbf{A}} \mid \forall v',\ (v, v') \in E \Rightarrow v' \in Attr_i^{+\mathbf{E}}(S) \cup S\} \end{cases}$$

And we denote $Attr^{+\mathbf{E}}(S)$ its limit (we refer to this set as the strict attractor to S for Eve).

An easy adaptation of the proof for reachability games allows us to prove that a vertex belongs to $Attr^{+\mathbf{E}}(S)$ iff Eve has a strategy that ensures her to reach in **at least one move** S.

We now consider the following (decreasing[1]) sequence:

$$Z_i = \begin{cases} F & \text{if } i = 1 \\ Attr^{+\mathbf{E}}(Z_{i-1}) \cap F & \text{if } i > 1 \end{cases}$$

We denote by Z_∞ its limit and in particular we have that $Z_\infty = Attr^{+\mathbf{E}}(Z_\infty) \cap F$ and $Z_\infty \subseteq F$. We deduce from equality $Z_\infty = Attr^{+\mathbf{E}}(Z_\infty) \cap F$ that Eve has a positional strategy from Z_∞ to come back to Z_∞ in at least one move. We denote by φ_1 this strategy.

The intuitive idea is that Z_i consists of those final states from which Eve can force at least i visits to F. Finally, Z_∞ is the subset of F from which Eve can force infinitely many visits to F. It is therefore natural to consider the set $Attr^{\mathbf{E}}(Z_\infty)$ of those states from which Eve can force to reach Z_∞.

We will prove that $W_{\mathbf{E}} = Attr^{\mathbf{E}}(Z_\infty)$ and for this we let φ_0 be a positional strategy of Eve in the reachability game to Z_∞. We finally define the following positional strategy φ for Eve

$$\varphi(v) = \begin{cases} \varphi_0(v) & \text{if } v \in (Attr^{\mathbf{E}}(Z_\infty) \setminus Z_\infty) \cap V_{\mathbf{E}} \\ \varphi_1(v) & \text{if } v \in Z_\infty \cap V_{\mathbf{E}} \end{cases}$$

Therefore, strategy φ leads the play in Z_∞ (mimicking φ_0) and then once Z_∞ is reached, leave it by taking care to have the possibility to come back to it (this property is ensured by strategy φ_1).

[1]The sequence is decreasing. Indeed, one has $Z_1 \subseteq Z_0 = F$ by definition; now assuming that $Z_{i+1} \subseteq Z_i$ one has by monotonicity of the $Attr^{+\mathbf{E}}$ operator that $Attr^{+\mathbf{E}}(Z_{i+1}) \subseteq Attr^{+\mathbf{E}}(Z_i)$ hence that $Z_{i+2} = Attr^{+\mathbf{E}}(Z_{i+1}) \cap F \subseteq Attr^{+\mathbf{E}}(Z_i) \cap F = Z_{i+1}$.
Also note that it implies by induction that an alternative definition of Z_i can be $Attr^{+\mathbf{E}}(Z_{i-1}) \cap Z_{i-1}$ as $Attr^{+\mathbf{E}}(Z_{i-1}) \cap F = Attr^{+\mathbf{E}}(Z_{i-1}) \cap Z_{i-1}$ because of the inclusion $Z_i \subseteq Z_{i-1} \subseteq F$.

Consider a play starting from $Attr^{\mathbf{E}}(Z_\infty)$ and where Eve respects φ: such a play visits infinitely often $Z_\infty \subseteq F$ and is therefore winning. Indeed, any vertex visited along such a play belongs to $Attr^{\mathbf{E}}(Z_\infty)$ and she systematically plays an attractor strategy to Z_∞: hence one can factorize such a play into partial plays that are all ending in Z_∞.

This proves that $Attr^{\mathbf{E}}(Z_\infty) \subseteq W_{\mathbf{E}}$. To conclude the proof, it remains to prove that $V \setminus (Attr^{\mathbf{E}}(Z_\infty)) \subseteq W_{\mathbf{A}}$ and give a positional strategy for Adam from those vertices.

Let $v \in V \setminus (Attr^{\mathbf{E}}(Z_\infty))$: there exists some i such that $v \notin Attr^{\mathbf{E}}(Z_i)$ (consider i such that $Z_i = Z_\infty$). We chose i such that $v \in Attr^{\mathbf{E}}(Z_i) \setminus Attr^{\mathbf{E}}(Z_{i+1})$ (with the convention that $Z_{-1} = V$) and we note $rk(v) = i$.

We then have the following property.

PROPERTY 2.3 *For all $v \in (V \setminus (Attr^{\mathbf{E}}(Z_\infty)))$, one has:*

- *if $v \in V_{\mathbf{A}}$, v has a successor v' such that $rk(v') \leq rk(v)$ and this inequality if strict iff $v \in F$;*
- *if $v \in V_{\mathbf{E}}$, for all successor v' of v one has $rk(v') \leq rk(v)$ and this inequality if strict iff $v \in F$.*

Proof. Let $i = rk(v)$. As $v \notin Attr^{\mathbf{E}}(Z_{i+1})$, Adam can force to stay outside of $Attr^{\mathbf{E}}(Z_{i+1})$, i.e. to stay inside vertices with $rk \leq i$. This is how we define v'. If $v \in F$, assume that $rk(v') = rk(v) = i$ for all v' if $v \in V_{\mathbf{A}}$ or for some v' if $v \in V_{\mathbf{E}}$: then by definition we would have $v \in Attr^{+}_{\mathbf{E}}(Z_i) \cap F = Z_{i+1}$ thus $rk(v) = i + 1$. ■

We define a positional strategy ψ for Adam directly from Property 2.3: $\psi(v) = v'$ where $rk(v') \leq rk(v)$ for all $v \in (V \setminus (Attr^{\mathbf{E}}(Z_\infty))) \cap V_{\mathbf{A}}$. During a play where Adam respects ψ the value rk of the vertices that are visited decreases and this decreasing is strict whenever a final vertex is visited. As there is no infinitely decreasing sequence in the positive integers, we conclude that F is visited finitely often (more precisely, strategy ψ ensures that from a vertex v, there are at most $rk(v)$ visits to F).

2.3 Parity games

We fix a finite graph $G = (V, E)$ *without dead-end*, a partition $V_{\mathbf{E}} \cup V_{\mathbf{A}}$ of V that induces an arena $\mathcal{G}$. We take a finite set of colours $C = \{0, \ldots, d\}$ and a colouring function $\rho : V \to C$. We denote by $\mathbb{G}$ the induced parity game

We have the following result.

THEOREM 2.3 *One can compute the winning positions in $\mathbb{G}$ and construct memoryless winning strategies for both players.*

For some player σ (Eve ou Adam), we denote by $\overline{\sigma}$ the other player.

2.3.1 Basic definitions

We start with some basic definitions, useful in the proof later.

DFINITION 2.1 (Sub-arena) *Let $\mathcal{G} = (G, V_{\mathbf{E}}, V_{\mathbf{A}})$ be an arena with $G = (V, E)$, and let $U \subseteq V$. Let $col : V \to C$ be a colouring function on G. We consider the coloured sub-graph (one restrict col to U) of $\mathcal{G}$ induced by U, $\mathcal{G}[U] = (G[U], V_{\mathbf{E}} \cap U, V_{\mathbf{A}} \cap U)$ où $G[U] = (U, E \cap (U \times U))$.*

*We say that $\mathcal{G}[U]$ is a **sub-arena** iff it has no dead-end,* i.e. *for all $u \in U$, there is some $u' \in U$ such that $(u, u') \in E$.*

FACT 2.1 *A sub-arena of a sub-arena is a sub-arena.*

DFINITION 2.2 (Trap) *Let σ be a player and let $\mathcal{G} = (G, V_{\mathbf{E}}, V_{\mathbf{A}})$ be an arena with $G = (V, E)$. A **trap for** σ (or σ-trap) in $\mathcal{G}$ is a subset $U \subseteq V$ such that*

- *for all $v \in U \cap V_\sigma$, $(v, v') \in E \Rightarrow v' \in U$ (σ cannot exit U);*
- *for all $v \in U \cap V_{\overline{\sigma}}$, there exists $v' \in U$ tel que $(v, v') \in E$ ($\overline{\sigma}$ can stay in U);*

FACT 2.2 *The player $\overline{\sigma}$ has a positional strategy to keep the play in a σ-trap.*

Proof. Staying in a trap is the dual as exiting the trap, which is a reachability condition. The result follows from the fact that reachability games admit positional strategies for both players. ■

FACT 2.3 *Let U be a trap for σ in arena $\mathcal{G}$. Then $\mathcal{G}[U]$ is a sub-arena .*

Proof. Immediate.

DFINITION 2.3 (Attractor) *Let σ be a player and let $\mathcal{G} = (G, V_{\mathbf{E}}, V_{\mathbf{A}})$ be an arena with $G = (V, E)$. The **attractor** of $U \subseteq V$ for σ (σ-attractor), denoted $Attr^\sigma(\mathcal{G}, U)$ (we omit $\mathcal{G}$ if it is clear from the context), is defined as the limit of the following (increasing and bounded) sequence:*

- *$Attr_0^\sigma(U) = U$;*
- *$\forall i \geq 0$, $Attr_{i+1}^\sigma(U) = Attr_i^\sigma(U) \cup \{v \in V_\sigma \mid \exists v' \in Attr_i^\sigma(U)$ s.t. $(v, v') \in E\} \cup \{v \in V_{\overline{\sigma}} \mid (v, v') \in E \Rightarrow v' \in Attr_i^\sigma(U)\}$*

FACT 2.4 *The set $Attr^\sigma(\mathcal{G}, U)$ is the set of winning positions for σ in the reachability game to U.*
The complement of an attractor for σ is a trap for σ.
The attractor for σ of a trap for $\overline{\sigma}$ is a trap for $\overline{\sigma}$

Proof. Direct consequences of the results on reachability games or immediate from the definitions.

2.3.2 Proof of Theorem 2.3

We now turn to the proof of Theorem 2.3. In addition of the announced result, we will prove that W_σ is a trap for $\overline{\sigma}$.

The proof is by induction on the number n of colours. The base case is the one where $n = 1$ and the result is immediate: depending on the parity of the unique colour, Eve (even) or Adam (odd) wins everywhere and any strategy is winning (in particular one can choose it positional).

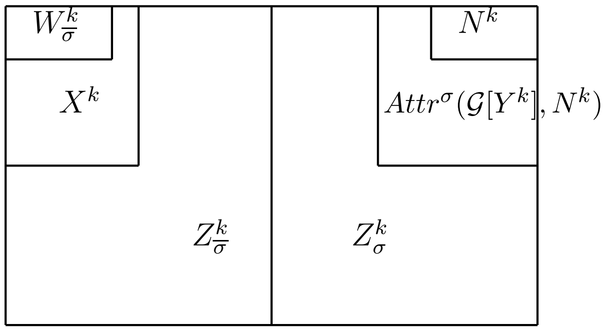
We assume that we proved the result up to some $n - 1 \geq 1$ and we consider the case where we have n colours. For the rest of the proof, σ denotes the player that wins if the smallest colour c is infinitely often visiter (*i.e.* Eve if c is even, Adam otherwise).

