Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
механико-математический факультет
кафедра математической статистики и случайных процессов

Курсовая работа
студента 503 группы
Купрякова Василия Юрьевича

Непараметрическая вейвлет-оценка плотности мультипликативно зашумленных данных

Научный руководитель:
с.н.с., к.ф.-м.н.
Шкляев Александр Викторович

Москва, 2021

Оглавление

§1. Введение

В работу мы изучим задачу, которая возникает при исследовании примесий в жидкости.

Примеси в исследуемой жидкости — это движущиеся частицы с размерами порядка 10^{-8} м. Жидкость просвечивают лазером, а камера фиксирует частицы, которые попали в луч.

Получается последовательность изображений. Для каждой частицы эта последовательность является последовательностью проекций частиц на площадь камеры. Мы можем построить векторы перемещений частиц в проекции на плоскость камеры по этим снимкам. Для отдельной частицы такие перемещения образуют броуновское движение с нулевым сносом и дисперсией $\sigma^2 = c/d$, где c — некоторая константа, а d — размер частицы.

Проблема в том, что размер частицы не связан напрямую с размером ее изображения. Наша задача — оценить распределение истинных размеров частиц по размерам на снимках.

Будем изучать равносильную задачу: оценить распределение σ^2. Рассмотрим n случайно выбранных частиц $E_1, \dots, E_n$. Обозначим дисперсии для их движения как $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$. Для i-й частицы у нас есть два $k(i)$-мерных вектора перемещений: $A_i^1, \dots, A_i^{k(i)}$ по оси x и $A_i^{k(i)+1}, \dots, A_i^{2k(i)}$ по оси y. Мы будем рассматривать только частный случай, когда все $k(i)$ равны k, а σ_i^2 непрерывна.

$A_i^1, \dots, A_i^{2k}$ условно независимы при условии σ_i^2 и имеют условное распределение $\mathcal{N}\left(0, \sigma_i^2\right)$. Дальше вместо выборки $A_i^1, \dots, A_i^{2k}$ будем рассматривать достаточную статистику $Z_i = \sum\limits_{j=1}^{2k} \left(A_i^j\right)^2$. Заметим далее, что $Z_i = \sigma_i^2 Y_i$, где $Y_i \sim \chi^2_{2k}$. При этом, Y_i независимы и не зависят от дисперсии σ_i^2.

Обозначим $X_i = \sigma_i^2$. Тогда задачу можно сформулировать так: $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с неизвестным распределением и положительным носителем; $Y_1, \dots, Y_n$ — независимые от них н.о.р. с.в. с распределением χ^2_{2k}; $Z_1, \dots, Z_n = X_1 Y_1, \dots, X_n Y_n$ — наблюдаемые случайные величины; а сама задача — по наблюдениям $Z_1, ..., Z_n$ оценить распределение X_1.

§2. Сведение задачи к вычислению обратного преобразования Лапласа

Есть случайные величины X, Y, Z. Мы не знаем распределение X, знаем распределение Y и наблюдаем Z. Кроме того, известно, что $Z = XY$, и что все величины непрерывны. Нужно оценить распределение X.

Мы будем использовать вейвлет «Mexican hat», потому что он прост и непрерывен. Его формула:

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}(1 - t^2)e^{-t^2/2}.$$

Определим элементы фрейма:

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}}\psi\left(\frac{t}{2^m} - n\right) = \frac{1}{\sqrt{2^m}}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\left(1 - \left(\frac{t}{2^m} - n\right)^2\right)e^{-\left(\frac{t}{2^m} - n\right)^2/2}.$$

Рассмотрим случай $Y \sim \chi^2_{2k}$; $X > \delta > 0$, абсолютно непрерывен. Плотность Y:

$$\chi^2_{2k} \sim \frac{1}{2^k}\frac{1}{\Gamma(k)}x^{k-1}e^{-x/2}.$$

Будем строить функции $g_{m,n}$ такие, что $\mathrm{E}\, g_{m,n}(Z) = \mathrm{E}\, \psi_{m,n}(X)$. Заметим, что достаточно выполнения:

$$\forall x \in \operatorname{Im} X \quad \mathrm{E}\, g_{m,n}(xY) = \psi_{m,n}(x).$$

Заменим мат. ожидание преобразованием Лапласа и раскроем $\psi_{m,n}$:

$$\left(\frac{1}{2x}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z\left[g_{m,n}(z)z^{k-1}\right]\left(\frac{1}{2x}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{x}{2^m} - n\right).$$

Сделаем замену $u = \frac{1}{2x}$:

$$u^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z\left[g_{m,n}(z)z^{k-1}\right](u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right).$$

Используя обратное преобразование Лапласа, найдем $g_{m,n}(t)$:

$$
\begin{aligned}
u^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z \left[g_{m,n}(z) z^{k-1}\right](u) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right) \\
L_z \left[g_{m,n}(z) z^{k-1}\right](u) &= \frac{\Gamma(k)}{u^k} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right) \\
g_{m,n}(t) t^{k-1} &= L_u^{-1}\left[\frac{\Gamma(k)}{u^k} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)\right](t) \\
g_{m,n}(t) &= \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)\right](t).
\end{aligned}
$$

Таким образом мы получили выражение для $g_{m,n}(t)$. Далее мы выразим его через ряды, используя формулу Меллина и основную теорему о вычетах.

§3. Вычисление обратного преобразования Лапласа с помощью формулы Меллина и основной теоремы о вычетах

Мы выразили $g_{m,n}(t)$ как:

$$g_{m,n}(t) = \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t). \tag{3.1}$$

Теперь нужно вычислить обратное преобразование Лапласа. Для этого мы будем использовать формулу Меллина:

$$L_s^{-1} \left[F\left(s\right) \right] (t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{ts} F(s) ds.$$

Итак, нам нужно вычислить:

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t).$$

Подставим вместо ψ формулу нашего вейвлета:

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) =$$
$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left(1 - \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 \right) \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 \right) \right] (t).$$

Распишем множитель перед экспонентой:

$$1 - \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2^{2(m+1)}u^2} - 2\frac{1}{2^{m+1}u} n + n^2 \right) =$$
$$\left(1 - n^2\right) + \frac{1}{u} \left(\frac{n}{2^m} \right) - \frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right).$$

Введем обозначение:

$$r_{m,n}(u) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)\right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)\right](t) = \\ = \left(1-n^2\right) L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u)\right](t) + \left(\frac{n}{2^m}\right) L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+1}} r_{m,n}(u)\right](t) - \\ - \left(\frac{1}{4^{m+1}}\right) L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+2}} r_{m,n}(u)\right](t). \end{aligned} \tag{3.2}$$

Отсюда видно, что достаточно найти $L_u^{-1}[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u)](t)$ для каждого k.

3.1 Находим $L_u^{-1}[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u)](t)$

Выше мы ввели

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u)\right](t).$$

Подставим обратно $r_{m,n}(u)$:

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u)\right](t) = L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)^2\right)\right](t).$$

Раскроем квадрат под экспонентой:

$$\begin{aligned} L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u)\right](t) = \\ = L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(n^2\right) - \frac{1}{u}\left(\frac{n}{2^m}\right) + \frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)\right)\right)\right](t). \end{aligned}$$

Сгруппируем $2^{m+1}u$:

$$\begin{aligned} L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u)\right](t) = \\ = L_u^{-1}\left[\frac{2^{k(m+1)}}{\left(2^{m+1}u\right)^k}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2^{m+1}u} - \frac{1}{2\left(2^{m+1}u\right)^2}\right)\right](t). \end{aligned}$$

Вынесем множители, не зависящие от u, за L_u^{-1}:

$$\begin{aligned} L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u)\right](t) = \\ = e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_u^{-1}\left[\frac{1}{\left(2^{m+1}u\right)^k} \exp\left(\frac{n}{2^{m+1}u} - \frac{1}{2\left(2^{m+1}u\right)^2}\right)\right](t). \end{aligned}$$

Используя теорему о замене переменной в обратном преобразовании Лапласа, делаем замену $s = 2^{m+1}u$:

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t) = e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}-\frac{1}{2s^2}\right)\right]\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right).$$

3.2 Находим обратное преобразование Лапласа

В предыдущем разделе мы выразили:

