Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
механико-математический факультет
кафедра математической статистики и случайных процессов

Курсовая работа
студента 403 группы
Купряков Василия Юрьевича

Непараметрическая оценка плотности мультипликативно зашумленных данных

Научный руководитель:
с.н.с., к.ф.-м.н.
Шкляев Александр Викторович

Москва, 2020

Оглавление

§1. Введение

В работу мы изучим задачу, которая возникает при исследовании примесий в жидкости.

Примеси в исследуемой жидкости — это движущиеся частицы с размерами порядка 10^{-8} м. Жидкость просвечивают лазером, а камера фиксирует частицы, которые попали в луч.

Получается последовательность изображений. Для каждой частицы эта последовательность является последовательностью проекций частиц на площадь камеры. Мы можем построить векторы перемещений частиц в проекции на плоскость камеры по этим снимкам. Для отдельной частицы такие перемещения образуют броуновское движение с нулевым сносом и дисперсией $\sigma^2 = c/d$, где c — некоторая константа, а d — размер частицы.

Проблема в том, что размер частицы не связан напрямую с размером ее изображения. Наша задача — оценить распределение истинных размеров частиц по размерам на снимках.

Будем изучать равносильную задачу: оценить распределение σ^2. Рассмотрим n случайно выбранных частиц $E_1, \dots, E_n$. Обозначим дисперсии для их движения как $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$. Для i-й частицы у нас есть два $k(i)$-мерных вектора перемещений: $A_i^1, \dots, A_i^{k(i)}$ по оси x и $A_i^{k(i)+1}, \dots, A_i^{2k(i)}$ по оси y. Мы будем рассматривать только частный случай, когда все $k(i)$ равны k, а σ_i^2 непрерывна.

$A_i^1, \dots, A_i^{2k}$ условно независимы при условии σ_i^2 и имеют условное распределение $\mathcal{N}\left(0, \sigma_i^2\right)$. Дальше вместо выборки $A_i^1, \dots, A_i^{2k}$ будем рассматривать достаточную статистику $Z_i = \sum\limits_{j=1}^{2k} \left(A_i^j\right)^2$. Заметим далее, что $Z_i = \sigma_i^2 Y_i$, где $Y_i \sim \chi_{2k}^2$. При этом, Y_i независимы и не зависят от дисперсии σ_i^2.

Обозначим $X_i = \sigma_i^2$. Тогда задачу можно сформулировать так: $X_1, \dots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные величины с неизвестным распределением и положительным носителем; $Y_1, \dots, Y_n$ — независимые от них н.о.р. с.в. с распределением χ_{2k}^2; $Z_1, \dots, Z_n = X_1 Y_1, \dots, X_n Y_n$ — наблюдаемые случайные величины; а сама задача — по наблюдениям $Z_1, ..., Z_n$ оценить распределение X_1.

§2. Сведение задачи к вычислению обратного преобразования Лапласа

Есть случайные величины X, Y, Z. Мы не знаем распределение X, знаем распределение Y и наблюдаем Z. Кроме того, известно, что $Z = XY$, и что все величины непрерывны. Нужно оценить распределение X.

Мы будем использовать вейвлет «Mexican hat», потому что он прост и непрерывен. Его формула:

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}(1-t^2)e^{-t^2/2}$$

Определим элементы фрейма:

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}}\psi\left(\frac{t}{2^m}-n\right) = \frac{1}{\sqrt{2^m}}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\left(1-\left(\frac{t}{2^m}-n\right)^2\right)e^{-\left(\frac{t}{2^m}-n\right)^2/2}$$

Рассмотрим случай $Y \sim \chi^2_{2k}$; $X > \delta > 0$, абсолютно непрерывен. Плотность Y:

$$\chi^2_{2k} \sim \frac{1}{2^k}\frac{1}{\Gamma(k)}x^{k-1}e^{-x/2}$$

Будем строить функции $g_{m,n}$ такие, что $\mathrm{E}\, g_{m,n}(Z) = \mathrm{E}\,\psi_{m,n}(X)$. Заметим, что достаточно выполнения:

$$\forall x \in \operatorname{Im} X \quad \mathrm{E}\, g_{m,n}(xY) = \psi_{m,n}(x)$$

Заменим мат. ожидание преобразованием Лапласа и раскроем $\psi_{m,n}$:

$$\left(\frac{1}{2x}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z\left[g_{m,n}(z)z^{k-1}\right]\left(\frac{1}{2x}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{x}{2^m}-n\right)$$

Сделаем замену $u = \frac{1}{2x}$:

$$u^k\frac{1}{\Gamma(k)}L_z\left[g_{m,n}(z)z^{k-1}\right](u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u}-n\right)$$

Используя обратное преобразование Лапласа, найдем $g_{m,n}(t)$:

$$u^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z\left[g_{m,n}(z) z^{k-1}\right](u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)$$

$$L_z\left[g_{m,n}(z) z^{k-1}\right](u) = \frac{\Gamma(k)}{u^k}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)$$

$$g_{m,n}(t) t^{k-1} = L_u^{-1}\left[\frac{\Gamma(k)}{u^k}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)\right](t)$$

$$g_{m,n}(t) = \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)\right](t)$$

Таким образом мы получили выражение для $g_{m,n}(t)$. Далее мы выразим его через ряды, используя формулу Меллина и основную теорему о вычетах.

