

# Оглавление

<b>1</b>	<b>Сведение задачи к вычислению обратного преобразования Лапласа</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Вычисление обратного преобразования Лапласа с помощью формулы Меллина и основной теоремы о вычетах</b>	<b>3</b>
2.1	Находим $L_u^{-1}[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)](t)$	3
2.2	Находим обратное преобразование Лапласа	4
2.2.1	Случай $n = 0$	5
2.2.2	Случай $n \neq 0$	6
2.3	Результат	6
<b>3</b>	<b>Альтернативный подход к задаче</b>	<b>8</b>
<b>4</b>	<b>Эксперименты</b>	<b>9</b>
<b>5</b>	<b>Теоремы</b>	<b>12</b>
5.1	Связь мат. ожидания $\chi_{2k}^2$ и преобразования Лапласа	12
5.2	Замена переменной в обратном преобразовании Лапласа	12
5.3	Правильная часть произведения голоморфной функции и функции с нулевой правильной частью	12
5.4	Правильная часть ряда Лорана для $f(s) = e^{as} e^{b/s}$	13
5.5	Правильная часть ряда Лорана для $f(s) = e^{as} e^{-1/(2s^2)}$	13
5.6	Правильная часть ряда Лорана для $f(z) = e^{az} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s}$	13
5.7	Модифицированная лемма Жордана	14

# §1. Сведение задачи к вычислению обратного преобразования Лапласа

Есть случайные величины  $X, Y, Z$ . Мы не знаем распределение  $X$ , знаем распределение  $Y$  и наблюдаем  $Z$ . Кроме того, известно, что  $Z = XY$ , и что все величины непрерывны. Нужно оценить распределение  $X$ .

Мы будем использовать вейвлет «Mexican hat», потому что он прост и непрерывен. Его формула:

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}(1 - t^2)e^{-t^2/2}$$

Определим элементы фрейма:

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}}\psi\left(\frac{t}{2^m} - n\right) = \frac{1}{\sqrt{2^m}}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\left(1 - \left(\frac{t}{2^m} - n\right)^2\right)e^{-\left(\frac{t}{2^m} - n\right)^2/2}$$

Рассмотрим случай  $Y \sim \chi_{2k}^2$ ;  $X > \delta > 0$ , абсолютно непрерывен. Плотность  $Y$ :

$$\chi_{2k}^2 \sim \frac{1}{2^k} \frac{1}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-x/2}$$

Будем строить функции  $g_{m,n}$  такие, что  $E g_{m,n}(Z) = E \psi_{m,n}(X)$ . Заметим, что достаточно выполнения:

$$\forall x \in \text{Im } X \quad E g_{m,n}(xY) = \psi_{m,n}(x)$$

Заменим мат. ожидание преобразованием Лапласа и раскроем  $\psi_{m,n}$ :

$$\left(\frac{1}{2x}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g_{m,n}(z) z^{k-1}] \left(\frac{1}{2x}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{x}{2^m} - n\right)$$

Сделаем замену  $u = \frac{1}{2x}$ :

$$u^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g_{m,n}(z) z^{k-1}] (u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)$$

Используя обратное преобразование Лапласа, найдем  $g_{m,n}(t)$ :

$$\begin{aligned} u^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g_{m,n}(z) z^{k-1}] (u) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right) \\ L_z [g_{m,n}(z) z^{k-1}] (u) &= \frac{\Gamma(k)}{u^k} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right) \\ g_{m,n}(t) t^{k-1} &= L_u^{-1} \left[ \frac{\Gamma(k)}{u^k} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right) \right] (t) \\ g_{m,n}(t) &= \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right) \right] (t) \end{aligned}$$

Таким образом мы получили выражение для  $g_{m,n}(t)$ . Далее мы выразим его через ряды, используя формулу Меллина и основную теорему о вычетах.

## §2. Вычисление обратного преобразования Лапласа с помощью формулы Меллина и основной теоремы о вычетах

Мы выразили  $g_{m,n}(t)$  как:

$$g_{m,n}(t) = \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) \quad (2.1)$$

Теперь нужно вычислить обратное преобразование Лапласа. Для этого мы будем использовать формулу Меллина:

$$L_s^{-1} [F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{ts} F(s) ds$$

Итак, нам нужно вычислить:

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t)$$

Подставим вместо  $\psi$  формулу нашего вейвлета:

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) = L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left( 1 - \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 \right) \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 \right) \right] (t)$$