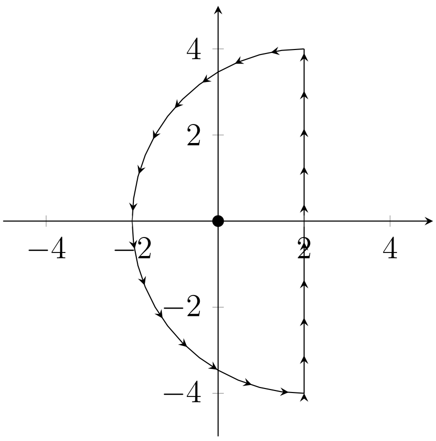
$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t) = e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}-\frac{1}{2s^2}\right)\right]\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right). \tag{3.3}$$

Чтобы вычислить правую часть, найдем теперь

$$L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}\right)\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\right](\tau). \tag{3.4}$$

Воспользуемся формулой Меллина обратного преобразования Лапласа. У нас особенность только в нуле, поэтому можно взять любую $\alpha > 0$:

$$L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}\right)\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\right](\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau}\frac{1}{s^k}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}ds.$$



Берем контур $C = C_1 + C_2$, где C_1 — искомый, а C_2 — дуга окружности (слева от C_1 с центром в $(\alpha, 0)$).

Оценим $F(s) := (1/s^k)e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}$ на C_r, где $r > 4\alpha$. Для этого оценим каждый из множителей. Сначала $1/s$:

$$\left|\frac{1}{s}\right| = \left|\frac{1}{\alpha + re^{i\phi}}\right| = \frac{1}{\sqrt{(\alpha + r\cos\phi)^2 + (r\sin\phi)^2}} = \frac{1}{r\sqrt{\left(\frac{\alpha}{r}+\cos\phi\right)^2+\sin^2\phi}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{r\sqrt{1+\frac{2\alpha\cos\phi}{r}}} \leq \frac{1}{r\sqrt{1+\frac{\cos\phi}{2}}} \leq \frac{\sqrt{2}}{r}.$$

Теперь оценим $e^{-1/(2s^2)}$ на том же контуре. Известно, что $|e^z| = e^{|z|}$

$$\left|\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\right| \le \exp\left(\left|-\frac{1}{2s^2}\right|\right) = \exp\left(\frac{1}{r^2}\right).$$

Аналогично оцениваем $e^{n/s}$:

$$\left|\exp\left(\frac{n}{s}\right)\right| \le \exp\left(\left|\frac{n}{s}\right|\right) = \exp\left(\frac{|n|\sqrt{2}}{r}\right).$$

Объединяем оценки и получаем:

$$\left|\frac{1}{s^k}\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\exp\left(\frac{n}{s}\right)\right| \le \left(\frac{\sqrt{2}}{r}\right)^k \exp\left(\frac{1}{r^2}\right)\exp\left(\frac{|n|\sqrt{2}}{r}\right) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0.$$

А значит, по лемме Жордана $\int\limits_{C_r} e^{s\tau}F(s)ds$ стремится к нулю. Поэтому можем использовать основную теорему о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau}\frac{1}{s^k}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}ds = \frac{1}{2\pi i}2\pi i\operatorname*{Res}_0\left(e^{s\tau}\frac{1}{s^k}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}ds\right).$$

У нас возникает два случая: $n = 0$ и $n \neq 0$

3.2.1 Случай $n = 0$

Воспользуемся теоремой о правильной части функции $e^{s\tau}e^{-1/(2s^2)}$. Нам нужен $k-1$-й член ряда Лорана. Получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau}\frac{1}{s^k}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}ds = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tau^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!}.$$

Таким образом, мы выразили вычислили 3.4:

$$L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}\right)\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\right](\tau) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tau^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!}.$$

Подставим это выражение в 3.3, заменяя τ на $t/2^{m+1}$:

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t) =$$

$$= e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}-\frac{1}{2s^2}\right)\right]\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right) =$$

$$e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!}.$$

Наконец, подставим это в 3.2:

$$
\begin{aligned}
&L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u}-n\right)\right](t) = \\
&\qquad = \left(1-n^2\right)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t) + \left(\frac{n}{2^m}\right)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+1}}r_{m,n}(u)\right](t) + \\
&\qquad\qquad + \left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+2}}r_{m,n}(u)\right](t) = \\
&\qquad = \left(1-n^2\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!} + \\
&\qquad + \left(\frac{n}{2^m}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{k(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k}/(-2)^j}{(2j+k)!\,j!} - \\
&\qquad - \left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k+1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1}/(-2)^j}{(2j+k+1)!\,j!}. \qquad (3.5)
\end{aligned}
$$

Теперь получим выражение для $g(t)$, подставляя только что полученную формулу в 3.1:

$$
\begin{aligned}
g_{m,n}(t) &= \frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u}-n\right)\right](t) = \\
&= \frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\left(1-n^2\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!} + \\
&+ \frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\left(\frac{n}{2^m}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{k(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k}/(-2)^j}{(2j+k)!\,j!} - \\
&- \frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k+1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1}/(-2)^j}{(2j+k+1)!\,j!}.
\end{aligned}
$$

Начнем упрощать выражение. Для начала, вынесем из суммы, степень, не зависящую от переменной суммирования и сделаем замену $n = 0$ (так как рассматриваем именно этот случай):

$$
g_{m,0}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!} - \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j}/(-2)^j}{(2j+k+1)!\,j!}\right).
$$

3.2.2 Случай $n \neq 0$

Воспользуемся теоремой о правильной части функции $e^{s\tau}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}$. Нам нужен $k-1$-й член ряда Лорана. Получаем:

$$
\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau}\frac{1}{s^k}e^{-1/2s^2}e^{n/s}ds = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tau^{2j+k-1+i}/(-2)^j}{(2j+k-1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}.
$$

Таким образом, мы выразили вычислили 3.4:

$$L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}\right)\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\right](\tau)=\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tau^{2j+k-1+i}/(-2)^j}{(2j+k-1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}.$$

Подставим это выражение в 3.3, заменяя τ на $t/2^{m+1}$:

$$\begin{aligned}L_u^{-1}&\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t)=\\&=e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}-\frac{1}{2s^2}\right)\right]\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)=\\&=e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1+i}/(-2)^j}{(2j+k-1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}.\end{aligned}$$

Наконец, подставим это в 3.2:

$$\begin{aligned}L_u^{-1}&\left[\frac{1}{u^k}\psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u}-n\right)\right](t)=\\&=\left(1-n^2\right)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t)+\left(\frac{n}{2^m}\right)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+1}}r_{m,n}(u)\right](t)+\\&\qquad+\left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+2}}r_{m,n}(u)\right](t)=\\&=\left(1-n^2\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1+i}/(-2)^j}{(2j+k-1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}+\\&\quad+\left(\frac{n}{2^m}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{k(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+i}/(-2)^j}{(2j+k+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}-\\&\quad-\left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k+1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1+i}/(-2)^j}{(2j+k+1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}.\end{aligned}\tag{3.6}$$

Теперь получим выражение для $g_{m,n}(t)$, подставляя только что полученную формулу в 3.1

$$\begin{aligned}g_{m,n}(t)&=\frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u}-n\right)\right](t)=\\=&\frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\left(1-n^2\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1+i}/(-2)^j}{(2j+k-1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}+\\&+\frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\left(\frac{n}{2^m}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{k(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+i}/(-2)^j}{(2j+k+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}-\\&-\frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k+1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1+i}/(-2)^j}{(2j+k+1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}.\end{aligned}$$

Упростим:

$$g_{m,n}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} e^{-\frac{n^2}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left(\left(1-n^2\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)!\, j!} \frac{n^i}{i!} + \right.$$
$$+ \left(\frac{nt}{2^m}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+i)!\, j!} \frac{n^i}{i!} -$$
$$\left. - \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+1+i)!\, j!} \frac{n^i}{i!} \right).$$

3.3 Результат

Выпишем обе полученные формулы вместе:

$$g_{m,0}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j} / (-2)^j}{(2j+k-1)!\, j!} - \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j} / (-2)^j}{(2j+k+1)!\, j!} \right).$$

$$g_{m,n}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} e^{-\frac{n^2}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left(\left(1-n^2\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)!\, j!} \frac{n^i}{i!} + \right.$$
$$+ \left(\frac{nt}{2^m}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+i)!\, j!} \frac{n^i}{i!} -$$
$$\left. - \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+1+i)!\, j!} \frac{n^i}{i!} \right).$$

К сожалению, такой способ не привел к успеху из-за непригодности для численных методов.