§3. Вычисление обратного преобразования Лапласа с помощью формулы Меллина и основной теоремы о вычетах

Мы выразили $g_{m,n}(t)$ как:

$$g_{m,n}(t) = \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) \tag{3.1}$$

Теперь нужно вычислить обратное преобразование Лапласа. Для этого мы будем использовать формулу Меллина:

$$L_s^{-1} \left[F\left(s\right) \right] (t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{ts} F(s) ds$$

Итак, нам нужно вычислить:

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t)$$

Подставим вместо ψ формулу нашего вейвлета:

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) = L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left(1 - \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 \right) \right.$$

Распишем множитель перед экспонентой:

$$1 - \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2^{2(m+1)}u^2} - 2\frac{1}{2^{m+1}u} n + n^2 \right) = (1 - n^2) + \frac{1}{u} \left(\frac{n}{2^m} \right) - \frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right)$$

Введем обозначение:

$$r_{m,n}(u) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right)$$

Таким образом,

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u}-n\right)\right](t)=\left(1-n^2\right)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t)+\left(\frac{n}{2^m}\right)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+1}}r_{m,n}(u)\right](t)-$$
$$-\left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+2}}r_{m,n}(u)\right](t) \quad (3.2)$$

Отсюда видно, что достаточно найти $L_u^{-1}[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)](t)$ для каждого k.

3.1 Находим $L_u^{-1}[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)](t)$

Выше мы ввели

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t)$$

Подставим обратно $r_{m,n}(u)$:

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t)=L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{m+1}u}-n\right)^2\right)\right](t)$$

Раскроем квадрат под экспонентой:

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t)=L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\left(n^2\right)-\frac{1}{u}\left(\frac{n}{2^m}\right)+\frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)\right)\right)\right](t)$$

Сгруппируем $2^{m+1}u$:

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t)=L_u^{-1}\left[\frac{2^{k(m+1)}}{\left(2^{m+1}u\right)^k}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\exp\left(-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2^{m+1}u}-\frac{1}{2\left(2^{m+1}u\right)^2}\right)\right](t)$$

Вынесем множители, не зависящие от u, за L_u^{-1}:

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t)=e^{-\frac{n^2}{2}}2^{k(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}L_u^{-1}\left[\frac{1}{\left(2^{m+1}u\right)^k}\exp\left(\frac{n}{2^{m+1}u}-\frac{1}{2\left(2^{m+1}u\right)^2}\right)\right](t)$$

Используя теорему о замене переменной в обратном преобразовании Лапласа, делаем замену $s=2^{m+1}u$:

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t)=e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}-\frac{1}{2s^2}\right)\right]\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)$$

3.2 Находим обратное преобразование Лапласа

В предыдущем разделе мы выразили:

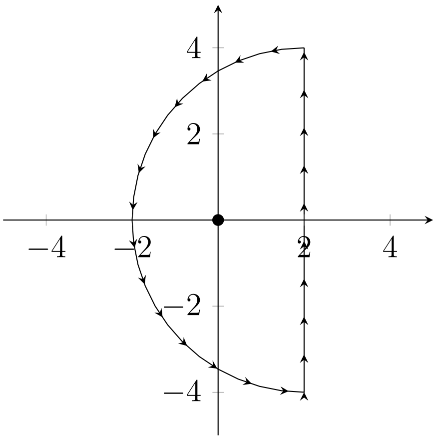
$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t)=e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}-\frac{1}{2s^2}\right)\right]\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right) \quad (3.3)$$

Чтобы вычислить правую часть, найдем теперь

$$L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}\right)\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\right](\tau) \tag{3.4}$$

Воспользуемся формулой Меллина обратного преобразования Лапласа. У нас особенность только в нуле, поэтому можно взять любую $\alpha > 0$:

$$L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}\right)\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\right](\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau}\frac{1}{s^k}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}ds$$



Берем контур $C = C_1 + C_2$, где C_1 — искомый, а C_2 — дуга окружности (слева от C_1 с центром в $(\alpha, 0)$).

