

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)

“华为杯”第十三届全国研究生  
数学建模竞赛

学 校	东南大学
参赛队号	10286212
队员姓名	1. 季程
	2. 郝志强
	3. 张冬明

参赛密码 \_\_\_\_\_  
(由组委会填写)



## “华为杯”第十三届全国研究生 数学建模竞赛

题 目                      多无人机协同任务规划模型研究

### 摘                      要：

无人机是一种具备自主飞行和独立执行任务能力的新型作战平台，题中共有三种无人机 FY-1，FY-2 和 FY-3，搭载不同的载荷后能执行的任务种类包括目标侦查、目标指示、通信中继和对地攻击，无人机有固定的巡航速度和续航时间。现需要对 10 个群组执行侦查和打击任务，在保证无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的时间总和最小的情况下，拟定无人机的最佳路线和调度策略。

为完成问题（1）对 10 个群组执行侦察的任务，共使用三架 FY-1，调度方式为：第一架 FY-1 标记为 FY-1-A，搭载 S-1 载荷，侦查目标依次为 A03，A09，A08，A02，A01，出发和降落基地为 P01；第二架 FY-1 标记为 FY-1-B，搭载 S-1 载荷，侦查目标依次为 A06，A05，A07，A10，A04，出发和降落基地为 P07；另一架 FY-1 标记为 FY-1-C，搭载 S-2 载荷，侦查目标依次为 A06，A05，A07，A10，A04，A03，A09，A08，A02，A01，出发和降落基地为 P01。三架 FY-1 的起飞时间满足：将 FY-1-C 的起飞时刻标记为 0，则 FY-1-A 的起飞时刻应在-6.9h 至+1.1h 之间，FY-1-B 的起飞时刻应在-4.45h 至 1.1h 之间。无人机滞留防御方雷达内的时间总和为 12.9h。

对于问题（2），为完成问题（1）中的侦察任务，至少需安排 3 架 FY-2 型通

信中继无人机。

为完成问题（3）对所有地面目标的轰炸任务，首先对 10 个雷达进行攻击，出动 4 架 FY-3 载满 D-2 炸弹，8 架 FY-1 搭载 S-3 载荷，4 架 FY-3 载满 D-1 炸弹；当所有雷达目标被炸毁后，47 架 FY-3 立刻对普通目标执行轰炸，其中 30 架每架搭载 6 枚 D-1 炸弹，17 架每架搭载 6 枚 D-2 炸弹。攻击方的无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的时间总和为 4.3h。

问题（4）中新增了 3 个远程雷达，对于（3）中的方案，当远程雷达依次工作时，其周边一定存在一架 FY-3 和一架 FY-1，可完成对远程雷达点的轰炸，并且弹药量足够完成其原有的任务。所以问题（3）中的解决方案完全可以解决问题（4）中的情况。

问题（5），在解决第一个问题的过程中，我们选用的算法为两步渐进算法，即算法第一步确定大的集群（A01-A10）的排序，第二步算法则确定每个集群内小点的排序；在解决第二个问题的过程中，需要实时求出 3 架 FY-1 的坐标以判断它们之间的距离，求解坐标的过程采用了微小步长仿真算法；在解决三、四问的过程中，首先需要根据邻接矩阵将 10 个集群进行分组，每组有 1-2 个集群，之后对分组后的每一组求解雷达时间，由于存在公共区域问题，所以具体雷达时间的求解仍需要借助微小步长仿真算法。根据本文中构建的数学模型和对模型的解析结果，可显著提高无人机的作战能力的参数包括：提高无人机巡航速度；增大 S-1 载荷的成像带宽；增大拍照范围；增大 S-3 的引导距离；增大 D-2 炸弹的飞行速度；增大续航时间；实现一架无人机加载多种载荷；研发无人机的隐形技术。

关键字：无人机；调度策略；目标规划；分步优化算法；

## 目录

1. 问题重述.....	- 5 -
2. 问题的分析.....	- 6 -
3. 模型的假设.....	- 8 -
4. 符号的说明.....	- 8 -
5. 问题（1）解决方案.....	- 9 -
5.1 问题分析.....	- 9 -
5.2 成像任务建模.....	- 9 -
5.2.1 遍历顺序.....	- 10 -
5.2.2 $M=1$ ，仅出动一架无人机.....	- 11 -
5.2.3 $M=2$ ，出动两架无人机.....	- 14 -
5.3 拍照任务建模.....	- 17 -
5.3.1 $N=1$ ，出动一架无人机.....	- 18 -
5.4 起飞时间规划.....	- 20 -
5.5 小结.....	- 21 -
6. 问题（2）解决方案.....	- 22 -
6.1 问题分析.....	- 22 -
6.2 $K=1$ ，出动 1 架 FY-2.....	- 23 -
6.3 $K=2$ ，出动 2 架 FY-2.....	- 24 -
6.4 $K=3$ ，出动 3 架 FY-3.....	- 24 -
6.5 小结.....	- 25 -
7. 问题（3）解决方案.....	- 25 -
7.1 问题分析.....	- 25 -
7.2 模型 1：所有雷达均用 D-1 炸弹炸毁.....	- 29 -
7.3 模型 2：雷达用 D-1 和 D-2 混合炸毁.....	- 30 -
7.3 小结.....	- 33 -
8. 问题（4）解决方案.....	- 34 -
8.1 问题分析.....	- 34 -
8.2 远程雷达优先打击.....	- 35 -
8.3 基于模型 2 的打击方式.....	- 35 -
8.4 小结.....	- 36 -
9. 算法分析与实战建议.....	- 36 -
9.1 模型算法复杂度分析以及效率的提高.....	- 36 -
9.2 提升无人机作战能力的技术参数.....	- 37 -
参考文献.....	- 38 -
附录.....	- 39 -

## 1. 问题重述

无人机（Unmanned Aerial Vehicle, UAV）是一种具备自主飞行和独立执行任务能力的新型作战平台，不仅能够执行军事侦察、监视、搜索、目标指向等非攻击性任务，而且还能够执行对地攻击和目标轰炸等作战任务。随着无人机技术的快速发展，越来越多的无人机将应用在未来战场。

某无人机作战部队现配属有 P01~P07 等 7 个无人机基地，各基地均配备一定数量的 FY 系列无人机。其中 FY-1 型无人机主要担任目标侦察和目标指示，FY-2 型无人机主要担任通信中继，FY-3 型无人机用于对地攻击。FY-1 型无人机的巡航飞行速度为 200km/h，最长巡航时间为 10h，巡航飞行高度为 1500m；FY-2 型、FY-3 型无人机的巡航飞行速度为 300km/h，最长巡航时间为 8h，巡航飞行高度为 5000m。受燃料限制，无人机在飞行过程中尽可能减少转弯、爬升、俯冲等机动动作，一般来说，机动时消耗的燃料是巡航的 2~4 倍。最小转弯半径 70m。

FY-1 型无人机可加载 S-1、S-2、S-3 三种载荷。其中载荷 S-1 系成像传感器，采用广域搜索模式对目标进行成像，传感器的成像带宽为 2km；载荷 S-2 系光学传感器，为达到一定的目标识别精度，对地面目标拍照时要求距目标的距离不超过 7.5km，可瞬时完成拍照任务；载荷 S-3 系目标指示器，为制导炸弹提供目标指示时要求距被攻击目标的距离不超过 15km。由于各种技术条件的限制，该系列无人机每次只能加载 S-1、S-2、S-3 三种载荷中的一种。为保证侦察效果，对每一个目标需安排 S-1、S-2 两种不同载荷各自至少侦察一次，两种不同载荷对同一目标的侦察间隔时间不超过 4 小时。

为保证执行侦察任务的无人机与地面控制中心的联系，需安排专门的 FY-2 型无人机担任通信中继任务，通信中继无人机与执行侦察任务的无人机的通信距离限定在 50km 范围内。通信中继无人机正常工作状态下可随时保持与地面控制中心的通信。

FY-3 型无人机可携带 6 枚 D-1 或 D-2 两种型号的炸弹。其中 D-1 炸弹系某种类型的“灵巧”炸弹，采用抛投方式对地攻击，即投放后炸弹以飞机投弹时的速度作抛物运动，当炸弹接近目标后，可主动寻的攻击待打击的目标，因此炸弹落点位于目标中心 100m 范围内可视为有效击中目标。D-2 型炸弹在激光制导模式下对地面目标进行攻击，其飞行速度为 200m/s，飞行方向总是指向目标。攻击同一目标的 D-2 型炸弹在整个飞行过程中需一架 FY-1 型无人机加载载荷 S-3 进行全程引导，直到命中目标。由于某些技术上的限制，携带 D-2 型炸弹的无人机在投掷炸弹时要求距目标 10km~30km，并且要求各制导炸弹的发射点到目标点连线的大地投影不交叉（以保证弹道不交叉）。为达到一定的毁伤效果，对每个目标（包括雷达站和远程搜索雷达）需成功投掷 10 枚 D-1 型炸弹，而对同一目标投掷 2 枚 D-2 型炸弹即可达到相同的毁伤效果。

多架该型无人机在同时执行任务时可按照一定的编队飞行，但空中飞行时两机相距要求 200m 以上。由于基地后勤技术保障的限制，同一基地的两架无人机起飞时间间隔和降落回收的时间间隔要求在 3 分钟以上。无人机执行完任务后需返回原基地。

根据任务要求，需完成侦察和打击的目标有 A01~A10 等 10 个目标群，每个目标群包含数量不等的地面目标，每个目标群均配属有雷达站（目标以及各目标群配署雷达的位置示意图见附件 2，具体坐标参数见附件 4），各目标群配属雷达

对 FY 型无人机的有效探测距离为 70km。

请结合实际建立模型，研究下列问题：

(1) 一旦有侦察无人机进入防御方某一目标群配属雷达探测范围，防御方 10 个目标群的配属雷达均开机对空警戒和搜索目标，并会采取相应对策，包括发射炸弹对无人机进行摧毁等，因此侦察无人机滞留防御方雷达探测范围内时间越长，被其摧毁的可能性就越大。现需为 FY-1 型无人机完成 10 个目标群（共 68 个目标）的侦察任务拟制最佳的路线和无人机调度策略（包括每架无人机起飞基地、加载的载荷、起飞时间、航迹和侦察的目标），以保证侦察无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的时间总和最小。

(2) FY-1 型无人机对目标进行侦察时，须将侦察信息实时通过 FY-2 型无人机传回地面控制中心。鉴于 50km 通信距离的限制，需安排多架 FY-2 型无人机升空，以保证空中飞行的侦察无人机随时与 FY-2 型无人机的通信。FY-2 型无人机可同时与多架在其有效通信范围的侦察无人机通信并转发信息。为完成问题 (1) 的侦察任务，至少安排多少架次的 FY-2 型通信中继无人机。

(3) 所有 FY-1 型无人机现已完成侦察任务并返回基地，均可加载载荷 S-3 用于为制导炸弹提供目标指示。现要求在 7 个小时内（从第一架攻击无人机进入防御方雷达探测范围内起，到轰炸完最后一个目标止）完成对 10 个目标群所有 68 个地面目标的火力打击任务，如何进行任务规划以保证攻击方的无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的时间总和最小？请给出具体的无人机任务规划结果（包括每架无人机飞行路线、FY-3 型无人机携带炸弹的具体清单和攻击的目标清单）。

(4) 由相关信息渠道获知在 A02、A05、A09 周边可能还配置有三部远程搜索雷达，该雷达对 FY 型无人机的有效作用距离是 200km。这三部雷达的工作模式是相继开机工作，即只有首先开机的雷达遭到攻击后才开启第二部雷达，同样只有第二部雷达被攻击后才开启第三部雷达。远程搜索雷达一旦开机工作，攻击方无人机群即可获知信号并锁定目标，而后安排距其最近的无人机对其摧毁。请基于防御方部署远程搜索雷达的情形重新考虑问题 (3)。

(5) 请对求解模型的算法的复杂度进行分析；并讨论如何有效地提高算法的效率，以增强任务规划的时效性。基于你们小组构建的数学模型和对模型解算的结果，讨论哪些技术参数的提高将显著提升无人机的作战能力？

## 2. 问题的分析

这是一个如何配置资源的问题，我们可以将资源配置问题转化到数学领域内进行量化的分析与讨论。

无人机所要执行的任务包括目标侦查、目标指示、通信中继和对地攻击，其中目标侦查包括目标成像和目标拍照。

单架无人机对象的任务可以划分为以下几种模式[1][2]：

- (1) 起飞模式；
- (2) 巡航模式；
- (3) 转弯模式；
- (4) 成像模式；
- (5) 拍照模式；

- (6) 指示模式;
- (7) 抛投制导模式;
- (8) 激光制导模式;
- (9) 降落模式

本题中由于起飞模式和降落模式并没有精确的数据和文字说明, 所以将起飞模式和降落模式均看成巡航模式。

本题为多无人机协同规划任务。多无人机协同作战中的任务规划从功能上可大致划分为系统资源分配、任务分配、航线规划、轨迹优化、武器投放规划等[3][4]。资源分配将多无人机系统要执行的总体任务分解为一系列可由无人机单机/编队完成的基本任务, 进而根据系统资源的总体情况提出执行各个基本任务的资源需求, 并给出任务执行的大体时间窗口。任务分配根据系统内各无人机平台的载荷挂载情况与任务能力, 确定各无人机平台要执行或参与的一个或多个基本任务并且给出具体执行时间。航线规划根据战场中敌方威胁情况规划和协调系统中各无人机的航线, 引导无人机平台在指定时间到达指定任务区域并避免各无人机平台/编队在空间上的冲突[5][6][7]。轨迹优化在航线规划的基础上, 进一步对无人机的飞行航线进行平滑和优化, 从而得到无人机平台飞行控制系统能够有效跟踪的飞行轨迹。武器投放规划综合考虑无人机平台飞行高度、速度及其携带弹药的性能等因素, 计算攻击方向、武器投放区域, 进而确定无人机平台的投弹机动动作与武器投放时机, 控制无人机平台对目标实施打击, 提高武器的命中率[8][9][10]。

本题中无人机共有 10 个目标群需要侦测和打击, 总计 68 个地面目标, 其中包括 10 个雷达站和 58 个目标点, 对于第 (4) 问, 又增加了 3 个远程雷达站需要打击。由于无人机被雷达站侦测到后存在被防御工事的炸弹摧毁的危险, 所以需要设计合理的无人机路线和调度策略, 使得在完成任务的情况下无人机被雷达侦测到的总时间最少。问题的角度从事前的规划出发, 不做被探测到后的假设, 不考虑无人机被防御工事摧毁的情况。

共有 7 个无人机基地, 散布于目标群的右下方, 每个基地配有 1 架 FY-2 无人机, 其中 4 个基地配有 2 架 FY-1 无人机和 13 架 FY-3 无人机, 3 个基地配有 15 架 FY-3 无人机且没有 FY-1 无人机。每架无人机有一定的续航时间。

对于问题 (1), 需要对 68 个地面目标执行目标拍照和目标成像任务, 出动 FY-1 无人机, 分别加载 S-1 和 S-2 载荷, 共 4 个基地拥有共计 8 架 FY-1 无人机, 需要对无人机的路线和调度策略进行规划, 以满足每架无人机的续航充足且无人机滞留雷达探测范围的时间最短。需要着重考虑的是, 8 架无人机使用几架完成侦查任务, 即 10 个目标群怎样分组。

对于问题 (2), 需要考虑多架无人机的起飞时间问题, 使得飞行航迹尽可能贴近, 以减少 FY-2 通信中继无人机的使用架数, 限定条件为通信中继无人机的总续航时间。