§4. Альтернативный подход к задаче

Вспомним наше изначальное интегральное уравнение:

$$\psi_{m,n}(x) = \int\limits_0^\infty g(xy) f_Y(y) dy.$$

Преобразуем интеграл, чтобы интегрирование было по xy:

$$\psi_{m,n}(x) = \int\limits_0^\infty g(xy) f_Y(\frac{xy}{x}) d\frac{xy}{x} = \int\limits_0^\infty \int\limits_0^\infty g(z) \frac{1}{x} f_Y(\frac{z}{x}) dz.$$

Таким образом мы получили интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$\psi_{m,n}(x) = \int\limits_0^\infty K(x,z) g(z) dz.$$

Дальше мы будем использовать равномерную сетку $\left[\frac{1}{n_x}, \dots, \frac{l_x n_x}{n_x}\right]$ для x, $\left[\frac{1}{n_z}, \dots, \frac{l_z n_z}{n_z}\right]$ для z и дискретизируем наше уравнение. Получаем:

$$\psi_{m,n}[x] = \int\limits_0^\infty K[x,z] g[z] dz = \frac{1}{n_z} \sum_{p=1}^{l_z n_z} g\left(\frac{p}{n_z}\right) K\left[x, \frac{p}{n_z}\right].$$

Таким образом, мы получили систему линейных уравнений. Запишем их в матричном виде:

$$\boldsymbol{\psi}_{m,n} = \frac{1}{n_z} \boldsymbol{K} \boldsymbol{g}.$$

Увеличим матрицу K, чтобы добавить регуляризацию.

$$\tilde{\boldsymbol{K}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{K} \\ \alpha \boldsymbol{E} \end{pmatrix}.$$

И соответствующий $\tilde{\boldsymbol{f}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}.$$

И будем использовать МНК-оптимизацию. Получаем:

$$\boldsymbol{g}_* = \arg\min_{\boldsymbol{g}} \|\tilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}\|.$$

4.1 Градиентный спуск

Вместо процедур для решения МНК-задачи мы можем использовать метод градиентного спуска. Будем использовать матричное представление

$$\boldsymbol{\psi}_{m,n} = \frac{1}{n_z}\boldsymbol{K}\boldsymbol{g}.$$

Тогда можно ввести функцию потери $L(\boldsymbol{\psi_{m,n}}, \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{m,n}})$, где $\hat{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{m,n}} = \boldsymbol{K}\hat{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{m,n}}$, а $\hat{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{m,n}}$ — оценка для $\boldsymbol{g_{m,n}}$.

В частности, будем рассматривать следующие функции потерь:

- $l1$-потеря: $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|x - y\|_1$;
- $l2$-потеря: $L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \|x - y\|_2$;
- функция потери Хьюбера:

$$L(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x-y)^2, \text{ при } |x-y| \leqslant 1 \\ |x-y| - \frac{1}{2}, \text{ при } |x-y| > 1 \end{cases}.$$

$$L(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{y}) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{k} L(x_i, y_i)$$

Для каждой из них будем использовать L_1- или L_2-регуляризацию:

$$\tilde{L}(\boldsymbol{\psi_{m,n}}, \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{m,n}}) = L(\boldsymbol{\psi_{m,n}}, \hat{\boldsymbol{\psi}}_{\boldsymbol{m,n}}) + \|\boldsymbol{g_{m,n}} - \hat{\boldsymbol{g}}_{\boldsymbol{m,n}}\|$$

4.2 Итеративные методы

В статье [1] рассматриваются итеративные методы решения задачи Фредгольма первого рода: аддитивный и мультипликативный.

В приложении к задаче аддитивный метод использует следующие итерации:

$$g_{m,n;k}(z) = g_{m,n;k-1}(z) = \int_0^\infty K(x,z)(\psi_{m,n;k}(x) - \psi_{m,n}(x))dx,$$

$$\psi_{m,n;k}(x) = \int_0^\infty K(x,z)g_{m,n;k}(z)dz.$$

Для мультипликативного метода используются такие итерации:

$$g_{m,n;k}(z) = \frac{g_{m,n;k-1}(z)}{\int_0^\infty K(x,z)dx} \int\limits_0^\infty \frac{K(x,z)\psi_{m,n}(x)}{\psi_{m,n;k}(x)} dx,$$

$$\psi_{m,n;k}(x) = \int\limits_0^\infty K(x,z) g_{m,n;k}(z) dz.$$

Так как ψ и g могут принимать отрицательные значения, производится следующее преобразование: выбирается параметр t, $\psi_{m,n}$ заменяется на $\tilde{\psi}_{m,n} = \psi_{m,n} + t$, $f_{m,n;0}$ заменятся на $\tilde{f}_{m,n;0} = f_{m,n;0} + t$.

4.3 Поправка для оценок

Будем также использовать поправку, предложенную в статье [2] В ней рассматриваются два случая: когда интеграл

$$\int \max(\hat{f}(x), 0) dx$$

больше 1, и когда меньше единицы.

В первом случае оценка $\hat{f}$ заменяется на $\tilde{f}(x) = \max(0, \hat{f}(x) - \xi)$, где ξ выбирается так, чтобы выполнялось

$$\int \tilde{f}(x) dx = 1.$$

Во втором случае используется оценка

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x; M) = \begin{cases} \max(0, \hat{f}(x)) + \eta_M, \text{ для } |x| \leqslant M, \\ \max(0, \hat{f}(x)), \text{ для } |x| > M, \end{cases}$$

где

$$\eta_M = \frac{1}{2M} \left(1 - \int \max(0, \hat{f}(x)) dx \right).$$

§5. Эксперименты

Для аналитического способа.

Функция	Способ вычисления	Машинная точность (размер мантиссы),	Значение
$g_{0,0}(1)$	численно, интеграл, контур $[1-100i, 1+100i]$	100 десятичных знаков	0.864
	численно, ряд	256 двоичных знаков	0.864
$g_{0,0}(10)$	численно, интеграл контур $[1-100i, 1+100i]$	100 десятичных знаков	0.591
	численно, ряд	256 двоичных знаков	0.591
$g_{0,0}(100)$	численно, интеграл контур $[1-10i, 1+10i]$	100 десятичных знаков	-2×10^{19}
	численно, ряд	256 двоичных знаков	-0.440

Для численного вычисления интеграла. Мы использовали шаг 0,1 и $\alpha = 0{,}1$. И использовали $m = \{-5, \dots, 5\}$, $n = \{-5, \dots, 5\}$.