Оценим $F(s) := (1/s^k)e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}$ на C_r, где $r > 4\alpha$. Для этого оценим каждый из множителей. Сначала $1/s$:

$$\left|\frac{1}{s}\right| = \left|\frac{1}{\alpha + re^{i\phi}}\right| = \frac{1}{\sqrt{(\alpha + r\cos\phi)^2 + (r\sin\phi)^2}} = \frac{1}{r\sqrt{\left(\frac{\alpha}{r} + \cos\phi\right)^2 + \sin^2\phi}} \leq \frac{1}{r\sqrt{1 + \frac{2\alpha\cos\phi}{r}}} \leq \frac{}{r\sqrt{1}}$$

Теперь оценим $e^{-1/(2s^2)}$ на том же контуре. Известно, что $|e^z| = e^{|z|}$

$$\left|\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\right| \leq \exp\left(\left|-\frac{1}{2s^2}\right|\right) = \exp\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Аналогично оцениваем $e^{n/s}$:

$$\left|\exp\left(\frac{n}{s}\right)\right| \leq \exp\left(\left|\frac{n}{s}\right|\right) = \exp\left(\frac{|n|\sqrt{2}}{r}\right)$$

Объединяем оценки и получаем:

$$\left|\frac{1}{s^k}\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\exp\left(\frac{n}{s}\right)\right| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{r}\right)^k \exp\left(\frac{1}{r^2}\right)\exp\left(\frac{|n|\sqrt{2}}{r}\right) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

А значит, по лемме Жордана $\int\limits_{C_r} e^{s\tau}F(s)ds$ стремится к нулю. Поэтому можем использовать основную теорему о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau}\frac{1}{s^k}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}ds = \frac{1}{2\pi i}2\pi i \operatorname*{Res}_{0}\left(e^{s\tau}\frac{1}{s^k}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}ds\right)$$

У нас возникает два случая: $n = 0$ и $n \neq 0$

3.2.1 Случай $n = 0$

Воспользуемся теоремой о правильной части функции $e^{s\tau}e^{-1/(2s^2)}$. Нам нужен $k-1$-й член ряда Лорана. Получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau}\frac{1}{s^k}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}ds = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tau^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!}$$

Таким образом, мы выразили вычислили 3.4:

$$L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}\right)\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\right](\tau) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tau^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!}$$

Подставим это выражение в 3.3, заменяя τ на $t/2^{m+1}$:

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t) = e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}-\frac{1}{2s^2}\right)\right]\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right) =$$
$$e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!}$$

Наконец, подставим это в 3.2:

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u}-n\right)\right](t) = \left(1-n^2\right)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t)+\left(\frac{n}{2^m}\right)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+1}}r_{m,n}(u)\right](t)+$$
$$+\left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+2}}r_{m,n}(u)\right](t) =$$
$$= \left(1-n^2\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!}+\left(\frac{n}{2^m}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{k(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+}}{(2j+}$$
$$-\left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k+1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1}/(-2)^j}{(2j+k+1)!\,j!} \quad (3.5)$$

Теперь получим выражение для $g(t)$, подставляя только что полученную формулу в 3.1:

$$g_{m,n}(t) = \frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u}-n\right)\right](t) =$$

$$= \frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\left(1-n^2\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!}+$$

$$+\frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\left(\frac{n}{2^m}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{k(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k}/(-2)^j}{(2j+k)!\,j!}-$$

$$-\frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k+1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1}/(-2)^j}{(2j+k+1)!\,j!}$$

Начнем упрощать выражение. Для начала, вынесем из суммы, степень, не зависящую от переменной суммирования и сделаем замену $n=0$ (так как рассматриваем именно этот случай):

$$g_{m,0}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!}-\left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j}/(-2)^j}{(2j+k+1)!\,j!}\right)$$

3.2.2 Случай $n \neq 0$

Воспользуемся теоремой о правильной части функции $e^{s\tau}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}$. Нам нужен $k-1$-й член ряда Лорана. Получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}e^{s\tau}\frac{1}{s^k}e^{-1/2s^2}e^{n/s}ds = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tau^{2j+k-1+i}/(-2)^j}{(2j+k-1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}$$

Таким образом, мы выразили вычислили 3.4:

$$L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}\right)\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\right](\tau) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tau^{2j+k-1+i}/(-2)^j}{(2j+k-1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}$$

Подставим это выражение в 3.3, заменяя τ на $t/2^{m+1}$:

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t) = e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}-\frac{1}{2s^2}\right)\right]\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right) =$$

$$e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1+i}/(-2)^j}{(2j+k-1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}$$

Наконец, подставим это в 3.2:

$$
\begin{aligned}
L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u}-n\right)\right](t) = \left(1-n^2\right) L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t) + \left(\frac{n}{2^m}\right) L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+1}}r_{m,n}(u)\right](t) + \\
+\left(\frac{1}{4^{m+1}}\right) L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+2}}r_{m,n}(u)\right](t) = \\
= \left(1-n^2\right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1+i}/(-2)^j}{(2j+k-1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!} + \\
+\left(\frac{n}{2^m}\right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+i}/(-2)^j}{(2j+k+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!} - \\
-\left(\frac{1}{4^{m+1}}\right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k+1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1+i}/(-2)^j}{(2j+k+1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}
\end{aligned}
\tag{3.6}
$$