对于问题 (3), 需要考虑对不同目标的打击方式不同, 且本题中无人机编队飞行, 如何编队以及每队负责打击的地面目标均需要确定。

对于问题 (4), 增加的 3 个远程雷达开启时间和位置都不确定, 需要攻击方案中预留足够的阈值。

### 3. 模型的假设

- (1) 将无人机和地面打击目标均看成质点。
- (2) 无人机起飞和降落时的燃料消耗等同于巡航时的燃料消耗。
- (3) 无人机被探测到后不会被防御工事摧毁。
- (4) 无人机起飞后无法改变飞行速度。
- (5) 无人机编队后看成一个质点。

### 4. 符号的说明

$T_{S1 \times i}$	出动 $i$ 架无人机执行成像任务时滞留雷达探测范围内的总时间
$T_{S1 \times i\_j}$	出动 $i$ 架无人机执行成像任务时第 $j$ 架无人机滞留雷达探测范围内的时间
$M$	完成成像任务而携带 S-1 的 FY-1 出动的架次
$r$	雷达探测半径
$T'_{S1 \times i\_j}$	出动 $i$ 架无人机执行成像任务时第 $j$ 架无人机飞行的总时间
$N$	完成拍照任务而携带 S-2 的 FY-1 出动的架次
$K$	完成通信任务所使用的 FY-2 的架次
$S_{D-1}$	D-1 炸弹攻击距离
$V_{D-1}$	D-1 炸弹飞行速度
$T_{FY1}$	所有 FY-1 无人机搭载 S-3 载荷作为引导机滞留在防御方雷达范围内的总时间
$T_{D1}$	所有仅携带 D-1 炸弹的 FY-3 无人机滞留在防御方雷达范围内的总时间；
$T_{D2}$	所有仅携带 D-2 炸弹的 FY-3 无人机滞留在防御方雷达范围内的总时间
$T_{D1D2}$	所有既携带 D-1 炸弹又携带 D-2 炸弹的 FY-3 无人机滞留在防御方雷达范围内的总时间
$T_{FY1\_i}$	第 $i$ 架 FY-1 无人机在雷达区滞留的时间总和
$T_{D1\_i}$	第 $i$ 架仅携带 D-1 炸弹的 FY-3 无人机滞留在防御方雷达范围内的时间
$T_{D2\_i}$	第 $i$ 架仅携带 D-2 炸弹的 FY-3 无人机滞留在防御方雷达范围内的时间
$T_{D1D2\_i}$	第 $i$ 架携带 D-1 炸弹又携带 D-2 炸弹的 FY-3 无人机滞留在防御方雷达范围内的时间
$T$	所有无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的总时间

注：在问题（1）中模型涉及到众多的参量符号，未一一列举在上述表格中，而是在每个计算式下方进行说明。



## 5. 问题（1）解决方案

### 5.1 问题分析

无人机需完成对 10 个群组共计 68 个地面目标的侦查任务，包括成像任务和拍照任务。出动 FY-1 无人机，分别加载 S-1 和 S-2 载荷，共 4 个基地拥有共计 8 架 FY-1 无人机，需要对无人机的路线和调度策略进行规划，以满足每架无人机的续航充足且无人机滞留雷达探测范围的时间最短。需要着重考虑的是，8 架无人机使用几架完成侦查任务，即 10 个目标群怎样分组。

目标群和无人机基地位置示意图如图 5-1 所示。本问题的目标为在续航时间内保证侦查无人机滞留雷达探测范围的时间总和最短。本小问中可分开考虑成像任务和拍照任务。

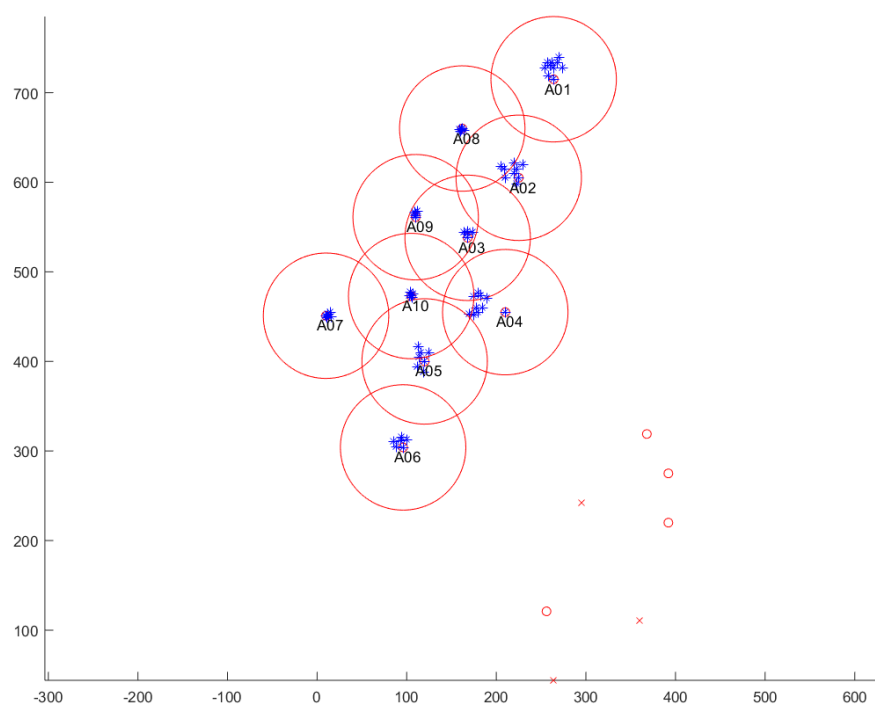


图5-1 目标群和无人机基地位置示意图

### 5.2 成像任务建模

对于成像任务，由 FY-1 无人机搭载 S-1 载荷完成。

首先需要考虑 FY-1 无人机出动的架数问题，假设共出动  $M$  架 FY-1 携带 S-1，

$1 \leq M \leq 8$ 。建立全局优化模型如下：

$$\min_{T_{S1 \times i} \in T} \{T_{S1 \times 1}, T_{S1 \times 2}, \dots, T_{S1 \times M}\}$$

式中， $T$  为不同架次无人机飞行方案的集合， $T_{S1 \times i}$  表示出动  $i$  架无人机执行成像任务时滞留雷达探测范围内的总时间。总时间为各无人机处于雷达区域内的时间的代数和：

$$T_{S1 \times i} = \sum_{j=1}^i T_{S1 \times i-j}$$

其中  $T_{S1 \times i-j}$  表示出动  $i$  架无人机时第  $j$  架无人滞留雷达探测范围内的时间。

### 5.2.1 遍历顺序

FY-1 型无人机共有 8 架，为了获得最优解，需要依次遍历 8 种情况，本文采用  $M=1$  至  $M=8$  的顺序依次遍历，直至出现满足条件的解。

如图 5-2 所示， $a$  和  $b$  为两个群组的雷达站，探测范围为红色圆。

方案 1 为 1 架无人机的路径，直线穿过两个雷达站， $r$  表示雷达探测半径，则在雷达探测范围内的路径长度为  $2r+ab$ ；

方案 2 为 2 架无人机的路径，到达雷达站后立刻折返，在雷达探测范围内的路径长度为  $2r+2r$ ；

对于三角形  $abc$ ，根据两边之和大于第三边可得  $ac+bc=2r>ab$ ，所以方案 1 在雷达探测范围内的路径长度小于方案 2。

对于题中的实际情况，两种方案在各群组中由于完成各个地面目标的成像任务而多飞的路径长度基本相同，忽略很小的转弯路径（下文中证明可忽略），所以一架无人机被雷达探测的总时间小于 2 架无人机被雷达探测到的总时间。

可合理推测出，在不考虑续航时间的情况下，为完成 10 个群组的成像任务，出动的无人机架次  $M$  越小，被雷达探测到的总时间越短。

结论为遍历顺序为  $M=1$  至  $M=8$ ，直至出现满足条件的解。

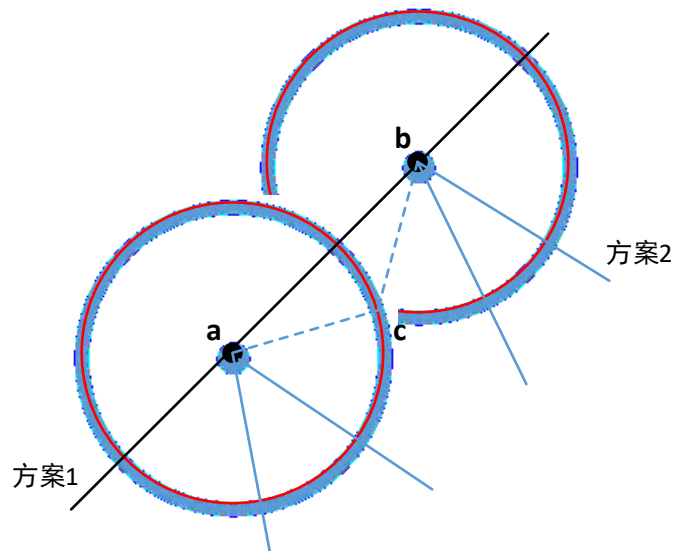


图5-2 简化飞行方案对比图

### 5.2.2 M=1, 仅出动一架无人机

为了绕行路径尽量短, 减少迂回的次数, 无人机侦查的首群组 and 尾群组应在 A01 和 A06 中选择。FY-1 可以选择出发的基地包括 P01, P03, P05, P07 四个, 由图 5-1 可以看出 P01 距离 A01 和 A06 的总直线距离最短, 所以无人机从 P01 基地出发和降落。

建立层次化的飞行模型如下:

$$T'_{S1 \times 1_1} = t_{move} + t_{action} + t_{turn} + t_{go} + t_{back}$$

$T'_{S1 \times 1_1}$ : 本架无人机飞行的总时间, 为了满足续航要求, 总时间必须小于 10h。

(1)  $t_{move}$ :

仅考虑每个群组的等效中心, 无人机遍历 10 个群组的等效中心所消耗的时间为  $t_{move}$ 。

不考虑飞机的转弯和群组中具体的地面目标。由 Matlab 建立距离矩阵, 用排列组合算法算出最小距离点的排序, 得出最短路径为 A06, A05, A07, A10, A04, A03, A09, A08, A02, A01, 如图 5-3 中从 A06 到 A01 的折线路径所示, 路径的长度为 833.9km, 时间  $t_{move}=4.2h$ 。

(2)  $t_{go}$ :

第一个侦查的群组选择 A01 或 A06 对于飞行总时间并无影响, 假设将 A06 作为第一个侦查群组,  $t_{go}$  为无人机从基地 P01 飞到 A06 群组等效中心的时间, 图 5-3 中从 P01 到 A06 的线段长度为 297.4km, 时间  $t_{go}=1.5h$ 。

(3)  $t_{back}$ :

表示无人机从 A01 群组的等效中心飞到 P01 基地的时间, 图 5-3 中从 A01 到 P01 的线段长度为 458.2km, 时间  $t_{back}=2.3h$ 。

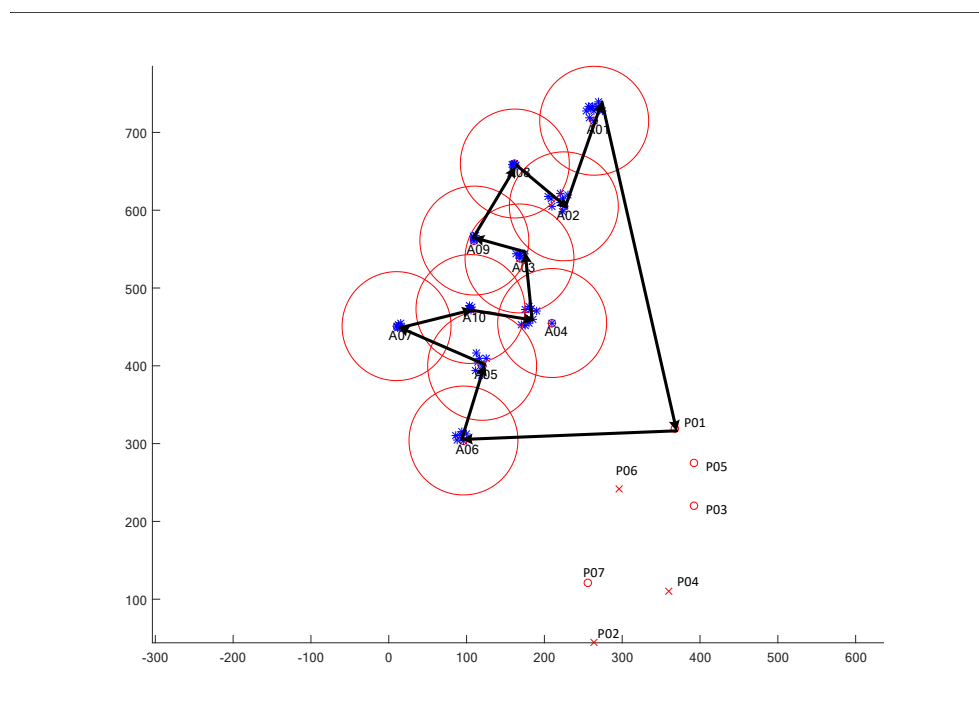


图5-3 M=1 时无无人机的简化路径图

(4)  $t_{action}$ :

对于各个群组, 无人机还需要遍历其中的每个地面目标, 对每个地面目标进

行成像， $t_{\text{action}}$  表示每个群组中遍历成像的时间的代数和。

现考虑最小的群组 A06，仅包括 6 个地面目标。对于搭载 S-1 载荷的 FY-1 无人机，如图 5-4 所示，其成像带宽 AB 固定为 2km， $2\text{km} \leq OA$ ， $OB \leq 8\text{km}$ ，由于  $t_{\text{action}}$  的最小值仅可能在  $OA=2\text{km}$  或  $OB=8\text{km}$  的情况下获得，所以本文仅考虑这两种情况。对于同一个群组，成像过程中 OA 的长度需保持不变，因为无人机的成像侧向距离在一个比较短的时间内是不能左右调整的，且对特定目标的成像需要一定的时间。成像可以在无人机的左侧或者右侧，起飞后不能调整，两种情况不影响飞行时间，假设均在右侧成像。

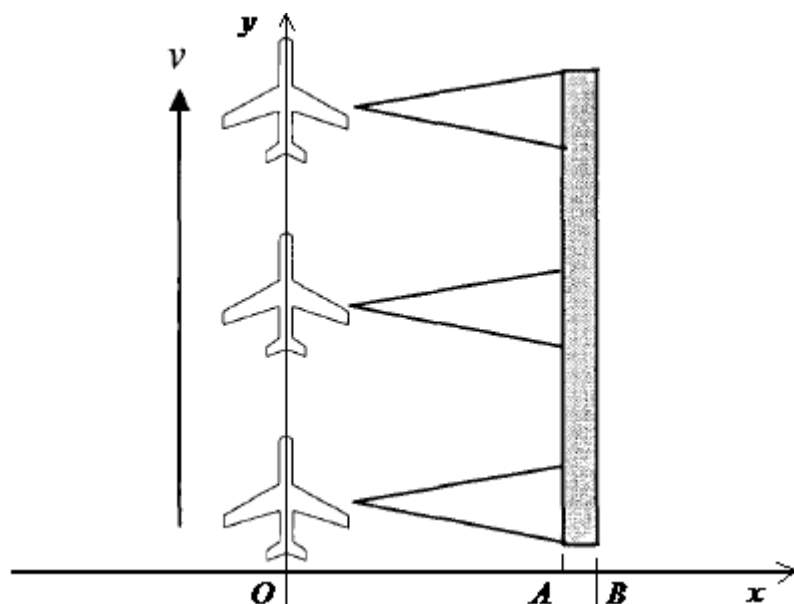


图5-4 成像传感器工作原理示意图

若  $OA=2\text{km}$ ，在群组的入点和出点图 5-3 已经确定的情况下，在 Matlab 中建立另一套距离矩阵，用排列组合算法算出点的次序，之后可由三角函数确定 FY-1 在目标点附近的切经坐标，以 A06 区域为例，其内部的 6 个目标在距离矩阵下得到的最短路径如图 5-5 所示，图中的 5 个蓝色星号点表示非雷达地面目标点，红色小圆圈表示雷达目标点，红色大圆是以 6 个目标点为圆心，2km 为半径的圆，绿色线段为遍历成像的最短路径。图中路径的长度为 41.8km，时间为 0.2h。