Рис. 5.1: $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

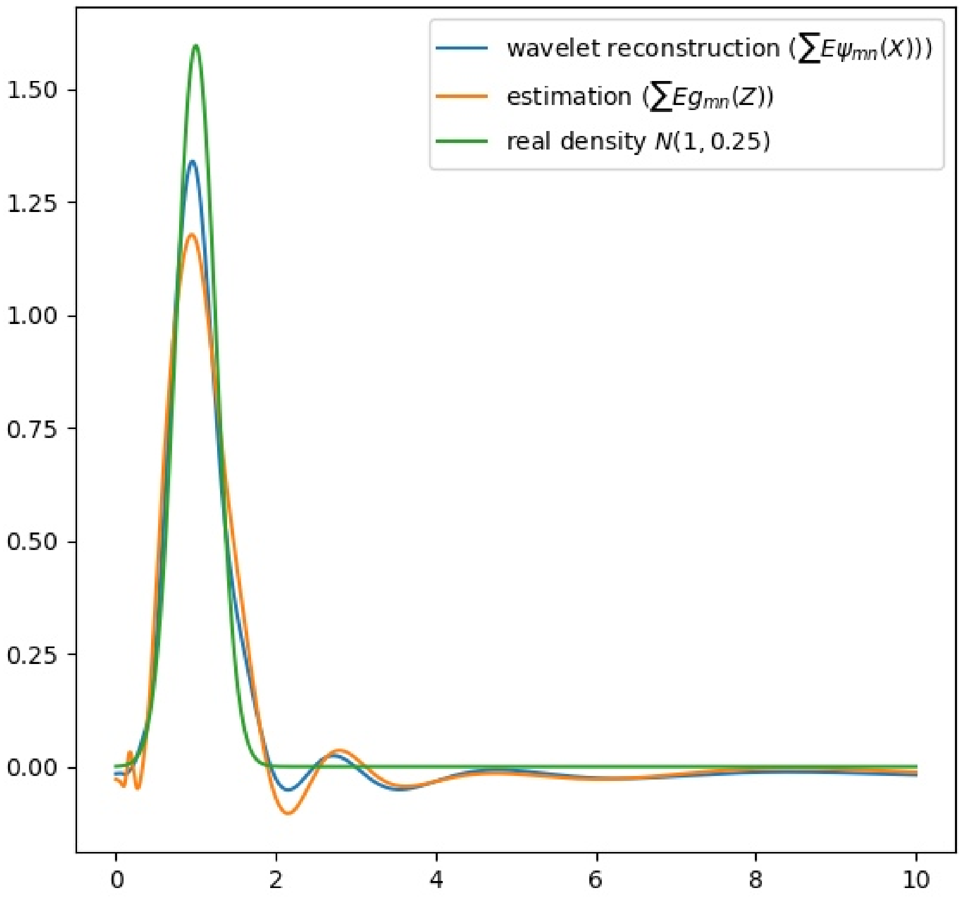


Рис. 5.2: $X \sim \exp(1)$

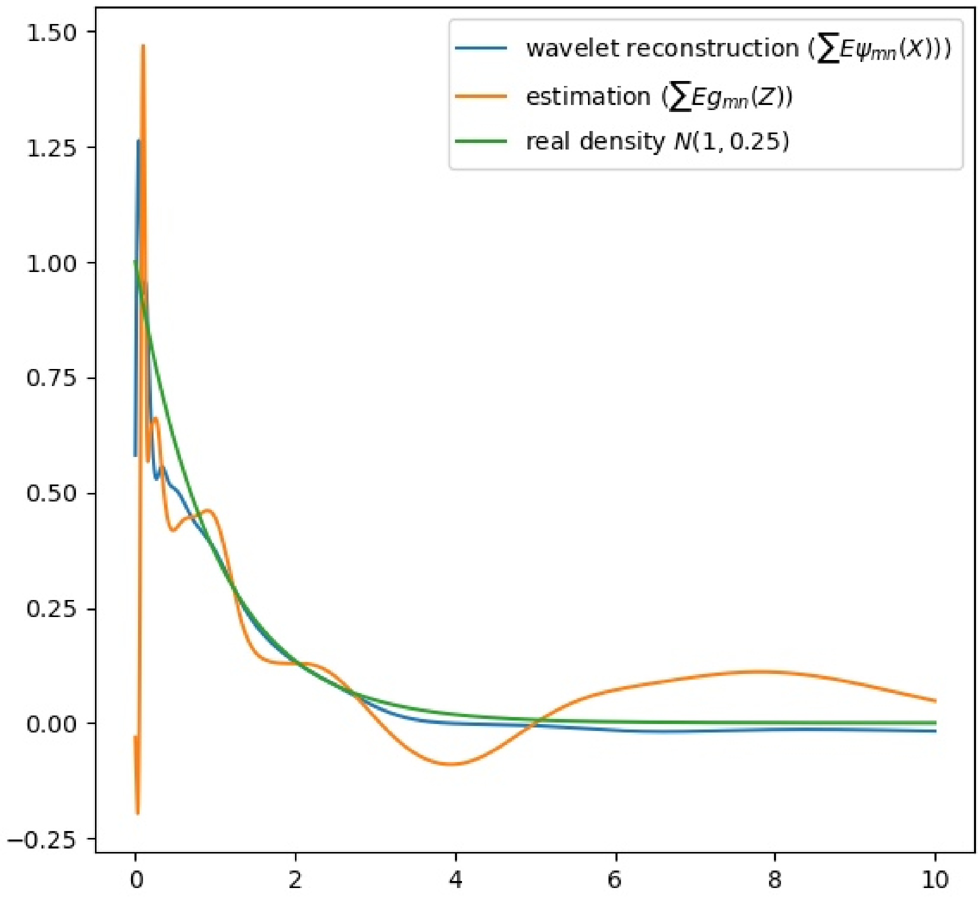


Рис. 5.3: $X \sim \chi^2_5$

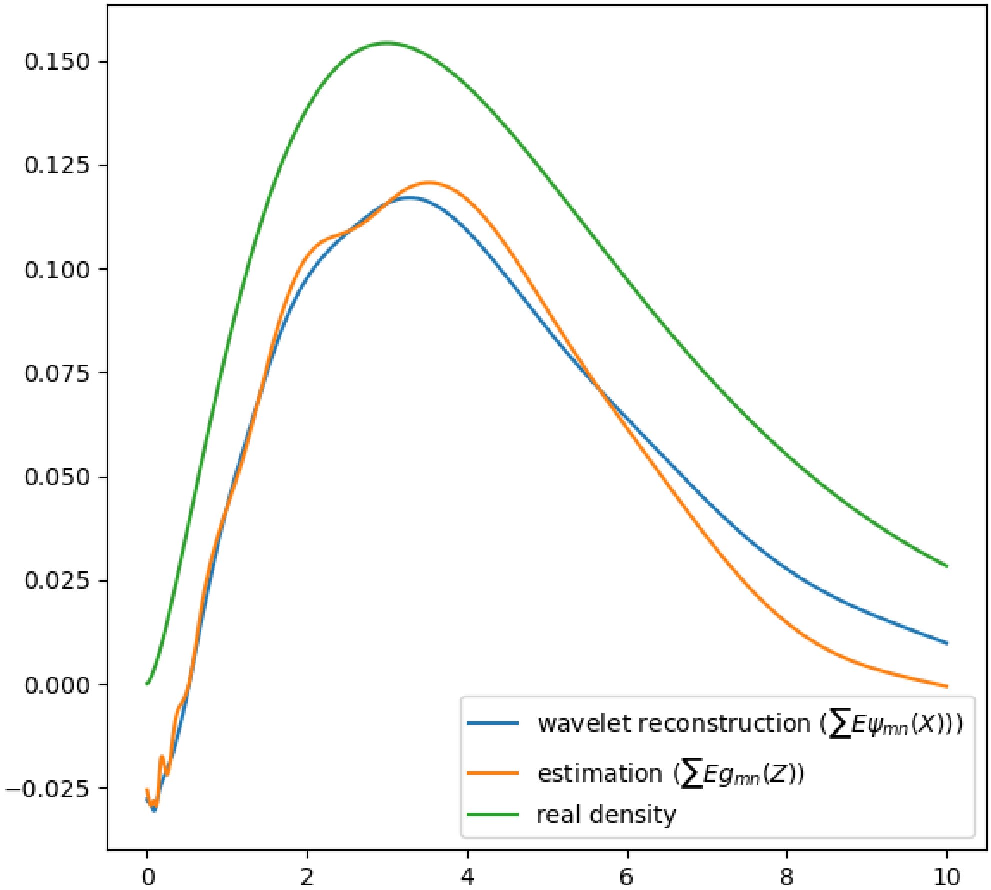


