

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ  
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ  
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ  
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ  
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ  
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И СЛУЧАЙНЫХ  
ПРОЦЕССОВ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА  
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)  
специалиста

**Оценивание плотности размеров наночастиц на основе вейвлетов**

Выполнил студент  
603 группы  
Купряков Василий Юрьевич

---

(подпись студента)

Научный руководитель:  
с.н.с., к.ф.-м.н.  
Шкляев Александр Викторович

---

(подпись научного руководителя)

Москва  
2022

# 1 Введение

В работе мы изучим задачу, которая возникает при исследовании коллоидных примесей в жидкости.

Примеси в исследуемой жидкости — это движущиеся частицы с размерами порядка  $10^{-8}$  м. Для исследования таких примесей используется анализ траекторий наночастиц.

Жидкость просвечивают лазером, когда луч попадает на частицу, она рассеивает свет. К микроскопу присоединена камера, которая фиксирует рассеянный свет.

Получается последовательность изображений. Для каждой частицы эта последовательность является последовательностью проекций частиц на площадь камеры. Мы можем построить векторы перемещений частиц в проекции на плоскость камеры по этим снимкам. Для отдельной частицы такие перемещения образуют броуновское движение с нулевым сносом и дисперсией  $\sigma^2 = c/d$ , где  $c$  — некоторая константа, а  $d$  — размер частицы.

Проблема в том, что размер частицы не связан напрямую с размером ее изображения. Наша задача — оценить распределение истинных размеров частиц по размерам на снимках.

Будем изучать равносильную задачу: оценить распределение  $\sigma^2$ . Рассмотрим  $n$  случайно выбранных частиц  $E_1, \dots, E_n$ . Обозначим дисперсии для их движения как  $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$ . Для  $i$ -й частицы у нас есть два  $k(i)$ -мерных вектора перемещений:  $A_i^1, \dots, A_i^{k(i)}$  по оси  $x$  и  $A_i^{k(i)+1}, \dots, A_i^{2k(i)}$  по оси  $y$ . Мы будем рассматривать только частный случай, когда все  $k(i)$  равны  $k$ , а  $\sigma_i^2$  непрерывна.

$A_i^1, \dots, A_i^{2k}$  условно независимы при условии  $\sigma_i^2$  и имеют условное распределение  $\mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$ . Дальше вместо выборки  $A_i^1, \dots, A_i^{2k}$  будем рассматривать достаточную статистику  $Z_i = \sum_{j=1}^{2k} (A_i^j)^2$ . Заметим далее, что  $Z_i = \sigma_i^2 Y_i$ , где  $Y_i \sim \chi_{2k}^2$ .

При этом,  $Y_i$  независимы и не зависят от дисперсии  $\sigma_i^2$ .

Обозначим  $X_i = \sigma_i^2$ . Тогда задачу можно сформулировать так:  $X_1, \dots, X_n$  — независимые одинаково распределенные непрерывные случайные величины с неизвестным распределением и положительным носителем;  $Y_1, \dots, Y_n$  — независимые от них н.о.р. с.в. с распределением  $\chi_{2k}^2$ ;  $Z_1, \dots, Z_n = X_1 Y_1, \dots, X_n Y_n$  — наблюдаемые случайные величины; а сама задача — по наблюдениям  $Z_1, \dots, Z_n$  оценить распределение  $X_1$ .

## 2 Предварительные сведения

Мы будем рассматривать дискретное вейвлет-преобразование. Сформулируем основные определения и свойства.

**Определение.** Материнский вейвлет — это функция  $\psi(t)$ , которая отвечает

следующему свойству:

$$\int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi = \int_{-\infty}^0 \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty,$$

где  $\hat{\psi}(\xi)$  – образ Фурье  $\psi(\xi)$ .

Из этого свойства следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Из материнского вейвлета  $\psi(t)$  строится система вейвлетов

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^m}} \psi\left(\frac{t}{a^m} - nb\right).$$

В дальнейшем мы будем использовать вейвлеты с  $a = 2$  и  $b = 1$ . Таким образом, мы будем использовать систему:

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi\left(\frac{t}{2^m} - n\right).$$

Часто система вейвлетов не является ортогональной, но образует фрейм.

**Определение.** Семейство  $\phi_k$  является фреймом в  $L_2(\mathbb{R})$ , если существуют постоянные  $A$  и  $B$  такие, что

$$\forall f \in L_2(\mathbb{R}) \quad A\|f\|^2 \leq \sum_k |(f, \phi_k)|^2 \leq B\|f\|^2$$

**Лемма.** Если семейство  $\phi_k$  образует фрейм, то

$$f = \frac{2}{A+B} \sum_k (f, \phi_k) \phi_k + Rf,$$

где

$$\|R\| \leq \frac{B-A}{B+A}$$

Мы будем использовать два вейвлета: *Mexican hat* и вейвлет Мейера. Приведем их материнские функции.

**Определение.** Материнская функция вейвлета *Mexican hat*:

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (1-t^2) e^{-t^2/2}.$$

**Определение.** Материнская функция вейвлета Мейера:

$$\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t),$$

где

$$\psi_1(t) = \frac{\frac{4}{3\pi} \left(t - \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3} \left(t - \frac{1}{2}\right)\right) - \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{3} \left(t - \frac{1}{2}\right)\right)}{\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{16}{9} \left(t - \frac{1}{2}\right)^3},$$

$$\psi_2(t) = \frac{\frac{8}{3\pi} \left(t - \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{8\pi}{3} \left(t - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{3} \left(t - \frac{1}{2}\right)\right)}{\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{64}{9} \left(t - \frac{1}{2}\right)^3}.$$

Вейвлет Mexican hat образует фрейм с границами  $A = 3,223$ ,  $B = 3,596$ , вейвлет Мейера является ортогональным, т. е. образует базис  $L_2(\mathbb{R})$ .

Также нам потребуются преобразование Лапласа и формула Меллина обратного преобразования Лапласа.

**Определение.** Преобразование лапласа функции  $f(t)$  – это функция  $L_t[f](s)$ , которая задается формулой

$$L_t[f](s) = \int_0^{\infty} f(t)e^{-st}dt.$$

**Лемма** (Формула Меллина). Пусть  $F(s) = L_s[f](t)$  – преобразование Лапласа функции  $f(t)$ . Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{ts}ds,$$

где  $\alpha$  такое, что контур лежит правее всех особенностей  $F(s)$  и  $F(s)$  ограничена на этом контуре.

### 3 Преобразование задачи для использования вейвлетов

Повторим задачу. Есть независимые одинаково распределенные непрерывные (н. о. р) положительные случайные величины (с. в.)  $X_1, \dots, X_N$  с неизвестным распределением. Есть н. о. р. с. в.  $Y_1, \dots, Y_N$  с распределением  $\chi^2(2k)$ . Мы наблюдаем случайные величины  $Z_1, \dots, Z_N$ , которые задаются как  $Z_i = X_i Y_i$ . Нужно оценить распределение  $X_1$ .

Будем строить функции  $g_{m,n}$  такие, что  $E g_{m,n}(Z) = E \psi_{m,n}(X)$ . Заметим, что достаточно выполнения:

$$\forall x \in \text{Im } X \quad E g_{m,n}(xY) = \psi_{m,n}(x).$$

Таким образом, нам нужно найти функции  $g_{m,n}$  такие, что

$$\int_0^{\infty} g_{m,n}(xy) f_Y(y) dy = \psi_{m,n}(x).$$

Тогда

$$f_X(x) \approx \sum_{m,n} \mathbb{E} \psi_{m,n}(X) \psi_{m,n}(x) = \sum_{m,n} \mathbb{E} g_{m,n}(Z) \psi_{m,n}(x),$$

причем в случае с ортогональным вейвлетом здесь будет равенство.

Получаем оценку:

$$f_X(x) \approx \sum_{m,n} \sum_i \frac{g_{m,n}(z_i)}{N} \psi_{m,n}(x)$$

## 4 Аналитическое вычисление $g_{m,n}(t)$ для Mexican hat вейвлета

### 4.1 Вспомогательные леммы

В дальнейшем для вычислений нам понадобится несколько технических фактов. Сформулируем и докажем их в этом разделе.