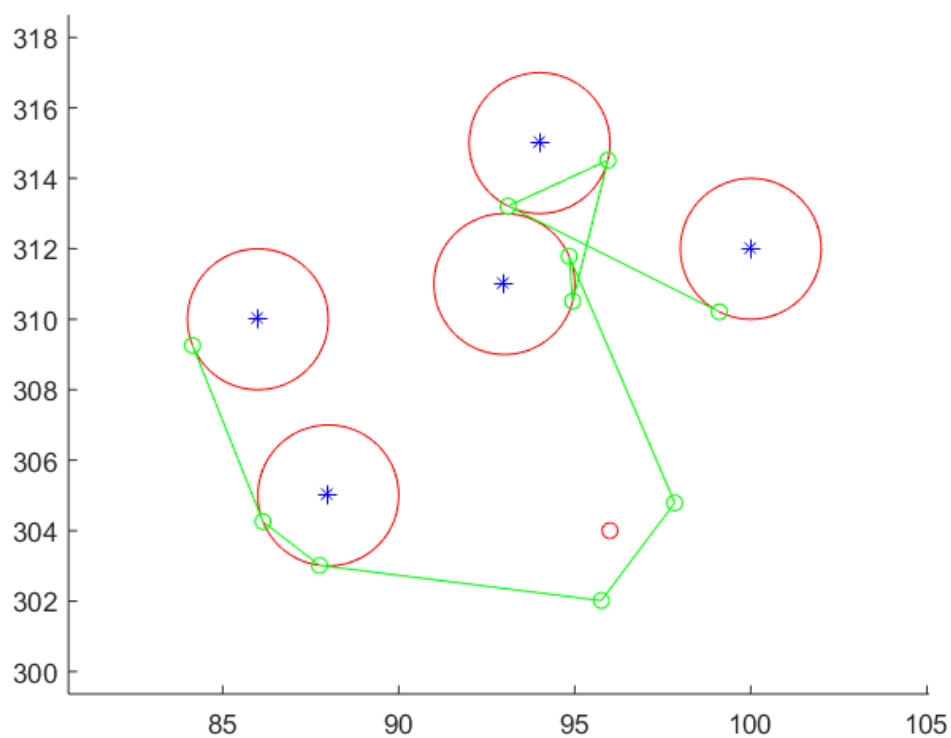


图5-5 OA=2km 时对群组 A06 中的各个目标点遍历成像的路径图

若  $OB=8\text{km}$ ，得到的最短路径如图 5-6 所示，红色大圆是以 6 个目标点为圆心，8km 为半径的圆。不考虑路径中的转弯距离。图中路径的长度为 70.3km，时间为 0.4h。

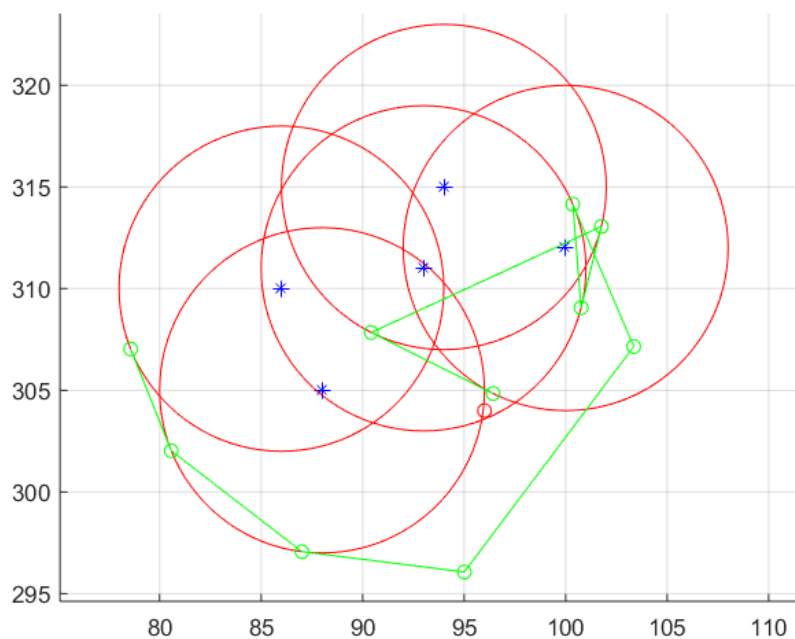


图5-6 OB=8km 时对群组 A06 中的各个目标点遍历成像的路径图

为了保证无人机在雷达区域的时间最短，应选择  $OA=2\text{km}$  的成像方式。由于其他群组的复杂度均高于 A06 群组，所以其他群组的遍历成像时间均大于  $0.2\text{h}$ ，所以总时间  $t_{\text{action}} > 2\text{h}$ 。

(5)  $t_{\text{turn}}$ :

无人机转弯所消耗的时间。以群组 A06 为例，遍历成像路径中的转弯路径长度约为  $3 \times 2 \pi \times 0.07\text{km} = 1.2\text{km}$ ，时间约为  $0.006\text{h}$ ，远小于在雷达区域内的时间和续航总时间，所以  $t_{\text{turn}}$  可以忽略不计。

(6) 结果

由以上分析和计算可知：

$$T'_{S1 \times 1_1} > 4.2\text{h} + 1.5\text{h} + 2.3\text{h} + 2\text{h} = 10\text{h}$$

无人机的飞行时间大于续航时间  $10\text{h}$ ，所以仅用 1 架无人机无法完成 10 个群组的成像任务。

### 5.2.3 M=2，出动两架无人机

出动两架 FY-1 无人机分别搭载 S-1 载荷对 10 个群组中的 68 个地面目标完成成像任务。

$$T_{S1 \times 2} = T_{S1 \times 2_1} + T_{S1 \times 2_2}$$

$T_{S1 \times 2}$ : 两架无人机在雷达探测范围内飞行的总时间。

$T_{S1 \times 2_1}$ : 第一架无人机在雷达探测范围内飞行的时间。

$T_{S1 \times 2_2}$ : 第二架无人机在雷达探测范围内飞行的时间。

$T'_{S1 \times 2_1}$ : 第一架无人机飞行的总时间，为了满足续航要求，总时间必须小于  $10\text{h}$ 。

$T'_{S1 \times 2_2}$ : 第二架无人机飞行的总时间，总时间必须小于  $10\text{h}$ 。

(1) 群点分组和顺序的确定

将 10 个群点用线性规划法分为两组，线性规划的目标函数为使得两组各自的最小距离之和最小。

Matlab 模型求解的最优解为：

第一架无人机飞行顺序：A09, A03, A08, A02, A01；

第二架无人机飞行顺序：A06, A05, A04, A10, A07；

第一架无人机标记为 FY-1-A，第二架无人机标记为 FY-1-B。

第一架无人机的起飞和降落机场为 P01，起点群组 A09 距离 P01 的距离太远且需绕过雷达探测区，所需的起飞或返航时间长，所以将第一架无人机的飞行顺序改为：A03, A09, A08, A02, A01，两种解法的飞行路径长度相差  $22\text{km}$ ，在雷达探测区域内的时间相差  $0.11\text{h}$ ，远小于到 A09 所需起飞或返航时间，所以采用修改后的方案。

同理，第二架无人机的起飞和降落机场为 P07，终点群组 A07 距离 P07 的距离太远且也需绕过雷达探测区，所以将第二架无人机的飞行顺序改为：A06, A05, A07, A10, A04，如图所示，两种解法的飞行路径长度相差  $26\text{km}$ ，在雷达探测

区域内的时间相差 0.13h，远小于到 A07 所需的起飞或返航时间，所以采用修改后的方案。

下文中所说的最优方案均为修改后的方案。

## （2）成像方向和侧向距离的确定

由于 S-1 成像侧向距离的变化，以及左右两边的区别，共考虑四种临界情况，分别用 Matlab 寻找最优解。表 5-1 列出了四种情况以及每种情况的最优时间。

表 5-1 两架无人机搭载 S-1 在不同情况下的最优解

FY-1 架次	临界值	成像侧	总飞行距离	飞行时间 $T'_{S1 \times 2_i}$	雷达区内飞行距离	雷达区内飞行时间 $T_{S1 \times 2_i}$
FY-1-A	OA=2km	右	1569.4 km	7.847h	716 km	3.58h
FY-1-A	OA=2km	左	1568.6 km	7.843h	716 km	3.58h
FY-1-A	OB=8km	右	1736.5 km	8.6825h	881.5 km	4.4075h
FY-1-A	OB=8km	左	1733.2 km	8.666h	881.5 km	4.4075h
FY-1-B	OA=2km	右	1379.8 km	6.899h	799.4 km	3.997h
FY-1-B	OA=2km	左	1379.5 km	6.8975h	799.4 km	3.997h
FY-1-B	OB=8km	右	1585.1 km	7.9255h	1004.2 km	5.021h
FY-1-B	OB=8km	左	1580.4 km	7.902h	1004.2 km	5.021h

由表中可以看出：

1. 飞行时间小于 10h，即两架 FY-1 可以完成所有群组的成像任务；
2. 左侧成像和右侧成像结果相近，所以忽略成像侧对结果的影响；
3. OA=2km 的情况优于 OB=8km 的情况。

所以最佳情况为侧向距离 OA=2km，FY-1-A 的总飞行时间  $T'_{S1 \times 2_1}$  为 7.8h，在雷达区域内的飞行时间  $T_{S1 \times 2_1}$  为 3.6h；FY-1-B 的总飞行时间  $T'_{S1 \times 2_2}$  为 6.9h，在雷达区域内的飞行时间  $T_{S1 \times 2_2}$  为 4.0h；在雷达区域内的总时间  $T_{S1 \times 2}$  为 7.6h。

## （3）最佳飞行路径的确定

图 5-7 为两架 FY-1 搭载 S-1 完成成像任务时的路径图，侧向距离 OA=2km，右侧成像，绿色线段为 FY-1-A，蓝色线段为 FY-1-B。10 个群组的区域细节图如图 5-8 所示，小圆圈处为 FY-1 需要转弯的点，转弯半径为 70m。FY-1-A 和 FY-1-B 轨迹的具体坐标见附录一和附录二。

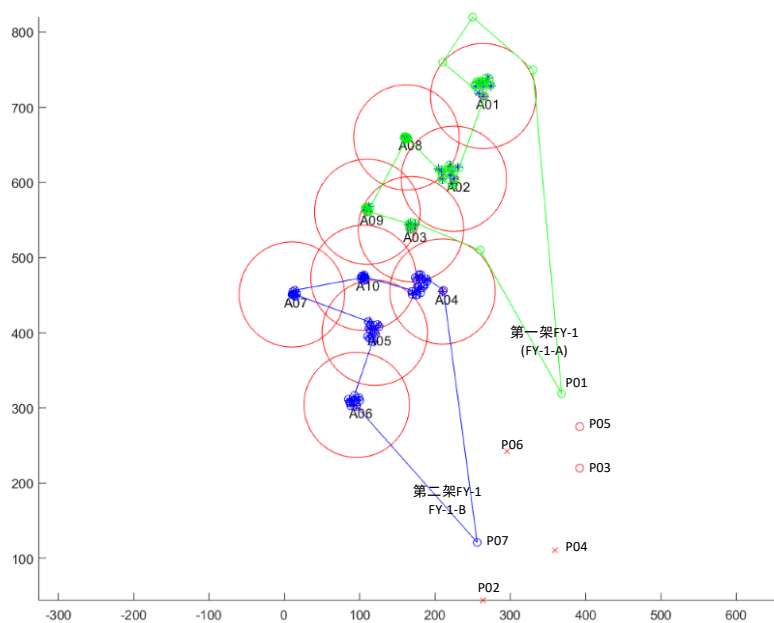
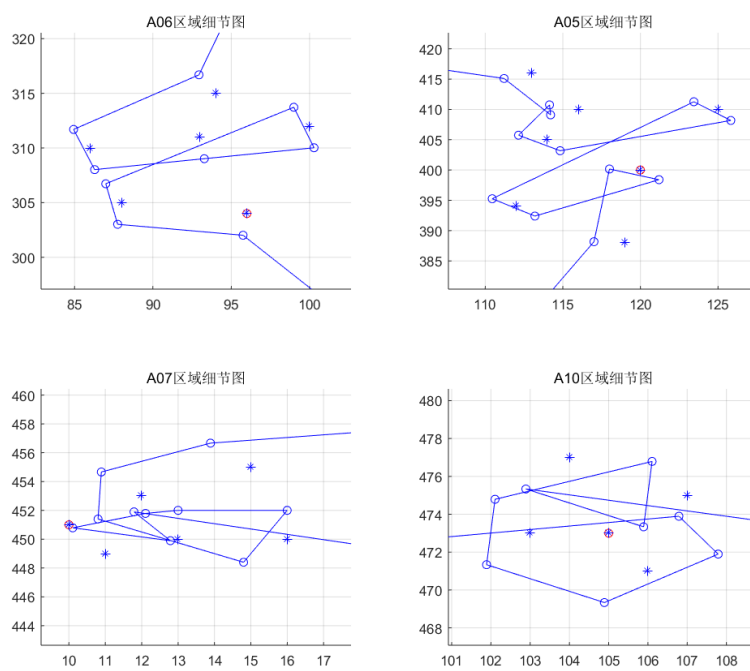


图5-7 两架 FY-1 搭载 S-1 完成成像任务的路径图





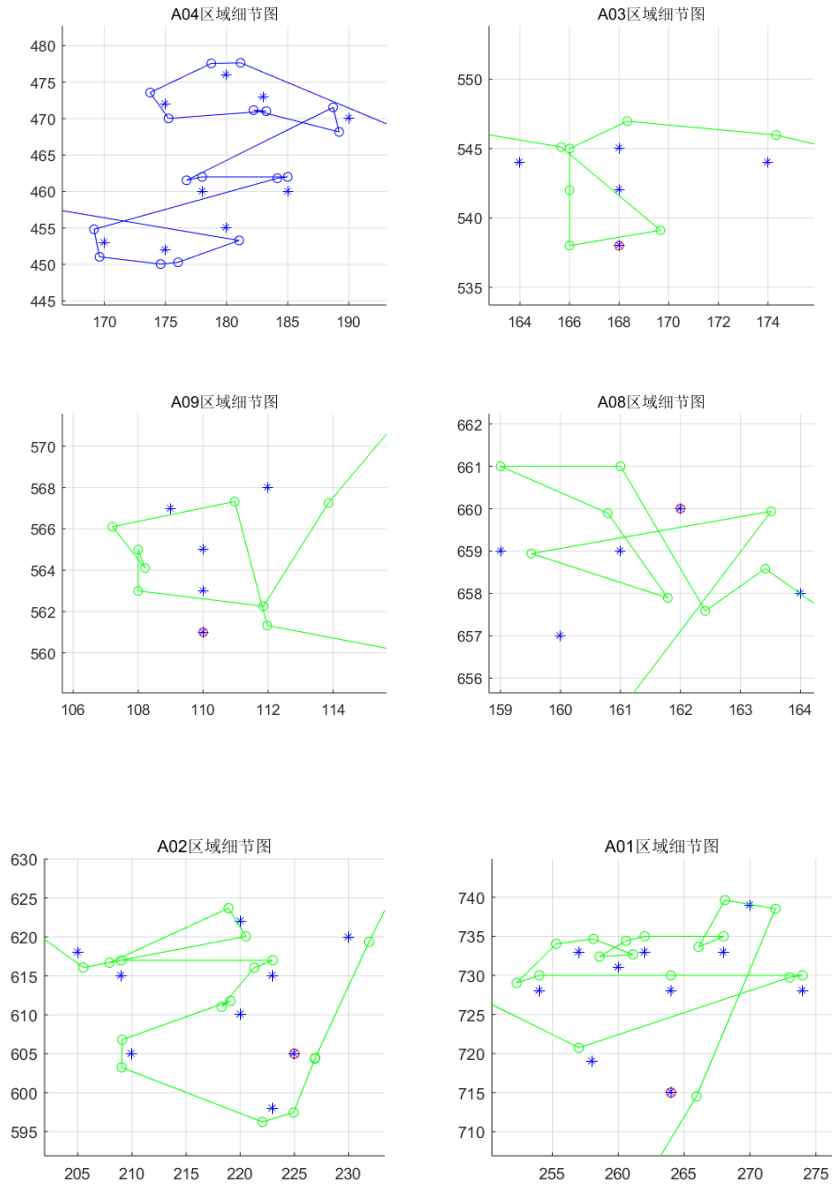


图5-8 两架 FY-1 搭载 S-1 完成成像任务的区域细节图

### 5.3 拍照任务建模

拍照任务由 FY-1 加载 S-2 载荷完成。将此架无人机标记为 FY-1-C。S-2 的拍照范围为半径为 7.5km 的圆，且为瞬间拍照。共有 8 架 FY-1，分布于 4 个机场，均可加载 S-2 载荷。