Рис. 5.4: Сравнение функций ошибок для метода градиентного спуска

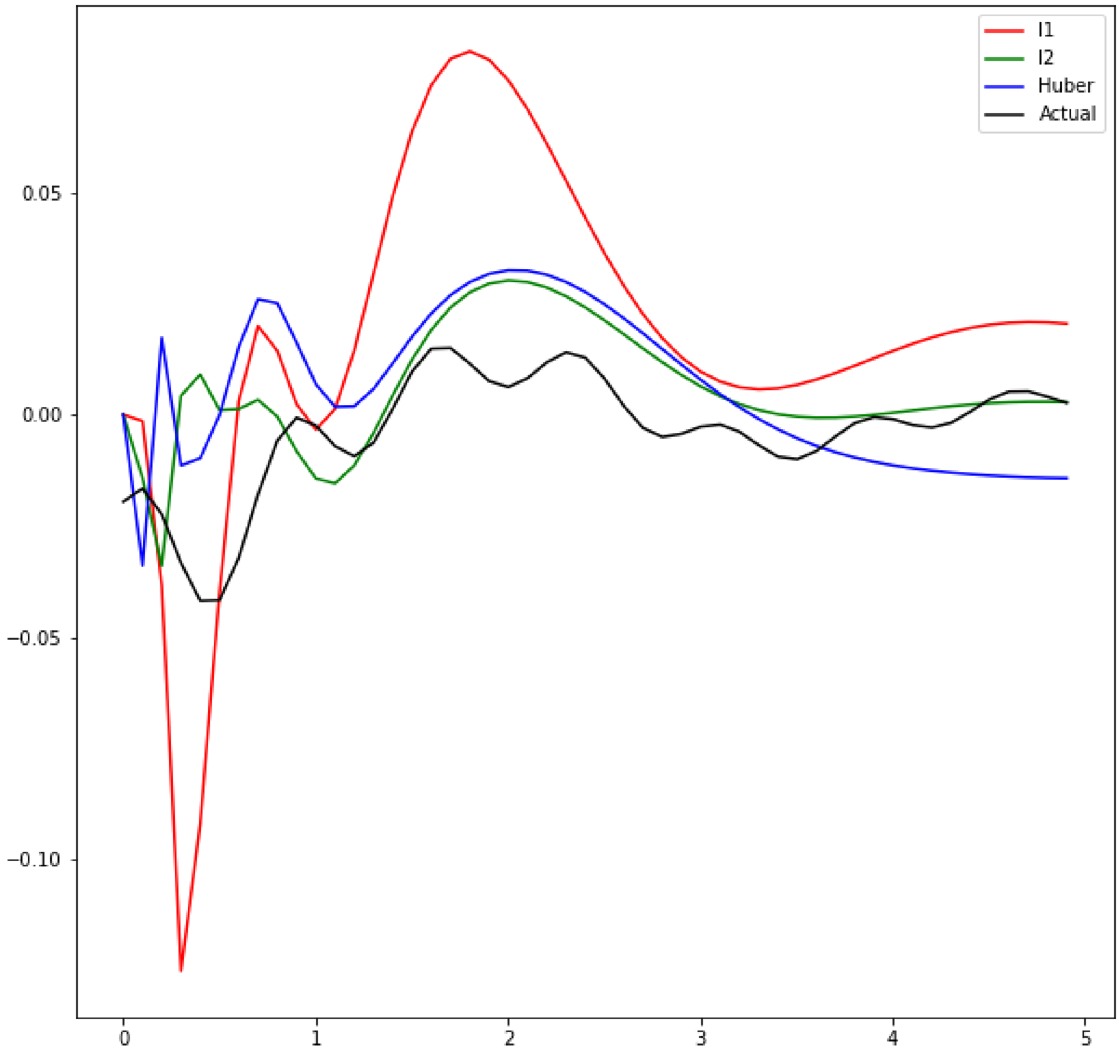


Рис. 5.5: Сравнение методов градиентного спуска, итеративного и МНК-оценки

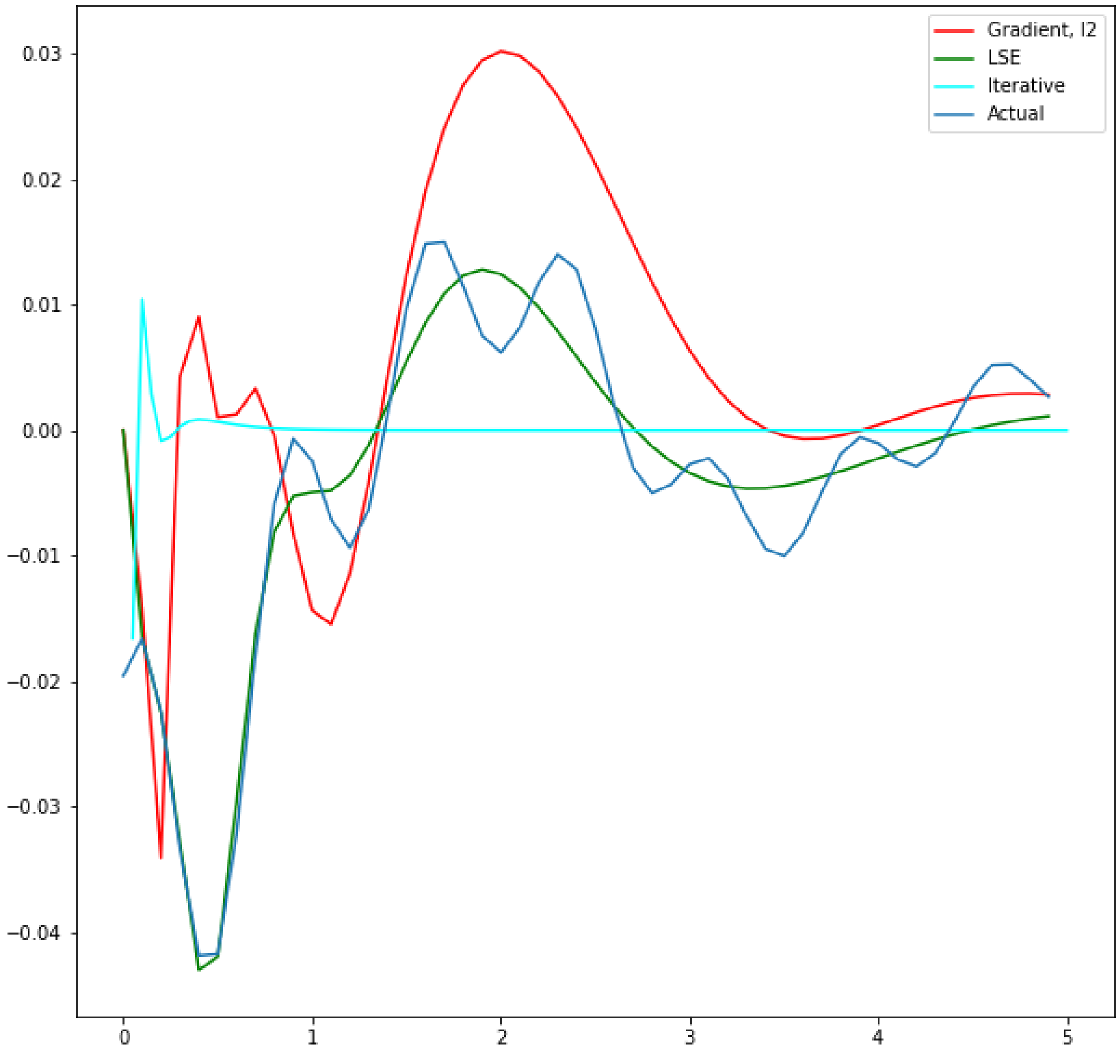