Теперь получим выражение для $g_{m,n}(t)$, подставляя только что полученную формулу в 3.1

$$
\begin{aligned}
g_{m,n}(t) = \frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u}-n\right)\right](t) = \\
= \frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\left(1-n^2\right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1+i}/(-2)^j}{(2j+k-1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!} + \\
+\frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\left(\frac{n}{2^m}\right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+i}/(-2)^j}{(2j+k+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!} - \\
-\frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\left(\frac{1}{4^{m+1}}\right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k+1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1+i}/(-2)^j}{(2j+k+1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}
\end{aligned}
$$

Упростим:

$$
\begin{aligned}
g_{m,n}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} e^{-\frac{n^2}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \Bigg(\left(1-n^2\right) \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i}/(-2)^j}{(2j+k-1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!} + \left(\frac{nt}{2^m}\right) \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i}/(-}{(2j+k+i)} \\
+\left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i}/(-2)^j}{(2j+k+1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!} \Bigg)
\end{aligned}
$$

3.3 Результат

Выпишем обе полученные формулы вместе:

$$
g_{m,0}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!} - \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j}/(-2)^j}{(2j+k+1)!\,j!} \right)
$$

$$g_{m,n}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} e^{-\frac{n^2}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \Bigg(\left(1 - n^2\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)!\, j!} \frac{n^i}{i!} + \left(\frac{nt}{2^m}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-}{(2j+k+i)}$$

$$+ \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+1+i)!\, j!} \frac{n^i}{i!} \Bigg)$$

К сожалению, такой способ не привел из-за непригодности для численных методов

§4. Альтернативный подход к задаче

Вспомним наше изначальное интегральное уравнение:

$$\psi_{m,n}(x) = \int_0^\infty g(xy) f_Y(y) dy$$

Преобразуем интеграл, чтобы интегрирование было по xy:

$$\psi_{m,n}(x) = \int_0^\infty g(xy) f_Y(\frac{xy}{x}) d\frac{xy}{x} = \int_0^\infty \int_0^\infty g(z) \frac{1}{x} f_Y(\frac{z}{x}) dz$$

Таким образом мы получили интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$\psi_{m,n}(x) = \int_0^\infty K(x,z) g(z) dz$$

Дальше будем использовать равномерную сетку $\frac{1}{n_x}, \ldots, \frac{l_x n_x}{n_x}]$ для x, $\frac{1}{n_z}, \ldots, \frac{l_z n_z}{n_z}$ для z и дискретизируем наше уравнение. Получаем:

$$\psi_{m,n}[x] = \int_0^\infty K[x,z] g[z] dz = \frac{1}{n_z} \sum_{p=1}^{l_z n_z} g\left(\frac{p}{n_z}\right) K\left[x, \frac{p}{n_z}\right]$$

Таким образом, мы получили систему линейных уравнений. Запишем их в матричном виде:

$$\boldsymbol{\psi}_{m,n} = \frac{1}{n_z} \boldsymbol{K} \boldsymbol{g}$$

Увеличим матрицу K, чтобы добавить регуляризацию.

$$\tilde{\boldsymbol{K}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{K} \\ \alpha \boldsymbol{E} \end{pmatrix}$$

И соответствующий $\tilde{\boldsymbol{f}}$:

$$\tilde{\boldsymbol{f}} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{f} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

И будем использовать МНК-оптимизацию. Получаем:

$$\boldsymbol{g}_* = \arg\min_{\boldsymbol{g}} \|\tilde{\boldsymbol{K}}\boldsymbol{g} - \boldsymbol{f}\|$$

§5. Эксперименты

Для аналитического способа.

Функция	Способ вычисления	Машинная точность (размер мантиссы),	Значе
$g_{0,0}(1)$	численно, интеграл, контур $[1-100i, 1+100i]$	100 десятичных знаков	0.864
	численно, ряд	256 двоичных знаков	0.864
$g_{0,0}(10)$	численно, интеграл, контур $[1-100i, 1+100i]$	100 десятичных знаков	0.591
	численно, ряд	256 двоичных знаков	0.591
$g_{0,0}(100)$	численно, интеграл, контур $[1-10i, 1+10i]$	100 десятичных знаков	$-2 \times$
	численно, интеграл, контур $[1-100i, 1+100i]$	100 десятичных знаков	Вычис
	численно, ряд	256 двоичных знаков	-0.44

Для численного вычисления интеграла. Мы использовали шаг 0,1 и $\alpha = 0{,}1$. И использовали $m = \{-5, \ldots, 5\}$, $n = \{-5, \ldots, 5\}$