假设共出动  $N$  架无人机完成 10 个群组的拍照任务， $1 \leq N \leq 8$ 。建立全局优化模型如下：

$$\min_{T_{S2 \times i} \in T} \{T_{S2 \times 1}, T_{S2 \times 2}, \dots, T_{S2 \times M}\}$$

式中， $T$  为不同架次无人机飞行方案的集合， $T_{S2 \times i}$  表示出动  $i$  架无人机执行成像任务时滞留雷达探测范围内的总时间。总时间为各无人机处于雷达区域内的

时间的代数和：

$$T_{S2 \times i} = \sum_{j=1}^i T_{S2 \times i\_j}$$

其中 $T_{S2 \times i\_j}$ 表示出动  $i$  架无人机时第  $j$  架无人滞留雷达侦测范围内的时间。

与成像任务相同，出动完成拍照任务的无人机架次  $N$  越小，被雷达探测到的总时间越少，所以遍历顺序为从  $N=1$  至  $N=8$ ，直至出现满足条件的解。

### 5.3.1 $N=1$ ，出动一架无人机

用 Matlab 寻找出的最优路径：

10 个群组最优路径的确定与上文一致；

对于某个群组中的  $n$  个地面目标，也需找出拍照的最优路径，模型配方为：

(1) 从  $n$  个点中，找出  $C(n,1)$ 至  $C(n,n)$ 所有的组合的情况，筛选出满足内部所有的点可以被一个半径 7.5km 的圆覆盖的组合，作为配方，并计算出每个配方的等效中心点。

(2) 从前面生成的  $m$  个配方中，找出  $C(m,1)$ 至  $C(m,m)$ 所有的组合，筛选出满足组合内所有配方的并集包含所有点的配方组合。

(3) 求解配方组合的总等效中心，将组合内的各个配方的等效中心点向总等效中心收缩。

(4) 计算每个配方组合经过所有中心点的最短飞行距离以及对应的飞行顺序，选取最小值对应的配方组合，即该小区域最后的结果。

模型寻找出的最优路径如图 5-9 所示，图中的红色圆圈表示雷达的探测范围，半径为 70km。

将本架 FY-1 无人机标记为 FY-1-C，图 5-10 为 FY-1 在每个群组中具体的绕行路径细节图，图中的红色圆圈半径为 7.5km，表示 FY-1 搭载 S-2 的拍照范围，一个红色圆圈表示拍了一次照，以 A06 群组的细节图为例，三个红色圆圈表示拍了三次照。FY-1-C 的飞行轨迹的具体坐标见附录三。

表 5-2  $N=1$  的最优解

N	路径总长度	总飞行时间 $T_{S2 \times 1\_1}$	在雷达范围内的 路径长度	在雷达范围内的时 间 $T'_{S2 \times 1\_1}$
1	1825.1km	9.1h	1064.9km	5.3h

表 5-2 统计了出动一架 FY-1 搭载 S-2 完成拍照任务的最优解的相关数据，总飞行时间 $T_{S2 \times 1\_1}$ 为 9.1h，FY-1 的总续航时间为 10h，所以一架 FY-1 可以完成 10 个群组的拍照任务。处于雷达范围内的时间 $T'_{S2 \times 1\_1}$ 为 5.3h。

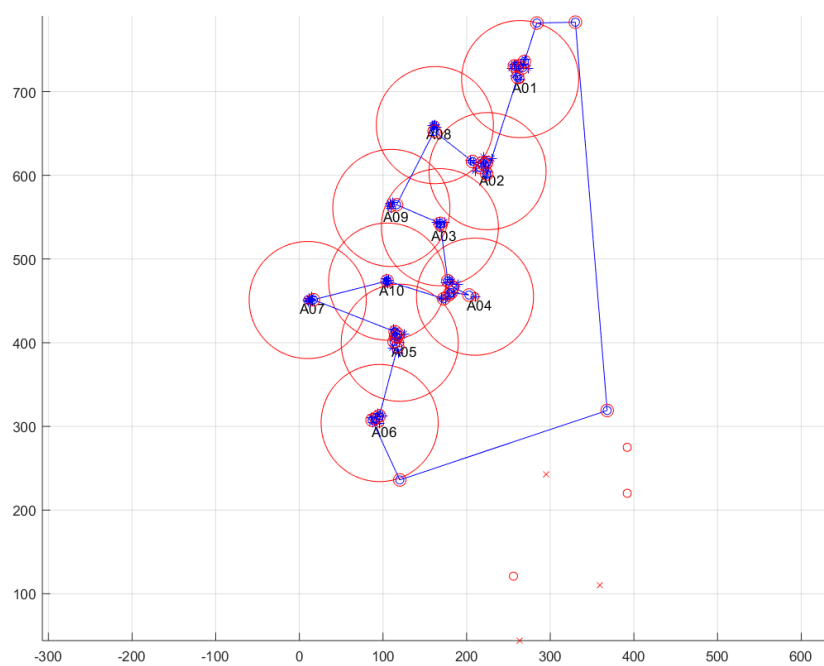
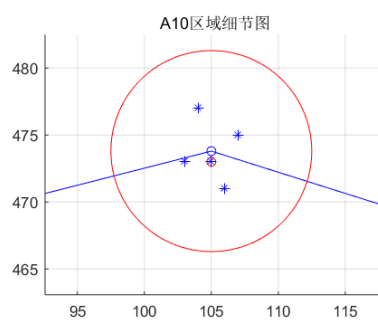
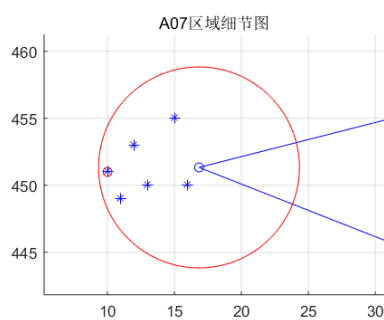
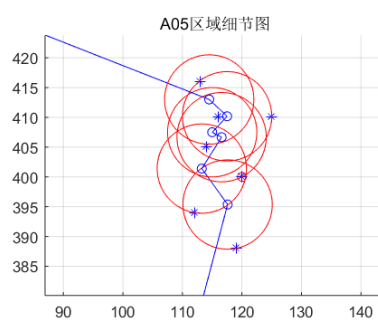
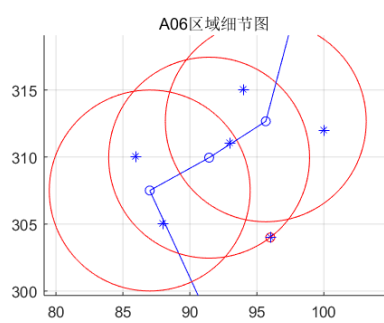


图5-9 1架FY-1 搭载 S-2 完成拍照任务的路径图



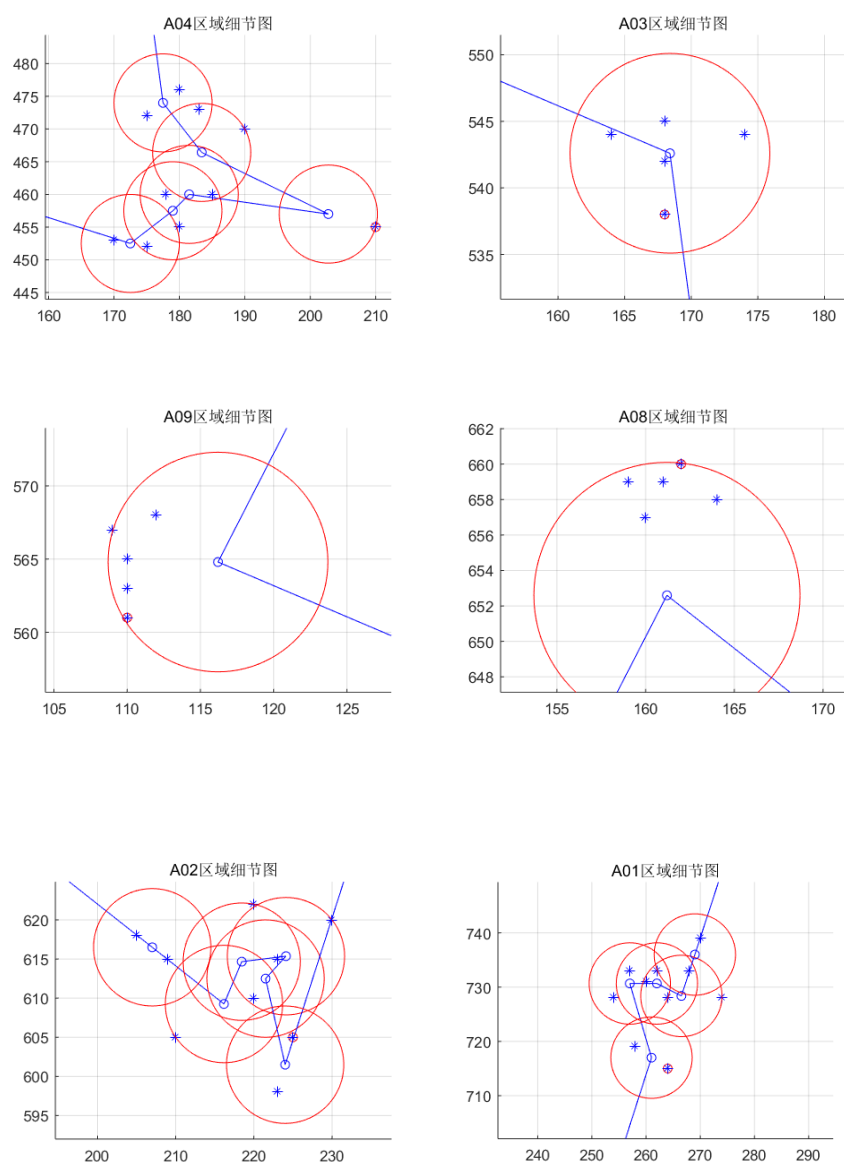


图5-10 1架FY-1搭载S-2完成拍照任务的区域细节图

## 5.4 起飞时间规划

起飞时间满足 S-1 侦测 A06 到时的前后 4h 内有 S-2 侦测过 A06，且 S-1 侦测 A03 到时的前后 4h 内有 S-2 侦测过 A03。

FY-1-A 搭载 S-1 载荷从起飞到侦察到 A03 的时间  $t_{S1\_A03}$ ：路径为线段 P01-A03，如图 5-7 所示，路径长度为 315km， $t_{S1\_A03}=1.6h$ ；

FY-1-B 搭载 S-1 载荷从起飞到侦察到 A06 的时间  $t_{S1\_A06}$ ：路径为折线段 P07-A06，如图 5-7 所示，路径长度为 250km， $t_{S1\_A06}=1.25h$ ；

FY-1-C 搭载 S-2 载荷从起飞到侦察到 A06 的时间  $t_{S2\_A06}$ ：路径为折线段 P01-A06，如图 5-9 所示，路径长度为 340km， $t_{S2\_A06}=1.7h$ ；

FY-1-C 搭载 S-2 载荷从起飞到侦察到 A03 的时间  $t_{S2\_A03}$ ：路径为折线段 P01-

A03, 如图 5-9 所示, 路径长度为 905km,  $t_{S2\_A03}=4.5h$ ;

FY-1-A 搭载 S-1 的起飞时刻为  $TF_{S1\_1}$ , FY-1-B 搭载 S-1 的起飞时刻为  $TF_{S1\_2}$ , FY-1-C 搭载 S-2 的起飞时刻为  $TF_{S2}$ 。需满足的条件为:

$$\begin{cases} TF_{S1\_1} + t_{S1\_A03} - 4h < TF_{S2} + t_{S2\_A03} < TF_{S1\_1} + t_{S1\_A03} + 4h \\ TF_{S1\_2} + t_{S1\_A06} - 4h < TF_{S2} + t_{S2\_A06} < TF_{S1\_2} + t_{S1\_A06} + 4h \end{cases}$$

带入数据求解结果为:

$$\begin{cases} TF_{S1\_1} - 6.9h < TF_{S2} < TF_{S1\_1} + 1.1h \\ TF_{S1\_2} - 4.45h < TF_{S2} < TF_{S1\_2} + 3.35h \end{cases}$$

三架 FY-1 起飞的时间轴如图 5-11 所示, 将 FY-1-C 的起飞时刻标记为 0 点, FY-1-A 的起飞时刻为图中的绿色部分, 应在 -6.9h 至 +1.1h 之间, FY-1-B 的起飞时刻为图中的蓝色部分, 应在 -4.45h 至 1.1h 之间。

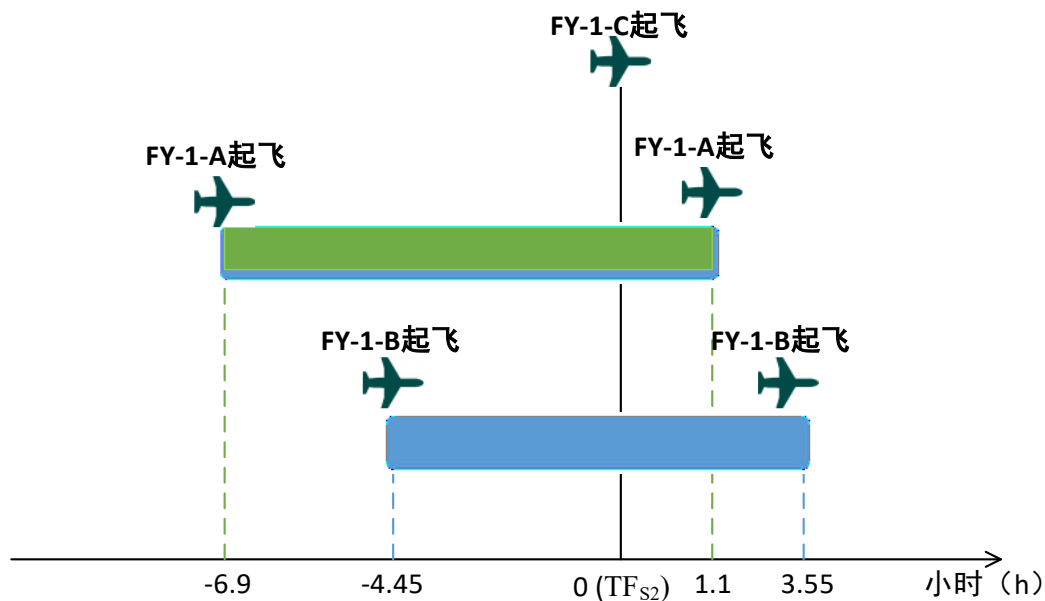


图5-11 三架 FY-1 起飞范围的时间轴

## 5.5 小结

现为侦查任务拟制最佳的路线和无人机调度策略:

(1) 起飞基地和加载载荷

两架 FY-1 搭载 S-1 载荷分别从 P01 和 P07 基地出发;

一架 FY-1 搭载 S-2 载荷从 P01 基地出发。

(2) 航迹

两架 FY-1 搭载 S-1 载荷的航迹如图 5-7 和图 5-8 所示;

一架 FY-1 搭载 S-2 载荷的航迹如图 5-9 和 5-10 所示。

(3) 侦查目标

第一架 FY-1 标记为 FY-1-A, 搭载 S-1 载荷的侦查目标为 A03, A09, A08, A02, A01;

第二架 FY-1 标记为 FY-1-B, 搭载 S-1 载荷的侦查目标为 A06, A05, A07, A10, A04;

一架 FY-1 标记为 FY-1-C, 搭载 S-2 载荷的侦查目标为 A06, A05, A07, A10,

A04, A03, A09, A08, A02, A01。

#### (4) 起飞时间

起飞时间如图 5-11 所示，将 FY-1-C 的起飞时刻标记为 0 点的话，FY-1-A 的起飞时刻应在-6.9h 至+1.1h 之间，FY-1-B 的起飞时刻应在-4.45h 至 1.1h 之间。

#### (5) 无人机滞留防御方雷达有效探测范围的时间总和

	路径总长度	总飞行时间	在雷达范围内的路径长度	在雷达范围内的时间
FY-1-A	1568.6 km	7.8h	716 km	3.6h
FY-1-B	1379.5 km	6.9h	799.4 km	4.0h
FY-1-C	1825.1km	9.1h	1064.9km	5.3h
总和			<b>2580km</b>	<b>12.9h</b>

## 6. 问题（2）解决方案

### 6.1 问题分析

本问题需要求解出动最少架次的 FY-2 无人机完成问题（1）的通信。FY-2 系通信中继无人机，与 FY-1 无人机的通信距离为 50km，巡航飞行速度为 300km/h，最长巡航时间为 8h，巡航高度 5000m。

由于 FY-1 的巡航高度为 1500m，对于最长通信距离 50km，FY-2 与 FY-1 的投影距离= $\sqrt{50^2 - (5 - 1.5)^2} = 49.9\text{km}$ ，与 50km 基本相等，所以本题中的讨论不区分直线距离和投影距离。

FY-1 在执行拍照或者成像操作时，其半径 50km 内必须有 FY-2。

设最少用 K 架 FY-2 可以完成问题（1）的通信， $1 \leq K \leq 8$ 。

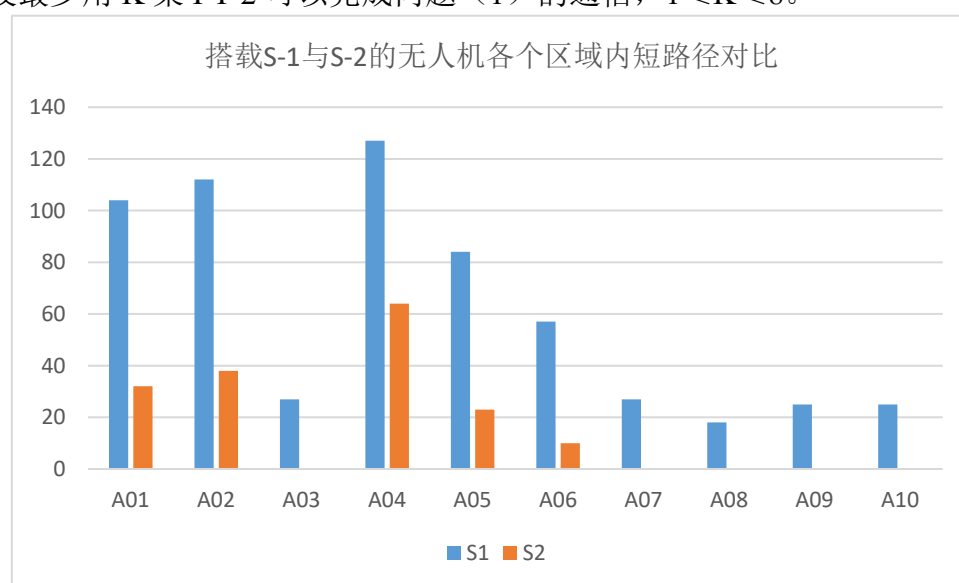


图 6-1 搭载 S-1 与 S-2 的无人机在各个区域内短路径对比

图 6-1 为每个区域内部搭载 S-1 的 FY-1 与搭载 S-2 的 FY-1 在各个区域内所

经过的短路径的对比。可以看到，由于 S-2 只要靠近目标便可瞬间成像，所以工作任务很轻，诸如 A03、A07、A08、A09、A10 等区域，其内部所有的点都可以被一个半径为 7.5km 的圆覆盖，所以区域内短路径为 0。这就造成了搭载 S-1 的 FY-1 与搭载 S-2 的 FY-1 的大区域行进速度有很大不同。

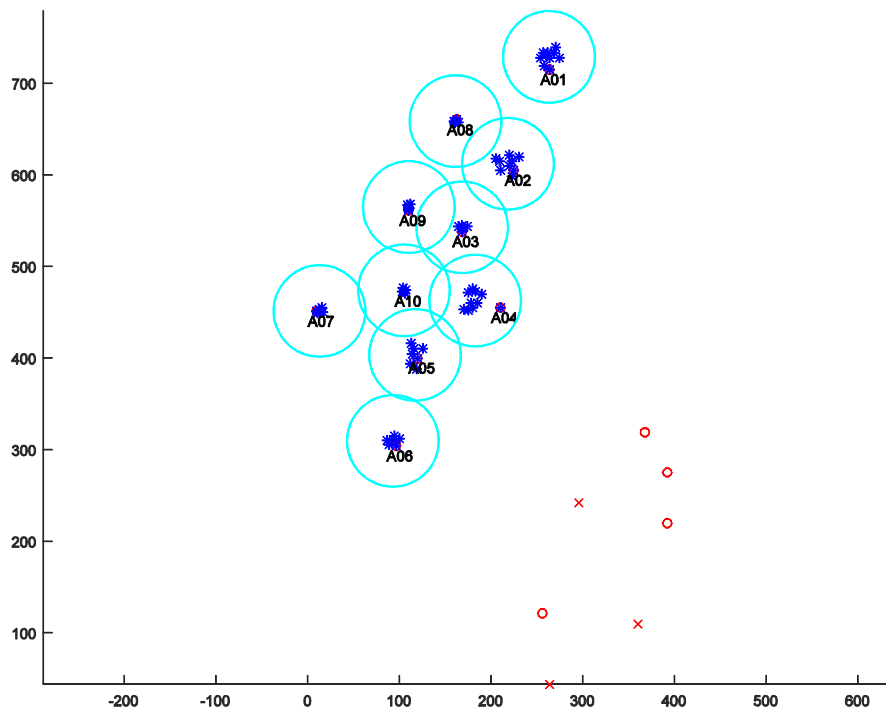


图 6-2 通讯范围图

图 6-2 为通讯范围图，蓝圈为半径 50m 的通讯距离。只有 FY-1 与 FY-2 同时位于圈内时，通讯才可以正常进行。由图可见，A06-A05、A05-A07、A09-A08 和 A02 至 A01 之间较难被一架 FY-2 覆盖，若两架 FY-1 在上述的两个圈内各自执行任务时需格外注意。

## 6.2 K=1，出动 1 架 FY-2

即仅使用一架 FY-2 完成问题（1）中的通信。

需满足的基本条件为对于任意的群组，S-1 的成像任务和 S-2 的拍照任务基本同时进行，且两架无人机间的距离小于 100km，使得两架 FY-1 可以共用同一架通信中继机 FY-2。

假设 K=1 可行，则三架 FY-1 飞行的时间轴示意图如图 6-3 所示，基本保证 FY-1-C 执行侦查的时间大致覆盖 FY-1-A 和 FY-1-B 执行侦查的时间，FY-1-B 先起飞，FY-1-A 后起飞。

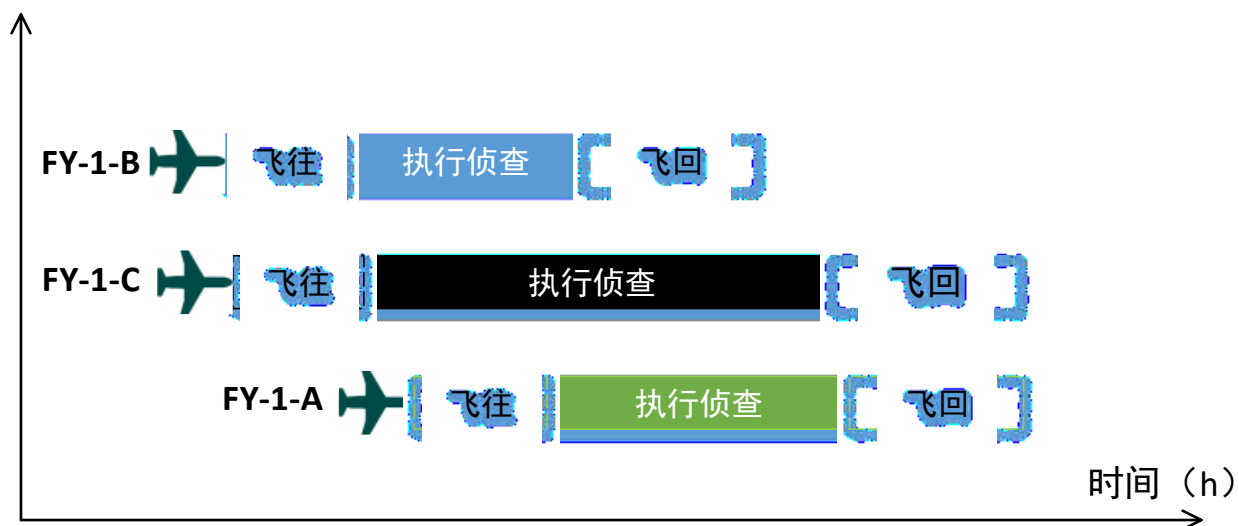


图 6-3 假设  $K=1$  可行的大致时间轴

用 Matlab 遍历所有的情况，用  $0.05h$  为步长进行演化，发现所有情况均存在某一工作时刻，三架战机之间的距离两两大于  $100km$ ，所以仅使用一架 FY-2 无法完成任务。

### 6.3 $K=2$ ，出动 2 架 FY-2

即使用两架 FY-2 完成问题（1）中的通信。

由图 6-2 可知，A08 与 A09 之间、A02 与 A01 之间、A05 与 A07 之间和 A06 与 A05 之间非常容易出现通讯问题，而从图 6-1 也可以看出，这几个通讯薄弱点之间 FY-1-C 与 FY-1-A/B 之间的短路径差距非常大，可见，仅靠两架 FY-2 非常难以满足通讯需要。

同样用 Matlab 遍历所有情况，发现均存在某一时刻，FY-1-C 与任意一架搭载 S-1 的 FY-1 战机之间的距离大于  $100km$ ，与上面的理论分析相符。

### 6.4 $K=3$ ，出动 3 架 FY-3

即使用三架 FY-2 完成问题（1）中的通信。

考虑到单架 FY-2 的巡航时间为  $8h$ ，极限情况下往返程需要消耗共  $3h$ ，因而最小有效服务时长为  $5h$ 。FY-1-A 与 FY-1-B 各自需要服务的时间为  $3.6h$  与  $4h$ ，各自空余  $1.4h$  与  $1h$ ，而 FY-1-C 需要服务的时间为  $5.3h$ ，超出时间可借助复用 FY-2 的方式来解决。

Matlab 遍历所有情况，也发现存在很多满足条件的解。



## 6.5 小结

所以，为完成问题（1）的侦查任务，至少需要三架 FY-2 型通信中继无人机。

## 7. 问题（3）解决方案

### 7.1 问题分析

本题的任务需出动 FY-1 型和 FY-3 型无人机。

FY-1 型无人机搭载 S-3 载荷，为制导炸弹提供目标指示，距离被攻击目标 15km 以内，共有 8 架 FY-1 型无人机，每架 FY-1 一次只能指示一个被攻击目标，可以同时指示多枚炸弹攻击同一目标。

FY-3 型无人机共有  $13 \times 4 + 15 \times 3 = 97$  架，分布于基地 P01~P07 内，每架 FY-3 可搭载 D-1 和 D-2 两种炸弹，载弹量为 6 枚，可搭载两种炸弹中的一种或者混搭。

D-1 炸弹为抛投炸弹，即投放后做抛物运动，10 枚可摧毁一个目标，一架 FY-3 可同时投掷多枚 D-1。D-1 的轨迹示意图如图 7-1 所示，FY-3 在 A 点抛投 D-1 炸弹，A 点距离地面高度  $H=5\text{km}$ ，D-1 在水平方向上的飞行速度与 FY-3 无人机相同， $V_{D-1}=300\text{km/h}$ ，飞行时间  $t$  后在 B 点落地爆炸，

$$\frac{1}{2}gt^2 = H$$

$$\text{飞行时间 } t = \sqrt{\frac{2H}{g}} = \sqrt{\frac{2 \times 5000}{9.8}} = 32\text{s} = 0.0089\text{h}$$

$$\text{D-1 炸弹攻击距离 } S_{D-1} = 32 \div 3600 \times 300 = 2.7\text{km}$$

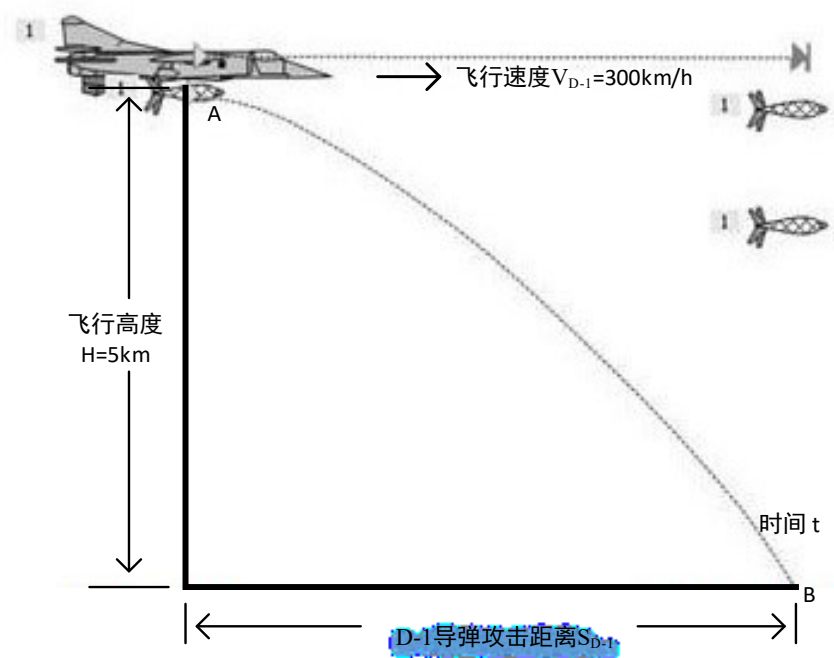


图 7-1 D-1 炸弹投弹示意图

D-2 炸弹为激光制导炸弹, 飞行速度为  $200\text{m/s}=720\text{km/h}$ , 投弹距离为  $10\sim 30\text{km}$ , 需要 FY-1 引导, 多枚 D-2 炸弹轨道不交叉, 2 枚即可摧毁目标, FY-3 可同时投掷多枚 D-2 炸弹。