Рис. 5.6: МНК-оценка для смеси нормальных распределений

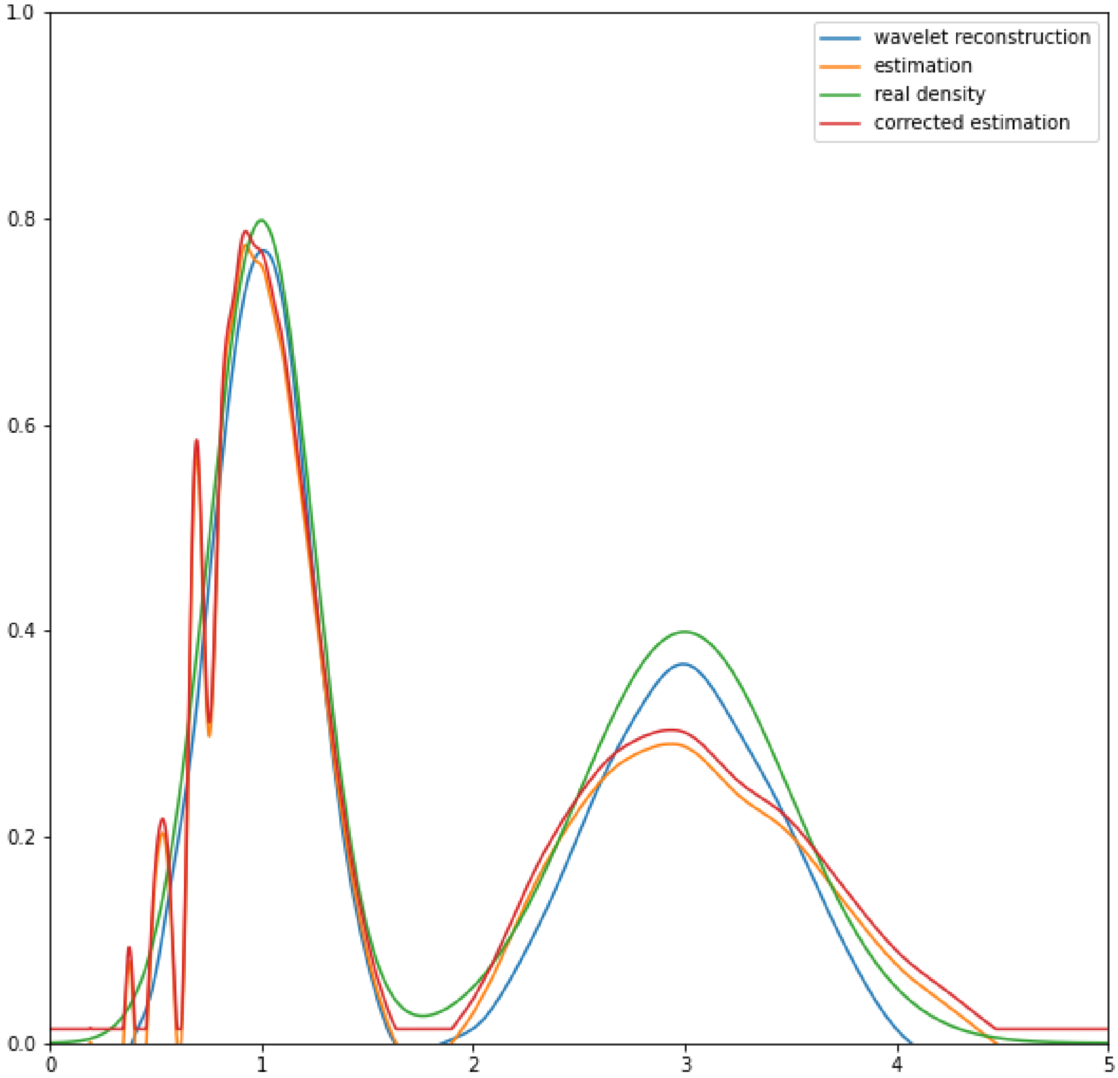


Рис. 5.7: Оценка методом градиентного спуска для смеси нормальных распределений

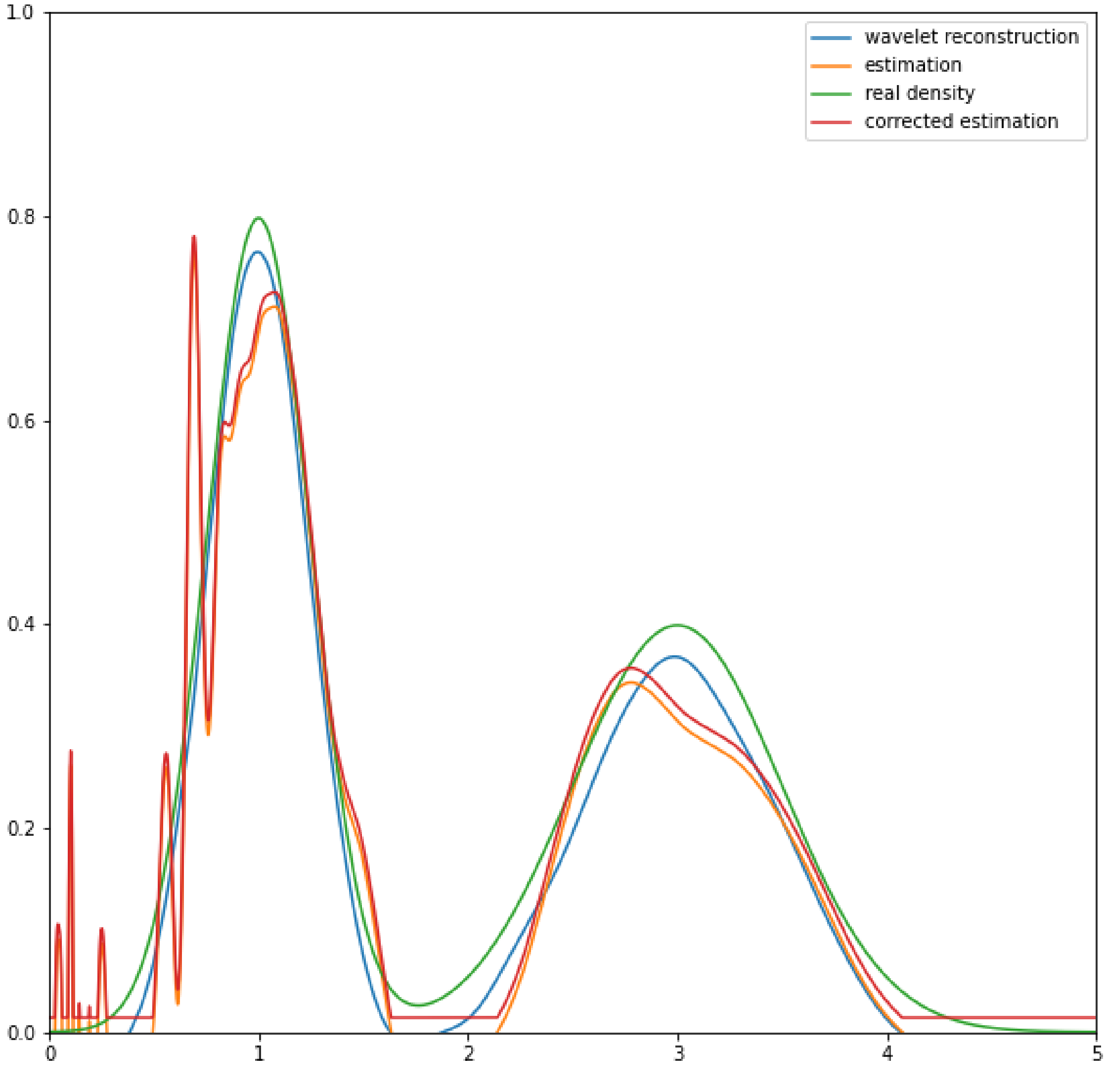
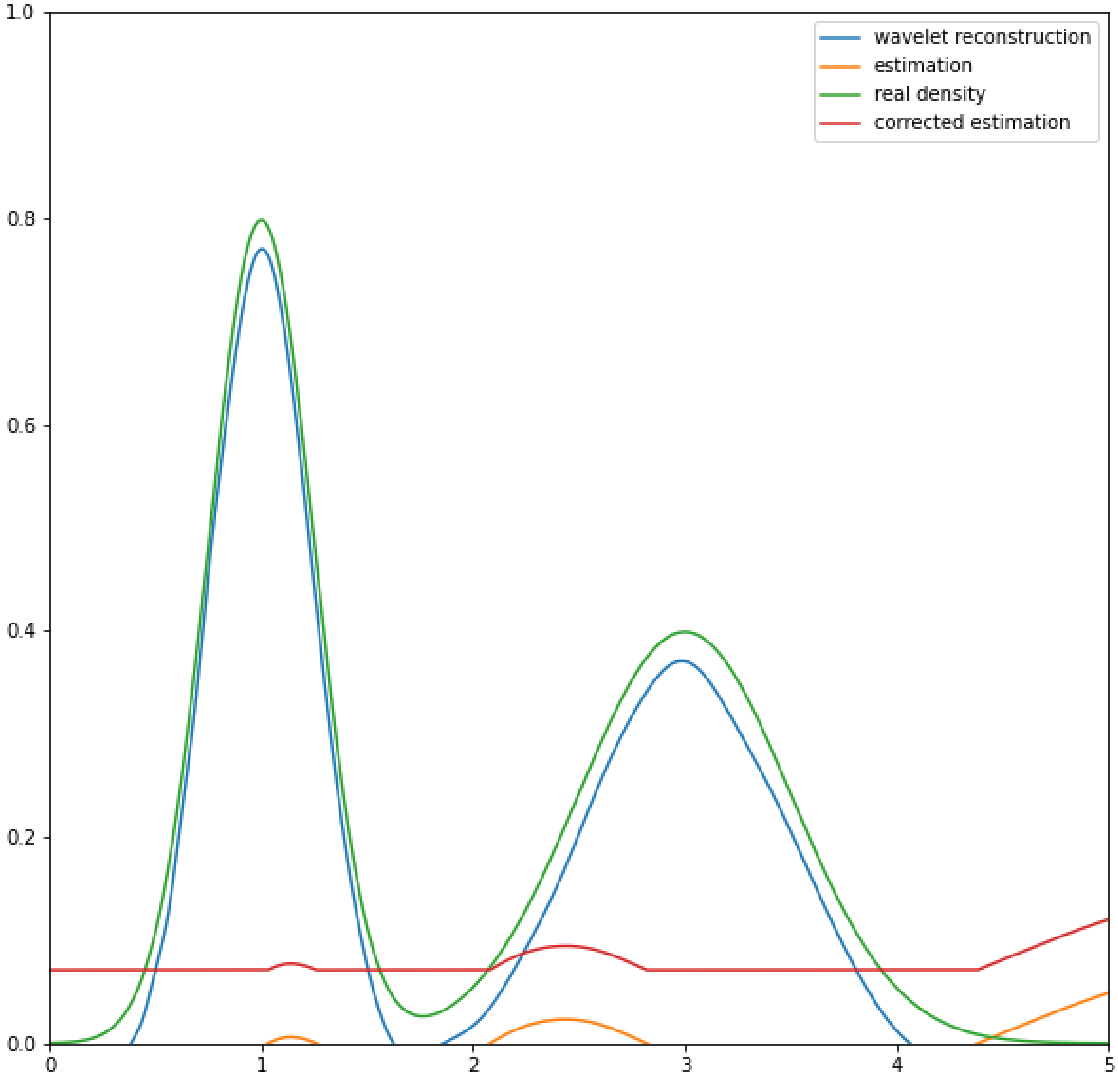