**Лемма 1** (О связи мат. ожидания  $\chi_{2k}^2$  и преобразования Лапласа). Пусть  $Y \sim \chi_{2k}^2$  с плотностью  $f_Y(y)$ ,  $a > 0$ . Тогда

$$\mathbb{E} g(aY) = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g(z) z^{k-1}] \left(\frac{1}{2a}\right).$$

*Доказательство.* Раскроем математическое ожидание:

$$\mathbb{E} g(aY) = \int_0^{\infty} g(ay) f_Y(y) dy.$$

Подставим функцию плотности:

$$\mathbb{E} g(aY) = \int_0^{\infty} g(ay) \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{1}{2^k} y^{k-1} e^{-y/2} dy.$$

Подставим  $z = ay$ :

$$\mathbb{E} g(aY) = \int_0^{\infty} g(z) \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{1}{2^k} \left(\frac{z}{a}\right)^{k-1} e^{-z/(2a)} \frac{dz}{a} = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^{\infty} g(z) z^{k-1} \exp\left(-z \frac{1}{2a}\right) dz.$$

Заменим интеграл преобразованием Лапласа:

$$Eg(aY) = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g(z)z^{k-1}] \left(\frac{1}{2a}\right).$$

■

**Лемма 2** (Замена переменной в обратном преобразовании Лапласа). Пусть существует  $L_u^{-1}[f(cu)](t)$ ,  $c > 0$ . Тогда

$$L_u^{-1}[f(cu)](t) = L_s^{-1}\left[\frac{1}{c}f(s)\right]\left(\frac{t}{c}\right).$$

*Доказательство.* Воспользуемся формулой Меллина:

$$L_u^{-1}[f(cu)](t) = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{ut} f(cu) du = \frac{1}{c} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{(cu)(t/c)} f(cu) d(cu).$$

Произведем замену  $s = cu$

$$L_u^{-1}[f(cu)](t) = \frac{1}{c} \int_{c\alpha-i\infty}^{c\alpha+i\infty} e^{s(t/c)} f(s) ds.$$

Заменим интеграл на обратное преобразование Лапласа

$$L_u^{-1}[f(cu)](t) = L_s^{-1}\left[\frac{1}{c}f(s)\right]\left(\frac{t}{c}\right)$$

■

**Лемма 3** (Правильная часть произведения голоморфной функции и функции с нулевой положительной частью). Пусть  $f(z)$ ,  $g(z)$  — аналитические функции, коэффициента ряда Лорана для  $g(z)$  при положительных степенях нулевые,  $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  — коэффициенты разложения в ряд Лорана функции  $f(z)$ ;  $\{b_n\}_{n=-\infty}^0$  — коэффициенты разложения в ряд Лорана функции  $g(z)$ .

Тогда в правильной части разложения в ряд Лорана произведения  $f(z)g(z)$  участвуют только коэффициенты правильной части функции  $f(z)$ . При этом сам ряд имеет вид:

*Доказательство.* Разложим  $f(z)g(z)$  в ряд Лорана:

$$f(z)g(z) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n\right) \left(\sum_{m=-\infty}^0 b_m z^m\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \sum_{m=-\infty}^0 a_{k-m} b_m.$$

Нас интересуют только правильная часть, поэтому рассматриваем коэффициенты при  $k \geq 0$ . При этом из ряда Лорана функции  $f(z)$  используются коэффициенты  $k - m$ . Принимая во внимание, что  $k \geq 0$  и  $m \leq 0$ , получаем, что  $k - m \geq 0$ . А значит, используется только правильная часть функции  $f(z)$ . ■

**Лемма 4** (Правильная часть ряда Лорана для  $f(s) = e^{as}e^{-1/(2s^2)}$ ). *Правильная часть ряда Лорана для функции*

$$f(z) = e^{az}e^{-1/(2z^2)}$$

*равна*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k}/(-2)^m}{(2m+k)! m!}.$$

*Доказательство.* Заменяем экспоненты рядами:

$$e^{az}e^{-1/(2z^2)} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(az)^n}{n!} \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1/(2z^2))^m}{m!} \right).$$

Обе функции аналитичны в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , поэтому их ряды сходятся абсолютно. Находим ряд Лорана для  $f(z)$ , перемножая по Коши эти два ряда:

$$e^{az}e^{-1/(2z^2)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \sum_{n-2m=k} \chi(n \geq 0) \chi(m \geq 0) \frac{a^n/(-2)^m}{n! m!}.$$

Тогда правильная часть:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{n-2m=k} \chi(n \geq 0) \chi(m \geq 0) \frac{a^n/(-2)^m}{n! m!} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k}/(-2)^m}{(2m+k)! m!}.$$

■

**Лемма 5** (Правильная часть ряда Лорана для  $f(z) = e^{az}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}$ ). *Пусть  $k \geq 0$ ; пусть*

$$f(z) = e^{az}e^{-1/(2z^2)}e^{b/z}.$$

*Тогда  $k$ -й член ряда Лорана для  $f$  равен*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k+l}/(-2)^m}{(2m+k+l)! m!} \frac{n^l}{l!}.$$

*Доказательство.* Определим

$$g(z) = e^{az}e^{-1/(2z^2)}$$

$$h(z) = e^{b/z}.$$

Обе функции аналитичны в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Поэтому их ряды сходятся абсолютно и мы можем умножить ряды по Коши, чтобы получить ряд Лорана для  $f$ .

У функции  $e^{n/z}$  положительная часть нулевая. Поэтому, согласно лемме 3 о правильной части произведения голоморфной функции и функции с нулевой положительной частью, нам достаточно знать только правильную часть разложения функции  $g$ , которую мы нашли в предыдущей лемме 4.

Пусть  $\{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  — коэффициенты разложения  $g(z)$  в ряд Лорана,  $\{\beta_n\}_{n=-\infty}^0$  — коэффициенты разложения  $h(z)$ , а  $\{\gamma_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  — коэффициенты разложения  $f$ .

Приведем формулу  $k$ -го члена их произведения, где  $k \geq 0$ :

$$\gamma_k = \sum_{l=-\infty}^0 \alpha_{k-l} \beta_l = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{k+l} \beta_{-l}.$$

Формулу для  $\alpha_k$  возьмем из леммы 4:

$$\alpha_k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k} / (-2)^m}{(2m+k)! m!}.$$

И выпишем формулу для  $\beta_{-k}$ :

$$\beta_{-k} = \frac{n^k}{k!}.$$

Подставим  $\alpha_k$  и  $\beta_{-k}$  в формулу для  $\gamma_k$ :

$$\gamma_k = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{k+l} \beta_{-l} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k+l} / (-2)^m}{(2m+k+l)! m!} \frac{n^l}{l!}.$$

■

Лемма Жордана позволяет использовать основную теорему о вычетах для интеграла по контуру  $(-\infty, \infty)$ . Обратное преобразование Лапласа можно найти, используя интеграл Меллина. Этот интеграл использует контур  $(\alpha - i\infty, \alpha + i\infty)$ . Если мы модифицируем лемму Жордана, чтобы она использовала контур в виде левой полуокружности с центром в  $\alpha$ , то сможем использовать основную теорему о вычетах для вычисления обратного преобразования Лапласа.

**Лемма 6** (Модифицированная лемма Жордана). Пусть  $\alpha, t, R_0 > 0$ , функция  $F(s)$  непрерывна в области

$$G = \{s \mid \operatorname{Re} s \leq \alpha\} \cap \{s \mid |s - \alpha| \geq R_0 > 0\}$$

Обозначим  $C_R$  — полуокружность  $|z - \alpha| = R$  в области  $G$ . И пусть выполняется:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{s \in C_R} |F(s)| = 0.$$

Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{ts} F(s) ds = 0.$$

*Доказательство.* Для наглядности схематично изобразим контур интегрирования и область  $G$ :



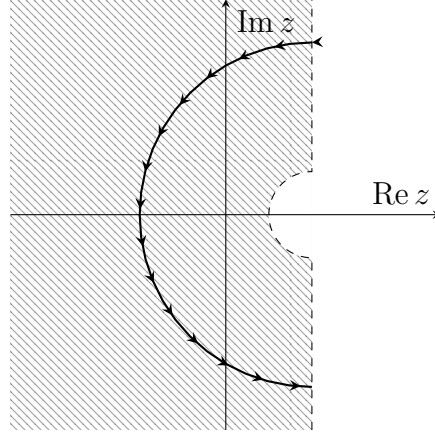


Рис. 1: контур и область

По условию,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R \quad \forall s \in C_R \quad |F(s)| = |F(\alpha + Re^{i\varphi})| < \varepsilon,$$

тогда

$$\left| \int_{C_R} e^{ts} F(s) ds \right| \leq \int_{C_R} |e^{ts} F(s)| |ds| \leq \varepsilon \int_{C_R} |e^{ts}| |ds|.$$

На полуокружности  $C_R$  мы можем представить экспоненту  $e^{ts}$  в виде:

$$|e^{ts}| = |e^{t(\alpha + R \cos \varphi + Ri \sin \varphi)}| = e^{t(\alpha + R \cos \varphi)}.$$

Подставим это в интеграл:

$$\varepsilon \int_{C_R} |e^{st}| |ds| = \varepsilon \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\alpha t + Rt \cos \varphi} |d(Re^{i\varphi})|$$

И упростим его:

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\alpha t + Rt \cos \varphi} |d(Re^{i\varphi})| &= \varepsilon \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |e^{\alpha t + Rt \cos \varphi} Rie^{i\varphi}| d\varphi = R\varepsilon e^{\alpha t} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Rt \cos \varphi} d\varphi \\ &= R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\pi} e^{Rt \cos(\varphi + \frac{\pi}{2})} d\varphi = R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\pi} e^{-Rt \sin \varphi} d\varphi = 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt \sin \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

На отрезке  $[0, \frac{\pi}{2}]$  выполняется:  $\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$ . А значит,

$$2R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt \sin \varphi} d\varphi \leq 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt \frac{2}{\pi} \varphi} d\varphi = .$$

Этот интеграл уже легко вычисляется:

$$2R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\frac{2}{\pi}\varphi} d\varphi = 2R\varepsilon e^{\alpha t} \left( \frac{1}{-\frac{2Rt}{\pi}} e^{-\frac{2Rt\varphi}{\pi}} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\varepsilon}{t} e^{\alpha t} (1 - e^{-Rt}).$$

Получившаяся функции стремится к нулю при  $R \rightarrow \infty$ . Отсюда интеграл по дуге стремится к 0. ■

## 4.2 Сведение задачи к вычислению обратного преобразования Лапласа

Рассмотрим только случай  $X_i > \delta > 0$ .