We construct a sequence of subsets of V, that we denote $(W_{\overline{\sigma}}^k)$ together with a sequence of positional strategies $\varphi_{\overline{\sigma}}^k$ for $\overline{\sigma}$ such that:

1. For all k, $W^k_{\overline{\sigma}}$ is a trap for σ and $\varphi^k_{\overline{\sigma}}$ is a winning strategy for $\overline{\sigma}$ in $W^k_{\overline{\sigma}}$. Moreover $\varphi^k_{\overline{\sigma}}$ traps the play in $W^k_{\overline{\sigma}}$.

2. The sequence $(W^k_{\overline{\sigma}})_k$ is increasing and each $\varphi^{k+1}_{\overline{\sigma}}$ extend $\varphi^k_{\overline{\sigma}}$

We start by letting $W^0_{\overline{\sigma}} = \emptyset$ and the properties are then trivially verified. Now assume that $W^k_{\overline{\sigma}}$ and $\varphi^k_{\overline{\sigma}}$ have been constructed and define $W^{k+1}_{\overline{\sigma}}$ and $\varphi^{k+1}_{\overline{\sigma}}$.



We start by letting $X^k = Attr^{\overline{\sigma}}(\mathcal{G}, W^k_{\overline{\sigma}})$. It is a trap for σ as it is the attractor of a trap for σ (induction hypothesis).

The complement $Y^k = V \setminus X^k$ of X^k is a trap for $\overline{\sigma}$ as it is the complement of a $\overline{\sigma}$-attractor. In particular it is a subarena that we denote by $\mathcal{G}[Y^k]$.

Consider now the set of vertices in Y^k that have colour c: $N^k = \{v \in Y^k \mid \rho(v) = c\}$ and we remove from Y^k the attractor for σ of N^k in the subarena:

$$Z^k = Y^k \setminus Attr^{\sigma}(\mathcal{G}[Y^k], N^k)$$

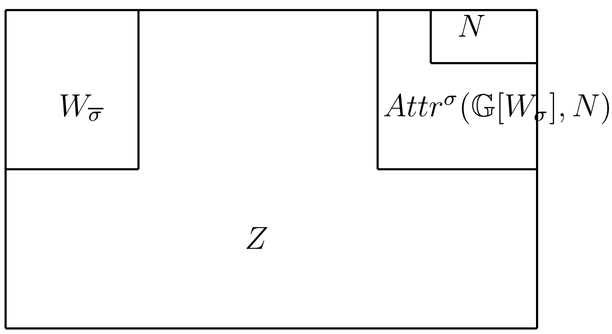
The set Z^k is a trap for σ (complement of a σ attractor) and defines a subarena (subarena of a sub-arena). Moreover all vertices in Z^k have a colour at least equal to $c+1$.

Using the induction hypothesis, we define Z^k_{σ} and $Z^k_{\overline{\sigma}}$. Finally, we let $W^{\overline{\sigma}}_{k+1} = X^k \cup Z^k_{\overline{\sigma}}$, and we define $\varphi^{k+1}_{\overline{\sigma}}$ as the union of the (positional) strategies on these two disjoint sets. Clearly, such a strategy is winning on $W^{k+1}_{\overline{\sigma}}$ and extend $\varphi^{k+1}_{\overline{\sigma}}$.

The fact that $W^{k+1}_{\overline{\sigma}}$ is a trap for σ is immediate.

Now, we take for $W_{\overline{\sigma}}$ the limit of the previous sequence and we do the same to define $\varphi_{\overline{\sigma}}$. It is clear that points (1) and (2) are true for $\overline{\sigma}$.

We let $W_{\sigma} = V \setminus W_{\overline{\sigma}}$. The fact that W_{σ} is a trap for $\overline{\sigma}$ is a consequence of the fact that it is the complement of a $\overline{\sigma}$-attractor as $W_{\overline{\sigma}} = Attr^{\overline{\sigma}}(W_{\overline{\sigma}})$. It remains to prove that σ has a winning positional strategy.



For this, we let $N = \{v \in W_\sigma \mid \rho(v) = c\}$ and

$$Z = W_\sigma \setminus Attr^\sigma(\mathcal{G}[W_\sigma], N)$$

By definition of $W_{\overline{\sigma}}$, $\overline{\sigma}$ cannot win in Z (otherwise $W_{\overline{\sigma}}$ would not be the limit of the sequence $W_{\overline{\sigma}}^k$). Thus σ as a positional strategy on Z (induction hypothesis). We define the strategy φ_σ as follows:

- Follow the positional winning strategy when being in Z.

- In $Attr^\sigma(\mathcal{G}[W_\sigma], N)$ follows the positional attractor strategy.

- In N stay in the winning region.

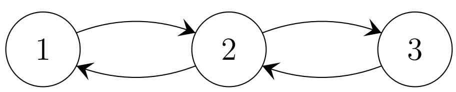
We easily check that this strategy is positional and winning. Indeed, in a play where σ follows this strategy, either the play eventually stay forever in Z (hence is winning for σ by induction hypothesis), or it visits infinitely often N and is therefore winning for σ as well.

2.4 Jeux de Muller

On se fixe un graphe non étiqueté $G = (V, E)$ *sans cul-de-sac*, une partition $V_{\mathbf{E}} \cup V_{\mathbf{A}}$ de V qui définit un graphe de jeu $\mathcal{G}$. On se donne un ensemble de sous-ensembles d'états $\mathcal{F} = \{F_1, \cdots, F_i\}$, $F_i \subseteq V$ pour tout i. On appelle alors $\mathbb{G}$ le **jeu de Muller** induit: Eve gagne une partie ssi l'ensemble des sommets visités infiniment souvent au cours de la partie est dans $\mathcal{F}$.

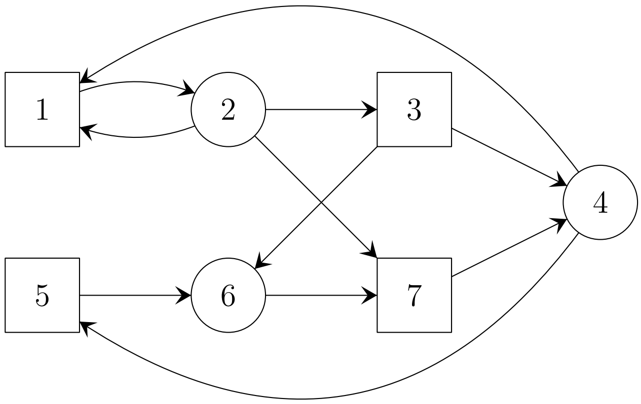
2.4.1 Les stratégies gagnantes peuvent requérir de la mémoire

On commence par un exemple très simple où il n'y a qu'un seul joueur. On considère le graphe suivant et on prend $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3\}\}$.



Le seul sommet où Eve a un choix est le sommet 2. Si elle joue avec une stratégie sans mémoire, on va visiter infiniment souvent soit $\{1, 2\}$ soit $\{2, 3\}$. Une stratégie gagnante avec mémoire consiste à jouer alternativement vers 1 et 3 depuis 2.

Pour un exemple plus explicite pour la suite, on considère maintenant le graphe de jeu suivant et on prend $\mathcal{F} = \{\{1, 2, 3, 4\}, \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}\}$.



A nouveau, il est facile de vérifier qu'une stratégie sans mémoire pour Eve ne peut être gagnante: depuis 2, Eve doit aller vers 3 (qui doit dans tous les cas être infiniment souvent visité), et si elle choisit d'aller depuis 4 vers 1, Adam peut jouer de sorte à ce que tous les sommets soient infiniment souvent visités sauf 5, et si elle choisit d'aller depuis 4 en 5, Adam peut jouer de sorte à ce que les sommets infiniment souvent visités soient $\{4, 5, 6, 7\}$.

Une stratégie gagnante avec mémoire pour Eve est la suivante:

- Depuis 2 toujours aller vers 3
- Depuis 4 si l'on vient de 3, aller vers 1.
- Depuis 4, si l'on vient de 7 via 3 et 6, aller vers 5 puis 6 puis 7 puis 4 puis 1.

En d'autres termes, Eve regarde en 4 quels sont les deux derniers états impairs visités:

- $(1, 3)$ ou $(5, 7)$: aller vers 1.
- $(3, 7)$: aller vers 5

Il est à notre que cette information est facilement constructible par un automate fini et qu'une telle machine peut donc réaliser une stratégie gagnante pour Eve.

On généralise ces idées dans la suite.

2.4.2 Résolution des jeux de Muller: le last appearance record

On identifie dans la suite V avec $\{1, \ldots, n\}$. On appelle **last appearance record (LAR)** une permutation de V avec un entier dans $\{1, \ldots, n\}$ (le **hit**). On représentera cela par un n-uplet dont le j-ème élément est souligné si le hit vaut j, et on note $LAR(V)$ l'ensemble des LAR sur V. Le LAR est défini par induction pour toute suite (finie) de sommets (en particulier toute partie partielle) en posant: $LAR(\varepsilon) = (1, \ldots, \underline{n})$ et en posant si $LAR(\lambda) = (v_1, \cdots, v_n)$, $LAR(\lambda \cdot v) = (v_1, \cdots v_{j-1}, \underline{v_{j+1}}, v_{j+2}, \cdots, v_n, v)$ si $v = v_j$: v est mis au fond et la position qu'il occupait devient le hit. Ainsi $LAR(\lambda \cdot v)$ *ne dépend que* de v et de $LAR(\lambda)$.

Il est facile de voir que l'ensemble des sommets infiniment souvent répétés est F au cours d'une partie **ssi** au bout d'un certain moment

1. le LAR a toujours un hit supérieur ou égal à $n - |F| + 1$;
2. infiniment souvent le hit vaut $n - |F| + 1$;
3. les $|F|$ derniers sommets du LAR forment une permutation de F.

Preuve. Supposons que l'on ait 1, 2 et 3 vraies à partir d'un certain moment. Il est clair que l'ensemble infiniment souvent visité est F (à partir d'un moment les sommets visités sont toujours dans les $|F|$ derniers, et ils sont donc dans F; de plus on n'en laisse pas de côté grâce au point 2).