Рис. 5.8: Оценка итеративным методом для смеси нормальных распределений



§6. Обобщение на случай разных длин траекторий

Мы строили функции вида:

$$\mathbf{E}g_{m,n}(XY) = \mathbf{E}g_{m,n}(X) = c_{m,n}$$

и находили оценку плотности как

$$f_X(x) = c_{m,n}\psi_{m,n}(x).$$

Теперь рассмотрим случай, когда длины траекторий могут различаться. Для каждой длины k построим функции $g_{m,n,k}$ как описано выше и построим оценку $f_{X,k}(x)$

Пусть для длины траектории k у нас есть s_k наблюдений. И всего S наблюдений Тогда оценкой $f_X(x)$ будет

$$\sum_{k=1}^{K} \frac{s_k f_{X,k}(x)}{S}.$$

Докажем это. Разложим f_X в ряд по вейвлету:

$$f_X(x) = \sum_{m,n} c_{m,n}\psi_{m,n}(x).$$

Раскроем вейвлет-коэффициенты:

$$f_X(x) = \sum_{m,n} \mathbf{E}\psi_{m,n}(XY)\psi_{m,n}(x).$$

Представим математическое ожидание в виде математического ожидания условного математического ожидания при условии длины траектории:

$$f_X(x) = \sum_{m,n} \mathbf{E}_k \left(\mathbf{E}\left(\psi_{m,n}(XY)|k\right)\right)\psi_{m,n}(x).$$

По линейности математического ожидания, можем внести сумму внутрь:

$$f_X(x) = \mathbf{E}_k \left(\sum_{m,n} \mathbf{E}\left(\psi_{m,n}(XY)|k\right)\psi_{m,n}(x)\right).$$

Вычислим вейвлет-коэффициенты:

$$f_X(x) = \mathbf{E}_k \left(\sum_{m,n} c_{m,n,k} \psi_{m,n}(x) \right).$$

Заменим вейвлет-разложение на оригинальную функцию:

$$f_X(x) = \mathbf{E}_k f_{X,k}(x).$$

Получаем оценку:

$$f_X(x) = \sum_{k=1}^{K} \frac{s_k f_{X,k}(x)}{S}.$$

§7. Вывод

Лучшие результаты показывает МНК-оценка.

Оценка методом градиентного спуска более шумная, но позволяет использовать существенно более точный шаг дискретизации, так как возможно пожертвовать произодительностью и не вычислять матрицу K заранее, что существенно снижает требования к количеству видеопамяти.

Итеративная оценка показывает неудовлетворительные результаты и сходится крайне медленно: разница между 1000 итераций и 10000 итераций несущественна.

Поправка для оценок плотностей несильно улучшает оценку.

§8. Теоремы

8.1 Связь мат. ожидания χ^2_{2k} и преобразования Лапласа

Теорема (О связи мат. ожидания χ^2_{2k} и преобразования Лапласа)**.** *Пусть f — функция плотности χ^2_{2k}; $a > 0$. Тогда*

$$Eg(aY) = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z \left[g(z) z^{k-1}\right] \left(\frac{1}{2a}\right).$$

Доказательство.

$$Eg(aY) = \int\limits_0^\infty g(ay) f(y) dy.$$

Подставим функцию плотности:

$$Eg(aY) = \int\limits_0^\infty g(ay) \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{1}{2^k} y^{k-1} e^{-y/2} dy.$$

Возьмем $z = ay$:

$$Eg(aY) = \int\limits_0^\infty g(z) \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{1}{2^k} \left(\frac{z}{a}\right)^{k-1} e^{-z/(2a)} \frac{dz}{a} =$$

$$= \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} \int\limits_0^\infty g(z) z^{k-1} e^{-z\left(\frac{1}{2a}\right)} dz = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z \left[g(z) z^{k-1}\right] \left(\frac{1}{2a}\right).$$

∎

8.2 Замена переменной в обратном преобразовании Лапласа

Теорема. *Пусть $c > 0$; α такое, что все особенности f лежат левее $c\alpha$. Тогда*

$$L_u^{-1} \left[f(cu)\right](t) = L_s^{-1} \left[\frac{1}{c} f(s)\right] \left(\frac{t}{c}\right).$$

Доказательство.

$$L_u^{-1}\left[f\left(cu\right)\right](t) = \int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{ut} f(cu) du = \frac{1}{c}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{(cu)\frac{t}{c}} f(cu) d\left(cu\right) =$$

$$= \frac{1}{c}\int\limits_{c\alpha-i\infty}^{c\alpha+i\infty} e^{s\frac{t}{c}} f(s) ds = L_s^{-1}\left[\frac{1}{c}f(s)\right]\left(\frac{t}{c}\right).$$

■

8.3 Правильная часть произведения голоморфной функции и функции с нулевой правильной частью

Теорема. *Пусть f, g — голоморфные функции; правильная часть g нулевая; $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — коэффициенты разложения в ряд Лорана функции f; $\{b_n\}_{n=-\infty}^{0}$ — коэффициенты разложения в ряд Лорана функции g.*

Тогда в правильной части разложения в ряд Лорана произведения $f(z)g(z)$ участвуют только коэффициенты правильной части функции f

Доказательство.

$$f(z)g(z) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{0} b_m z^m\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \sum_{m=-\infty}^{0} a_{k-m} b_m.$$

Правильная часть при $k \geq 0$. При этом у нас $m \leq 0$. А значит, $n = k - m \geq 0$ для каждого коэффициента правильной части. ■

8.4 Правильная часть ряда Лорана для $f(s) = e^{as}\, e^{b/s}$

Теорема. *Правильная часть ряда Лорана для функции*

$$f(s) = e^{as} e^{b/s}.$$

Равна

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{s}{n}\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(ab)^n}{n!\,(n-k)!}.$$

