## 0.1 Лемма Жордана (с другим контуром)

В обычной лемме Жордана используется контур $Re^{i\pi t}$ с $t \in [0,1]$. Нам нужен будет контур $\alpha + Re^{it\pi/2}$ с $t \in [-1,1]$

**Теорема** (Лемма Жордана)**.** *$F(s)$ непрерывна в области $G = \{s | Res \le \alpha, |z-\alpha| \ge R_0 > 0\}$*
*$C_R$ — полуокружность $|z-\alpha| = R$ в $G$*
$\lim_{R\to\infty} \sup_{s\in C_R} |F(s)| = 0$
*$t > 0$ Тогда $\lim_{R\to\infty} \int_{C_R} F(s)e^{st}ds = 0$*

*Доказательство.*
По условию, $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists R \;\; \forall s \in C_R \quad |F(s)| = \left|F\left(\alpha + Re^{i\varphi}\right)\right| < \varepsilon$, тогда

$$\left|\int\limits_{C_R} e^{st}F(s)ds\right| \le \int\limits_{C_R} \left|e^{st}F(s)\right| ds \le \varepsilon \int\limits_{C_R} \left|e^{st}\right| ds$$

На $C_R$: $\left|e^{st}\right| = \left|e^{(\alpha + R\cos\varphi + Ri\sin\varphi)t}\right| = e^{(\alpha + R\cos\varphi)t}$

Отсюда $\varepsilon \int\limits_{C_R} \left|e^{st}\right| ds = \varepsilon \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\alpha t + Rt\cos\varphi} dRe^{i\varphi} = \varepsilon \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\alpha t + Rt\cos\varphi} Rie^{i\varphi} d\varphi \le$

$$\varepsilon \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left|e^{\alpha t + Rt\cos\varphi} Rie^{i\varphi}\right| d\varphi = R\varepsilon e^{\alpha t} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Rt\cos\varphi} d\varphi = R\varepsilon e^{\alpha t} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{Rt\cos\left(\varphi + \frac{pi}{2}\right)} d\varphi =$$

$$R\varepsilon e^{\alpha t} \int\limits_{0}^{\pi} e^{-Rt\sin\varphi} d\varphi = 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\sin\varphi} d\varphi$$

На $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ $\sin\varphi \ge \dfrac{2}{\pi}\varphi$

$$\implies 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\sin\varphi} d\varphi \le 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\frac{2}{\pi}\varphi} d\varphi =$$

$$2R\varepsilon e^{\alpha t} \left(\frac{1}{-\frac{2Rt}{\pi}} e^{-\frac{2Rt\varphi}{\pi}}\right)\Bigg|_0^{\frac{pi}{2}} = \frac{\pi\varepsilon}{t} e^{\alpha t}\left(1 - e^{-Rt}\right) \xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Отсюда интеграл по дуге стремится к 0. ∎

## 0.2 Замена переменной в обратном преобразовании Лапласа

**Теорема.**

$$L_s^{-1}\left[f(cs)\right](z) = L_s^{-1}\left[\frac{1}{c}f(s)\right]\left(\frac{z}{c}\right)$$

*Доказательство.*

$$L_s^{-1}\left[f(cs)\right](z) = \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{sz} f(cs)ds = \frac{1}{c}\int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{csz/c} f(cs)dcs = \frac{1}{c}\int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{sz/c} f(s)ds = L_s^{-1}\left[\frac{1}{c}f(s)\right]\left(\frac{z}{c}\right)$$

∎

## 0.3 Сводим задачу к преобразованию Лапласа

Есть случайные величины $X, Y, Z$. Мы не знаем распределение $X$, знаем распределение $Y$ и наблюдаем $Z$. Кроме того, известно, что $Z = XY$, и что все величины непрерывны. Нужно оценить распределение $X$.

Мы будем использовать вейвлет «Mexican hat», потому что он прост и непрерывен.
$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}pi^{1/4}}(1-t^2)e^{-t^2/2}$ — его формула.