Распишем множитель перед экспонентой:

$$1 - \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 = 1 - \left( \frac{1}{2^{2(m+1)}u^2} - 2\frac{1}{2^{m+1}u}n + n^2 \right) = (1 - n^2) + \frac{1}{u} \left( \frac{n}{2^m} \right) - \frac{1}{u^2} \left( \frac{1}{4^{m+1}} \right)$$

Введем обозначение:

$$r_{m,n}(u) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 \right)$$

Таким образом,

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) = (1 - n^2) L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) + \left( \frac{n}{2^m} \right) L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^{k+1}} r_{m,n}(u) \right] (t) - \left( \frac{1}{4^{m+1}} \right) L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^{k+2}} r_{m,n}(u) \right] (t) \quad (2.2)$$

Отсюда видно, что достаточно найти  $L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t)$  для каждого  $k$ .

### 2.1 Находим $L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t)$

Выше мы ввели

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t)$$

Подставим обратно  $r_{m,n}(u)$ :

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 \right) \right] (t)$$

Раскроем квадрат под экспонентой:

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp \left( -\frac{1}{2} \left( n^2 - \frac{1}{u} \left( \frac{n}{2^m} \right) + \frac{1}{u^2} \left( \frac{1}{4^{m+1}} \right) \right) \right) \right] (t)$$

Сгруппируем  $2^{m+1}u$ :

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = L_u^{-1} \left[ \frac{2^{k(m+1)}}{(2^{m+1}u)^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp \left( -\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2^{m+1}u} - \frac{1}{2(2^{m+1}u)^2} \right) \right] (t)$$

Вынесем множители, не зависящие от  $u$ , за  $L_u^{-1}$ :

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_u^{-1} \left[ \frac{1}{(2^{m+1}u)^k} \exp \left( \frac{n}{2^{m+1}u} - \frac{1}{2(2^{m+1}u)^2} \right) \right] (t)$$

Используя теорему о замене переменной в обратном преобразовании Лапласа, делаем замену  $s = 2^{m+1}u$ :

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_s^{-1} \left[ \frac{1}{s^k} \exp \left( \frac{n}{s} - \frac{1}{2s^2} \right) \right] \left( \frac{t}{2^{m+1}} \right)$$

## 2.2 Находим обратное преобразование Лапласа

В предыдущем разделе мы выразили:

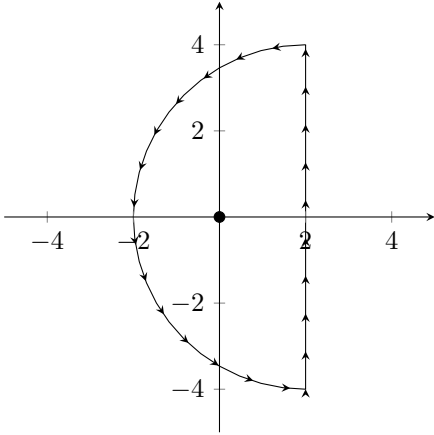
$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_s^{-1} \left[ \frac{1}{s^k} \exp \left( \frac{n}{s} - \frac{1}{2s^2} \right) \right] \left( \frac{t}{2^{m+1}} \right) \quad (2.3)$$

Чтобы вычислить правую часть, найдем теперь

$$L_s^{-1} \left[ \frac{1}{s^k} \exp \left( \frac{n}{s} \right) \exp \left( -\frac{1}{2s^2} \right) \right] (\tau) \quad (2.4)$$

Воспользуемся формулой Меллина обратного преобразования Лапласа. У нас особенность только в нуле, поэтому можно взять любую  $\alpha > 0$ :

$$L_s^{-1} \left[ \frac{1}{s^k} \exp \left( \frac{n}{s} \right) \exp \left( -\frac{1}{2s^2} \right) \right] (\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s} ds$$



Берем контур  $C = C_1 + C_2$ , где  $C_1$  — искомый, а  $C_2$  — дуга окружности (слева от  $C_1$  с центром в  $(\alpha, 0)$ ).