Доказательство. Заменим экспоненты соответствующими рядами:

$$e^{as} e^{b/s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(as)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(b/s)^m}{m!}.$$

Обе функции аналитичны в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, а потому их ряды сходятся абсолютно. Ряд для функции–произведения можно получить перемножением рядов по Коши.

$$e^{as}e^{b/s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s^k \sum_{n-m=k} \chi(n \geq 0)\chi(m \geq 0)\frac{a^n\, b^m}{n!\, m!} =$$
$$= \sum_{k=-\infty}^{-1} s^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n\, b^{n-k}}{n!\,(n-k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a^n\, b^{n-k}}{n!\,(n-k)!}.$$

Упростим правильную часть:

$$\sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a^n\, b^{n-k}}{n!\,(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{n}\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(ab)^n}{n!\,(n-k)!}.$$

■

8.5 Правильная часть ряда Лорана для $f(s) = e^{as}e^{-1/(2s^2)}$

Теорема. *Правильная часть ряда Лорана для функции*

$$f(z) = e^{az}e^{-1/(2z^2)}.$$

Равна

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k}/(-2)^m}{(2m+k)!\, m!}.$$

Доказательство. Заменим экспоненты рядами:

$$e^{az}e^{-1/(2z^2)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(az)^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-1/\left(2z^2\right)\right)^m}{m!}\right).$$

Обе функции аналитичны в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, поэтому их ряды сходятся абсолютно. Находим ряд Лорана для f, перемножая по Коши эти два ряда:

$$e^{az}e^{-1/(2z^2)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \sum_{n-2m=k} \chi(n \geq 0)\chi(m \geq 0)\frac{a^n/(-2)^m}{n!\, m!}.$$

Тогда правильная часть:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{n-2m=k} \chi(n \geq 0)\chi(m \geq 0)\frac{a^n/(-2)^m}{n!\, m!} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k}/(-2)^m}{(2m+k)!\, m!}.$$

■

8.6 Правильная часть ряда Лорана для $f(z) = e^{az}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}$

Теорема. *Пусть* $k \geq 0$*; пусть*

$$f(z) = e^{az}e^{-1/(2s^2)}e^{b/z}.$$

Тогда k*-й член ряда Лорана для* f *равен*

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{2m+k+l}/\,(-2)^m}{(2m+k+l)!\,m!}\frac{n^l}{l!}.$$

Доказательство. Определим

$$g(t) = e^{az}e^{-1/(2s^2)}$$
$$h(t) = e^{b/z}.$$

Обе функции голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому их ряды сходятся абсолютны и мы можем умножить ряды по Коши, чтобы получить ряд Лорана для f.

У функции $e^{n/s}$ правильная часть константна. Поэтому, согласно теореме о правильной части произведения голоморфной функции и функции с константной правильной частью, нам достаточно знать только правильную часть разложения функции g, которую мы нашли в предыдущей теореме.

Пусть $\{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — коэффициенты для g, а $\{\beta_n\}_{n=-\infty}^{0}$ — коэффициенты для h, а $\{\gamma_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — коэффициенты f. Для наглядности, приведем формулу k-го члена их произведения, где $k \geq 0$:

$$\gamma_k = \sum_{l=-\infty}^{0}\alpha_{k-l}\beta_l = \sum_{l=0}^{\infty}\alpha_{k+l}\beta_{-l}.$$

Приведем также формулы для α_k и β_{-k}:

$$\alpha_k = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{2m+k}/\,(-2)^m}{(2m+k)!\,m!}$$
$$\beta_{-k} = \frac{n^k}{k!}.$$

Подставим α_k и β_{-k} в формулу для γ_k:

$$\gamma_k = \sum_{l=0}^{\infty}\alpha_{k+l}\beta_{-l} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{2m+k+l}/\,(-2)^m}{(2m+k+l)!\,m!}\frac{n^l}{l!}.$$

■

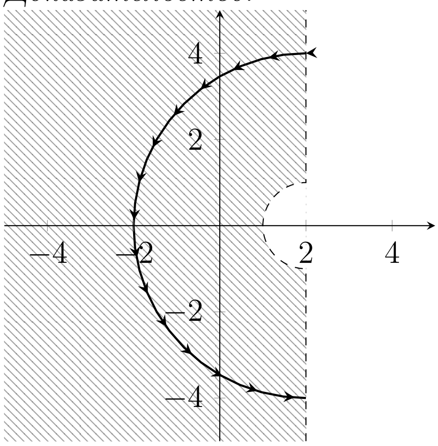
8.7 Модифицированная лемма Жордана

Лемма Жордана позволяет использовать основную теорему о вычетах для интеграла по контуру $(-\infty, \infty)$. Обратное преобразование Лапласа можно найти, используя интеграл Меллина. Этот интеграл использует контур $(\alpha - i\infty, \alpha + i\infty)$. Если мы модифицируем лемму Жордана, чтобы она использовала контур в виде левой полуокружности с центром в α, то сможем использовать основную теорему о вычетах для вычисления обратного преобразования Лапласа.

Теорема (Модифицированная лемма Жордана)**.**
Пусть α, $t > 0$*;* $F(s)$ *непрерывна в области* $G = \{\operatorname{Re} s \le \alpha\} \cap \{|s - \alpha| \ge R_0 > 0\}$*;* C_R *— полуокружность* $|z - \alpha| = R$ *в* G*;* $\lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_{s \in C_R} |F(s)| = 0$*.*

Тогда $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{ts} F(s) ds = 0$*.*

Доказательство.



По условию, $\forall \varepsilon > 0 \ \ \exists R \ \ \forall s \in C_R \quad |F(s)| = |F(\alpha + Re^{i\varphi})| < \varepsilon$, тогда

$$\left| \int\limits_{C_R} e^{ts} F(s) ds \right| \leq \int\limits_{C_R} \left| e^{ts} F(s) \right| |ds| \leq \varepsilon \int\limits_{C_R} \left| e^{ts} \right| |ds|$$

Рассмотрим на C_R: $\left| e^{ts} \right| = \left| e^{t(\alpha + R\cos\varphi + Ri\sin\varphi)} \right| = e^{t(\alpha + R\cos\varphi)}$

Отсюда: $\varepsilon \int\limits_{C_R} \left| e^{st} \right| |ds| = \varepsilon \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\alpha t + Rt\cos\varphi} \left| d\left(Re^{i\varphi}\right) \right| =$

$$\varepsilon \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left| e^{\alpha t + Rt\cos\varphi} Rie^{i\varphi} \right| d\varphi = R\varepsilon e^{\alpha t} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Rt\cos\varphi} d\varphi = R\varepsilon e^{\alpha t} \int\limits_{0}^{\pi} e^{Rt\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} d\varphi =$$

$$R\varepsilon e^{\alpha t} \int\limits_{0}^{\pi} e^{-Rt\sin\varphi} d\varphi = 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\sin\varphi} d\varphi$$

На $[0, \frac{\pi}{2}]$ $\sin\varphi \geq \frac{2}{\pi}\varphi$

$$\Longrightarrow 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\sin\varphi} d\varphi \leq 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\frac{2}{\pi}\varphi} d\varphi =$$

$$2R\varepsilon e^{\alpha t} \left(\frac{1}{-\frac{2Rt}{\pi}} e^{-\frac{2Rt\varphi}{\pi}} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\varepsilon}{t} e^{\alpha t} \left(1 - e^{-Rt}\right) \xrightarrow[R \to \infty]{} 0.$$

Отсюда интеграл по дуге стремится к 0. ■

Список литературы

[1] Minwoo Chae, Ryan Martin и Stephen G. Walker. “On an algorithm for solving Fredholm integrals of the first kind”. В: *Statistics and Computing* 29.4 (июль 2019), с. 645—654. ISSN: 1573-1375. DOI: 10.1007/s11222-018-9829-z. URL: https://doi.org/10.1007/s11222-018-9829-z.

[2] Ingrid K. Glad, Nils Lid Hjort и Nikolai G. Ushakov. “Correction of Density Estimators That Are Not Densities”. В: *Scandinavian Journal of Statistics* 30.2 (2003), с. 415—427. ISSN: 03036898, 14679469. URL: http://www.jstor.org/stable/4616772.