Кроме того, определим элементы фрейма:
$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{2^m}\psi\left(\frac{t}{2^m} - n\right) \frac{1}{\sqrt{2^m}} \frac{2}{\sqrt{3}pi^{1/4}}(1 - \left(\frac{t}{2^m} - n\right)^2)e^{-\left(\frac{t}{2^m} - n\right)^2/2}$ — его формула.

Рассмотрим случай, когда $Y \sim \chi^2_{2k}$.
$\chi^2_{2k} \sim \frac{1}{2^k}\frac{1}{\Gamma(k)}x^{k-1}e^{-x/2}$ – плотность $\chi^2_{2k}$

Рассмотрим $\mathrm{E}\, g(Z)$ для некоторой функции $g$.

$$\mathrm{E}\, g(Z) = \mathrm{E}\, g(XY) = \int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(xy) f_X(x) f_Y(y) dx dy$$

$$\mathrm{E}\, \psi_{m,n}(X) = \int\limits_{-\infty}^{\infty} \psi_{m,n}(x) f_X(x) dx$$

Будем строить функции $g_{m,n}$ такие, что $\mathrm{E}\, g_{m,n}(Z) = \mathrm{E}\, \psi_{m,n}(X)$. Заметим, что достаточно выполнения:

$$\forall x \in \operatorname{Im} X \quad \int\limits_{-\infty}^{\infty} g_{m,n}(xy) f_Y(y) dy = \psi_{m,n}(x)$$

Перепишем левую часть (и будем писать $g$ вместо $g_{m,n}$):

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} g(xy) f_Y(y) dy = \int\limits_{0}^{\infty} g(xy)\frac{1}{\Gamma(k)}\frac{1}{2^k} y^{k-1} e^{-y/2} dy =$$

$$\int\limits_{0}^{\infty} g(z)\frac{1}{2^k}\frac{1}{\Gamma(k)}\left(\frac{z}{x}\right)^{k-1} e^{-z/2x}\frac{dz}{x} = \frac{1}{x^k}\frac{1}{2^k}\frac{1}{\Gamma(k)}\int\limits_{0}^{\infty} g(z) z^{k-1} e^{-zu} dz$$

Введем замену $u = \dfrac{1}{2x}$:

$$\frac{1}{x^k}\frac{1}{2^k}\frac{1}{\Gamma(k)}\int\limits_{0}^{\infty} g(z) z^{k-1} e^{-z/2x} dz = u^k \frac{1}{\Gamma(k)}\int\limits_{0}^{\infty} g(z) z^{k-1} e^{-zu} dz =$$

$$u^k \frac{1}{\Gamma(k)} L\left[g(z) z^{k-1}\right](u)$$

В правой части:

$$\psi_{m,n}(x) = \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2u}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi\left(\frac{1}{u}\frac{1}{2^{m+1}} - n\right)$$

Отсюда наше уравнение:

$$u^k \frac{1}{\Gamma(k)} L\left[g(z) z^{k-1}\right](u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi\left(\frac{1}{u}\frac{1}{2^{m+1}} - n\right)$$

Начнем решать.

$$\implies L\left[g(z) z^{k-1}\right](u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \Gamma(k)\frac{1}{u^k}\psi\left(\frac{1}{u}\frac{1}{2^{m+1}} - n\right)$$

$$\implies g(z) z^{k-1} = L_u^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2^m}}\Gamma(k)\frac{1}{u^k}\psi\left(\frac{1}{u}\frac{1}{2^{m+1}} - n\right)\right](z)$$

$$\implies g(z) z^{k-1}\frac{1}{\Gamma(k)}\sqrt{2^m} = L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\psi\left(\frac{1}{u}\frac{1}{2^{m+1}} - n\right)\right](z)$$

$$\implies g(z) z^{k-1}\frac{1}{\Gamma(k)}\sqrt{2^m} = L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\left(1 - \left(\frac{1}{u}\frac{1}{2^{m+1}} - n\right)^2\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{m+1}}\frac{1}{u} - n\right)^2\right]\right](z)$$