On considère une partie $\lambda = u_1 u_2 \cdots$ de sommets infiniment souvent visités F. Il existe un indice k tel que l'on ne voit plus que des éléments de F après u_k, et il existe $h > k$ tel que $F = \{u_k, \ldots, u_h\}$. Par définition du LAR, il est clair que les $|F|$ dernier sommets du LAR en u_h forment une permutation de F. On montre par récurrence que le LAR vérifie les trois propriétés voulues pour v_l avec $l \geq h+1$. Pour $l = h+1$, comme $u_l \in F$ et comme les sommets de F apparaissent dans les $|F|$ dernières positions du LAR en u_h, le hit en u_l est supérieur ou égal à $n - |F| + 1$ et de plus on a toujours une permutation de F en queue du LAR. En raisonnant de la même façon on établit donc 1 et 3. Supposons que l'on n'ai pas 2: il existe $m > h$ tel qu'après m le hit soit toujours plus grand que $n + 1 - |F|$: ainsi le $(n + 1 - |F|)$-ième sommet du LAR en u_m n'est plus jamais visité, et n'est donc que finiment souvent visité alors qu'il appartient à F, ce qui est contradictoire. ∎

On considère un nouveau graphe de jeu dans lequel les sommets vont en plus contenir une information sur le LAR. Plus formellement, on considère le graphe $G' = (V \times LAR(V), E')$ où $((v, \tau), (v', \tau')) \in E$ ssi $(v, v') \in E$ et τ' est le LAR obtenu en allant vers v' avec le LAR τ. On considère la partition de V' donnée par $V'_{\mathbf{E}} = V_{\mathbf{E}} \times LAR(V)$, et on appelle $\mathcal{G}'$ le graphe de jeu associé. Enfin, on définit une condition de parité pour $\mathcal{G}'$: un sommet (v, ℓ) tel que ℓ a pour hit j, a pour couleur $2j$ si les j derniers éléments de ℓ forment une permutation d'un ensemble de $\mathcal{F}$ et a pour couleur $2j + 1$ si les j derniers éléments de ℓ ne forment pas une permutation d'un ensemble de $\mathcal{F}$.

Appelons $\mathbb{G}'$ le jeu défini sur $\mathcal{G}'$ équipé de la nouvelle condition de parité que l'on vient de définir. On a alors le résultat suivant qui permet de conclure:

LEMMA 2.1 *Un sommet v est gagnant pour Eve dans $\mathbb{G}$ ssi le sommet $(v, LAR(\varepsilon))$ est gagnant pour Eve dans $\mathbb{G}'$*

Preuve. Considérons une partie $\lambda = v_0 v_1 \cdots$ dans $\mathbb{G}$. On considère alors la partie $\lambda' = v'_0 v'_1 \cdots$ dans $\mathbb{G}$ définie par $v'_i = (v_i, LAR(v_0 \cdots v_{i-1})) \cdots$ pour tout i. Il est alors facile de voir que λ est gagnante pour Eve dans $\mathbb{G}$ ssi λ' est gagnante pour Eve dans $\mathbb{G}'$. Ceci vient de la caractérisation donnée des sommets infiniment souvent répétés en terme de LAR, et de la définition des couleurs.

On note τ la fonction (bijection en fait) telle que $\tau(\lambda) = \lambda'$ et π la fonction inverse qui projette λ' en λ, et on considère les versions naturelles de ces fonctions définie sur les parties partielles. Maintenant, si φ' est une stratégie d'Eve dans $\mathbb{G}'$ on définit la stratégie φ pour Eve dans $\mathbb{G}$ en posant $\varphi(\lambda) = last(\pi(\tau(\lambda) \cdot \varphi'(\tau(\lambda))))$, où $last$ est la fonction qui associe à une partie son dernier sommets. Il est alors facile de vérifier que φ est gagnante depuis v si φ' est gagnante depuis $(v, LAR(\varepsilon))$: en effet toute partie λ dans $\mathbb{G}$ où Eve respecte φ est telle que $\tau(\lambda)$ est une partie dans laquelle Eve respecte la stratégie (gagnante) φ'; comme les parties gagnantes dans $\mathbb{G}$ sont exactement celles dont l'image par τ est une partie gagnante dans $\mathbb{G}'$, cela termine l'argument.

Comme cette construction peut être également faite pour une stratégie gagnante d'Adam, cela conclut la preuve. ■

On a donc en résumé le théorème suivant:

THEOREM 2.4 *On peut calculer l'ensemble des positions gagnantes dans un jeu de Muller ainsi que des stratégies gagnantes qui nécessitent une mémoire de taille $k.k!$ où k est le nombre de sommets du graphe de jeu considéré.*

Preuve. La première partie du résultat est une conséquence directe des deux lemmes précédents. La seconde partie (taille de la mémoire) est laissée en exercice. ■

Chapter 3

Jeux et automates d'arbres

Contents

L'objet de ce chapitre est l'étude des automates acceptants des arbres infinis. Dans une première partie, on donnera les définitions de bases et quelques exemples. Dans une seconde partie on montrera que le problème du test du vide est intimement lié (polynomialement équivalent) au problème de décision du gagnant dans un jeu de parité sur un graphe fini. On terminera enfin en donnant une preuve du théorème de complémentation des langages réguliers d'arbres infinis (lemme de Rabin).

3.1 Définitions

3.1.1 Rappel: automates de mots

DFINITION 3.1 *Un* ***Automate de mots*** *est un quintuplé $\mathcal{A} = (Q, A, I, \Delta, Acc)$ où Q est un ensemble fini d'états de contrôle, A est un alphabet fini d'entrée, $I \subseteq Q$ est un ensemble d'états initiaux, $\Delta \subseteq Q \times A \times Q$ est une relation de transition et Acc est une condition d'acceptation d'un des types suivants:*

- *$Acc = F \subseteq Q$ est un ensemble d'états finaux, et l'on parle alors de condition d'acceptation par* ***état final****.*
- *$Acc = R \subseteq Q$ est un ensemble d'états répétés, et l'on parle alors de condition de* ***Büchi****.*
- *$Acc = \rho : Q \to \mathbb{N}$ est une fonction de coloriage, et l'on parle alors de condition de* ***parité****.*

Un calcul de $\mathcal{A}$ sur un mot (potentiellement infini) $u = a_0a_1\cdots$ est une suite $q_0q_1\cdots$ telle que

- *$q_0 \in I$ est un état initial;*

- *pour tout* $i \leq |u|$, $(q_{i-1}, a_{i-1}, q_i) \in \Delta$.

Si $\mathcal{A}$ *est muni d'une condition d'acceptation par état final, un mot fini* u *est accepté par* $\mathcal{A}$ *si et seulement s'il existe un calcul de* $\mathcal{A}$ *sur* u *qui se termine dans un état final.*

Si $\mathcal{A}$ *est muni d'une condition de Büchi, un mot infini* u *est accepté par* $\mathcal{A}$ *si et seulement s'il existe un calcul* $q_0q_1q_2\cdots$ *de* $\mathcal{A}$ *qui visite infiniment souvent* R, i.e. *tel que* $|\{i \mid q_i \in R\}| = \infty$.

Enfin, si $\mathcal{A}$ *est muni d'une condition de parité, un mot infini* u *est accepté par* $\mathcal{A}$ *si et seulement s'il existe un calcul* $q_0q_1q_2\cdots$ *de* $\mathcal{A}$ *tel que* $\lim\inf(\rho(q_i))_{i\geq 0}$ *est paire.*

Le langage reconnu (ou accepté) par un automate est l'ensemble des mots sur lesquels il existe un calcul acceptant de l'automate. On note généralement $L(\mathcal{A})$ *le langage accepté par* $\mathcal{A}$.

Enfin, un automate est dit ***déterministe*** *si* Δ *est fonctionnelle,* i.e. *pour tout* $(q, a) \in Q \times A$, $|\{q' \mid (q, a, q') \in \Delta\}| \leq 1$ *et si* I *est un singleton.*

Les résultats suivants sont des (grands) classiques:

THEOREM 3.1 *Sur les mots finis, les modèles déterministe et non-déterministe reconnaissent les mêmes langages.*

THEOREM 3.2 *Sur les mots infinis, les automates déterministes de Büchi sont strictement moins expressifs que les automates non-déterministes de Büchi. Par contre, les automates déterministes de parités, les automates non-déterministes de parité et les automates non-déterministes de Büchi ont le même pouvoir d'expression.*

Les **langages réguliers de mots finis** sont les langages acceptés par des automates finis. Les **langages réguliers de mots infinis** sont les langages acceptés par des automates finis déterministes de parité (de façon équivalente non-déterministes de Büchi/parité).

Concernant les propriétés de clôture, on a les résultats (classiques) suivants.

THEOREM 3.3 *La classe des langages réguliers de mots finis est une algèbre de Boole.*
La classe des langages réguliers de mots infinis est une algèbre de Boole.

3.1.2 Automates d'arbres

DFINITION 3.2 *Un* ***arbre binaire fini*** *sur un alphabet* A *est une fonction* $t : D \to A$ *où* $D \subseteq \{0,1\}^*$ *est un sous-ensemble clos par préfixe appelé* ***domaine****. De plus on demandera que pour tout* $u \in D$, $u0 \in D \Leftrightarrow u1 \in D$ (i.e. *un nœud a deux fils ou est une feuille). Un nœud* u *de* t *est un élément de* D *et son étiquette est* $t(u)$*. La racine est le nœud* ε *(où* ε *est le mot vide).*

DFINITION 3.3 *Un* ***automate d'arbres finis*** *est un quintuplé* $\mathcal{A} = (Q, A, I, \Delta, Acc)$ *où* Q *est un ensemble fini d'états de contrôle,* A *est un alphabet fini d'entrée,* $I \subseteq Q$ *est un ensemble d'états initiaux,* $\Delta \subseteq Q \times A \times Q \times Q$ *est une relation de transition et* $Acc \subseteq Q \times A$ *est une condition d'acceptation.*

Un calcul de $\mathcal{A}$ *sur un arbre fini* t *d'alphabet* A *et de domaine* D *est un arbre fini* t' *d'alphabet* $Q \times A$ *et de domaine* D *tel que*

- *pour tout* $u \in D$, $t'(u) = (q, t(u))$ *pour un certain* $q \in Q$ (i.e. *un calcul est une* Q*-annotation de l'arbre en entrée);*

- $t'(\varepsilon) = (q_i, t(\varepsilon))$ *avec* $q_i \in I$;

- *pour tout* $u \in D$*, si* $u0, u1 \in D$ *alors* $t'(u0) = (q_0, t(u0))$ *et* $t'(u1) = (q_1, t(u1))$ *avec* $(q, t(u), q_0, q_1) \in \Delta$.

Un arbre fini t *est accepté par* $\mathcal{A}$ *si et seulement s'il existe un calcul* t' *de* $\mathcal{A}$ *sur* t *tel que toutes les feuilles de* t' *sont étiquetées par des éléments de* Acc.

Le langage reconnu (ou accepté) par un automate est l'ensemble des arbres finis sur lesquels il existe un calcul acceptant de l'automate. On note généralement $L(\mathcal{A})$ *le langage accepté par* $\mathcal{A}$.