Мы будем использовать вейвлет «Mexican hat», потому что он прост и непрерывен. Его формула:

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} (1 - t^2) e^{-t^2/2}.$$

Определим элементы фрейма:

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi\left(\frac{t}{2^m} - n\right) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left(1 - \left(\frac{t}{2^m} - n\right)^2\right) e^{-\left(\frac{t}{2^m} - n\right)^2/2}.$$

Напишем плотность  $Y_i$ :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^k} \frac{1}{\Gamma(k)} y^{k-1} e^{-y/2}.$$

Раскроем  $E g_{m,n}(xY)$ :

$$E g_{m,n}(xY) = \int_0^\infty g_{m,n}(xy) f_Y(y) dy = \int_0^\infty g_{m,n}(xy) \frac{1}{2^k} \frac{1}{\Gamma(k)} y^{k-1} e^{-y/2} dy.$$

Произведем замену  $z = xy$ :

$$\begin{aligned} E g_{m,n}(xY) &= \frac{1}{2^k} \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty g_{m,n}(z) \frac{z^{k-1}}{x^{k-1}} e^{-z/(2x)} \frac{dz}{x} \\ &= \left(\frac{1}{2x}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty g_{m,n}(z) z^{k-1} \exp\left(-z \frac{1}{2x}\right) dz. \end{aligned}$$

Заменим интеграл преобразованием Лапласа:

$$E g_{m,n}(xY) = \left(\frac{1}{2x}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g_{m,n}(z) z^{k-1}] \left(\frac{1}{2x}\right).$$

Получаем функциональное уравнение:

$$\left(\frac{1}{2x}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g_{m,n}(z) z^{k-1}] \left(\frac{1}{2x}\right) = \psi_{m,n}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi\left(\frac{x}{2^m} - n\right)$$

Сделаем замену  $u = \frac{1}{2x}$ :

$$u^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g_{m,n}(z) z^{k-1}] (u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right).$$

Перенесем множители в правую часть:

$$L_z [g_{m,n}(z) z^{k-1}] (u) = \frac{\Gamma(k)}{u^k} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right).$$

Произведем обратное преобразование Лапласа:

$$g_{m,n}(z) z^{k-1} = L_u^{-1} \left[ \frac{\Gamma(k)}{u^k} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right) \right] (z).$$

Выразим  $g_{m,n}(z)$ :

$$g_{m,n}(z) = \frac{1}{z^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right) \right] (z). \quad (1)$$

Итак, нам нужно вычислить:

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right) \right] (t).$$

Подставим вместо  $\psi$  формулу нашего вейвлета:

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right) \right] (t) = \\ L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left(1 - \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)^2\right) \right] (t). \end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$r_{m,n}(u) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)^2\right).$$

И сразу воспользуемся им:

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right) \right] (t) = L_u^{-1} \left[ \left(1 - \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)^2\right) r_{m,n}(u) \right] (t).$$

Распишем множитель перед экспонентой:

$$\begin{aligned} 1 - \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 &= 1 - \left( \frac{1}{2^{2(m+1)}u^2} - 2\frac{1}{2^{m+1}u}n + n^2 \right) = \\ &= (1 - n^2) + \frac{1}{u} \left( \frac{n}{2^m} \right) - \frac{1}{u^2} \left( \frac{1}{4^{m+1}} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) &= \\ &= (1 - n^2) L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) + \left( \frac{n}{2^m} \right) L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^{k+1}} r_{m,n}(u) \right] (t) - \\ &\quad - \left( \frac{1}{4^{m+1}} \right) L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^{k+2}} r_{m,n}(u) \right] (t). \quad (2) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что достаточно найти  $L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t)$  для каждого  $k$ .

### 4.3 Нахождение $L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t)$

Выше мы ввели

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t).$$

Подставим обратно  $r_{m,n}(u)$ :

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 \right) \right] (t).$$

Раскроем квадрат под экспонентой:

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) &= \\ &= L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( (n^2) - \frac{1}{u} \left( \frac{n}{2^m} \right) + \frac{1}{u^2} \left( \frac{1}{4^{m+1}} \right) \right) \right) \right] (t). \end{aligned}$$

Сгруппируем  $2^{m+1}u$ :

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) &= \\ &= L_u^{-1} \left[ \frac{2^{k(m+1)}}{(2^{m+1}u)^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp \left( -\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2^{m+1}u} - \frac{1}{2(2^{m+1}u)^2} \right) \right] (t). \end{aligned}$$

Вынесем множители, не зависящие от  $u$ , за  $L_u^{-1}$ :

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) &= \\ &= e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_u^{-1} \left[ \frac{1}{(2^{m+1}u)^k} \exp \left( \frac{n}{2^{m+1}u} - \frac{1}{2(2^{m+1}u)^2} \right) \right] (t). \end{aligned}$$

Используя лемму 2 о замене переменной в обратном преобразовании Лапласа, делаем замену  $s = 2^{m+1}u$ :

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_s^{-1} \left[ \frac{1}{s^k} \exp \left( \frac{n}{s} - \frac{1}{2s^2} \right) \right] \left( \frac{t}{2^{m+1}} \right).$$

#### 4.4 Вычисление обратного преобразование Лапласа

В предыдущем разделе мы выразили:

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_s^{-1} \left[ \frac{1}{s^k} \exp \left( \frac{n}{s} - \frac{1}{2s^2} \right) \right] \left( \frac{t}{2^{m+1}} \right). \quad (3)$$

Чтобы вычислить правую часть, найдем теперь

$$L_s^{-1} \left[ \frac{1}{s^k} \exp \left( \frac{n}{s} \right) \exp \left( -\frac{1}{2s^2} \right) \right] (\tau). \quad (4)$$

Воспользуемся формулой Меллина обратного преобразования Лапласа. У данной функции особенность только в нуле, поэтому можно взять любое число  $\alpha > 0$ :

$$L_s^{-1} \left[ \frac{1}{s^k} \exp \left( \frac{n}{s} \right) \exp \left( -\frac{1}{2s^2} \right) \right] (\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s} ds.$$

Берем контур  $C = C_1 + C_2$ , где  $C_1$  — искомый, а  $C_2$  — дуга окружности (слева от  $C_1$  с центром в  $(\alpha, 0)$ ).

Оценим  $F(s) := (1/s^k) e^{-1/(2s^2)} e^{n/s}$  на  $C_r$ , где  $r > 4\alpha$ . Для этого оценим каждый из множителей. Сначала  $1/s$ :

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{s} \right| &= \left| \frac{1}{\alpha + re^{i\phi}} \right| = \frac{1}{\sqrt{(\alpha + r \cos \phi)^2 + (r \sin \phi)^2}} = \frac{1}{r \sqrt{\left(\frac{\alpha}{r} + \cos \phi\right)^2 + \sin^2 \phi}} \leq \\ &\leq \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{2\alpha \cos \phi}{r}}} \leq \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{\cos \phi}{2}}} \leq \frac{\sqrt{2}}{r}. \end{aligned}$$

Теперь оценим  $e^{-1/(2s^2)}$  на том же контуре. Известно, что  $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$

$$\left| \exp \left( -\frac{1}{2s^2} \right) \right| \leq \exp \left( \left| -\frac{1}{2s^2} \right| \right) = \exp \left( \frac{1}{r^2} \right).$$

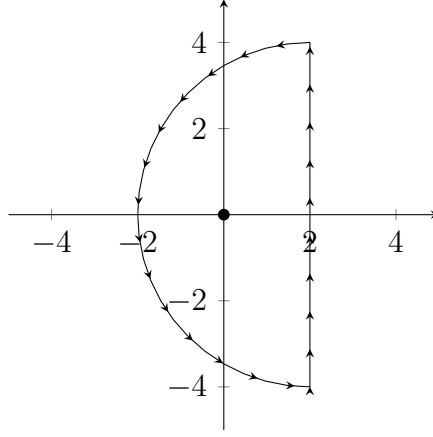


Рис. 2: Наглядное изображение контура.