$$\implies g(z) z^{k-1}\frac{1}{\Gamma(k)}\sqrt{2^m}\frac{\sqrt{3}\pi^{1/4}}{2} = L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\left((1-n^2) + \left(\frac{n}{u}\frac{1}{2^m}\right) - \left(\frac{1}{u^2}\frac{1}{2^{2m+2}}\right)\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u^2}\frac{1}{4^{m+1}} - \frac{1}{u}\frac{n}{2^m} + n^2\right)\right]\right](z)$$

$$\begin{aligned}\implies g(z) z^{k-1}\frac{1}{\Gamma(k)}\sqrt{2^m}\frac{\sqrt{3}\pi^{1/4}}{2}e^{n^2/2} = {} & (1-n^2)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}\frac{1}{4^{m+1}}\right)\exp\left(\frac{1}{u}\frac{n}{2^{m+1}}\right)\right](z)\\ & +\frac{n}{2^m}L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+1}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}\frac{1}{4^{m+1}}\right)\exp\left(\frac{1}{u}\frac{n}{2^{m+1}}\right)\right](z)\\ & -\frac{1}{4^{m+1}}L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}\frac{1}{4^{m+1}}\right)\exp\left(\frac{1}{u}\frac{n}{2^{m+1}}\right)\right](z)\end{aligned}$$

Отсюда видно, что $n = 0$ — особый случай. Отложим его.

## 0.4 Находим обратное преобразование Лапласа

Найдем $L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^p}\exp\left[-\frac{1}{2s^2}\right]\exp\left(\frac{n}{s}\right)\right](z)$. Из этого простыми преобразованиями можно будет получить все три необходимых нам обратных преобразования.

$$L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^p}\exp\left[-\frac{1}{2s^2}\right]\exp\left(\frac{n}{s}\right)\right](z) =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{sz}\frac{1}{s^p}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}ds =$$

Берем контур $C = C_1 + C_2$, где $C_1$ — искомый, а $C_2$ — дуга окружности (слева от $C_1$ с центром в $(\alpha, 0)$).

$$|F(s)| := \left|\frac{1}{s^p}\exp\left[-\frac{1}{2s^2}\right]\exp\left(\frac{n}{s}\right)\right| =$$

$$\left|\frac{1}{r^p e^{i\phi}}\exp\left[-\frac{1}{2r^2e^{2i\phi}}\right]\exp\left(\frac{n}{re^{i\phi}}\right)\right| =$$

$$\frac{1}{r^p}\exp\left[-\frac{\cos 2\phi}{2r^2}\right]\exp\left(\frac{n\cos\phi}{r}\right)\xrightarrow[s\to\infty]{} 0$$

Поэтому, из леммы Жордана, интеграл по $C_2$ стремится к нулю

Так как у $F(s)$ единственная особая точка — 0, можно взять любое $\alpha > 0$

Применим основную теорему о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{sz}\frac{1}{s^p}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}ds =$$

$$\frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\operatorname*{Res}_0\left(e^{sz}\frac{1}{s^p}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}\right) =$$

$c_{-1}$, где $c_{-1}$ — $-1$ член ряда Лорана для $e^{sz}\dfrac{1}{s^p}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s} =$

$d_{(-1+p)}$, где $d_{(-1+p)}$ — $(p-1)$-й член ряда Лорана для $e^{sz}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s} =$

То есть, нам нужно найти $p-1$-й член ряда Лорана для $e^{sz}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}$.