Enfin, un automate est dit ***déterministe*** *si* Δ *est fonctionnelle,* i.e. *pour tout* $(q, a) \in Q \times A$, $|\{(q_0, q_1) \mid (q, a, q_0, q_1) \in \Delta\}| \leq 1$ *et si* I *est un singleton.*

EXERCISE 3.1 Donner un automate reconnaissant l'ensemble des arbres possédant une branche faite uniquement de a. Montrer qu'un automate déterministe ne peut pas reconnaître ce langage.

EXERCISE 3.2 Soit L un langage régulier de mots finis sur un alphabet A. La frontière d'un arbre est le mot obtenu en lisant les étiquettes des feuilles de la gauche vers la droite. Montrer que le langage des arbres dont la frontière est dans L est reconnu par un automate d'arbres non-déterministe.

On a le résultat suivant.

PROPOSITION 3.1 *La classe des langages réguliers d'arbres finis est une algèbre de Boole.*

Preuve. Les clôtures par intersection et unions sont triviales. La clôture par complément utilise un modèle équivalent d'automates d'arbre qui évalue l'arbre des feuilles vers la racine. Ce dernier modèle pouvant être facilement déterminisé, on obtient alors la clôture par complément. ∎

Concernant le modèle déterministe, on a le résultat suivant.

PROPOSITION 3.2 *Les automates d'arbres finis déterministes sont strictement moins expressifs que les automates d'arbres finis non-déterministes.*

Preuve. Il suffit, par exemple, de considérer le langage des arbres qui contiennent exactement une feuille étiquetée par a. ∎

DFINITION 3.4 *Un* ***arbre binaire infini*** *sur un alphabet* A *est une fonction* $t : \{0, 1\}^* \to A$. *Un nœud* u *de* t *est un élément de* $\{0, 1\}^*$ *et son étiquette est* $t(u)$*. La racine est le nœud* ε.

DFINITION 3.5 *Un* ***automate d'arbres infinis*** *est un quintuplé* $\mathcal{A} = (Q, A, I, \Delta, Acc)$ *où* Q *est un ensemble fini d'états de contrôle,* A *est un alphabet fini d'entrée,* $I \subseteq Q$ *est un ensemble d'états initiaux,* $\delta : Q \times A \times Q \times Q$ *est une relation de transition et* Acc *est une condition d'acceptation d'un des types suivants:*

- $Acc = F \subseteq Q$ *est un ensemble d'états répétés, et l'on parle alors de condition de* ***Büchi****.*

- $Acc = \rho : Q \to \mathbb{N}$ *est une fonction de coloriage, et l'on parle alors de condition de* ***parité****.*

Un calcul de $\mathcal{A}$ *sur un arbre infini* t *d'alphabet* A *est un arbre infini* t' *d'alphabet* $Q \times A$ *tel que*

- *pour tout* $u \in D$, $t'(u) = (q, t(u))$ *pour un certain* $q \in Q$ (i.e. *un calcul est une* Q*-annotation de l'arbre en entrée);*

- $t'(\varepsilon) = (q_i, t\varepsilon))$ *avec* $q_i \in I$;
- *pour tout* $u \in D$, $t'(u0) = (q_0, t(u0))$ *et* $t'(u1) = (q_1, t(u1))$ *avec* $(q_0, q_1) \in \Delta(q, t(u))$.

Étant donnée une branche d'un calcul t', c'est à dire un mot infini $\alpha = \alpha_1\alpha_2\alpha_3 \cdots \in \{0,1\}^\omega$ on lui associe de façon naturelle une suite d'états $\tau(\alpha) = q_0q_1q_2 \cdots$ où $(q_i, a_i) = t'(\alpha_1 \cdots \alpha_i)$. La branche α est acceptante ssi:

- Acc *est une condition de Büchi et* $\tau(\alpha)$ *visite infiniment souvent* R, i.e. $|\{i \mid q_i \in R\}| = \infty$;
- *ou* Acc *est une condition de parité* ρ *et* $\liminf(\rho(q_i))_{i\geq 0}$ *est paire.*

Un calcul t' est acceptant si toutes ses branches sont acceptantes.

Un arbre infini t est accepté par $\mathcal{A}$ si et seulement s'il existe un calcul acceptant de $\mathcal{A}$ sur t.

Le langage reconnu (ou accepté) par un automate est l'ensemble des arbres infinis sur lesquels il existe un calcul acceptant de l'automate. On note généralement $L(\mathcal{A})$ le langage accepté par $\mathcal{A}$.

Enfin, un automate est dit ***déterministe*** *si Δ est fonctionnelle,* i.e. *pour tout $(q, a) \in Q \times A$, $|\{(q_0, q_1) \mid (q, a, q_0, q_1) \in \Delta\}| \leq 1$ et si I est un singleton.*

EXERCISE 3.3 Montrer que les automates d'arbres de Büchi déterministes sont strictement moins expressifs que leur variante non-déterministe.

EXERCISE 3.4 Donner un automate de Büchi reconnaissant les arbres possédant une branche qui contient une infinité de b. Montrer que ce langage n'est pas reconnaissable par un automate déterministe de parité.

EXERCISE 3.5 Donner un automate déterministe de parité reconnaissant les arbres dont chaque branche possède un nombre fini de b. Montrer que ce langage ne peut pas être reconnu par un automate de Büchi (même non-déterministe).

■

Les exercices précédants permettent d'établir les résultats suivants.

PROPOSITION 3.3 *On a:*

1. *Les automates d'arbres déterministes de Büchi sont strictement moins expressifs que les automates d'arbres non-déterministes de Büchi.*
2. *Les automates d'arbres non-déterministes de Büchi sont strictement moins expressifs que les automates d'arbres non-déterministes de Parité.*
3. *Les automates d'arbres déterministes de Büchi sont strictement moins expressifs que les automates d'arbres déterministes de Parité.*
4. *Les automates de Büchi non-déterministes et les automates de parité déterministes sont incomparables.*

La classe des **langages réguliers d'arbres infinis** est celle des langages reconnus par des automates non-déterministes de parité.

On a alors le résultat (dur) suivant.

THEOREM 3.4 *La classe des langages réguliers d'arbres infinis est une algèbre de Boole.*

3.2 Le problème du vide

Dans ce qui suit on s'intéresse au problème du vide pour les automates d'arbres infinis de parité: étant donné un automate $\mathcal{A}$ a-t-on $L(\mathcal{A}) = \emptyset$? La solution de ce problème se transpose alors facilement à toutes les sous-classes considérées ci-dessous (que ce soit en terme de déterminisme, de condition d'acceptation ou de modèle — mots finis, mots infinis ou arbres finis).

On se fixe un automate de parité $\mathcal{A} = (Q, A, I, \Delta, \rho)$. Dans ce qui suit on construit un jeu de parité $\mathbb{G}$ sur un graphe fini $\mathcal{G}$ tel qu'Eve remporte $\mathbb{G}$ (pour un sommet d'un type particulier) si et seulement si $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$. Dans ce jeu Eve va décrire un calcul de l'automate et Adam va le vérifier. Plus précisément, Eve commence par donner un état initial. Ensuite, elle donne l'étiquette de la racine et choisit la transition que l'automate effectue à la racine et Adam choisit quel sous-arbre du calcul il souhaite vérifier (comme Eve doit gagner dans tous les cas le calcul devra être bon des deux côtés...). Eve doit alors choisir l'étiquette du nœud choisi par Adam ainsi que la transition. Adam choisit alors quel côté vérifier et ainsi de suite.

Plus formellement, le graphe de jeu est le suivant:

- $V_{\mathbf{E}} = Q$ et $V_{\mathbf{A}} = \Delta$
- depuis un sommet q, il y a une transition vers tout sommet de la forme $(q, a, q_0, q_1) \in \Delta$.
- depuis un sommet (q, a, q_0, q_1), il y a deux transitions une vers q_0 et une vers q_1.

Seuls les sommets de Q sont colorés et leur couleur est donnée par ρ (on peut toujours colorer les autres sommets en leur attribuant la couleur maximale, ce qui n'affectera pas le gagnant d'une partie).

On a alors le résultat suivant:

THEOREM 3.5 *Le langage $L(\mathcal{A})$ est non vide si et seulement si Eve possède une stratégie gagnante dans $\mathbb{G}$ depuis un sommet de I.*

Preuve. Supposons $L(\mathcal{A})$ non vide et considérons t un arbre dans le langage. Soit t' un calcul acceptant de $\mathcal{A}$ sur t. On définit une stratégie φ pour Eve dans le jeu $\mathbb{G}$ qui est gagnante depuis le sommet $q \in I$ où l'on note $(q, a) = t'(\varepsilon)$. La stratégie φ utilise une mémoire qui est un nœud de t', c'est à dire un mot $u \in \{0, 1\}^*$. Au départ $u = \varepsilon$ et à tout moment on aura que la partie est dans un sommet q si et seulement si $t'(u) = (q, a)$ pour un certain a (la propriété sera vérifiée trivialement par induction). Depuis un sommet q, Eve joue vers (q, a, q_0, q_1), où $t'(u) = (q, a)$ et où $t'(u \cdot 0) = (q_0, a_0)$ et $t'(u \cdot 1) = (q_1, a_1)$. La mémoire u est mise à jour après chaque coup d'Adam: si ce dernier va de (q, a, q_0, q_1) vers q_0, la mémoire devient $u \cdot 0$, et sinon la mémoire devient $u \cdot 1$.

Considérons maintenant une partie λ dans le jeu $\mathbb{G}$ au cours de laquelle Eve respecte φ. Tout d'abord les choix d'Adam (0 ou 1: 0 s'il choisit q_0 et 1 s'il choisit q_1) au cours de λ permettent de lui associer de façon naturelle une branche infinie β de t' (c'est à dire un mot de $\{0, 1\}^\omega$). Par ailleurs, les choix d'Eve permettent d'associer à λ une suite infinie α d'éléments de $Q \times A$ qui correspond exactement à la suite des étiquettes des éléments de β dans t'. Dès lors la plus petite couleur des états qui apparaissent infiniment dans α est la même que la plus petite couleur apparaissant infiniment souvent sur la branche β et est donc paire car t' est acceptant. La stratégie φ est donc gagnante pour Eve.