Аналогично оцениваем  $e^{n/s}$ :

$$\left| \exp\left(\frac{n}{s}\right) \right| \leq \exp\left(\left|\frac{n}{s}\right|\right) = \exp\left(\frac{|n|\sqrt{2}}{r}\right).$$

Объединяем оценки и получаем:

$$\left| \frac{1}{s^k} \exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right) \exp\left(\frac{n}{s}\right) \right| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{r}\right)^k \exp\left(\frac{1}{r^2}\right) \exp\left(\frac{|n|\sqrt{2}}{r}\right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

А значит, по лемме Жордана  $\int_{C_r} e^{s\tau} F(s) ds$  стремится к нулю. Поэтому можем использовать основную теорему о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s} ds = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \operatorname{Res}_0 \left( e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s} ds \right).$$

У нас возникает два случая:  $n = 0$  и  $n \neq 0$

#### 4.4.1 Случай $n = 0$

Воспользуемся леммой 4 о правильной части функции  $e^{s\tau} e^{-1/(2s^2)}$ . Нам нужен  $k - 1$ -й член ряда Лорана. Получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s} ds = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!j!}.$$

Таким образом, мы вычислили выражение 4 для  $n = 0$ :

$$L_s^{-1} \left[ \frac{1}{s^k} \exp\left(\frac{n}{s}\right) \exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right) \right] (\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!j!}.$$

Подставим этот ряд в выражение 3, заменяя  $\tau$  на  $t/2^{m+1}$ :

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) &= \\ &= e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_s^{-1} \left[ \frac{1}{s^k} \exp \left( \frac{n}{s} - \frac{1}{2s^2} \right) \right] \left( \frac{t}{2^{m+1}} \right) = \\ &= e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k-1} / (-2)^j}{(2j+k-1)! j!}. \end{aligned}$$

Наконец, подставим получившееся выражение в формулу 2:

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) &= \\ &= (1 - n^2) L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) + \left( \frac{n}{2^m} \right) L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^{k+1}} r_{m,n}(u) \right] (t) + \\ &\quad + \left( \frac{1}{4^{m+1}} \right) L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^{k+2}} r_{m,n}(u) \right] (t) = \\ &= (1 - n^2) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k-1} / (-2)^j}{(2j+k-1)! j!} + \\ &\quad + \left( \frac{n}{2^m} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k} / (-2)^j}{(2j+k)! j!} - \\ &\quad - \left( \frac{1}{4^{m+1}} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k+1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k+1} / (-2)^j}{(2j+k+1)! j!}. \quad (5) \end{aligned}$$

Теперь получим выражение для  $g(t)$ , подставляя только что полученную формулу в выражение 1:

$$\begin{aligned} g_{m,n}(t) &= \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) = \\ &= \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} (1 - n^2) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k-1} / (-2)^j}{(2j+k-1)! j!} + \\ &\quad + \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \left( \frac{n}{2^m} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k} / (-2)^j}{(2j+k)! j!} - \\ &\quad - \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \left( \frac{1}{4^{m+1}} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k+1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left( \frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k+1} / (-2)^j}{(2j+k+1)! j!}. \end{aligned}$$

Теперь упростим выражение. Вынесем из суммы, степень, не зависящую от переменной суммирования и сделаем замену  $n = 0$  (так как рассматриваем

именно этот случай):

$$g_{m,0}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j} / (-2)^j}{(2j+k-1)! j!} - \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j} / (-2)^j}{(2j+k+1)! j!} \right).$$

#### 4.4.2 Случай $n \neq 0$

Воспользуемся леммой 5 о правильной части функции  $e^{s\tau} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s}$ . Нам нужен  $k-1$ -й член ряда Лорана. Получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/2s^2} e^{n/s} ds = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}.$$

Таким образом, мы вычислили выражение 4 для  $n \neq 0$ :

$$L_s^{-1} \left[ \frac{1}{s^k} \exp\left(\frac{n}{s}\right) \exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right) \right] (\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}.$$

Подставим это выражение в выражение 3, заменяя  $\tau$  на  $t/2^{m+1}$ :

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) &= \\ &= e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_s^{-1} \left[ \frac{1}{s^k} \exp\left(\frac{n}{s} - \frac{1}{2s^2}\right) \right] \left(\frac{t}{2^{m+1}}\right) = \\ &= e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}. \end{aligned}$$

Наконец, подставим это в формулу 2:

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) &= \\ &= (1 - n^2) L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) + \left(\frac{n}{2^m}\right) L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^{k+1}} r_{m,n}(u) \right] (t) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{4^{m+1}}\right) L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^{k+2}} r_{m,n}(u) \right] (t) = \\ &= (1 - n^2) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} + \\ &\quad + \left(\frac{n}{2^m}\right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+i} / (-2)^j}{(2j+k+i)! j!} \frac{n^i}{i!} - \\ &\quad - \left(\frac{1}{4^{m+1}}\right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k+1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1+i} / (-2)^j}{(2j+k+1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}. \quad (6) \end{aligned}$$



Теперь получим выражение для  $g_{m,n}(t)$ , подставляя только что полученную формулу в выражение 1

$$\begin{aligned}
g_{m,n}(t) &= \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) = \\
&= \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} (1 - n^2) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} + \\
&\quad + \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \left(\frac{n}{2^m}\right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+i} / (-2)^j}{(2j+k+i)! j!} \frac{n^i}{i!} - \\
&\quad - \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \left(\frac{1}{4^{m+1}}\right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k+1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1+i} / (-2)^j}{(2j+k+1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}.
\end{aligned}$$

Упростим:

$$\begin{aligned}
g_{m,n}(t) &= \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} e^{-\frac{n^2}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left( (1 - n^2) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{nt}{2^m}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+i)! j!} \frac{n^i}{i!} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} \right).
\end{aligned}$$

## 4.5 Результат

Выпишем обе полученные формулы вместе:

$$\begin{aligned}
g_{m,0}(t) &= \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j} / (-2)^j}{(2j+k-1)! j!} - \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j} / (-2)^j}{(2j+k+1)! j!} \right). \\
g_{m,n}(t) &= \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} e^{-\frac{n^2}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left( (1 - n^2) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{nt}{2^m}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+i)! j!} \frac{n^i}{i!} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} \right).
\end{aligned}$$

К сожалению, такой способ не привел к успеху из-за непригодности для численных методов.

## 5 Альтернативный подход к задаче

Вспомним наше изначальное интегральное уравнение:

$$\psi_{m,n}(x) = \int_0^{\infty} g(xy) f_Y(y) dy.$$

Преобразуем интеграл, чтобы интегрирование было по  $xy$ :

$$\psi_{m,n}(x) = \int_0^{\infty} g(xy) f_Y\left(\frac{xy}{x}\right) d\frac{xy}{x} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(z) \frac{1}{x} f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dz.$$

Таким образом мы получили интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$\psi_{m,n}(x) = \int_0^{\infty} K(x, z) g(z) dz.$$

Дальше мы будем использовать равномерную сетку  $\left[\frac{1}{n_x}, \dots, \frac{l_x n_x}{n_x}\right]$  для  $x$ ,  $\left[\frac{1}{n_z}, \dots, \frac{l_z n_z}{n_z}\right]$  для  $z$  и дискретизируем наше уравнение. Получаем:

$$\psi_{m,n}[x] = \int_0^{\infty} K[x, z] g[z] dz = \frac{1}{n_z} \sum_{p=1}^{l_z n_z} g\left(\frac{p}{n_z}\right) K\left[x, \frac{p}{n_z}\right].$$

Таким образом, мы получили систему линейных уравнений. Запишем их в матричном виде:

$$\boldsymbol{\psi}_{m,n} = \frac{1}{n_z} \mathbf{K} \mathbf{g}.$$

Увеличим матрицу  $\mathbf{K}$ , чтобы добавить регуляризацию.

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} \\ \alpha \mathbf{E} \end{pmatrix}.$$

И соответствующий  $\tilde{\mathbf{f}}$ :

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}.$$

И будем использовать МНК-оптимизацию. Получаем:

$$\mathbf{g}_* = \arg \min_{\mathbf{g}} \|\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{g} - \tilde{\mathbf{f}}\|.$$

## 5.1 Градиентный спуск

Вместо процедур для решения МНК-задачи мы можем использовать метод градиентного спуска. Будем использовать матричное представление

$$\boldsymbol{\psi}_{m,n} = \frac{1}{n_z} \mathbf{K} \mathbf{g}.$$

Тогда можно ввести функцию потерь  $L(\boldsymbol{\psi}_{m,n}, \hat{\boldsymbol{\psi}}_{m,n})$ , где  $\hat{\boldsymbol{\psi}}_{m,n} = \mathbf{K} \hat{\mathbf{g}}_{m,n}$ , а  $\hat{\mathbf{g}}_{m,n}$  — оценка для  $\mathbf{g}_{m,n}$ .