Найдем сначала необходимые члены ряда для $e^{sz}e^{n/s}$.

$$e^{sz}e^{n/s} = \left(\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(sz)^q}{q!}\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{n}{s}\right)^q}{q!}\right) =$$

$$\sum_{q=0}^{\infty}s^q\sum_{r=q}^{\infty}\frac{z^r}{r!}\frac{n^{r-q}}{(r-q)!} + \sum_{q=-\infty}^{-1}s^q\sum_{r=-\infty}^{q}\frac{z^{r-q}}{(r-q)!}\frac{n^r}{r!}$$

Так как $p-1\geq 0$, а $e^{-1/2s^2}$ раскрывается в ряд только с отрицательными степенями, то сумма с отрицательными степенями нам не пригодится. Упростим получившийся ряд:

$$\sum_{q=0}^{\infty}s^q\sum_{r=q}^{\infty}\frac{z^r}{r!}\frac{n^{r-q}}{(r-q)!} =$$

$$\sum_{q=0}^{\infty}s^q\sum_{r=q}^{\infty}\frac{\left(\frac{zn}{n}\right)^r}{r!}\frac{n^{r-q}}{(r-q)!} =$$

$$\sum_{q=0}^{\infty}s^q\sum_{r=q}^{\infty}\frac{(zn)^r}{r!}\frac{n^{-q}}{(r-q)!} =$$

$$\sum_{q=0}^{\infty}\left(\frac{s}{n}\right)^q\sum_{r=q}^{\infty}\frac{(zn)^r}{r!}\frac{1}{(r-q)!}$$

Упростим внутреннюю сумму и введем функцию:

$$\sum_{r=q}^{\infty} \frac{(zn)^r}{r!} \frac{1}{(r-q)!} =$$
$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{(zn)^{r+q}}{(r+q)!} \frac{1}{r!} =$$
$$(zn)^q \sum_{r=0}^{\infty} \frac{(zn)^r}{r!(r+q)!} =: (zn)^q f_q(zn)$$

Итак,

$$\sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{s}{n}\right)^q \sum_{r=q}^{\infty} \frac{(zn)^r}{r!} \frac{1}{(r-q)!} =$$
$$\sum_{q=0}^{\infty} \left(\frac{s}{n}\right)^q (zn)^q f_q(zn) =$$
$$\sum_{q=0}^{\infty} (sz)^q f_q(zn)$$

Теперь вычислим искомый член для нужной нам функции:

$$e^{sz} e^{n/s} e^{-1/2s^2} =$$
$$\left[\left(\sum_{q=-\infty}^{-1} s^q a_q(z)\right) + \left(\sum_{q=0}^{\infty} (sz)^q f_q(zn)\right)\right] \left[\sum_{q=0}^{\infty} \frac{-\left(\frac{1}{2s^2}\right)^q}{q!}\right] =$$
$$\left(\sum_{q=-\infty}^{-1} b_q(z) s^q\right) + \sum_{q=0}^{\infty} s^q \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^r}{r!} z^{2r+q} f_{2r+q}(zn)$$

Отсюда, $(p-1)$-й член:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^r}{r!} z^{2r+p-1} f_{2r+p-1}(zn) =$$
$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^r}{r!} z^{2r+p-1} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{(zn)^t}{t!(t+2r+p-1)!} =$$
$$(\text{что мы искали}) L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^p} \exp\left[-\frac{1}{2s^2}\right] \exp\left(\frac{n}{s}\right)\right](z)$$

Выразим теперь все три слагаемых:

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^p} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u2^{m+1}}\right)^2\right] \exp\left(\frac{1}{u}\frac{n}{2^{m+1}}\right)\right](z) =$$
$$2^{p(m+1)} L_u^{-1}\left[\frac{1}{(2^{m+1}u)^p} \exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u2^{m+1}}\right)^2\right] \exp\left(\frac{1}{u}\frac{n}{2^{m+1}}\right)\right](z) =$$
$$(\text{делаем замену } s = 2^{(m+1)}u)\ 2^{(p-1)(m+1)} L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^p} \exp\left[-\frac{1}{2s^2}\right] \exp\left(\frac{n}{s}\right)\right]\left(\frac{z}{2^{m+1}}\right) =$$
$$2^{(p-1)(m+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^r}{r!} \left(\frac{z}{2^{m+1}}\right)^{2r+p-1} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2^{m+1}} n\right)^t}{t!(t+2r+p-1)!}$$