Оценим  $F(s) := (1/s^k) e^{-1/(2s^2)} e^{n/s}$  на  $C_r$ , где  $r > 4\alpha$ . Для этого оценим каждый из множителей. Сначала  $1/s$ :

$$\left| \frac{1}{s} \right| = \left| \frac{1}{\alpha + re^{i\phi}} \right| = \frac{1}{\sqrt{(\alpha + r \cos \phi)^2 + (r \sin \phi)^2}} = \frac{1}{r \sqrt{\left( \frac{\alpha}{r} + \cos \phi \right)^2 + \sin^2 \phi}} \leq \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{2\alpha \cos \phi}{r}}} \leq \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{\cos \phi}{2}}} \leq \frac{\sqrt{2}}{r}$$

Теперь оценим  $e^{-1/(2s^2)}$  на том же контуре. Известно, что  $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$

$$\left| \exp \left( -\frac{1}{2s^2} \right) \right| \leq \exp \left( \left| -\frac{1}{2s^2} \right| \right) = \exp \left( \frac{1}{r^2} \right)$$

Аналогично оцениваем  $e^{n/s}$ :

$$\left| \exp \left( \frac{n}{s} \right) \right| \leq \exp \left( \left| \frac{n}{s} \right| \right) = \exp \left( \frac{|n|\sqrt{2}}{r} \right)$$

Объединяем оценки и получаем:

$$\left| \frac{1}{s^k} \exp \left( -\frac{1}{2s^2} \right) \exp \left( \frac{n}{s} \right) \right| \leq \left( \frac{\sqrt{2}}{r} \right)^k \exp \left( \frac{1}{r^2} \right) \exp \left( \frac{|n|\sqrt{2}}{r} \right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0$$

А значит, по лемме Жордана  $\int_{C_r} e^{s\tau} F(s) ds$  стремится к нулю. Поэтому можем использовать основную теорему о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s} ds = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \operatorname{Res}_0 \left( e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s} ds \right)$$

У нас возникает два случая:  $n = 0$  и  $n \neq 0$

### 2.2.1 Случай $n = 0$

Воспользуемся теоремой о правильной части функции  $e^{s\tau} e^{-1/(2s^2)}$ . Нам нужен  $k - 1$ -й член ряда Лорана. Получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s} ds = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)! j!}$$

Таким образом, мы выразили вычислили 2.4:

$$L_s^{-1} \left[ \frac{1}{s^k} \exp\left(\frac{n}{s}\right) \exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right) \right] (\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)! j!}$$

Подставим это выражение в 2.3, заменяя  $\tau$  на  $t/2^{m+1}$ :

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_s^{-1} \left[ \frac{1}{s^k} \exp\left(\frac{n}{s} - \frac{1}{2s^2}\right) \right] \left( \frac{t}{2^{m+1}} \right) =$$

$$e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)! j!}$$

Наконец, подставим это в 2.2:

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) = (1 - n^2) L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) + \left( \frac{n}{2^m} \right) L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^{k+1}} r_{m,n}(u) \right] (t) +$$

$$+ \left( \frac{1}{4^{m+1}} \right) L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^{k+2}} r_{m,n}(u) \right] (t) =$$

$$= (1 - n^2) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)! j!} + \left( \frac{n}{2^m} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k}/(-2)^j}{(2j+k)! j!} -$$

$$- \left( \frac{1}{4^{m+1}} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k+1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1}/(-2)^j}{(2j+k+1)! j!} \quad (2.5)$$

Теперь получим выражение для  $g(t)$ , подставляя только что полученную формулу в 2.1:

$$g_{m,n}(t) = \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) =$$

$$= \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} (1 - n^2) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)! j!} +$$

$$+ \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \left( \frac{n}{2^m} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k}/(-2)^j}{(2j+k)! j!} -$$

$$- \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \left( \frac{1}{4^{m+1}} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k+1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1}/(-2)^j}{(2j+k+1)! j!}$$

Начнем упрощать выражение. Для начала, вынесем из суммы, степень, не зависящую от переменной суммирования и сделаем замену  $n = 0$  (так как рассматриваем именно этот случай):

$$g_{m,0}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j}/(-2)^j}{(2j+k-1)! j!} - \left( \frac{t^2}{4^{m+1}} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j}/(-2)^j}{(2j+k+1)! j!} \right)$$

## 2.2.2 Случай $n \neq 0$

Воспользуемся теоремой о правильной части функции  $e^{s\tau} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s}$ . Нам нужен  $k-1$ -й член ряда Лорана. Получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/2s^2} e^{n/s} ds = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}$$

Таким образом, мы выразили вычислили 2.4:

$$L_s^{-1} \left[ \frac{1}{s^k} \exp\left(\frac{n}{s}\right) \exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right) \right] (\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}$$

Подставим это выражение в 2.3, заменяя  $\tau$  на  $t/2^{m+1}$ :