Réciproquement, considérons une stratégie gagnante φ pour Eve depuis un sommet $q_i \in I$, et construisons un arbre t et un calcul associé t' acceptant. On construit t' (et donc t) en définissant $t'(u)$ par induction sur u. Pour $u = \varepsilon$, $t'(u) = (q_i, a)$, où $\varphi(q_i) = (q_i, a, q_0, q_1)$. Supposons $t'(u) = (q_n, a_n)$ défini et notons $u = u_1 u_2 \cdots u_n$. On considère

$$\lambda = q_0 \cdot (q_0, a_0, q_0^g, q_0^d) \cdot q_1 \cdot (q_1, a_1, q_1^g, q_1^d) q_2 \cdots q_n$$

une partie débutant en $q_0 = q_i$, où Eve respecte φ et où $q_{i+1} = q_i^g$ si $u_{i+1} = 0$ et $q_{i+1} = q_i^d$ si $u_{i+1} = 1$. On note

- $(q_n, a_n, q_n^g, q_n^d) = \varphi(\lambda)$;
- $(q_n^g, a_{n+1}^g, q_{n+1}^{g,g}, q_{n+1}^{g,d}) = \varphi(\lambda \cdot (q_n, a_n, q_n^g, q_n^d) \cdot q_n^g)$;
- $(q_n^d, a_{n+1}^d, q_{n+1}^{d,g}, q_{n+1}^{d,d}) = \varphi(\lambda \cdot (q_n, a_n, q_n^g, q_n^d) \cdot q_n^d)$.

et on pose

$$t'(u0) = (q_n^g, a_{n+1}^g) \qquad \text{et} \qquad t'(u1) = (q_n^d, a_{n+1}^d)$$

On a ainsi défini de façon unique t'. De plus toute branche de t' est associé à une partie infinie dans $\mathbb{G}$ où Eve respecte φ en considérant simplement la construction inductive précédente. En particulier, la suite des couleurs associée à une branche est la même que la suite des couleurs dans la partie associée à la branche. Comme cette dernière partie est remportée par Eve, la branche vérifie donc la condition de parité. Cette propriété étant vraie pour toutes les branches on conclut que t' est un calcul acceptant et que le langage $L(\mathcal{A})$ est donc non vide. ■

La construction précédente montre que l'on peut réduire polynomialement le problème du vide pour les automates d'arbres infinis de parité au problème de décision du gagnant dans un jeu de parité sur un graphe fini. En fait la construction marche de la même façon dans l'autre sens: on peut réduire polynomialement le problème de décision du gagnant dans un jeu de parité sur un graphe fini au problème du vide pour les automates d'arbres infinis de parité.

Pour cela, on considère un graphe de jeu $\mathcal{G} = (V_{\mathbf{E}}, V_{\mathbf{A}}, E)$ et une fonction de coloriage dessus que l'on note ρ. On suppose de plus que chaque sommet v de $\mathcal{G}$ possède exactement deux successeurs que l'on notera $\tau_0(v)$ et $\tau_1(v)$. On appelle $\mathbb{G}$ le jeu de parité associé, et on se donne un sommet initial v_i dans V.

On définit l'automate d'arbres infinis déterministe de parité suivant: $\mathcal{A} = (Q, A, I, \Delta, \rho)$ où

- $Q = V \cup \{f\}$, où f sera un état dans lequel on boucle et où l'on accepte tout arbre;
- $A = \{0, 1, \perp\}$;
- $I = \{v_i\}$;
- ρ est étendue à f en posant $\rho(f) = 0$
- Δ est définie par:
  - $(f, x, f, f) \in \Delta$ pour tout $x \in A$;
  - $(v, 0, \tau_0(v), f) \in \Delta$ pour tout $v \in V_{\mathbf{E}}$

– $(v, 1, f, \tau_1(v)) \in \Delta$ pour tout $v \in V_{\mathbf{E}}$
– $(v, \perp, \tau_0(v), \tau_1(v))$ pour tout $v \in V_{\mathbf{A}}$

On a alors le résultat escompté:

THEOREM 3.6 *Eve gagne dans $\mathbb{G}$ depuis v_i si et seulement si $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$.*

Preuve. $L(\mathcal{A}) \neq \emptyset$ ssi Eve gagne depuis v_i dans le jeu $\mathbb{G}'$ donné par le Théorème 3.5. On construit donc $\mathbb{G}'$ et (miracle :-) on se rend compte qu'on retrouve (à quelques sommets intermédiaires inutiles) le jeu $\mathbb{G}$, ce qui termine la preuve. ■

3.3 Lemme de Rabin

On prouve enfin le résultat suivant dû à Rabin:

LEMMA 3.1 (Rabin'72) *La classe des langages réguliers d'arbres infinis est fermée par complémentaire.*

On se fixe pour le reste de la preuve un automate à parité $\mathcal{A} = (Q, A, I, \Delta, \rho)$ que l'on va complémenter. On peut toujours se ramener au cas où I est un singleton $\{q_i\}$.

On considère un arbre t et on lui associe un jeu $\mathbb{G}_{\mathcal{A},t}$ dans lequel Eve gagne ssi $t \in L(\mathcal{A})$. Le jeu $\mathbb{G}_{\mathcal{A},t}$ est une variante du jeu $\mathbb{G}$ que l'on avait utilisé pour le test du vide: la différence est qu'Eve ne choisit plus t mais se contente de choisir les transitions de l'automates $\mathcal{A}$. Dans ce jeu, Eve choisit une transition à appliquer à la racine, puis Adam choisit de vérifier le fils gauche ou le fils droit. Eve choisit alors la nouvelle transition puis Adam la direction et ainsi de suite.

Ainsi, les sommets d'Eve dans ce jeu sont des triplets de la forme $(u, t(u), q)$ où u est un nœud et $q \in Q$, et les sommets d'Adam sont de la forme $(u, t(u), (q, t(u), q_0, q_1))$ où $(q, t(u), q_0, q_1) \in \Delta$. Depuis un sommet $(u, t(u), q)$ Eve peut aller dans n'importe quel sommet $(u, t(u), (q, t(u), q_0, q_1))$ et depuis un sommet $(u, t(u), (q, t(u), q_0, q_1))$, Adam peut aller soit en $(u0, t(u0), q_0)$ soit en $(u1, t(u1), q_1)$. Seuls les sommets d'Eve sont colorés et leur couleur est donnée par la valeur de ρ sur leur troisième composante. Il est alors facile de voir que l'on a le résultat suivant.

PROPOSITION 3.4 *Eve gagne dans $\mathbb{G}_{\mathcal{A},t}$ depuis $(\varepsilon, t(\varepsilon), q_i)$ ssi $t \in L(\mathcal{A})$.*

Ainsi, complémenter un automate d'arbres infinis revient à montrer que l'on peut traduire la non-existence d'une stratégie gagnante pour Eve dans un jeu $\mathbb{G}_{\mathcal{A},t}$ comme l'existence d'une stratégie pour Eve dans un jeu $\mathbb{G}_{\mathcal{B},t}$ où $\mathcal{B}$ ne dépend que de $\mathcal{A}$ et surtout pas de t.

La preuve se fait en deux étapes:

1. On montre que si Eve n'a pas de stratégie gagnante dans $\mathbb{G}_{\mathcal{A},t}$ alors Adam en a une. De plus on montre que cette stratégie peut être choisie sans mémoire.

2. On convertit une stratégie pour Adam en une stratégie pour Eve dans un nouveau jeu

.

Le premier point revient à dire que les jeux de parité sur des graphes infinis sont positionnellement déterminés. Nous avons établi dans le premier chapitre de ce cours ce résultat pour les graphes finis et il s'étend sans problème au cadre infini (modulo une induction transfinie). On se concentre donc sur la seconde partie de la preuve.

On a l'équivalence suivante: $t \notin L(\mathcal{A})$ ssi Adam possède une stratégie gagnante sans mémoire dans $\mathbb{G}_{\mathcal{A},t}$ depuis $(\varepsilon, t(\varepsilon), q_i)$. Une telle stratégie est une fonction φ : $\{0,1\}^* \times A \times \Delta \to \{0,1\}$. On peut décomposer φ en $(\varphi_w)_{w \in \{0,1\}^*}$ avec $\varphi_w : A \times \Delta \to \{0,1\}$. L'ensemble $I = A \times \Delta \to \{0,1\}$ des instructions locales est fini, et on peut donc voir φ comme un arbre I-étiqueté s avec $s(w) = \varphi_w$ pour tout $w \in \{0,1\}^*$. Appelons $s \odot t$ l'arbre $(I \times A)$-étiqueté défini par $s \odot t(w) = (s(w), t(w))$.

Ainsi $t \notin L(\mathcal{A})$ équivaut à

> Il existe un arbre I-étiqueté s tel que pour toute suite $\tau = \tau_0\tau_1 \cdots \in \Delta^\omega$ de transitions choisies par Eve et pour toute (en fait pour l'unique) branche $\beta \in \{0,1\}^\omega$ déterminée par τ via la stratégie codée dans s, la suite d'états associée viole la condition de parité.

On introduit la notation suivante pour tout arbre C-étiqueté T et tout mot infini $\beta = \beta_1\beta_2 \cdots \in \{0,1\}^\omega$: on note $T|\beta \in C^\omega$ le mot $c_0c_1c_2 \cdots$ où $c_i = T(\beta_1 \cdots \beta_i)$. Ainsi, $T|\beta$ est le mot lu le long de la branche β dans l'arbre T.

On peut alors reformuler la propriété précédente:

(1) Il existe un arbre I-étiqueté s tel que $s \odot t$ satisfasse:

- (2) pour toute branche $\beta \in \{0,1\}^\omega$,
  - (3) pour toute suite $\tau = \tau_0\tau_1 \cdots \in \Delta^\omega$,
    - (4) si le mot $s|\beta \in (I = A \times \Delta \to \{0,1\})^\omega$ appliqué au mot $t|\beta \in A^\omega$ et au mot $\tau \in \Delta^\omega$ produit β alors la suite d'états induite par τ ne vérifie pas la condition de parité.

La propriété (4) est une propriété de mots infinis sur l'alphabet $I \times A \times \Delta \times \{0,1\}$ qui peut être trivialement testée par un automate déterministe de parité. Ce dernier est de plus indépendant de t. La propriété (3) est une propriété de mots infinis sur l'alphabet $I \times A \times \{0,1\}$ obtenue par une quantification universelle sur la propriété (4), et qui est donc reconnaissable par un automate déterministe de parité (via la déterminisation de ces automates). La propriété (2) est une propriété des arbres $(I \times A)$-étiquetés qui peut être testée par un automate d'arbre déterministe de parité qui teste la propriété (3) sur chaque branche (ceci est possible car on peut tester de façon déterministe la propriété (3)). Enfin, la propriété (1) peut être décidée par un automate d'arbres non déterministe de parité $\mathcal{B}$ qui devine s, construit $s \odot t$ à la volée et simule le test de la propriété (2) dessus.

Comme la propriété (4) est indépendante de t, il en va de même de $\mathcal{B}$. Enfin, $\mathcal{B}$ accepte un arbre t ssi $t \notin L(\mathcal{A})$, ce qui conclut la preuve.