В частности, будем рассматривать следующие функции потерь:

- $l1$ -потеря:  $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1$ ;
- $l2$ -потеря:  $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$ ;
- функция потерь Хьюбера:

$$L(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - y)^2, & \text{при } |x - y| \leq 1 \\ |x - y| - \frac{1}{2}, & \text{при } |x - y| > 1 \end{cases}.$$

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k L(x_i, y_i)$$

Для каждой из них будем использовать  $L_1$ - или  $L_2$ -регуляризацию:

$$\tilde{L}(\boldsymbol{\psi}_{m,n}, \hat{\boldsymbol{\psi}}_{m,n}) = L(\boldsymbol{\psi}_{m,n}, \hat{\boldsymbol{\psi}}_{m,n}) + \|\mathbf{g}_{m,n} - \hat{\mathbf{g}}_{m,n}\|$$

## 5.2 Итеративные методы

В статье [1] рассматриваются итеративные методы решения задачи Фредгольма первого рода: аддитивный и мультипликативный.

В приложении к задаче аддитивный метод использует следующие итерации:

$$g_{m,n;k}(z) = g_{m,n;k-1}(z) = \int_0^\infty K(x, z)(\psi_{m,n;k}(x) - \psi_{m,n}(x))dx,$$

$$\psi_{m,n;k}(x) = \int_0^\infty K(x, z)g_{m,n;k}(z)dz.$$

Для мультипликативного метода используются такие итерации:

$$g_{m,n;k}(z) = \frac{g_{m,n;k-1}(z)}{\int_0^\infty K(x, z)dx} \int_0^\infty \frac{K(x, z)\psi_{m,n}(x)}{\psi_{m,n;k}(x)}dx,$$

$$\psi_{m,n;k}(x) = \int_0^{\infty} K(x, z) g_{m,n;k}(z) dz.$$

Так как  $\psi$  и  $g$  могут принимать отрицательные значения, производится следующее преобразование: выбирается параметр  $t$ ,  $\psi_{m,n}$  заменяется на  $\tilde{\psi}_{m,n} = \psi_{m,n} + t$ ,  $f_{m,n;0}$  заменяется на  $\tilde{f}_{m,n;0} = f_{m,n;0} + t$ .

### 5.3 Поправка для оценок

Будем также использовать поправку, предложенную в статье [2] В ней рассматриваются два случая: когда интеграл

$$\int \max(\hat{f}(x), 0) dx$$

больше 1, и когда меньше единицы.

В первом случае оценка  $\hat{f}$  заменяется на  $\tilde{f}(x) = \max(0, \hat{f}(x) - \xi)$ , где  $\xi$  выбирается так, чтобы выполнялось

$$\int \tilde{f}(x) dx = 1.$$

Во втором случае используется оценка

$$\tilde{f}(x) = \tilde{f}(x; M) = \begin{cases} \max(0, \hat{f}(x)) + \eta_M, & \text{для } |x| \leq M, \\ \max(0, \hat{f}(x)), & \text{для } |x| > M, \end{cases}$$

где

$$\eta_M = \frac{1}{2M} \left( 1 - \int \max(0, \hat{f}(x)) dx \right).$$

## 6 Эксперименты

Для аналитического способа.

Функция	Способ вычисления	Машинная точность (размер мантиссы),	Значение
$g_{0,0}(1)$	численно, интеграл, контур $[1 - 100i, 1 + 100i]$	100 десятичных знаков	0.864
	численно, ряд	256 двоичных знаков	0.864
$g_{0,0}(10)$	численно, интеграл контур $[1 - 100i, 1 + 100i]$	100 десятичных знаков	0.591
	численно, ряд	256 двоичных знаков	0.591
$g_{0,0}(100)$	численно, интеграл контур $[1 - 10i, 1 + 10i]$	100 десятичных знаков	$-2 \times 10^{19}$
	численно, ряд	256 двоичных знаков	-0.440

Для численного вычисления интеграла. Мы использовали шаг 0,1 и  $\alpha = 0,1$ . И использовали  $m = \{-5, \dots, 5\}$ ,  $n = \{-5, \dots, 5\}$ .