共有 10 个群组中的 10 个雷达站和 58 个普通地面目标需要打击。为了使无人机滞留防御方雷达探测范围内的时间总和最小, 应首先对雷达站进行打击。打击方式有 D-1 和 D-2 两种, 建立模型如下:

$$T = T_{FY1} + T_{D1} + T_{D2} + T_{D1D2}$$

式中:

$T$  为所有无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的总时间;

$T_{FY1}$  表示所有 FY-1 无人机搭载 S-3 载荷作为引导机滞留在防御方雷达范围内的总时间;

$T_{D1}$  表示所有仅携带 D-1 炸弹的 FY-3 无人机滞留在防御方雷达范围内的总时间;

$T_{D2}$  表示所有仅携带 D-2 炸弹的 FY-3 无人机滞留在防御方雷达范围内的总时间;

$T_{D1D2}$  表示所有既携带 D-1 炸弹又携带 D-2 炸弹的 FY-3 无人机滞留在防御方雷达范围内的总时间;

设共出动  $p$  架 FY-1,  $x$  架 FY-3 仅携带 D1 炸弹,  $y$  架 FY-3 仅携带 D2 炸弹,  $z$  架 FY-3 既携带 D-1 炸弹又携带 D-2 炸弹。

$$T_{FY1} = \sum_{i=1}^p T_{FY1_i}$$

$$T_{D1} = \sum_{i=1}^x T_{D1_i}$$

$$T_{D2} = \sum_{i=1}^y T_{D2\_i}$$

$$T_{D1D2} = \sum_{i=1}^z T_{D1D2\_i}$$

$T_{FY1\_i}$  表示第  $i$  架 FY-1 无人机在雷达区滞留的时间总和；

$T_{D1\_i}$  表示第  $i$  架仅携带 D-1 炸弹的 FY-3 无人机滞留在防御方雷达范围内的时间；

$T_{D2\_i}$  表示第  $i$  架仅携带 D-2 炸弹的 FY-3 无人机滞留在防御方雷达范围内的时间；

$T_{D1D2\_i}$  表示第  $i$  架携带 D-1 炸弹又携带 D-2 炸弹的 FY-3 无人机滞留在防御方雷达范围内的时间；

### (1) 仅考虑打击单个雷达站

#### 1. 使用 D-1 炸弹

若使用 D-1 炸弹,需要至少两架 FY-3,两架 FY-3 均至少深入  $70-2.7=67.3\text{km}$ 。轨迹示意图如图 7-2 所示,两架飞机编队飞行,相距 200m,由于距离很短可忽略,所以可将两架无人机看为一个质点,A 点为雷达站,B 点为 FY-3 的投弹点,红色线段表示 FY-3 被雷达侦察到的轨迹。

根据图示可以求出两架 FY-3 在雷达区域内的总时间  $T$  为:

$$T = T_{D1} = 2T_{D1\_1} = 2(67.3 \div 300 + 0.0089) = 0.45\text{h}$$

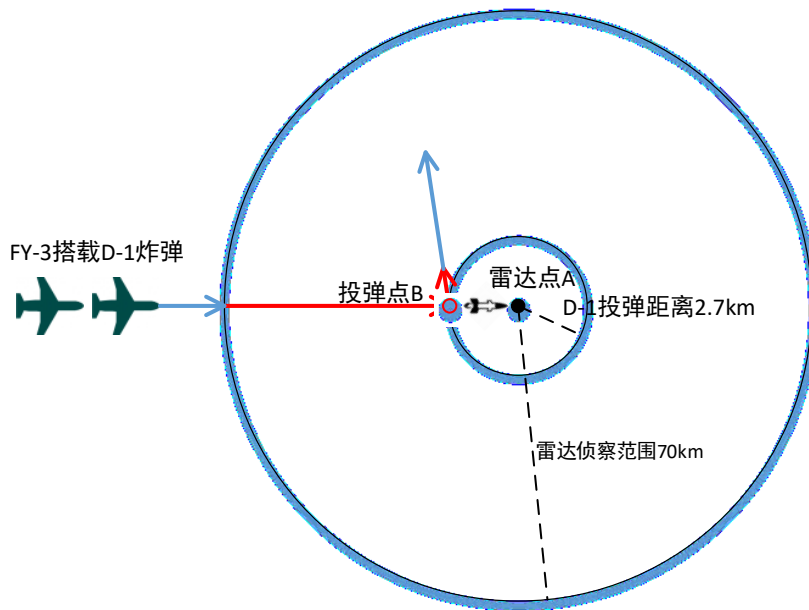


图 7-2 FY-3 装载 D-1 炸弹打击单个雷达站示意图

#### 2. 使用 D-2 炸弹

若使用 D-2 炸弹,需要至少 1 架 FY-3 和 1 架 FY-1, FY-3 需深入  $70-30=40\text{km}$ , FY-1 需深入  $70-15=55\text{km}$ 。轨迹示意图如图 7-3 所示, A 为雷达站, B 为投弹点,在 FY-3 到达投弹点 B 的同时, FY-1 需到达 C 点,对炸弹 D-2 进行引导,之后一直绕图 7-3 中的红色圆圈飞行,直至两枚 D-2 炸弹炸毁雷达站。

根据图 7-3 求出在雷达区域内的总时间  $T$  为:

$$T = T_{FY1} + T_{D1} = T_{FY1\_1} + T_{D1\_1} = 40 \div 300 + 30 \div 720 \times 2 + 55 \div 200 = 0.49h$$

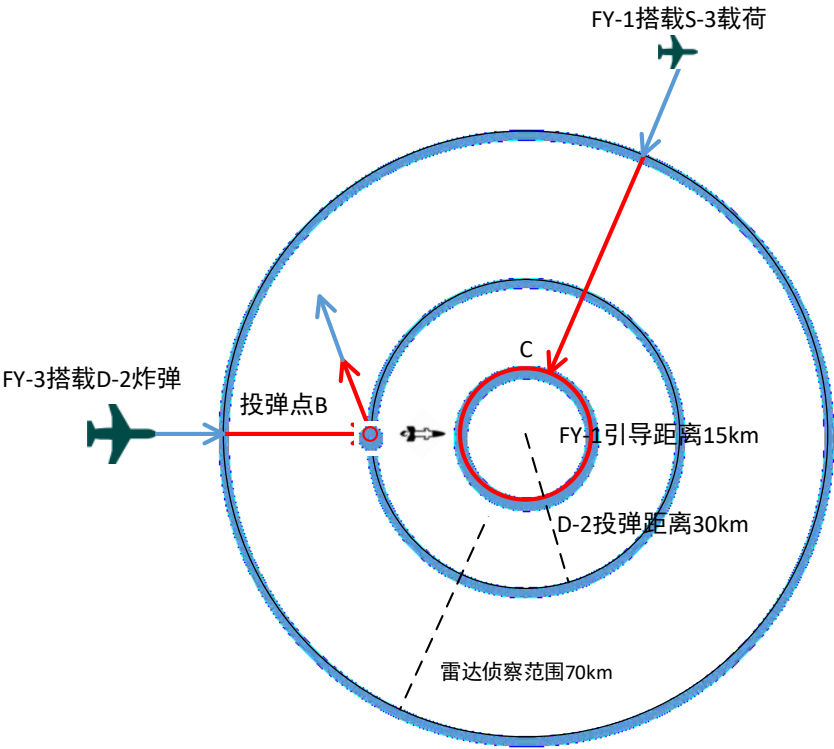


图 7-3 FY-3 装载 D-2 炸弹打击单个雷达站示意图

### 3. 结论

所以对于单个雷达站的打击，使用 D-1 炸弹优于使用 D-2 炸弹。

#### (2) 打击两个雷达范围相交的雷达站

##### 1. 使用 D-1 炸弹

若使用 D-1 炸弹对两个雷达站轰炸，则需要四架 FY-3，每架搭载 5 枚 D-1 炸弹，两两编队，同时对两个雷达点实施轰炸。四架 FY-3 在雷达区域内的总时间 T 为 0.9h。

##### 2. 使用 D-2 炸弹

若使用 D-2 炸弹对两个雷达站轰炸，需要两架 FY-1 搭载 S-3 载荷，一架 FY-3 加载 4 枚 D-2 炸弹。如图 7-4 所示，A 点和 D 点为雷达站，B 点和 C 点为两次投弹点，红色线段为 FY-3 在雷达区域内的路径，FY-3 在 B 点投完弹以后，立刻飞往雷达站 D，线段 BF 表示 D-2 炸弹从 B 飞到 A 的时间内 FY-3 飞行的距离，图中可以看出，F 点已经进入了雷达 D 的侦察范围内，所以图中的路径比两个轰炸单点雷达的路径重叠了一段 EF 的长度，所以被雷达侦察到的时间大幅减少。

### 3. 结论

在两个雷达范围相交足够多的情况下，打击两个雷达，使用 D-2 炸弹优于 D-1 炸弹。

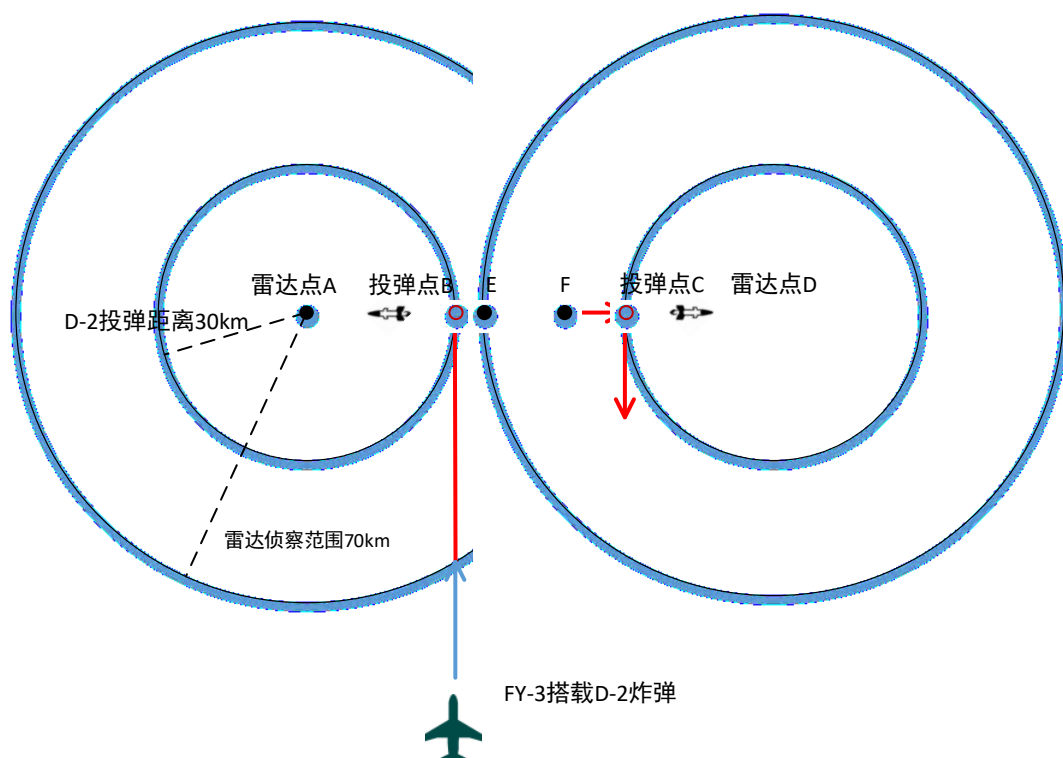


图 7-4 FY-3 装载 D-2 炸弹打击两个雷达站示意图

### (3) 总结

所以，无法手工判断打击 10 个雷达站所需的炸弹种类，为了寻找最优解，本文建立了二种模型：

模型一：所有雷达均用 D-1 炸弹炸毁；

模型二：雷达用 D-1 和 D-2 混合炸毁。

具体建模过程和结果如下所示。

## 7.2 模型 1：所有雷达均用 D-1 炸弹炸毁

首先炸毁 10 个雷达点，每个雷达点用两架 FY-3 各装填 5 枚 D-1 炸毁，共使用 20 架 FY-3，同时对 10 个雷达点进行轰炸，从 FY-3 进入雷达点到轰炸雷达的时间为  $67.3 \div 300 + 0.0089 = 0.233h$ ，小于 7h，且每架 FY-3 的飞行时间均小于 8h，所以模型成立。

本模型所有无人机在雷达区域内的总时间 T 为  $0.233h \times 20 = 4.5h$ 。

仅考虑轰炸雷达点，无人机的任务规划示意图如图 7-5 所示，路径并未严格规划，仅为示意图，共起飞 20 架 FY-3，每架 FY-3 搭载 5 枚 D-1 炸弹，轰炸对象和起飞机场如图所示进行规划。

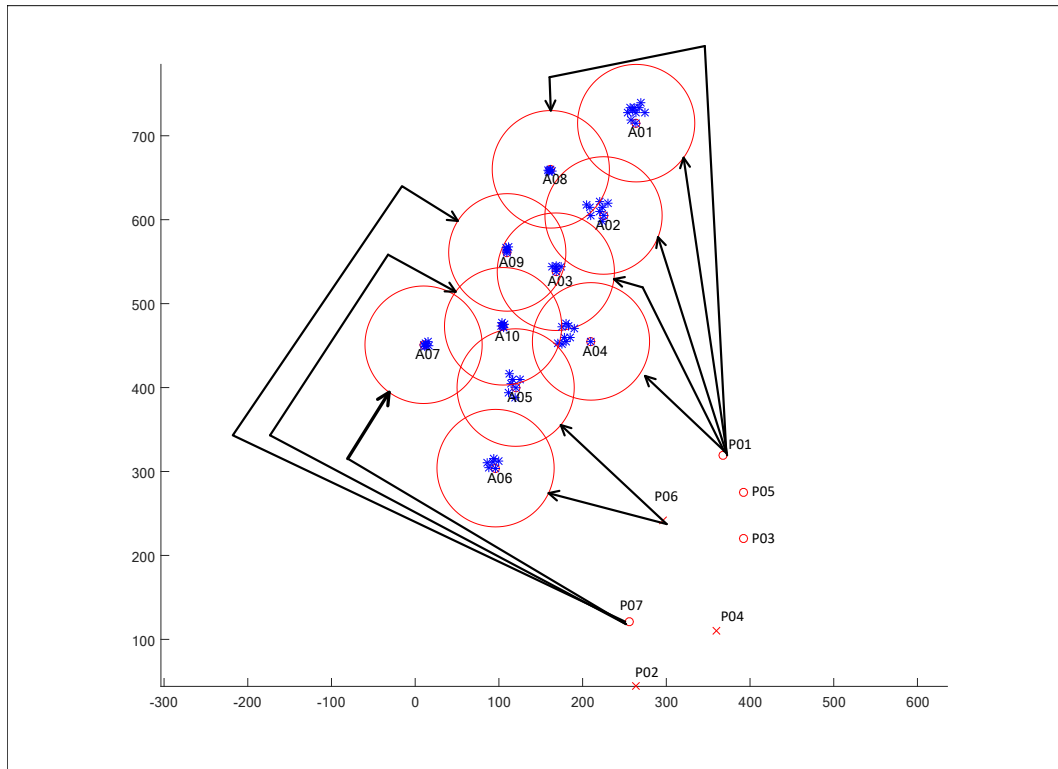


图 7-5 无人机任务规划示意图

图 7-5 中可以看出 10 个雷达探测区域存在很多相交的情况，若相交足够多，则使用 D-2 炸弹的轰炸效果优于 D-1 炸弹，所以建立模型 2。

### 7.3 模型 2：雷达用 D-1 和 D-2 混合炸毁

群组内的地面目标包括雷达站和普通目标，为了减少被雷达探测到的时间，雷达站应优先打击，完成雷达站的打击后再打击普通目标。

#### (1) 打击 10 个雷达站

首先将 10 个雷达站分组，每一组至少有 1 个雷达站，至多有 2 个雷达站。1 个雷达站的组对应的为用 D-1 进行打击的无人机分组（2 架 FY-3，各自搭载 6 枚 D-1），2 个雷达站的组对应的为用 D-2 进行打击的无人机分组（1 架 FY-3，搭载 6 枚 D-2 以及 1 架 FY-1 用于制导）。每个 D-1 分组的雷达时间固定为 0.45h，而 D-2 分组由于涉及到两圆相交的问题，需要具体分析来得到雷达时间，此处用微小步长仿真算法来求出具体的雷达时间。比较各个分组方案的雷达时间，选取最小的情况，即本题中打击各个雷达站的方案。