Рис. 5.1: $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

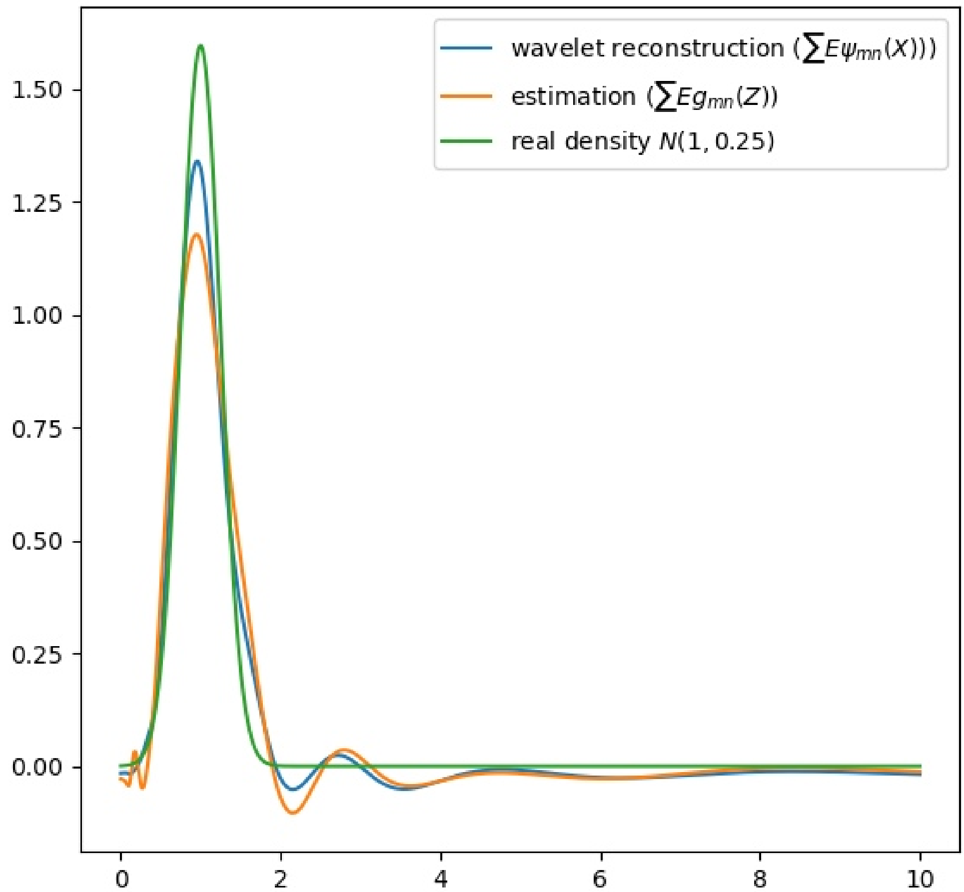


Рис. 5.2: $X \sim \exp(1)$

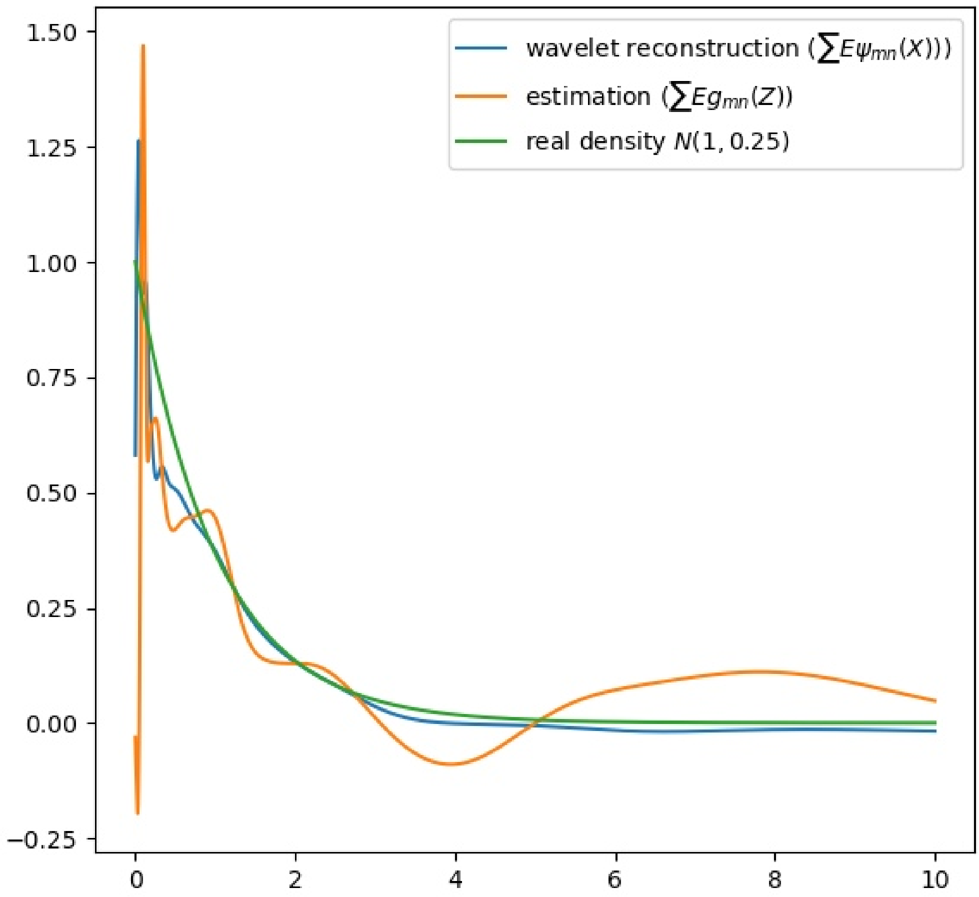
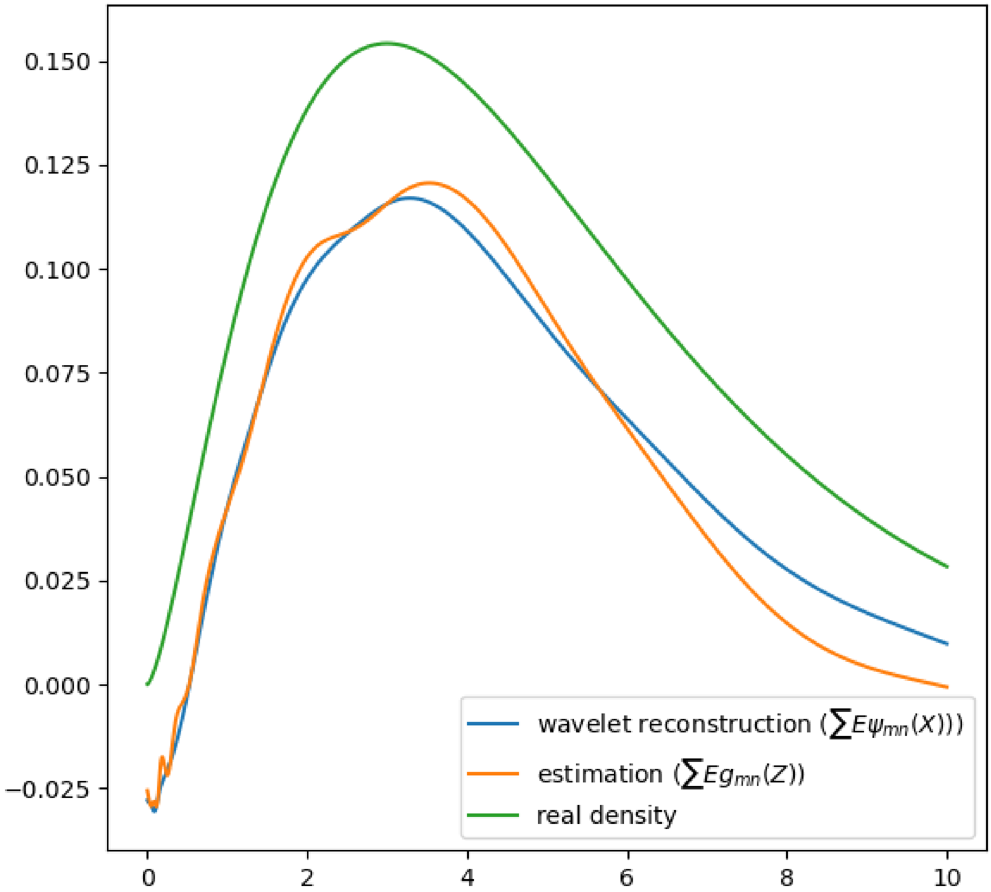


Рис. 5.3: $X \sim \chi_5^2$



§6. Теоремы

6.1 Связь мат. ожидания χ^2_{2k} и преобразования Лапласа

Теорема (О связи мат. ожидания χ^2_{2k} и преобразования Лапласа)**.** *Пусть f — функция плотности χ^2_{2k}; $a > 0$. Тогда*

$$Eg(aY) = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z\left[g(z)z^{k-1}\right]\left(\frac{1}{2a}\right)$$

Доказательство.

$$Eg(aY) = \int\limits_0^\infty g(ay)f(y)dy$$

Подставим функцию плотности:

$$Eg(aY) = \int\limits_0^\infty g(ay)\frac{1}{\Gamma(k)}\frac{1}{2^k}y^{k-1}e^{-y/2}dy$$

Возьмем $z = ay$:

$$Eg(aY) = \int\limits_0^\infty g(z)\frac{1}{\Gamma(k)}\frac{1}{2^k}\left(\frac{z}{a}\right)^{k-1}e^{-z/(2a)}\frac{dz}{a} = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)}\int\limits_0^\infty g(z)z^{k-1}e^{-z\left(\frac{1}{2a}\right)}dz = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z\left[\right.$$