Рис. 3:  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

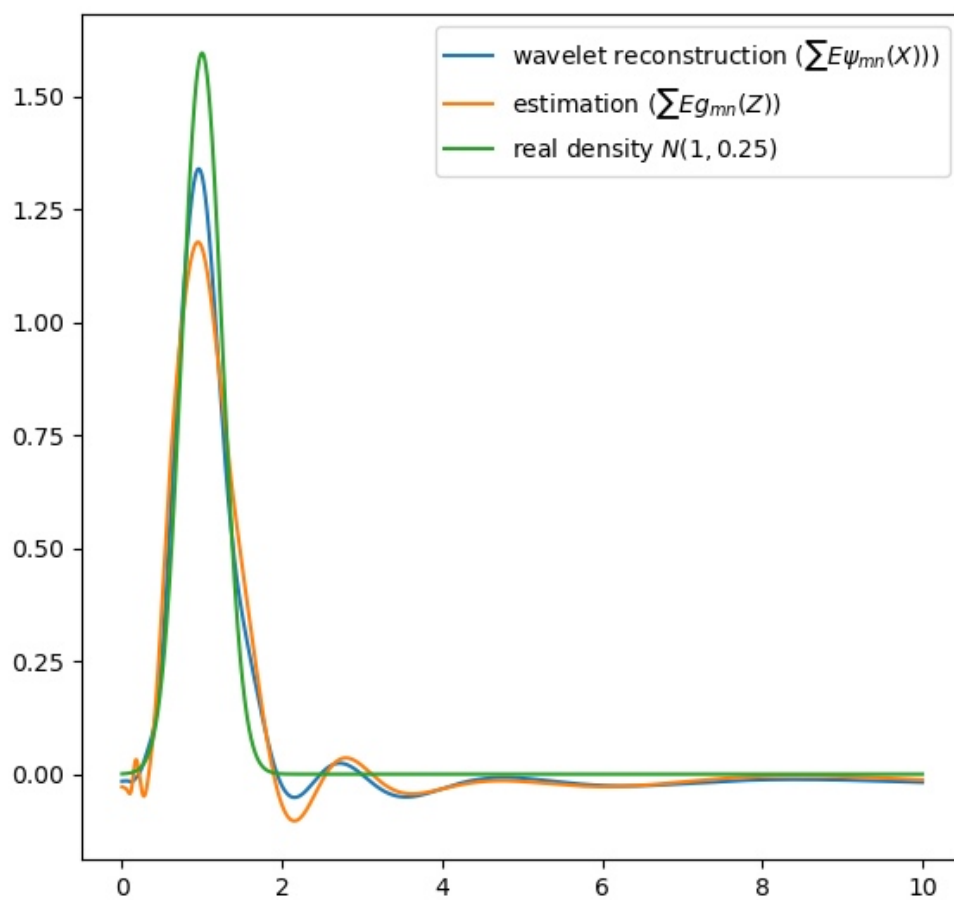


Рис. 4:  $X \sim \exp(1)$

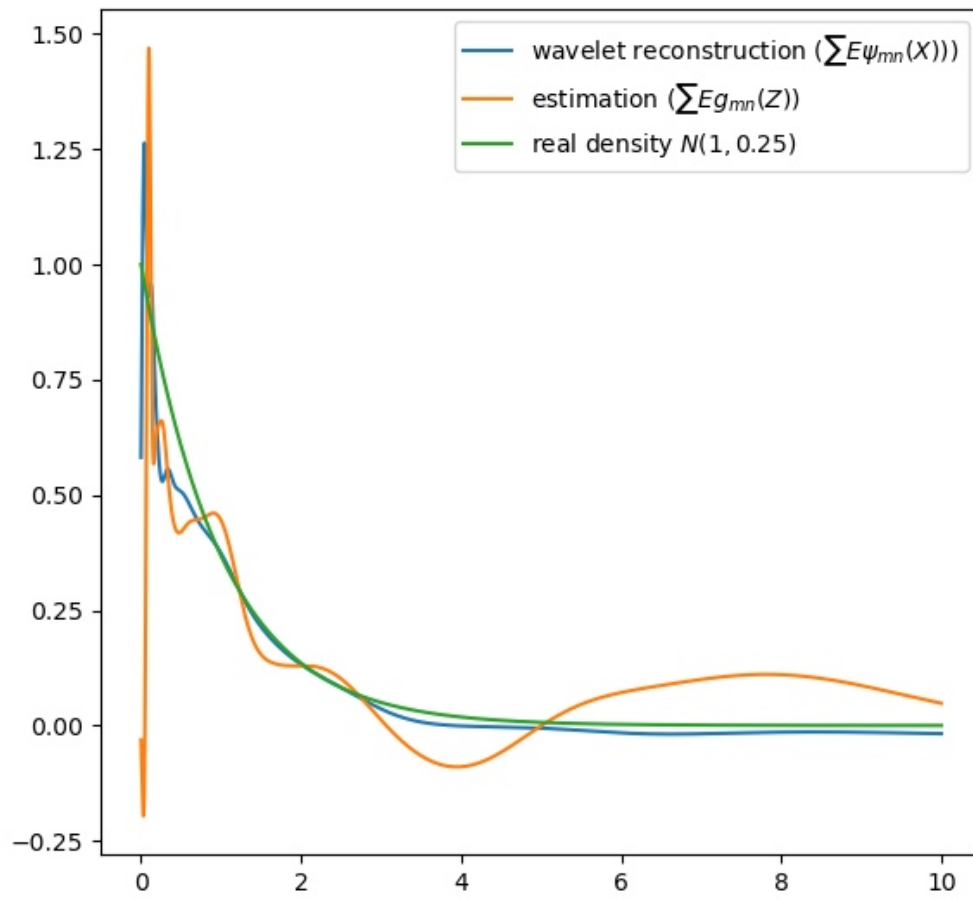


Рис. 5:  $X \sim \chi_5^2$

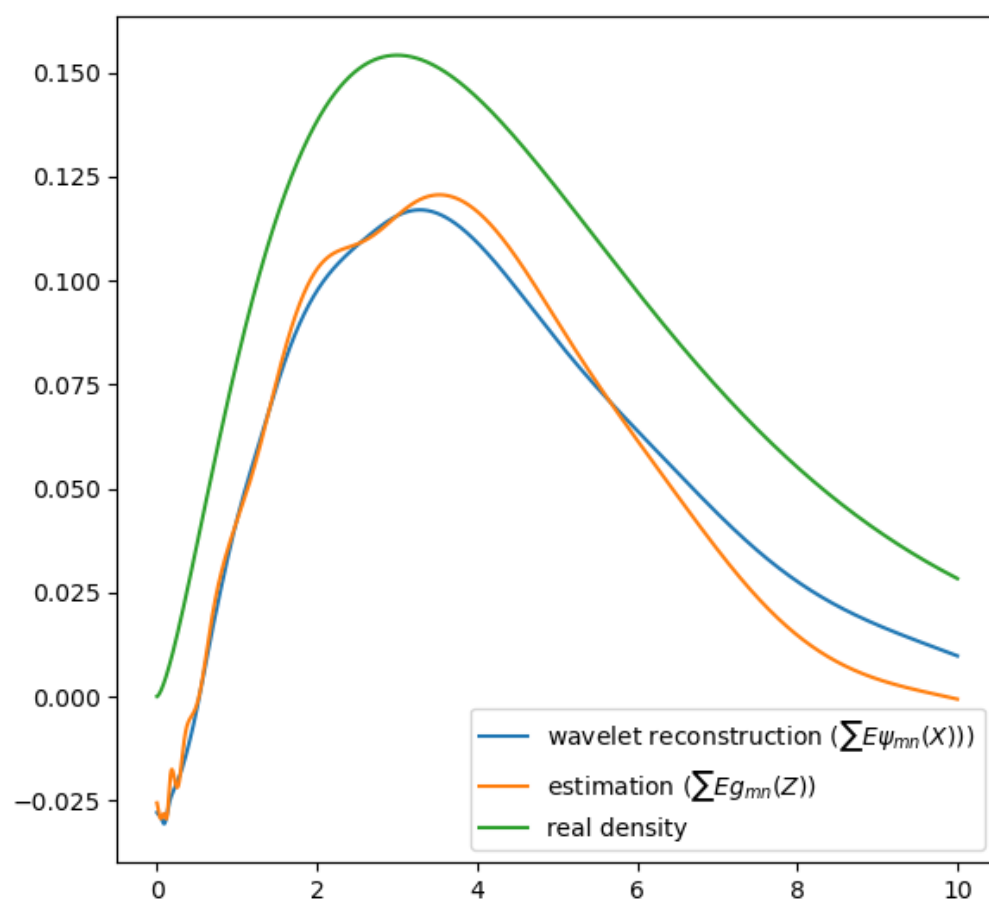


Рис. 6: Сравнение функций ошибок для метода градиентного спуска

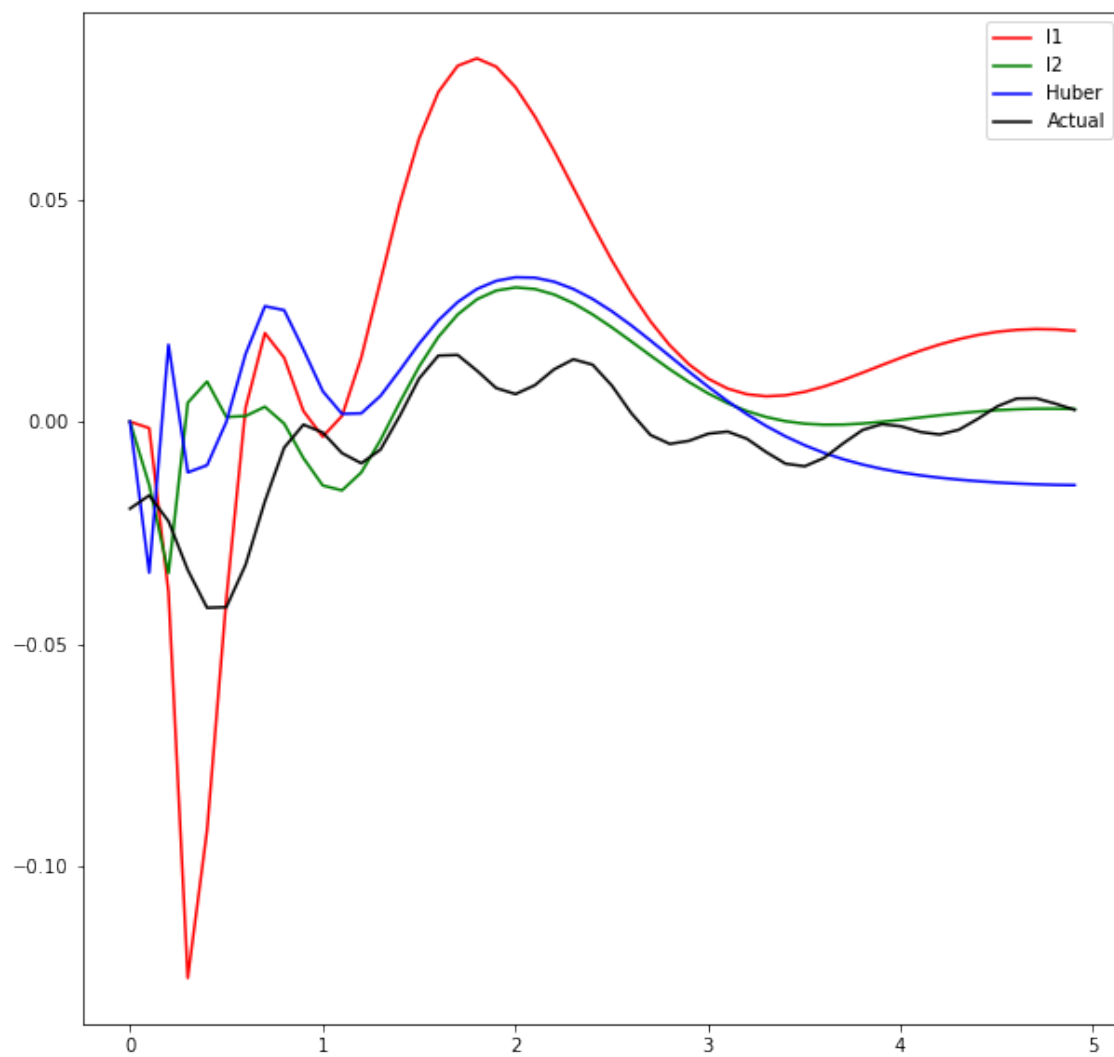




Рис. 7: Сравнение методов градиентного спуска, итеративного и МНК-оценки

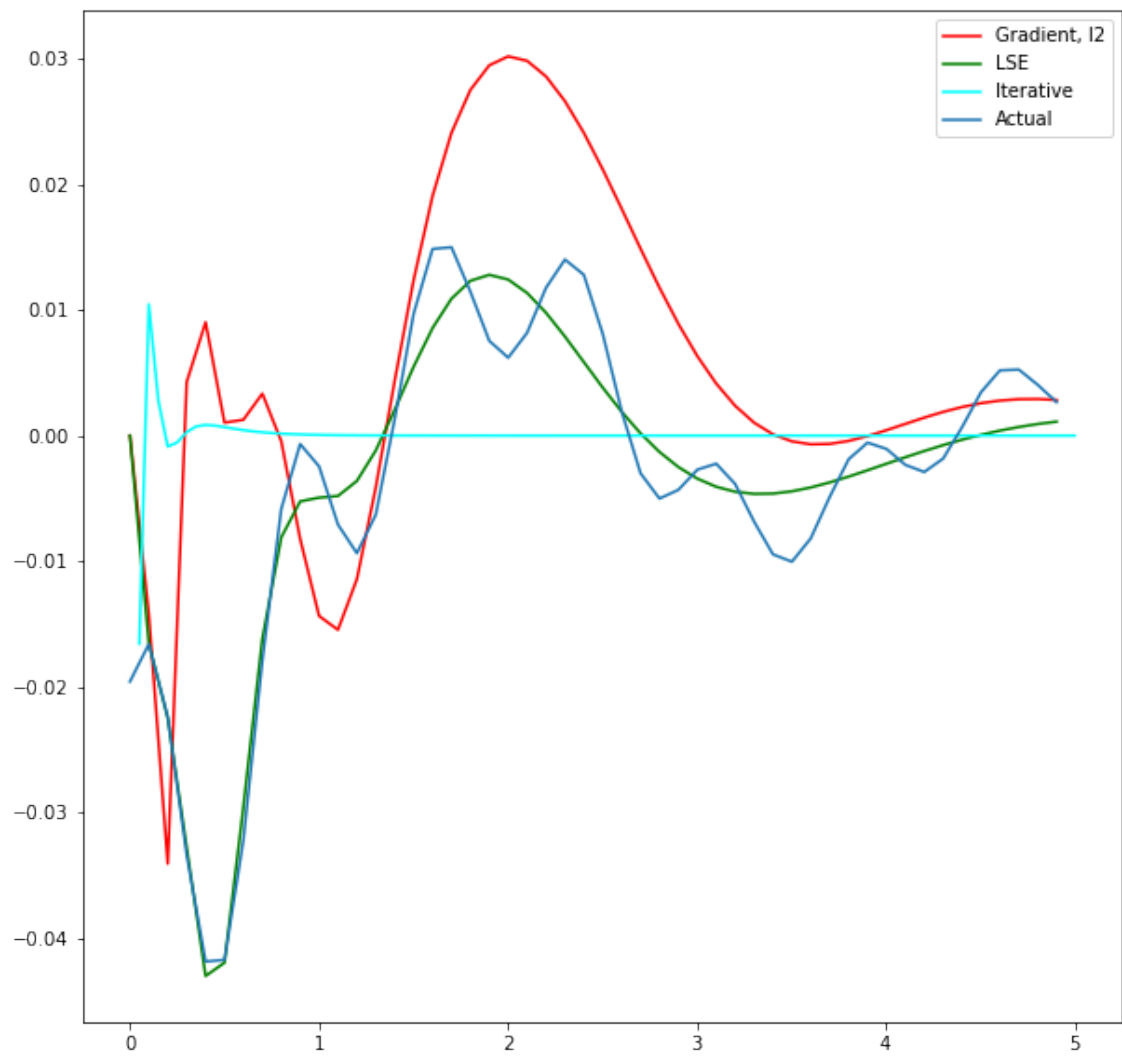


Рис. 8: МНК-оценка для смеси нормальных распределений

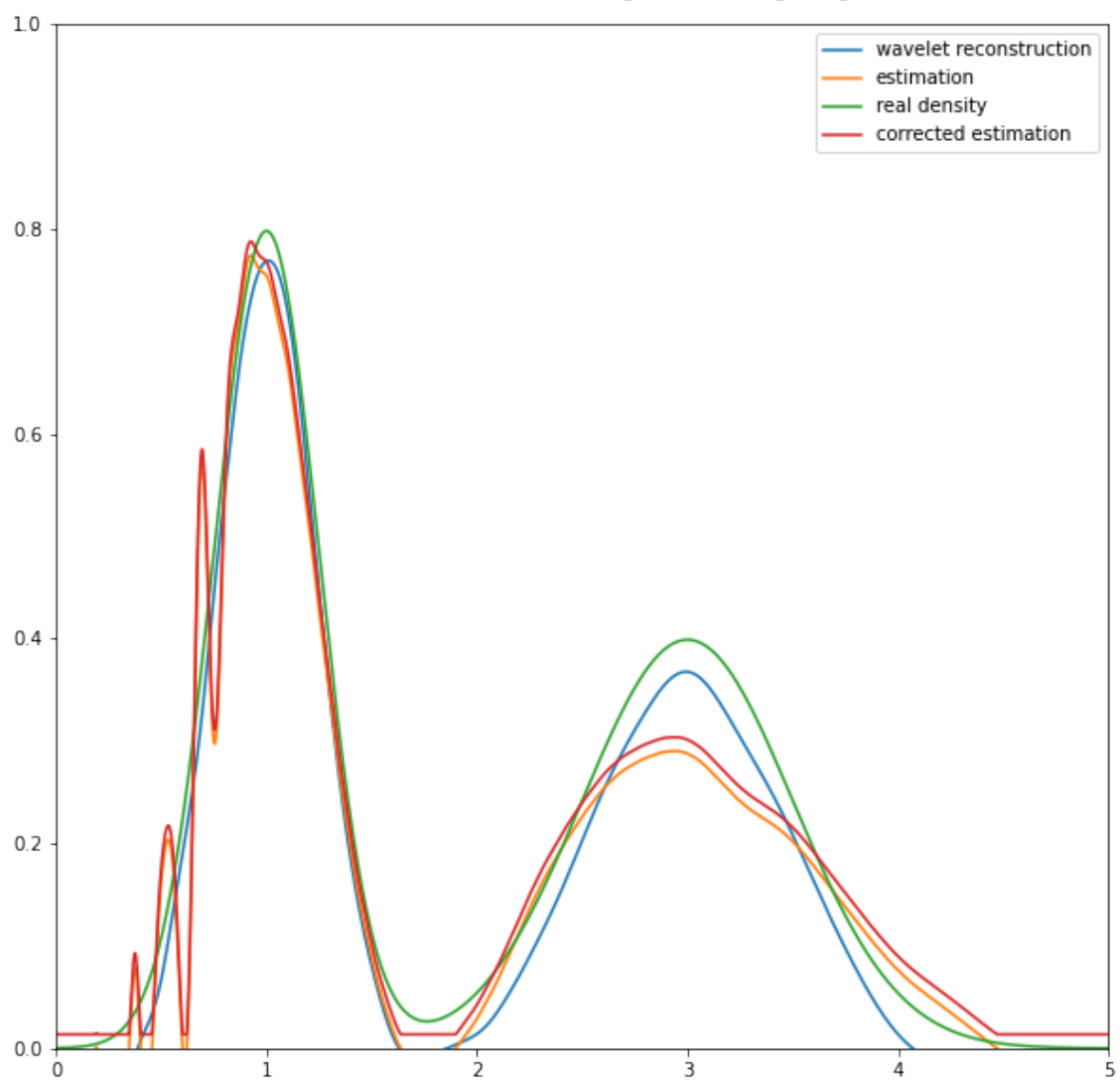


Рис. 9: Оценка методом градиентного спуска для смеси нормальных распределений

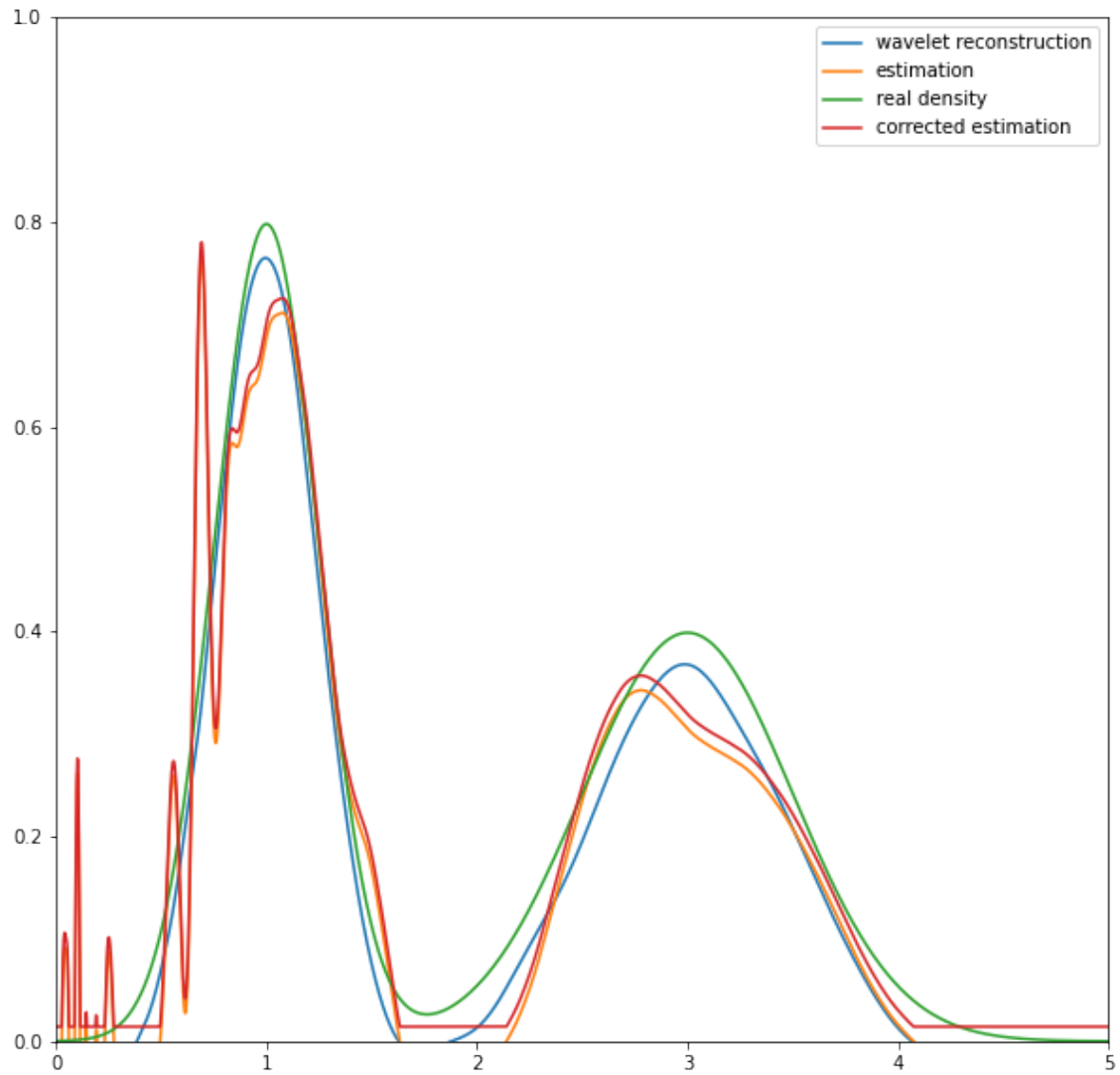
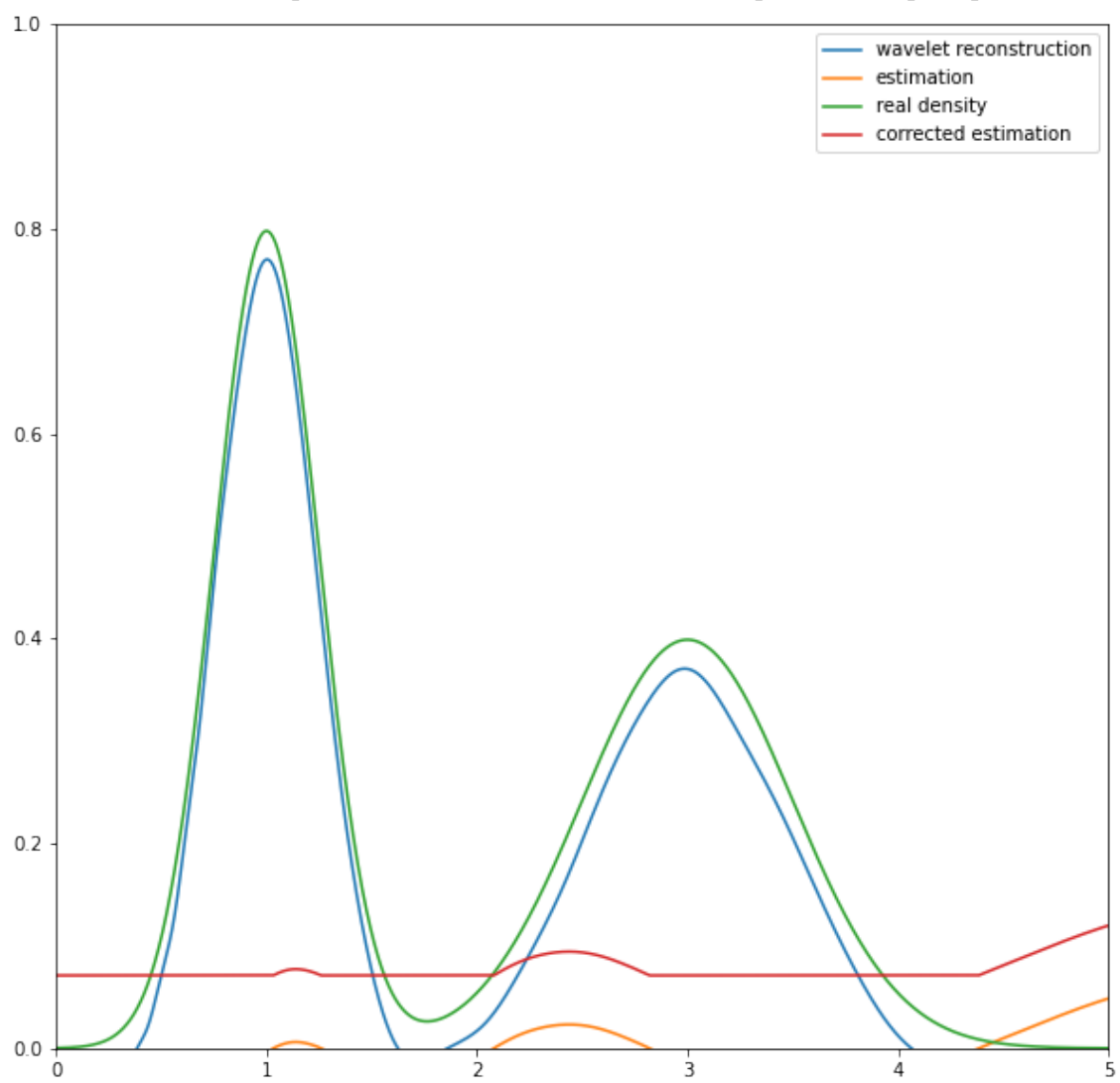


Рис. 10: Оценка итеративным методом для смеси нормальных распределений



## 7 Обобщение на случай разных длин траекторий

Мы строили функции вида:

$$\mathbf{E}g_{m,n}(XY) = \mathbf{E}g_{m,n}(X) = c_{m,n}$$

и находили оценку плотности как

$$f_X(x) = c_{m,n}\psi_{m,n}(x).$$

Теперь рассмотрим случай, когда длины траекторий могут различаться. Для каждой длины  $k$  построим функции  $g_{m,n,k}$  как описано выше и построим оценку  $f_{X,k}(x)$