Chapter 4

Jeux concurrents

Contents

Dans ce chapitre, on considère une généralisation des jeux précédemment étudiés dans laquelle les joueurs ne jouent plus à tour de rôle mais simultanément (d'où le nom jeux concurrents*). C'est la paire d'actions choisies par les joueurs, ainsi que l'état courant du jeu qui détermine le nouvel état. On montre alors que de nouveaux phénomènes peuvent se produire, en particulier que l'on a besoin de randomisation pour jouer de façon optimale et qu'il n'existe parfois pas de stratégie optimale. On se consacre principalement à des jeux munis de condition d'accessibilité.*

4.1 Histoires de boules de neige

4.1.1 Première version

Deux joueurs, que nous appellerons *joueur* 1 et *joueur* 2, jouent au jeu suivant. Le joueur 1 dispose d'un nombre infini de boule de neige. Le joueur 2 est bien au chaud dans sa cabane qui contient deux fenêtre (voir la Figure 4.1 dont la paternité revient à L. de Alfaro, T. Henzinger et O. Kupferman — mes talents de dessinateur étant ce qu'ils sont).

Le joueur 1 veut atteindre le joueur 2 avec une boule de neige (sans doute pour lui voler sa place au chaud). Toutes les heures, lors du premier son de cloche, le deuxième

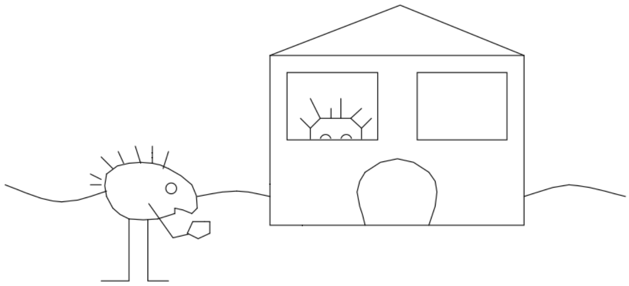


Figure 4.1: Jeux de la boule de neige: première version

joueur se montre à la fenêtre et le second joueur lance **simultanément** une boule de neige vers l'une des deux ouvertures. Ce dernier ne sait donc pas où va se montre le joueur 2 qui lui ne sait pas vers quelle fenêtre le premier joueur va lancer sa boule. Le jeu continu *ad vitam eternam* sauf si le premier joueur touche son adversaire auquel cas la partie s'arrête et est remportée par le premier joueur.

Restons pour l'instant informel. Une stratégie est une fonction qui considère l'historique le la partie (ici le nombre de boules de neige déjà lancé) et donne le prochain coup à jouer (ici lancer/se montrer à gauche/à droite). Une paire de stratégie induit une unique partie dans le jeu. Une stratégie est gagnante pour un joueur si et seulement si toute partie où se joueur respecte cette stratégie est gagnante.

Dans le jeu précédent nous prétendons la chose suivante: aucun des joueurs ne possède de stratégie gagnante. En effet, pour toute stratégie du premier joueur, la stratégie du deuxième joueur qui consiste à jouer le contraire de son adversaire est une stratégie gagnante pour le deuxième joueur: le joueur 1 ne possède donc pas de stratégie gagnante. De même toute stratégie du joueur 2 est trivialement perdante, car la stratégie du joueur 1 qui choisi de jouer comme lui au premier coup est gagnante pour le joueur 1: le joueur 2 n'a donc pas de stratégie gagnante.

Les stratégies précédentes sont *déterministe* en ce sens qu'elles donnent un unique coup à chaque joueur. On peut alors considérer une classe plus générale de stratégies: les **stratégies randomisées**. Une stratégie randomisée est une fonction qui à toute partie partielle associe une distribution de probabilité sur les actions possibles du joueur. Un exemple de stratégie randomisée pour le joueur 1 est la stratégie qui consiste à tirer à gauche avec probabilité $1/2$ et à droite avec probabilité $1/2$. Une paire de stratégies randomisées va définir cette fois non plus une unique partie, mais un ensemble de parties, ensemble qui peut être muni d'une mesure de probabilité (au sens classique de la théorie de la mesure). Sans entrer dès maintenant dans les détails techniques, nous dirons qu'une stratégie est **presque sûrement gagnante** si, contre toute stratégie de l'adversaire, l'ensemble des parties gagnantes est de mesure 1 (*i.e.* la probabilité qu'une partie soit gagnante est 1).

La stratégie du joueur 1 qui consiste à jouer avec equiprobabilité gauche ou droite est presque sûrement gagnante. En effet, la probabilité que le joueur 2 ne soit pas touché lors des k premiers tours est de $(1/2)^k$. Comme $\sum_{k\geq 0}(1/2)^k < \infty$, le Lemme de Borel-Cantelli implique que la probabilité que le joueur 2 ne soit jamais touché est

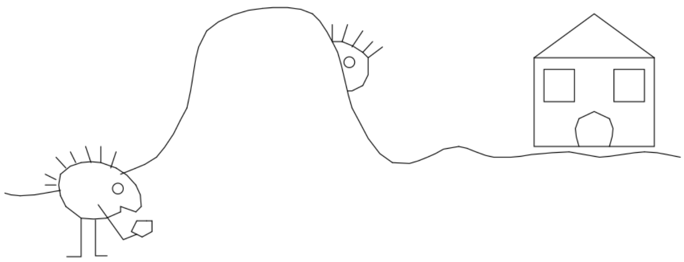


Figure 4.2: Jeux de la boule de neige: seconde version

nulle[1].

Une **stratégie sûrement gagnante** pour un joueur est une stratégie (possiblement randomisée) qui est telle que toute partie où le joueur la respecte est gagnante pour ce dernier. En particulier, une stratégie sûrement gagnante est presque sûrement gagnante. Il est facile de voir qu'il n'existe pas de stratégie sûrement gagnante pour le joueur 1 dans le jeu précédent. En effet, la stratégie du joueur 2 qui joue de façon equiprobable gauche ou droite induit des parties perdantes pour le joueur 1 quelle que soit la stratégie que ce dernier suit (bien sûr, cet ensemble peut être de mesure nulle).

4.1.2 Seconde version

On considère cette fois un nouveau jeu (illustré par la Figure 4.2). Cette fois le joueur 1 est caché derrière une bute, tandis que le joueur 2 tiens une boule de neige dans la main. Le dégel approchant, ce dernier n'a pas d'autres munitions. Le but du joueur 1 est d'aller dans la maison, le but du joueur 2 est de le toucher lorsqu'il va vers cette dernière. A chaque tour de jeu, les joueurs font les choix suivants: le joueur 1 peut rester cacher ou courir vers la maison; le joueur 2 peut attendre ou tirer. Le joueur 1 gagne s'il atteint la maison sans se faire toucher. Bien sûr si le joueur 2 tire dans le vide, le joueur 1 gagne car son adversaire ne peut plus l'atteindre (il n'a qu'une seule boule de neige).

Le joueur 1 ne possède pas de stratégie presque sûrement gagnante dans ce jeu. En effet, une stratégie pour le joueur 1 est une fonction qui associe à tout entier k (le nombre de tours joués) une probabilité de courir. Une stratégie presque sûrement gagnante φ doit être telle qu'il existe $k \geq 0$ avec $\varphi(k)(courir) = \varepsilon > 0$ (sinon, le joueur 1 ne sortira jamais et perdra sûrement). Soit le plus petit k possédant cette propriété. Considérons alors la stratégie (déterministe) ψ du joueur 2 qui est définie par $\psi(i) = attend$ si $i < k$ et $\psi(k) = tire$. Alors si le joueur 1 suit la stratégie φ et le joueur 2 la stratégie 1, la probabilité que le joueur 1 gagne est de $1 - \varepsilon < 1$, et φ n'est donc pas presque sûrement gagnante.

Cependant, le joueur 1 peut assurer de gagner avec probabilité $1-\varepsilon$ pour tout $\varepsilon > 0$. Plus précisément, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une stratégie φ_ε telle que si le joueur 1 joue selon ε, il gagne (contre toute stratégie du joueur 2) avec probabilité au moins $1 - \varepsilon$.

[1] **Lemme de Borel-Cantelli.** Si la somme des probabilités d'une suite $(A_i)_{i\geq 0}$ d'événements d'un espace probabilisé est finie, alors la probabilité qu'une infinité d'entre eux se réalisent simultanément est nulle

Une telle famille de stratégies $(\varphi_\varepsilon)_{\varepsilon\in]0,1]}$ est qualifiée de **stratégies sûrement gagnantes à la limite**. Dans notre exemple une telle famille est donnée en définissant la stratégie $\varphi_{epsilon}$ comme la stratégie où le joueur 1 court avec probabilité ε (plus ε va devenir petit, plus ce sera dur pour le joueur 2 de deviner quand le joueur 1 va courir).

Prouvons que la stratégie φ_ε à la propriété voulue. Pour cela, on note ψ une contre-stratégie du joueur 2, que l'on peut en fait décrire comme une suite $(\psi(i))_{i\geq 1}$ donnant la probabilité que le joueur 2 attende à l'étape i sachant que rien ne s'est passé lors des $(i-1)$ coups précédents. La probabilité que le joueur 2 atteigne le joueur 1 au $k+1$-ème tour de jeu est donc: $(1-\varepsilon)^k\varepsilon\psi(1)\psi(2)\cdots\psi(k)(1-\psi(k+1)) \leq \varepsilon\psi(1)\psi(2)\cdots\psi(k)(1-\psi(k+1))$. Soit P, la probabilité que le joueur 2 atteigne un jour le joueur 1. On a alors $P \leq \displaystyle\sum_{k=0}^{\infty}\varepsilon\psi(1)\psi(2)\cdots\psi(k)(1-\psi(k+1)) = \varepsilon\psi(1) \leq \varepsilon$. Le joueur 2 gagne s'il touche un jour le joueur 1 ou si ce dernier ne bouge jamais. Or la probabilité de ce dernier événement est nulle (application directe du lemme de Borel-Cantelli). Ainsi la probabilité que le joueur 2 gagne est inférieur ou égale à ε, et le joueur 1 gagne donc bien avec probabilité au moins égale à $1-\varepsilon$.

4.1.3 Conclusion

On a donc trois phénomènes distincts: un joueur peu gagner de façon sûre, presque sûre ou sûre à la limite. Les inclusions entre ces trois situations sont strictes.

4.2 Définitions formelles

4.2.1 Arène, jeux

Une **distribution de probabilité** sur un ensemble fini A est une application $p : A \to [0,1]$ telle que $\sum_{a\in A} p(a) = 1$. On note $\mathcal{D}(A)$ l'ensemble des distributions de probabilités sur A.

Une **arène concurrente** $\mathcal{G} = (S, \Gamma_1, \Gamma_2, \delta)$ est un quadruplet tel que:

- S est un ensemble fini d'états;
- Γ_1 et Γ_2 sont des ensembles finis d'actions;
- $\delta : S \times \Gamma_1 \times \Gamma_2 \to S$ est une fonction (totale) de transition.