用 Matlab 生成的最优解如图 7-6 所示，图 7-6 描述了搭载 D-2 的 FY-3 无人机在雷达探测范围内的飞行轨迹，每架搭载 D-2 的 FY-3 负责打击两个雷达站，蓝色线段为打击第一个雷达站的飞行轨迹，红色线段为打击第二个雷达站的飞行轨迹。共起飞 4 架搭载 D-2 的 FY-3，分别打击 A0601 和 A0501，A0701 和 A1001，A，A0301 和 A0901，A0801 和 A0201。剩余的 A0101 和 A0401 分别由两架 FY-3 搭载 D-1 炸弹进行轰炸。四架搭载 D-2 的 FY-3 的进入雷达坐标和轨迹转折点

坐标见附录四。

图 7-7 列举了搭载 D-2 的 FY-3 无人机雷达探测范围内的飞行轨迹细节。

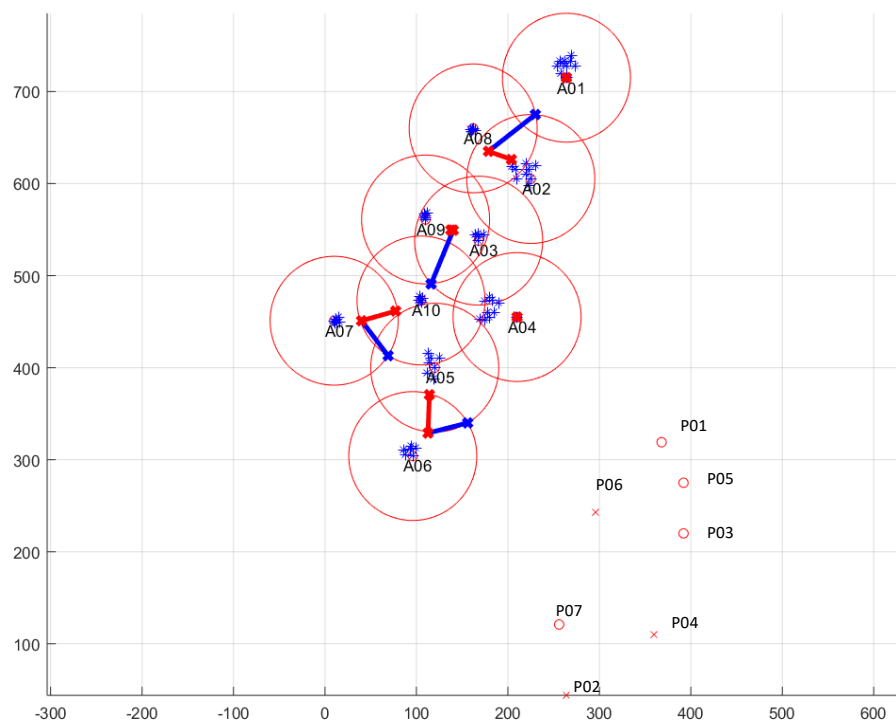


图 7-6 搭载 D-2 的 FY-3 无人机雷达探测范围内的飞行轨迹

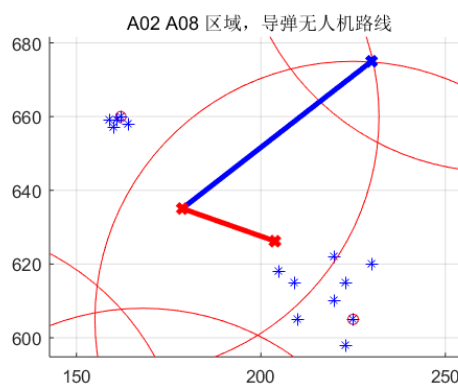
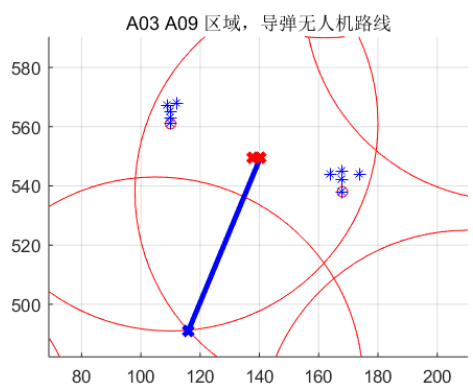
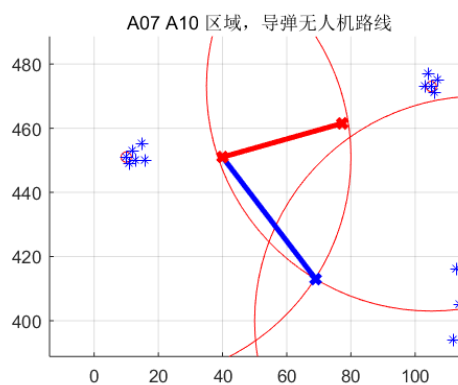
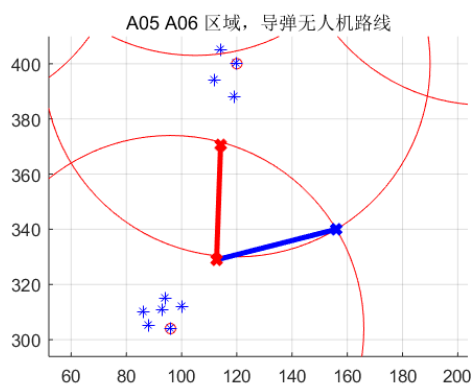


图 7-7 搭载 D-2 的 FY-3 无人机雷达探测范围内的飞行轨迹细节图

## (2) 打击普通目标

对于普通目标，10 个群组中，对于某个群组内的普通目标，其两两之间的距离均小于 30km，所以一架 FY-1 搭载 S-3 载荷可以完成对一个群组内的所有目标的 D-2 炸弹的引导。表 7-1 中列举了各群组中的普通目标被炸毁的方式，图 7-8 说明了轰炸所有普通目标的 FY-3 的轨迹示意图。

表 7-1 各群组中的普通目标被炸毁的方式

群组	普通目标数	被炸毁方式	FY-1 架数	FY-3 架数
A01	9	D-1	2	15
A02	8	D-2	1	3
A03	4	D-2	1	2
A04	9	D-1	2	15
A05	6	D-2	1	2
A06	5	D-2	1	2
A07	5	D-2	1	2
A08	4	D-2	1	2
A09	4	D-2	1	2
A10	4	D-2	1	2
总计	58		8	47

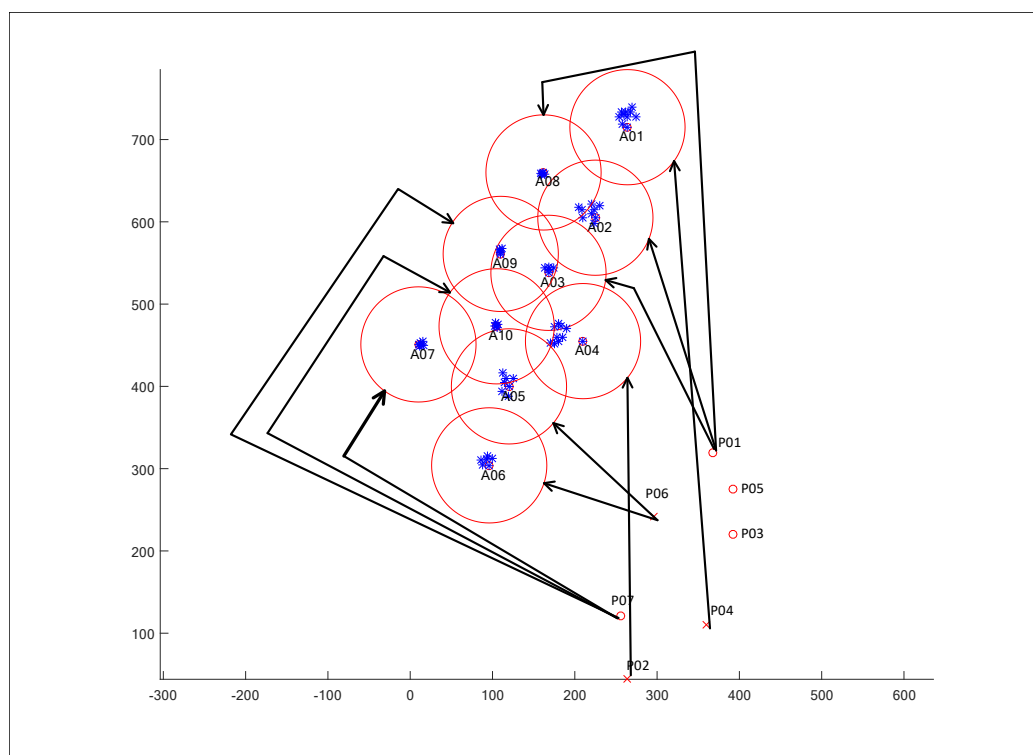


图 7-8 轰炸所有普通目标的 FY-3 轨迹示意图

模型 2 中总共需要的无人机为 8 架 FY-1,  $8+8+47=63$  架 FY-3, 而基地共有 97 架 FY-3, 无人机数量完全满足要求。

攻击雷达的最长时间为  $0.175 \times 3 = 0.525\text{h}$ , 攻击普通目标的时间最长为



$0.22+9\times0.08h=0.94h$ ，总攻击时间最长为  $0.525+0.94=1.5h$ ，远小于 7h，攻击时间满足要求。

FY-3 的续航时间为 8h，FY-1 的续航时间为 10h，在续航时间内足够完成攻击任务，续航时间满足要求。

综上，模型二成立。

### 7.3 小结

表 7-2 无人机任务规划结果

基地	无人机型号	无人机架数	每架无人机载荷	执行任务	目标
P01	FY-1	1	S-3	引导 D-2	A02 群组
	FY-1	1	S-3	引导 D-2	A08 群组
	FY-3	1	6 个 D-2	炸雷达	A0801,A0201
	FY-3	1	6 个 D-2	炸雷达	A0301,A0901
	FY-3	2	6 个 D-1	炸雷达	A0101
	FY-3	3	6 个 D-1	炸普通目标	A0202~A0204
	FY-3	2	6 个 D-2	炸普通目标	A0802~A0805
P02	FY-3	15	6 个 D-1	炸普通目标	A0402~A0410
P03	FY-1	1	S-3	引导 D-2	A06 群组
	FY-1	1	S-3	引导 D-2	A07 群组
P04	FY-3	15	6 个 D-1	炸普通目标	A0102~A0110
P05	FY-1	1	S-3	引导 D-2	A03 群组
	FY-1	1	S-3	引导 D-2	A05 群组
	FY-3	2	6 个 D-2	炸普通目标	A0502~A0507
P06	FY-3	1	6 个 D-2	炸雷达	A0601, A0501
	FY-3	2	6 个 D-1	炸雷达	A0401
	FY-3	2	6 个 D-2	炸普通目标	A0602~A0606
P07	FY-1	1	S-3	引导 D-2	A09 群组
	FY-1	1	S-3	引导 D-2	A10 群组
	FY-3	1	6 个 D-2	炸雷达	A0701, A1001
	FY-3	2	6 个 D-2	炸普通目标	A0702~A0706
	FY-3	2	6 个 D-2	炸普通目标	A0902~A0906
	FY-3	2	6 个 D-2	炸普通目标	A1002~A1006

表 7-2 列举出了所有出动的无人机携带的炸弹和攻击的目标，图 7-9 为各个

目标被攻击的时间轴，无人机根据时间轴对各个目标进行攻击。

首先对 10 个雷达进行攻击，出动 4 架 FY-3 载满 D-2 炸弹，8 架 FY-1 搭载 S-3 载荷，4 架 FY-3 载满 D-1 炸弹；当所有雷达目标被炸毁后，47 架 FY-3 立刻对普通目标执行轰炸，其中 30 架每架搭载 6 枚 D-1 炸弹，17 架每架搭载 6 枚 D-2 炸弹。

攻击方的无人机滞留防御方雷达有效探测范围内的时间总和  $T$  为：

$$T = T_{FY1} + T_{D1} + T_{D2} + T_{D1D2} = 4.3h$$

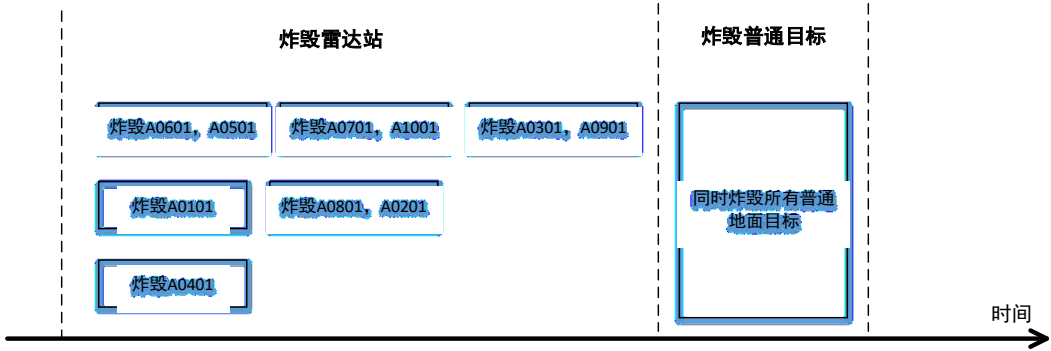


图 7-9 各个地面目标被攻击的时间轴

## 8. 问题（4）解决方案

### 8.1 问题分析

本题和第三问的差别是增加了三个远程雷达，在增加了三个雷达之后，其覆盖范围如图 8-1 所示。对雷达的打击方案就有两种可能：1）由于远程雷达的覆盖范围广，所以先打击远程雷达，减少 FY 无人机的暴露时间；2）由于远程雷达是在 A02，A05，A09 的周围，依托题三的打击路径特点，在 A02，A05，A09 周围的雷达均是问题三中混合轰炸模型的邻近范围处。可以结合问题三的模式 2 安排合适的打击方案。