Пусть для длины траектории  $k$  у нас есть  $s_k$  наблюдений. И всего  $S$  наблюдений. Тогда оценкой  $f_X(x)$  будет

$$\sum_{k=1}^K \frac{s_k f_{X,k}(x)}{S}.$$

Докажем это. Разложим  $f_X$  в ряд по вейвлету:

$$f_X(x) = \sum_{m,n} c_{m,n} \psi_{m,n}(x).$$

Раскроем вейвлет-коэффициенты:

$$f_X(x) = \sum_{m,n} \mathbf{E} \psi_{m,n}(XY) \psi_{m,n}(x).$$

Представим математическое ожидание в виде математического ожидания условного математического ожидания при условии длины траектории:

$$f_X(x) = \sum_{m,n} \mathbf{E}_k (\mathbf{E}(\psi_{m,n}(XY)|k)) \psi_{m,n}(x).$$

По линейности математического ожидания, можем внести сумму внутрь:

$$f_X(x) = \mathbf{E}_k \left( \sum_{m,n} \mathbf{E}(\psi_{m,n}(XY)|k) \psi_{m,n}(x) \right).$$

Вычислим вейвлет-коэффициенты:

$$f_X(x) = \mathbf{E}_k \left( \sum_{m,n} c_{m,n,k} \psi_{m,n}(x) \right).$$

Заменим вейвлет-разложение на оригинальную функцию:

$$f_X(x) = \mathbf{E}_k f_{X,k}(x).$$

Получаем оценку:

$$f_X(x) = \sum_{k=1}^K \frac{s_k f_{X,k}(x)}{S}.$$