Une partie dans l'arène $\mathcal{G}$ depuis un état initial s_0 se déroule de la façon suivante: le joueur 1 choisit une action $\gamma_1 \in \Gamma_1$ et indépendamment et simultanément le joueur 2 choisit une action $\gamma_2 \in \Gamma_2$. Le nouvel état du jeu est alors $s_1 = \delta(s_0, \gamma_1, \gamma_2)$, et la partie continue depuis cet état.

Un jeu concurrent d'accessibilité est un triplet $\mathbb{G} = (\mathcal{G}, s_0, F)$ où $\mathcal{G}$ est une arène concurrente, s_0 est un état initial dans l'arène et F est un sous-ensemble d'états finaux de l'arène. Une partie dans $\mathbb{G}$ est reportée par le premier joueur si et seulement si un état de F est un jour visité.

4.2.2 Stratégie

Une **stratégie** pour le joueur $i \in \{1,2\}$ est une fonction $\varphi_i : S^+ \to \mathcal{D}(\Gamma)_i)$ qui associe à toute partie partielle une distribution sur les actions du joueur i.

Etant donné un état initial et une paire de stratégie (φ_1, φ_2) on obtient un processus stochastique. Plus précisément, on définit $Paths(s, \varphi_1, \varphi_2)$ comme l'ensemble des chemins

$$Paths(s, \varphi_1, \varphi_2) = \{s_0 s_1 s_2 \cdots \mid \forall j \geq 0,\ \exists \gamma_1, \gamma_2,\ \text{t.q. } \varphi_i(s_0 \cdots s_j)(\gamma_i) > 0,\ i = 1,2 \text{ et } \delta(s_j, \gamma_1, \gamma_2) = s_{j+1}\}$$

La probabilité de tout événement mesurable est alors uniquement déterminée (la mesure de probabilité est ici l'unique extension de la mesure de probabilité définie de façon naturelle sur les ensembles de chemins partageant un même segment initial).

Il est à noter que l'ensemble des parties gagnantes $\Omega = S^* F S^\omega$ est un ensemble mesurable. Pour toute paire de stratégies (φ_1, φ_2) on notera $Pr_s^{\varphi_1,\varphi_2}(\Omega)$ la probabilité que le joueur 1 gagne une partie débutant en s où elle suit sa stratégie φ_1 tandis que le second joueur suit la stratégie φ_2.

Une stratégie φ_1 du joueur 1 est **sûrement gagnante** si l'on a $Paths(s, \varphi_1, \varphi_2) \subseteq \Omega$ pour toute stratégie φ_2 du joueur 2. On dira alors que s est une position **sûrement gagnante pour le joueur** 1.

Une stratégie φ_1 du joueur 1 est **presque sûrement gagnante** si l'on a $Pr_s^{\varphi_1,\varphi_2}(\Omega) = 1$ pour toute stratégie φ_2 du joueur 2. On dira alors que s est une position **presque sûrement gagnante pour le joueur** 1.

Une famille de stratégies (φ_1^ε) du joueur 1 est **sûrement gagnante à la limite** si l'on a pour tout $Pr_s^{\varphi_1^\varepsilon,\varphi_2}(\Omega) \geq 1 - \varepsilon$ pour toute stratégie φ_2 du joueur 2 et pour tout $\varepsilon > 0$. On dira alors que s est une position **sûrement gagnante à la limite pour le joueur** 1.

4.3 Calculer les états sûrement gagnants

On se fixe une arène concurrente $\mathcal{G} = (S, \Gamma_1, \Gamma_2, \delta)$, et un ensemble d'états finaux $F \subseteq S$. On souhaite déterminer l'ensemble $Sure(F) \subseteq S$ depuis lesquels le joueur 1 gagne de façon sûre.

On commence par quelques définitions.

On définit $Pre_1 : 2^S \to 2^S$ en posant

$$Pre_1(U) = \{s \in S \mid \exists \gamma_1 \in \Gamma_1 \forall \gamma_2 \in \Gamma_2,\ \delta(s, \gamma_1, \gamma_2) \in U\}$$

Pre_1 donne l'ensemble des états depuis lesquels 1 est sûr d'atteindre U en un coup. On définit Pre_2 de façon symétrique.

On définit $Stay_1 : 2^S \to (S \to \Gamma_1)$ en posant

$$Stay_1(U)(s) = \{\gamma_1 \in \Gamma_1 \mid \forall \gamma_2 \in \Gamma_2,\ \delta(s, \gamma_1, \gamma_2) \in U\}$$

$Stay_1$ donne donc pour chaque état le plus grand sous-ensemble d'actions qui assure de rester dans u au moins un coup. On définit $Stay_2$ de façon symétrique.

On a alors le résultat suivant:

THEOREM 4.1 *L'ensemble $Sure(F)$ est égal au plus petit sous ensemble $U \subseteq S$ tel que $F \subseteq U$ et $Pre_1(U) \subseteq U$. En d'autre termes, $Sure(F)$ est la limite de la suite (croissante et bornée) définie par $U_0 = F$ et $U_{k+1} = U_k \cup Pre_1(U)$.*

De plus le joueur 1 possède une stratégie positionelle déterministe pour gagner sûrement depuis $Sure(F)$. Le joueur 2 possède une stratégie positionelle randomisée pour empêcher le joueur 1 de gagner sûrement depuis $S \setminus Sure(F)$ et en général une stratégie déterministe ne lui suffit pas.

Preuve. Soit $U_0, \cdots U_m$ les valeurs successives de la suite avant stabilisation. On définit $h : U_m \setminus F \to \mathbb{N}$ en posant $h(s) = \min\{j \mid s \in U_j\}$. On définit alors une stratégie positionelle déterministe φ_1 pour le joueur 1 en posant $\varphi_1(s) = \gamma_1$ où l'on prend pour γ_1 un élément quelconque de $Stay_1(U_{h(s)-1})(s)$, ensemble qui est non vide par définition de $h(s)$ et de la suite $(U_i)_{i\geq 0}$.

Il est alors immédiat de vérifier qu'une partie débutant dans $Sure(F)$ où le joueur 1 respecte φ_1 va être telle que la suite des valeurs de h dans les états visité va décroître strictement jusqu'à ce que l'on visite un état final. On a donc bien que $U_m \subseteq Sure(F)$.

Considérons maintenant un état $s \notin U_m$. On a alors que pour tout $\gamma_1 \in \Gamma_1$, il existe $\gamma_2 \in \Gamma_2$ tel que $\delta(s, \gamma_1, \gamma_2) \notin U_m$. On considère alors la stratégie φ_2 du joueur 2 qui joue de façon équiprobable depuis n'importe quel état n'importe quelle action. Cette stratégie est clairement une contre-stratégie pour l'objectif de gagner sûrement contre toute stratégie du joueur 1.

Pour voir qu'il faut en général de la randomisation pour le joueur 2, il suffit simplement de considérer le premier jeu de la boule de neige. ■

4.4 Calculer les états presque sûrement gagnants

On se fixe une arène concurrente $\mathcal{G} = (S, \Gamma_1, \Gamma_2, \delta)$, et un ensemble d'états finaux $F \subseteq S$. On souhaite déterminer l'ensemble $Almost(F) \subseteq S$ depuis lesquels le joueur 1 gagne presque sûrement.

On commence par quelques définitions, certaines généralisant celles vues dans le cas précédent. Une **sous-assignation de coups** pour le joueur i est une application $\pi : S \to 2^{\Gamma_i}$. On note Δ_i l'ensembles des sous-assignations de coups pour le joueur i, et on notera Γ_1 et Γ_2 les sous assignations constantes valant respectivement Γ_1 et Γ_2. On dira qu'une stratégie φ est conforme à une sous-assignation π si et seulement si elle donne des coups toujours en accord avec la sous-assignation: $\varphi(s_0 \cdots s_n)(\gamma) > 0 \Rightarrow \pi(s_n)(\gamma) > 0$.

On définit $Pre_1 : 2^S \times \Delta_1 \times \Delta_2 \to 2^S$ en posant

$$Pre_1(U, \pi_1, \pi_2) = \{s \in S \mid \exists \gamma_1 \in \pi_1(s) \forall \gamma_2 \in \pi_2(s),\ \delta(s, \gamma_1, \gamma_2) \in U\}$$

Pre_1 donne l'ensemble des états depuis lesquels 1 est sûr d'atteindre U en un coup (si l'on restreint les mouvements des joueurs selon π_1 et π_2). On définit Pre_2 de façon symétrique.

On définit $Stay_1 : 2^S \times \Delta_1 \times \Delta_2 \to \Delta_1$ en posant

$$Stay_1(U, \pi_1, \pi_2)(s) = \{\gamma_1 \in \pi_1(s) \mid \forall \gamma_2 \in \pi_2(s),\ \delta(s, \gamma_1, \gamma_2) \in U\}$$

$Stay_1$ donne donc la plus grande sous-assignation de coups qui assure de rester dans u au moins un coup. On définit $Stay_2$ de façon symétrique.

Enfin, pour $i = 1, 2$, on définit, $Safe_i : 2^S \times \Delta_1 \times \Delta_2 \to 2^S$ en définissant $Safe_i(U, \pi_1, \pi_2)$ comme le plus grand sous-ensemble $V \subseteq U$ tel que $V \subseteq Pre_i(V, \pi_1, \pi_2)$. En d'autres termes, $Safe_i(U, \pi_1, \pi_2)$ est le plus grand sous-ensemble de U que le joueur i peut assurer de ne jamais quitter (si tant est que les joueurs jouent des coups autorisés par π_1 et π_2 respectivement).

L'ensemble $Safe_i(U, \pi_1, \pi_2)$ peut être calculé en considérant la limite de la suite (décroissante bornée) définie par $V_0 = U$ et $V_{k+1} = V_k \cap Pre_i(V_k, \pi_1\pi_2)$. La validité de cet algorithme est triviale.

On commence par un lemme technique utile dans la suite.

LEMMA 4.1 *Soient π_1 et π_2 deux sous assignations du joueur 1 et 2 non bloquants (c'est à dire que $\pi_i(s) \neq \emptyset$, pour tout $i = 1, 2$ et tout $s \in S$). Soit φ_2 la stratégie sans mémoire du joueur 2 qui consiste à choisir uniformément un coup dans $\pi_2(s)$ pour tout s. Pour tout $U \subseteq S$, soit $V = Safe_1(U, \pi_1, \pi_2)$. On a alors:*

1. *Il existe $\varepsilon > 0$, il existe $k \geq 0$ tel que pour tout $s \in U \setminus V$ et pour toute stratégie φ_1 du joueur 1 conforme avec π_1:*

$$Pr_s^{\varphi_1,\varphi_2}(\text{"la partie sort de } U \text{ lors des } k \text{ premier coups"}) \geq \varepsilon$$

2. *Si $V = \emptyset$, $Pr_s^{\varphi_1,\varphi_2}(\text{"La partie sort un jour de } U\text{"}) = 1$ pour tout $s \in U$ et toute stratégie φ_1 du joueur 1 conforme avec π_1.*

Proof.