■

6.2 Замена переменной в обратном преобразовании Лапласа

Теорема. *Пусть $c > 0$; α такое, что все особенности f лежат левее $c\alpha$. Тогда*

$$L^{-1}_u\left[f(cu)\right](t) = L^{-1}_s\left[\frac{1}{c}f(s)\right]\left(\frac{t}{c}\right)$$

Доказательство.

$$L_u^{-1}\left[f\left(cu\right)\right](t)=\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}e^{ut}f(cu)du=\frac{1}{c}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty}e^{(cu)\frac{t}{c}}f(cu)d\left(cu\right)=\frac{1}{c}\int\limits_{c\alpha-i\infty}^{c\alpha+i\infty}e^{s\frac{t}{c}}f(s)ds=L_s^{-1}\left[\frac{1}{c}f(s)\right]\left(\frac{t}{c}\right)$$

■

6.3 Правильная часть произведения голоморфной функции и функции с нулевой правильной частью

Теорема. *Пусть f, g — голоморфные функции; правильная часть g нулевая; $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — коэффициенты разложения в ряд Лорана функции f; $\{b_n\}_{n=-\infty}^{0}$ — коэффициенты разложения в ряд Лорана функции g.*

Тогда в правильной части разложения в ряд Лорана произведения $f(z)g(z)$ участвуют только коэффициенты правильной части функции f

Доказательство.

$$f(z)g(z)=\left(\sum_{n=-\infty}^{\infty}a_nz^n\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{0}b_mz^m\right)=\sum_{k=-\infty}^{\infty}z^k\sum_{m=-\infty}^{0}a_{k-m}b_m$$

Правильная часть при $k\geq 0$. При этом у нас $m\leq 0$. А значит, $n=k-m\geq 0$ для каждого коэффициента правильной части. ■

6.4 Правильная часть ряда Лорана для $f(s)=e^{as}\,e^{b/s}$

Теорема. *Правильная часть ряда Лорана для функции*

$$f(s)=e^{as}e^{b/s}$$

Равна

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{s}{n}\right)^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(ab)^n}{n!\,(n-k)!}$$

Доказательство. Заменим экспоненты соответствующими рядами:

$$e^{as}e^{b/s}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(as)^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(b/s)^m}{m!}$$

Обе функции аналитичны в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, а потому их ряды сходятся абсолютно. Ряд для функции–произведения можно получить перемножением рядов по Коши.

$$e^{as}e^{b/s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s^k \sum_{n-m=k} \chi(n\geq 0)\chi(m\geq 0)\frac{a^n\, b^m}{n!\, m!} = \sum_{k=-\infty}^{-1} s^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n\, b^{n-k}}{n!\,(n-k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a^n\, b^{n-k}}{n!\,(n-k)!}$$

Упростим правильную часть:

$$\sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a^n\, b^{n-k}}{n!\,(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{n}\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(ab)^n}{n!\,(n-k)!}$$

■

6.5 Правильная часть ряда Лорана для $f(s) = e^{as}e^{-1/(2s^2)}$

Теорема. *Правильная часть ряда Лорана для функции*

$$f(z) = e^{az}e^{-1/(2z^2)}$$

Равна

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k}/(-2)^m}{(2m+k)!\, m!}$$

Доказательство. Заменим экспоненты рядами:

$$e^{az}e^{-1/(2z^2)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(az)^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{\left(-1/\left(2z^2\right)\right)^m}{m!}\right)$$

Обе функции аналитичны в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, поэтому их ряды сходятся абсолютно. Находим ряд Лорана для f, перемножая по Коши эти два ряда:

$$e^{az}e^{-1/(2z^2)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \sum_{n-2m=k} \chi(n\geq 0)\chi(m\geq 0)\frac{a^n/(-2)^m}{n!\, m!}$$

Тогда правильная часть:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{n-2m=k} \chi(n\geq 0)\chi(m\geq 0)\frac{a^n/(-2)^m}{n!\, m!} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k}/(-2)^m}{(2m+k)!\, m!}$$

■

6.6 Правильная часть ряда Лорана для $f(z) = e^{az}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}$

Теорема. *Пусть* $k \geq 0$*; пусть*

$$f(z) = e^{az}e^{-1/(2s^2)}e^{b/z}$$

Тогда k*-й член ряда Лорана для* f *равен*

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{2m+k+l}/\left(-2\right)^m}{(2m+k+l)!\,m!}\frac{n^l}{l!}$$

Доказательство. Определим

$$g(t) = e^{az}e^{-1/(2s^2)}$$
$$h(t) = e^{b/z}$$

Обе функции голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому их ряды сходятся абсолютны и мы можем умножить ряды по Коши, чтобы получить ряд Лорана для f.

У функции $e^{n/s}$ правильная часть константна. Поэтому, согласно теореме о правильной части произведения голоморфной функции и функции с константной правильной частью, нам достаточно знать только правильную часть разложения функции g, которую мы нашли в предыдущей теореме.