Подставляем:

$$g(z)z^{k-1}\frac{1}{\Gamma(k)}\sqrt{2^m}\frac{\sqrt{3}\pi^{1/4}}{2}e^{n^2/2} = (1-n^2)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}\frac{1}{4^{m+1}}\right)\exp\left(\frac{1}{u}\frac{n}{2^{m+1}}\right)\right](z)$$
$$+\frac{n}{2^m}L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+1}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}\frac{1}{4^{m+1}}\right)\exp\left(\frac{1}{u}\frac{n}{2^{m+1}}\right)\right](z)$$
$$-\frac{1}{4^{m+1}}L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}\frac{1}{4^{m+1}}\right)\exp\left(\frac{1}{u}\frac{n}{2^{m+1}}\right)\right](z)$$
$$\implies g(z)z^{k-1}\frac{1}{\Gamma(k)}\sqrt{2^m}\frac{\sqrt{3}\pi^{1/4}}{2}e^{n^2/2} = (1-n^2)2^{(k-1)(m+1)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^r}{r!}\left(\frac{z}{2^{m+1}}\right)^{2r+k-1}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2^{m+1}}n\right)^t}{t!(t+2r+k-1)!}$$
$$+\frac{n}{2^m}2^{k(m+1)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^r}{r!}\left(\frac{z}{2^{m+1}}\right)^{2r+k}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2^{m+1}}n\right)^t}{t!(t+2r+k)!}$$
$$-\frac{1}{4^{m+1}}2^{(k+1)(m+1)}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^r}{r!}\left(\frac{z}{2^{m+1}}\right)^{2r+k+1}\sum_{t=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{z}{2^{m+1}}n\right)^t}{t!(t+2r+k+1)!}$$

## 0.5 Случай n=0

Начнем решать.

$$\implies L\left[g(z)z^{k-1}\right](u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m\Gamma(k)\frac{1}{u^k}\psi\left(\frac{1}{u}\frac{1}{2^{m+1}}\right)$$
$$\implies g(z)z^{k-1} = L_u^{-1}\left[\frac{1}{\sqrt{2^m}}\Gamma(k)\frac{1}{u^k}\psi\left(\frac{1}{u}\frac{1}{2^{m+1}}\right)\right](z)$$
$$\implies g(z)z^{k-1}\frac{1}{\Gamma(k)}\sqrt{2^m} = L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\psi\left(\frac{1}{u}\frac{1}{2^{m+1}}\right)\right](z)$$
$$\implies g(z)z^{k-1}\frac{1}{\Gamma(k)}\sqrt{2^m} = L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\left(1-\left(\frac{1}{u}\frac{1}{2^{m+1}}\right)^2\right)\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{m+1}}\frac{1}{u}\right)^2\right]\right](z)$$

$$\implies g(z)z^{k-1}\frac{1}{\Gamma(k)}\sqrt{2^m}\frac{\sqrt{3}\pi^{1/4}}{2} = L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}\frac{1}{4^{m+1}}\right)\right](z)$$
$$-\frac{1}{4^{m+1}}L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+2}}\exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}\frac{1}{4^{m+1}}\right)\right](z)$$

Вычислим обратное преобразование:

$$L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^p}\exp\left[-\frac{1}{2s^2}\right]\right](z) =$$
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}e^{sz}\frac{1}{s^p}e^{-1/(2s^2)}ds =$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}e^{sz}\frac{1}{s^p}e^{-1/(2s^2)}ds =$$
$$\frac{1}{2\pi i}(2\pi i)\operatorname*{Res}_0\left(e^{sz}\frac{1}{s^p}e^{-1/(2s^2)}\right) =$$

$c_{p-1}$, — $p-1$-й член ряда Лорана для $e^{sz}e^{-1/(2s^2)}$

Вычислим:

$$e^{sz}e^{-1/(2s^2)} =$$
$$\left(\sum_{q=0}^{\infty}\frac{(sz)^q}{q!}\right)\left(\sum_{q=0}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2s^2}\right)^q}{q!}\right)$$