Une fois fixée la stratégie φ_2, on obtient ce qui est communément appelée un processus de décision Markovien. Pour voir que l'on a bien le résultat voulu, il suffit de considérer la manière dont V est définie en terme de limite de suite décroissante. Prenons pour k le nombre d'itérations de la suite précédente avant stabilisation. La preuve de premier point est alors facile en raisonnant par inductions sur le nombre d'itérations nécessaires avant de sortir s de la suite (si ce nombre vaut $i + 1$, il y a une probabilité non nulle que l'on commence par aller dans un état de rang i, et on conclut par induction). La valeur de ε est obtenu en prenant la plus petite valeur obtenue précédemment pour tous les s.

Le deuxième point peut être obtenu en utilisant le Lemme de Borel-Cantelli par exemple. ■

Etant donné un sous-ensemble $U \subseteq S$, on notera $\theta_1^U = Stay_1(U, \Gamma_1, \Gamma_2)$ la sous-assignation du joueur 1 qui lui assure de rester dans U pour un coup.

On a alors le résultat suivant:

THEOREM 4.2 *L'ensemble $Almost(F)$ des états presque sûrement gagnants pour le joueur 1 est égal au plus grand ensemble $U \subseteq S$ tel que*

$$Safe_1(U, \Gamma_1, \Gamma_2) = U, \qquad Safe_2(U \setminus F, \theta_1^U, \Gamma_2) = \emptyset$$

L'ensemble $Almost(F)$ est la limite de la suite (décroissante et bornée) $(U_i)_{i\geq 0}$ définie en posant $U_0 = S$, $\pi_0 = \Gamma_1$ et pour tout $k \geq 0$

$$\begin{cases} C_k = Safe_2(U_k \setminus F, \pi_k, \Gamma_2) \\ U_{k+1} = Safe_1(U_k \setminus C_k, \pi_k, \Gamma_2) \\ \pi_{k+1} = Stay_1(U_{k+1}, \pi_k, \Gamma_2) \end{cases}$$

Concernant les stratégies on a les faits suivants:

- *Le joueur* 1 *possède une stratégie sans mémoire presque sûrement gagnante. Cette dernière est randomisée, ce qui est en général inévitable.*

- *Le joueur* 2 *possède une contre-stratégie qui dépend du passé de la partie, point qui ne peut en général être évité* (i.e. *il n'y a pas de stratégie à mémoire finie)*

La preuve occupe le reste de la section.

Commençons par un peu d'intuition sur les suites définies dans l'énoncé du théorème précédent. L'ensemble C_0 est le plus grand sous ensemble de $S \setminus F$ dans lequel le joueur 2 peut confiner une partie. Il est donc à éviter absolument par le joueur 1: depuis un état d'où C_0 peut être atteint avec probabilité non nulle, le joueur 1 ne pourra pas gagner le jeu d'accessibilité avec probabilité 1. L'ensemble U_1 est le plus grand sous-ensemble depuis lequel le joueur 1 peut éviter d'atteindre C_0, et π_1 est la sous-assignation maximale que le joueur 1 doit utiliser pour garantir de rester dans U_1 (notez qu'il n'y a pas de raison pour que $U_0 = U_1 \cup C_0$: le cas typique d'un sommet qui est ni dans U_1 ni dans C_0 est celui d'un sommet où pour toute action du joueur 1 le joueur 2 a une réponse qui conduit dans C_0 et réciproquement pour tout action du joueur 2, le joueur 1 a une action qui conduit dans U_1). Comme cette dernière a restreint les coups du joueur 1, il se peut que le joueur 2 puisse confiner la partie dans un nouveau sous-ensemble de U_1: ce dernier (dans sa version maximale) est donné par C_1. U_2 est alors le plus grand ensemble depuis lequel le joueur 1 peut éviter d'arriver dans C_1 et $\pi_2 \subseteq \pi_1$ garantit de ne jamais quitter U_2. À la fin du calcul, étape que l'on notera m, on a:

- Si le joueur 1 ne joue des coups que dans π_m, la partie ne quittera jamais U_m

- Le joueur 2 ne peut confiner la partie dans $U_m \setminus F$ si le joueur 1 ne choisit que des coups de π_m.

On commence par prouver que $U_m \subseteq Almost(F)$. On définit la stratégie φ_1^* du joueur 1 comme la stratégie sans mémoire qui choisit uniformément un coup de $\pi_m(s)$ pour les états dans U_m et joue uniformément un coup de Γ_1 sinon. Cette stratégie est presque sûrement gagnante sur U_m. En effet, on a $Safe_2(U_m \setminus F, \pi_m, \Gamma_2) = \emptyset$. Le second point du Lemme 4.1 nous permet de conclure que depuis tout état s, on va presque sûrement sortir de $U_m \setminus F$ si le joueur 1 respecte φ_1^*. Or si le joueur 1 joue selon φ_1, on est aussi assuré de ne sortir jamais de U_m: la partie va donc presque sûrement visiter F et donc sera gagnante.

On s'intéresse à la réciproque. Pour cela, on va donner une contre-stratégie du joueur 2 depuis les positions qui ne sont pas dans U_m. On définit pour cela une stratégie φ_2^* comme suit. Soit $(\eta_j)_{j\geq 0}$ une suite infinie de réels tels que $0 < \eta_j < 1$ pour tout $j \geq 0$ et $\prod_{j=0}^{\infty} \eta_j = 1/2$[2]

On définit la stratégie comme suit:

- Dans un sommet $s \in C_i$, le coup donné par φ_2^* dépend du nombre de coups l déjà joués:
  - avec probabilité η_l, la stratégie joue uniformément une action de $Stay_2(C_i, \pi_i, \Gamma_2)(s)$;

[2]Une telle suite est facile à définir. Il suffit par exemple de poser $\eta_j = (\frac{1}{2})^{\frac{1}{2^{j+1}}}$

  - avec probabilité $1 - \eta_l$, la stratégie joue uniformément une action de Γ_2

- Pour un sommet $s \notin \bigcup_{i=0}^{m-1} C_i$ la stratégie joue uniformément une action de Γ_2

On prouve maintenant que pour tout $s \notin U_m$ et pour toute stratégie φ_1 du joueur 1, on a $Pr_s^{\varphi_1,\varphi_2^*}(\Omega) < 1$ (où $\Omega = S^*FS^\omega$), c'est à dire que φ_2^* est une contre-stratégie contre toute stratégie du joueur 1 pour l'objectif "gagner presque sûrement le jeu d'accessibilité".

Soit $s \notin U_m$. On considère i tel que $s \in U_i \setminus U_{i+1}$ et on prouve le résultat par induction sur i. Soit une stratégie φ_1 du joueur 1. On va distinguer deux cas selon que l'on a $s \in C_i$ ou $s \in U_i \setminus (C_i \cup U_{i+1})$.

- Supposons que $s \in C_i$. Soit A_i l'événement *le joueur A choisit une action contradictoire avec π_i alors qu'il était encore dans C_i*. Plus formellement:

  $$A_i = \{s_0 s_1 \cdots \mid \exists k \geq 0 \text{ t.q. } s_j \in C_i \, \forall j \leq k \text{ et } \exists \gamma_1 \notin \pi_i(s_k) \text{ et } \varphi_1(s_0 \cdots s_k)(\gamma_1) > 0\}$$

  Supposons que l'on a $Pr_s^{\varphi_1,\varphi_2^*}(A_i) > 0$ (notez ici que l'on a forcément $i > 0$ car $\pi_0 = \Gamma_1$). Il existe donc un préfixe de partie $s_0 \cdots s_k$ tel que $Pr_s^{\varphi_1,\varphi_2^*}(s_0 \cdots s_k S^\omega) > 0$ et $\varphi_1(s_0 \cdots s_k)(\gamma_1) > 0$ pour une action $\gamma_1 \notin \pi_i(s_k)$. De plus après avoir joué $s_0 \cdots s_k$ si le joueur 1 joue selon φ_1 et le joueur 2 selon φ_2^*, il y a une probabilité non nulle de sortir de U_i. Dès lors depuis s, il y a une probabilité non nulle de quitter U_i et l'hypothèse d'induction termine la preuve dans ce sous cas.

  Supposons maintenant que l'on a $Pr_s^{\varphi_1,\varphi_2^*}(A_i) = 0$. Soit $\mathcal{C}_i$ l'événement C_i^ω (*i.e.* la partie est confinée dans C_i). Comme $Pr_s^{\varphi_1,\varphi_2^*}(A_i) = 0$, tant que la partie est dans C_i, le joueur 1 choisit toujours un coup conforme à π_i. On a donc $Pr_s^{\varphi_1,\varphi_2^*}(\mathcal{C}_i) \geq Pr_s^{\varphi_1,\varphi_2^*}($"à tout moment φ_2^* donne un coup conforme à $Stay_2(C_i, \pi_i, \Gamma_2)$"$) = \prod_{j=0}^{\infty} \eta_j = 1/2$. Ainsi, avec probabilité non nulle la partie restera confinée dans C_i et ne visitera donc pas F. Notez que ce cas est aussi une instance particulière de l'initialisation de l'induction (on n'utilise pas d'hypothèse d'induction dans le deuxième sous-cas et le premier sous-cas ne peut être vrai si $i = 0$).

- Supposons maintenant que $s \in U_i \setminus (U_{i+1} \cup C_i)$. La stratégie φ_2^* joue de façon uniformément randomisée n'importe quel coup de Γ_2 tant que l'on est dans $U_i \setminus (U_{i+1} \cup C_i)$. Or $U_{i+1} = Safe_1(U_i \setminus C_i, \pi_i, \Gamma_2) = Safe_1(U_i \setminus C_i, \Gamma_1, \Gamma_2)$ (la dernière égalité vient du fait que pour rester dans U_i le joueur 1 doit respecter π_i: ainsi lui autoriser Γ_i en entier ne l'aide pas), et on est donc dans le cadre du Lemme 4.1. On en déduit donc que $Pr_s^{\varphi_1,\varphi_2^*}($la partie sort un jour de $U_i \setminus C_i) > 0$. Ainsi avec probabilité non nulle on va arriver soit dans C_i (et on conclut alors avec le cas précédent) soit dans U_j avec $j < i$ (et on conclut alors par induction). Notez que le deuxième cas n'est pas possible si $i = 0$. On a donc bien réglé aussi le cas de l'initialisation.

On a donc bien comme annoncé que $Almost(F) = U_m$.

Contents