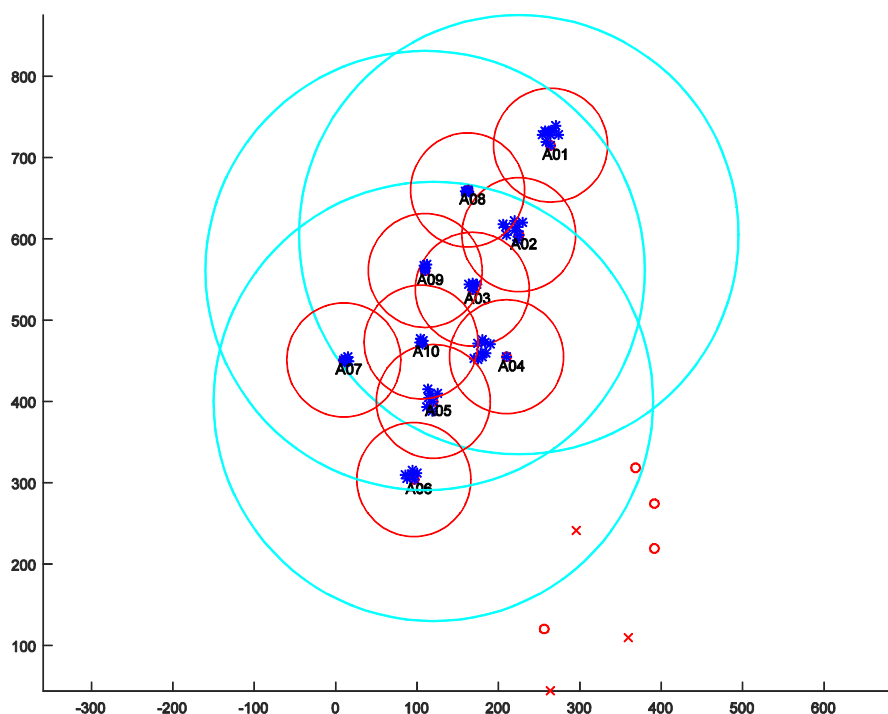


图 8-1 包含远程雷达的搜索区域示意图

## 8.2 远程雷达优先打击

如图 8-1，要先打击掉依次出现的远程雷达，由第三问知，只用抛投式轰炸的单次时间为 0.45h，用激光式导弹轰炸的时间为 0.49 小时。所以，三架远程雷达的打击路径长度约为： $(280+140+200)/200=3h$ 。在此之后，再进行问题三中模型 2 的打击方式。

## 8.3 基于模型 2 的打击方式

本题在问题（3）基础上，在 A02，A05，A09 周围增加了三个远程雷达分别为 A，C，B，如图 8-1 所示。

由问题（3）的结论知，群组 A06 和 A05，A03 和 A09，A08 和 A02 分别由一架 FY-3 携带 6 枚 D-2 炸弹进行打击，由一架 FY-1 搭载 S-3 载荷进行引导，而一架 FY-3 完成对目标的打击仅需要 4 枚 D-2 炸弹，所以每架 FY-3 无人机多携带了 2 枚 D-2 炸弹，可完成对另一个目标的轰炸。

所以当远程雷达依次工作时，雷达立刻被定位，其周边存在一架 FY-3 和一架 FY-1，可完成对远程雷达点的轰炸，并且弹药量足够完成其原有的任务。相比于先打击远程雷达的方案，这种打击方式的代价仅仅增加了从 A02，A09，A05 区域向各自周围范围内的距离，最不理想的长度为  $5r=350km$ ，多用时  $350/300=1.17h$ 。所以，此方案更优于上者。

所以问题（3）中的解决方案完全可以解决问题（4）中的情况。

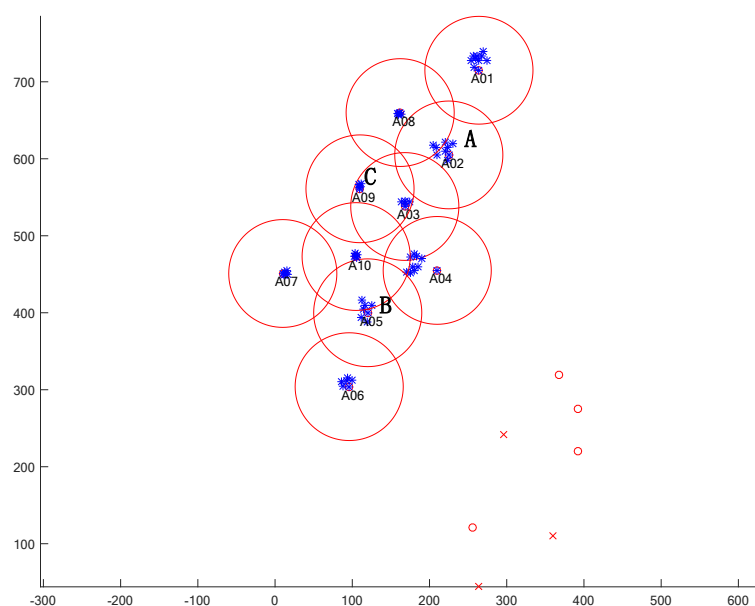


图 8-1 新增雷达位置示意图

## 8.4 小结

通过上述两种方案的分析，结合问题三的打击方式更有利于节省无人机被发现的时间。

## 9. 算法分析与实战建议

### 9.1 模型算法复杂度分析以及效率的提高

在解决第一个问题的过程中，我们选用的算法为两步渐进算法，即算法第一步确定大的集群(A01-A10)的排序，第二步算法则确定每个集群内小点的排序。首先考虑算法的第一步，假设存在  $n$  个大集群，共有  $A_n^n = n!$  种不同的排列，算法复杂度会逼近  $o(n!)$ ，显然这种算法的可实现性非常差。考虑到并不是每两个集群之间都存在相交，在实际处理中，需要引入邻接矩阵来描述集群之间的相交或相离的位置关系。引入邻接矩阵之后，算法复杂度可以大幅度降低，约为  $o(k^n)$ ， $k$  为平均邻接个数。同时注意到实际排列中只有 A01 与 A06 两个集群可以作为入点或者出点，故可以将获得排列的算法进一步降维为  $o(k^{n-2})$ 。求解每个排列对应的大致雷达时间需要遍历排列中的所有点，复杂度约为  $o(n)$ ，故第一步算法的复杂度约为  $o(n \cdot k^{n-2})$ 。

算法的第二步为确定每个集群内部点的排序，同样注意到入点与出点可以预先确定，所以这一步算法的复杂度为  $o(n \cdot (m-2)!)$ ，其中  $m$  为最大集群内点的个数。

在解决第二个问题的过程中，需要实时求出 3 架 FY-1 的坐标以判断它们之间的距离。求解坐标的过程采用了微小步长仿真算法，FY-1 的飞行路线由  $n \cdot m$  个打击点的坐标确定，仿真算法的复杂度为  $O(3 \cdot m \cdot n)$ ，基于实际情况，1 架 FY-1 起飞，在经过  $v_1$  和  $v_1$  之后，另外两架分别起飞，定义  $(v_1, v_2)$  构成的时间对个数为  $v$  个，则总复杂度为  $O(3 \cdot m \cdot n \cdot v)$ 。

在解决三、四问的过程中，首先需要根据邻接矩阵将 10 个集群进行分组，每组有 1-2 个集群，复杂度为  $O(\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} n \cdot (\frac{1}{2} n + 1) \cdot n^2) \approx O(n^4)$ ，之后对分组后的每一组求解雷达时间。由于存在公共区域问题，所以具体雷达时间的求解仍需要借助微小步长仿真算法，故最终的复杂度为  $O(n^5)$ 。

## 9.2 提升无人机作战能力的技术参数

根据本文中构建的数学模型和对模型的解析结果，以下参数可显著提高无人机的作战能力：

### （1）提高无人机巡航速度

题中 FY-1 无人机的巡航飞行速度为 200km/h，FY-2 和 FY-3 无人机的巡航飞行速度为 300km/h。飞行速度越快，无人机就能更快地对目标实行打击和侦查，在雷达探测范围内滞留的时间就会越短，可以让防御方很难对其实行有效打击。

### （2）增大 S-1 载荷的成像带宽

如图 5-4 所示，题中 S-1 载荷的成像带宽 AB 为 2km，由于一个群组中的多个目标点相距基本超过 2km，使得 FY-1 为了完成对一个群组中所有目标点的观测，需要在雷达区域内绕行多次。若增大成像带宽，则可以减少绕行次数，从而降低被击落的概率。

### （3）增大拍照范围

题中 S-2 载荷负责拍照任务，为达到一定的识别精度，其对地面目标的距离不超过 7.5km，而一个群组中的很多目标点之间的距离超过了  $2 \times 7.5 = 15\text{km}$ ，无人机也需要绕行去拍摄完所有的地面目标。若增大拍照范围，则可以有效减少无人机在雷达区域内的绕行路径。

### （4）增大 S-3 的引导距离

对于 FY-3 无人机加载 D-2 炸弹执行轰炸任务，其 D-2 炸弹需要 FY-1 加载 S-3 载荷对其进行激光制导，全程引导直至击中目标，在引导时要求 S-3 目标指示器距离被攻击的目标不超过 15km，远小于雷达的探测范围 70km，所以 FY-1 不仅需要飞入雷达区，且需要在雷达区内完成对 D-2 炸弹的引导。若增大 S-3 的引导距离，可以让 FY-1 深入雷达区的距离变短，减小危险系数。

### （5）增大 D-2 炸弹的飞行速度

D-2 炸弹在飞向目标时需要 FY-1 加载 S-3 在目标点周围全程引导，其飞行速度直接决定了 FY-1 在雷达周围的滞留时间，飞行速度越快，需要引导的时间越短，FY-1 在雷达周围的滞留时间越短。

### （6）增大续航时间

续航时间越长，无人机一次飞行可执行的任务越多，比如问题（1）中的侦查任务，长的续航时间可以让一架 FY-1 完成更多地面目标的侦查任务，降低了危险系数。

(7) 实现一架无人机加载多种载荷

问题(1)中,无人机 FY-1 若可同时加载 S-1 和 S-2 载荷,则可同时完成拍照任务和成像任务,大大减少了任务的复杂度和执行时间。

(8) 研发无人机的隐形技术

使得无人机能够不被防御方的雷达系统侦察到。

## 参考文献

- [1]彭辉,基于 HLA 的无人机系统任务推演技术研究,工学硕士学位论文。
- [2]袁利平,夏洁,陈宗基,多无人机协同路径规划研究综述,飞行力学,27(5): 1-5, 2009。
- [3]王磊,施荣华,基于粒子群算法的无人机航路规划与建模仿真,计算机仿真,28(4): 74-77, 2011。
- [4]苏磊,姚宏,邓涛,彭兴钊,大规模无人机编队建模和目标分配优化,计算机仿真,30(7): 78-81, 2013。
- [5]丁力军,丁海生,卞航,无人机系统建模仿真研究及应用,航空科学技术,23(1): 22-24, 2009。
- [6]胡广,无人机环境建模和运动规划算法研究,大连理工大学,2015。
- [7]郑涛,高正红,孔祥骏,无人机系统仿真建模研究,飞行力学,20(3): 25-28, 2002。
- [8]宁东方,章卫国,田娜,无人机自动起飞系统控制建模和控制规律设计研究,计算测量与控制,16(1): 66-67, 2008。
- [9]谭申强,龚华军,王彪,杨忠,基于面向对象 Petri 网的无人机协同追踪系统建模,计算机应用研究,26(3): 12-16, 2009。
- [10] 蔡云鹏,闫建国,王亮,无人机发射过程建模与控制方法研究,飞行力学,28(1): 80-83, 2010。

## 附录

附录一：

FY-1-A 从起飞到降落的飞行轨迹坐标							
X 坐标 (km)	Y 坐标 (km)	X 坐标 (km)	Y 坐标 (km)	X 坐标 (km)	Y 坐标 (km)	X 坐标 (km)	Y 坐标 (km)
368	319	262	735	223	617	108	563
330	750	268	735	209	617	108	565
250	820	266.1026	733.6325	207.9262	616.6873	108.2111	564.1056
210	760	268.1026	739.6325	218.9262	623.6873	107.2111	566.1056
257.0195	720.7432	271.9403	738.5149	220.5153	620.0675	110.9728	567.3288
273.0195	729.7432	265.9403	714.5149	205.5153	616.0675	111.9728	561.3288
274	730	231.8974	619.3675	163.4142	658.5858	165.6641	545.1094
264	730	226.8974	604.3675	162.4142	657.5858	169.6641	539.1094
264	730	226.923	604.4506	161	661	166	538
254	730	224.923	597.4506	159	661	166	542
252.285	729.029	222.0518	596.2391	160.7889	659.8944	166	542
255.285	734.029	209.0518	603.2391	161.7889	657.8944	166	545
258.1094	734.6641	209.1056	606.7889	159.5149	658.9403	168.3288	546.9728
261.1094	732.6641	219.1056	611.7889	163.5149	659.9403	174.3288	545.9728
258.5858	732.4142	218.285	611.029	113.857	567.2572	260	510
260.5858	734.4142	221.285	616.029	111.857	562.2572	368	319

附录二：

FY-1-B 从起飞到降落的飞行轨迹坐标							
X 坐标 (km)	Y 坐标 (km)	X 坐标 (km)	Y 坐标 (km)	X 坐标 (km)	Y 坐标 (km)	X 坐标 (km)	Y 坐标 (km)
256	121	110.4478	395.2612	10.8	451.4	169.1542	454.8124
95.75193	302.0154	123.4478	411.2612	10.8906	454.6641	184.1542	461.8124
87.75193	303.0154	125.8276	408.1793	13.8906	456.6641	185	462
86.99226	306.7276	114.8276	403.1793	106.7889	473.8944	178	462
98.99226	313.7276	112.143	405.7428	107.7889	471.8944	176.7196	461.5364
100.2828	310.0201	114.143	410.7428	104.8906	469.3359	188.7196	471.5364
93.28284	309.0201	114.2111	409.1056	101.8906	471.3359	189.2122	468.1617
93.28284	309.0201	111.2111	415.1056	102.1056	474.7889	182.2122	471.1617
86.28284	308.0201	11.78885	451.8944	106.1056	476.7889	183.2481	471.0154
84.94	311.696	12.78885	449.8944	105.8906	473.3359	175.2481	470.0154
92.94	316.696	10.10557	450.7889	102.8906	475.3359	173.7506	473.5617
117.0069	388.1661	12.10557	451.7889	181.029	453.285	178.7506	477.5617
118.0069	400.1661	13	452	176.029	450.285	181.1469	477.6385
121.2	398.4	16	452	174.6078	450.0388	211.1469	456.6385
113.2	392.4	14.8	448.4	169.6078	451.0388	256	121

附录三：

FY-1-C 从起飞到降落的飞行轨迹坐标							
X 坐标 (km)	Y 坐标 (km)	X 坐标 (km)	Y 坐标 (km)	X 坐标 (km)	Y 坐标 (km)	X 坐标 (km)	Y 坐标 (km)
368	319	117.5022	410.1829	177.5	474	224	601.5
120	236	114.5	413	168.4	542.6	261	717
87	307.5	16.83333	451.3333	116.2	564.8	257	730.6667
91.43505	309.9507	105	473.8	161.2	652.6	262	730.6667
95.66667	312.6667	172.5	452.5	207	616.5	266.5092	728.3719
117.5929	395.3668	179	457.5	216.1763	609.2548	269	736
113.2514	401.3949	181.5	460	218.4497	614.662	284	782
116.5809	406.6753	202.769	456.9908	224.1053	615.3629	330	783
115	407.5	183.4093	466.4206	221.5	612.5	368	319

附录四：

四架携带 D-2 的 FY-3 轰炸雷达目标的雷达进入点和转折点坐标							
第一架 FY-3		第二架 FY-3		第三架 FY-3		第四架 FY-3	
X 坐标 (km)	Y 坐标 (km)	X 坐标 (km)	Y 坐标 (km)	X 坐标 (km)	Y 坐标 (km)	X 坐标 (km)	Y 坐标 (km)
156	340	69	413	116	491	230	675
112.6671	328.9441	40	451	140.2836	549.4805	178.6671	635.0559
114.1473	370.5764	77.28361	461.5195	137.7164	549.5195	203.7868	626.2132