Пусть $\{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — коэффициенты для g, а $\{\beta_n\}_{n=-\infty}^{0}$ — коэффициенты для h, а $\{\gamma_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — коэффициенты f. Для наглядности, приведем формулу k-го члена их произведения, где $k \geq 0$:

$$\gamma_k = \sum_{l=-\infty}^{0}\alpha_{k-l}\beta_l = \sum_{l=0}^{\infty}\alpha_{k+l}\beta_{-l}$$

Приведем также формулы для α_k и β_{-k}:

$$\alpha_k = \sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{2m+k}/\left(-2\right)^m}{(2m+k)!\,m!}$$
$$\beta_{-k} = \frac{n^k}{k!}$$

Подставим α_k и β_{-k} в формулу для γ_k:

$$\gamma_k = \sum_{l=0}^{\infty}\alpha_{k+l}\beta_{-l} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{2m+k+l}/\left(-2\right)^m}{(2m+k+l)!\,m!}\frac{n^l}{l!}$$

$\blacksquare$

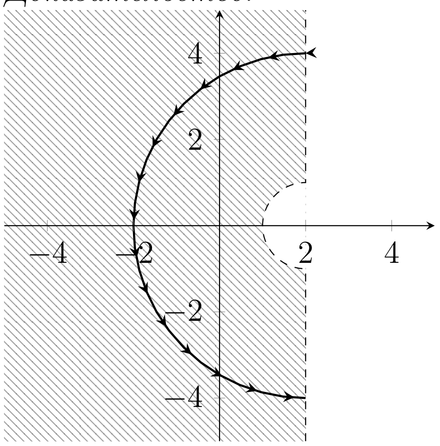
6.7 Модифицированная лемма Жордана

Лемма Жордана позволяет использовать основную теорему о вычетах для интеграла по контуру $(-\infty, \infty)$. Обратное преобразование Лапласа можно найти, используя интеграл Меллина. Этот интеграл использует контур $(\alpha - i\infty, \alpha + i\infty)$. Если мы модифицируем лемму Жордана, чтобы она использовала контур в виде левой полуокружности с центром в α, то сможем использовать основную теорему о вычетах для вычисления обратного преобразования Лапласа.

Теорема (Модифицированная лемма Жордана)**.**
Пусть α*,* $t > 0$*;* $F(s)$ *непрерывна в области* $G = \{\operatorname{Re} s \leq \alpha\} \cap \{|s - \alpha| \geq R_0 > 0\}$*;* C_R *— полуокружность* $|z - \alpha| = R$ *в* G*;* $\lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_{s \in C_R} |F(s)| = 0$*;*

Тогда $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{ts} F(s) ds = 0$

Доказательство.



По условию, $\forall \varepsilon > 0 \;\; \exists R \;\; \forall s \in C_R \quad |F(s)| = |F(\alpha + Re^{i\varphi})| < \varepsilon$, тогда

$$\left| \int\limits_{C_R} e^{ts} F(s) ds \right| \leq \int\limits_{C_R} \left| e^{ts} F(s) \right| |ds| \leq \varepsilon \int\limits_{C_R} \left| e^{ts} \right| |ds|$$

Рассмотрим на C_R: $\left| e^{ts} \right| = \left| e^{t(\alpha + R\cos\varphi + Ri\sin\varphi)} \right| = e^{t(\alpha + R\cos\varphi)}$

Отсюда: $\varepsilon \int\limits_{C_R} \left| e^{st} \right| |ds| = \varepsilon \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\alpha t + Rt\cos\varphi} \left| d\left(Re^{i\varphi} \right) \right| =$

$$\varepsilon \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \left| e^{\alpha t + Rt\cos\varphi} Rie^{i\varphi} \right| d\varphi = R\varepsilon e^{\alpha t} \int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Rt\cos\varphi} d\varphi = R\varepsilon e^{\alpha t} \int\limits_{0}^{\pi} e^{Rt\cos\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)} d\varphi =$$

$$R\varepsilon e^{\alpha t} \int\limits_{0}^{\pi} e^{-Rt\sin\varphi} d\varphi = 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\sin\varphi} d\varphi$$

На $[0, \dfrac{\pi}{2}]$ $\sin\varphi \geq \dfrac{2}{\pi}\varphi$

$$\implies 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\sin\varphi} d\varphi \leq 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\frac{2}{\pi}\varphi} d\varphi =$$

$$2R\varepsilon e^{\alpha t} \left(\frac{1}{-\frac{2Rt}{\pi}} e^{-\frac{2Rt\varphi}{\pi}} \right) \Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\varepsilon}{t} e^{\alpha t} \left(1 - e^{-Rt} \right) \xrightarrow[R \to \infty]{} 0$$

Отсюда интеграл по дуге стремится к 0. ■