## 8 Вывод

Лучшие результаты показывает МНК-оценка.

Оценка методом градиентного спуска более шумная, но позволяет использовать существенно более точный шаг дискретизации, так как возможно пожертвовать производительностью и не вычислять матрицу  $K$  заранее, что существенно снижает требования к количеству видеопамяти.

Итеративная оценка показывает неудовлетворительные результаты и сходится крайне медленно: разница между 1000 итераций и 10000 итераций несущественна.

Поправка для оценок плотностей несильно улучшает оценку.

## Список литературы

- [1] Minwoo Chae, Ryan Martin и Stephen G. Walker. “On an algorithm for solving Fredholm integrals of the first kind”. В: *Statistics and Computing* 29.4 (июль 2019), с. 645—654. ISSN: 1573-1375. DOI: [10.1007/s11222-018-9829-z](https://doi.org/10.1007/s11222-018-9829-z). URL: <https://doi.org/10.1007/s11222-018-9829-z>.
- [2] Ingrid K. Glad, Nils Lid Hjort и Nikolai G. Ushakov. “Correction of Density Estimators That Are Not Densities”. В: *Scandinavian Journal of Statistics* 30.2 (2003), с. 415—427. ISSN: 03036898, 14679469. URL: <http://www.jstor.org/stable/4616772>.