Отсюда $p-1$-й член ряда:

$$\sum_{r=0}^{\infty} \frac{z^{p-1+2r}}{(p-1+2r)!} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^r}{r!}$$

Подставляем:

$$\begin{aligned}
\Longrightarrow g(z) z^{k-1} \frac{1}{\Gamma(k)} \sqrt{2^m} \frac{\sqrt{3}\pi^{1/4}}{2} &= L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}\frac{1}{4^{m+1}}\right)\right](z) \\
&\quad -\frac{1}{4^{m+1}} L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\frac{1}{u^2}\frac{1}{4^{m+1}}\right)\right](z) \\
\Longrightarrow g(z) z^{k-1} \frac{1}{\Gamma(k)} \sqrt{2^m} \frac{\sqrt{3}\pi^{1/4}}{2} &= 2^{k(m+1)} L_u^{-1}\left[\frac{1}{(u2^{m+1})^k} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}\frac{1}{2^{m+1}}\right)^2\right)\right](z) \\
&\quad -2^{(k+2)(m+1)} \frac{1}{4^{m+1}} L_u^{-1}\left[\frac{1}{(u2^{m+1})^{k+2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}\frac{1}{2^{m+1}}\right)^2\right)\right](z) \\
\Longrightarrow g(z) z^{k-1} \frac{1}{\Gamma(k)} \sqrt{2^m} \frac{\sqrt{3}\pi^{1/4}}{2} &= 2^{(k-1)(m+1)} L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k} \exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\right]\left(\frac{z}{2^{m+1}}\right) \\
&\quad -2^{(k+1)(m+1)} \frac{1}{4^{m+1}} L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^{k+2}} \exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\right]\left(\frac{z}{2^{m+1}}\right) \\
\Longrightarrow g(z) z^{k-1} \frac{1}{\Gamma(k)} \sqrt{2^m} \frac{\sqrt{3}\pi^{1/4}}{2} &= 2^{(k-1)(m+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2^{m+1}}\right)^{k-1+2r}}{(k-1+2r)!} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^r}{r!} \\
&\quad -2^{(k+1)(m+1)} \frac{1}{4^{m+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2^{m+1}}\right)^{k+2-1+2r}}{(k+2-1+2r)!} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^r}{r!}
\end{aligned}$$

## 0.6 Результат

$$\begin{aligned}
g_{m,0}(z) z^{k-1} \frac{1}{\Gamma(k)} \sqrt{2^m} \frac{\sqrt{3}\pi^{1/4}}{2} &= 2^{(k-1)(m+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2^{m+1}}\right)^{k-1+2r}}{(k-1+2r)!} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^r}{r!} \\
&\quad -2^{(k+1)(m+1)} \frac{1}{4^{m+1}} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2^{m+1}}\right)^{k+1+2r}}{(k+1+2r)!} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^r}{r!}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
g_{m,n}(z) z^{k-1} \frac{1}{\Gamma(k)} \sqrt{2^m} \frac{\sqrt{3}\pi^{1/4}}{2} e^{n^2/2} &= (1-n^2) 2^{(k-1)(m+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^r}{r!} \left(\frac{z}{2^{m+1}}\right)^{2r+k-1} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2^{m+1}} n\right)^t}{t!(t+2r+k-1)!} \\
&\quad + \frac{n}{2^m} 2^{k(m+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^r}{r!} \left(\frac{z}{2^{m+1}}\right)^{2r+k} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2^{m+1}} n\right)^t}{t!(t+2r+k)!} \\
&\quad - \frac{1}{4^{m+1}} 2^{(k+1)(m+1)} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{\left(-\frac{1}{2}\right)^r}{r!} \left(\frac{z}{2^{m+1}}\right)^{2r+k+1} \sum_{t=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{z}{2^{m+1}} n\right)^t}{t!(t+2r+k+1)!}
\end{aligned}$$