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_s^{-1} \left[ \frac{1}{s^k} \exp\left(\frac{n}{s} - \frac{1}{2s^2}\right) \right] \left( \frac{t}{2^{m+1}} \right) =$$

$$e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}$$

Наконец, подставим это в 2.2:

$$L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) = (1-n^2) L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) + \left( \frac{n}{2^m} \right) L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^{k+1}} r_{m,n}(u) \right] (t) +$$

$$+ \left( \frac{1}{4^{m+1}} \right) L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^{k+2}} r_{m,n}(u) \right] (t) =$$

$$= (1-n^2) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} +$$

$$+ \left( \frac{n}{2^m} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+i} / (-2)^j}{(2j+k+i)! j!} \frac{n^i}{i!} -$$

$$- \left( \frac{1}{4^{m+1}} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k+1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1+i} / (-2)^j}{(2j+k+1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} \quad (2.6)$$

Теперь получим выражение для  $g_{m,n}(t)$ , подставляя только что полученную формулу в 2.1

$$g_{m,n}(t) = \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1} \left[ \frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left( \frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) =$$

$$= \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} (1-n^2) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} +$$

$$+ \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \left( \frac{n}{2^m} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+i} / (-2)^j}{(2j+k+i)! j!} \frac{n^i}{i!} -$$

$$- \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \left( \frac{1}{4^{m+1}} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k+1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1+i} / (-2)^j}{(2j+k+1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}$$

Упростим:

$$g_{m,n}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} e^{-\frac{n^2}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left( (1-n^2) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} + \left( \frac{nt}{2^m} \right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+i)! j!} \frac{n^i}{i!} - \right.$$

$$\left. + \left( \frac{t^2}{4^{m+1}} \right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} \right)$$

## 2.3 Результат

Выпишем обе полученные формулы вместе:

$$g_{m,0}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left( \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j} / (-2)^j}{(2j+k-1)! j!} - \left( \frac{t^2}{4^{m+1}} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j} / (-2)^j}{(2j+k+1)! j!} \right)$$

$$g_{m,n}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} e^{-\frac{n^2}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left( (1 - n^2) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} + \left(\frac{nt}{2^m}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+i)! j!} \frac{n^i}{i!} - \right. \\ \left. + \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} \right)$$

К сожалению, такой способ не привел из-за непригодности для численных методов

### §3. Альтернативный подход к задаче

Вспомним наше изначальное интегральное уравнение:

$$\psi_{m,n}(x) = \int_0^{\infty} g(xy) f_Y(y) dy$$

Преобразуем интеграл, чтобы интегрирование было по  $xy$ :

$$\psi_{m,n}(x) = \int_0^{\infty} g(xy) f_Y\left(\frac{xy}{x}\right) d\frac{xy}{x} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(z) \frac{1}{x} f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dz$$

Таким образом мы получили интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$\psi_{m,n}(x) = \int_0^{\infty} K(x, z) g(z) dz$$

Дальше будем использовать равномерную сетку  $\frac{1}{n_x}, \dots, \frac{l_x n_x}{n_x}$  для  $x$ ,  $\frac{1}{n_z}, \dots, \frac{l_z n_z}{n_z}$  для  $z$  и дискретизируем наше уравнение. Получаем:

$$\psi_{m,n}[x] = \int_0^{\infty} K[x, z] g[z] dz = \frac{1}{n_z} \sum_{p=1}^{l_z n_z} g\left(\frac{p}{n_z}\right) K\left[x, \frac{p}{n_z}\right]$$

Таким образом, мы получили систему линейных уравнений. Запишем их в матричном виде:

$$\psi_{m,n} = \frac{1}{n_z} \mathbf{K} \mathbf{g}$$

Увеличим матрицу  $\mathbf{K}$ , чтобы добавить регуляризацию.

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} \\ \alpha \mathbf{E} \end{pmatrix}$$

И соответствующий  $\tilde{\mathbf{f}}$ :

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{0} \end{pmatrix}$$

И будем использовать МНК-оптимизацию. Получаем:

$$\mathbf{g}_* = \arg \min_{\mathbf{g}} \|\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{g} - \tilde{\mathbf{f}}\|$$



## §4. Эксперименты

Для аналитического способа.

Функция	Способ вычисления	Машинная точность (размер мантиссы),	Значение
$g_{0,0}(1)$	численно, интеграл, контур $[1 - 100i, 1 + 100i]$	100 десятичных знаков	0.864
	численно, ряд	256 двоичных знаков	0.864
$g_{0,0}(10)$	численно, интеграл, контур $[1 - 100i, 1 + 100i]$	100 десятичных знаков	0.591
	численно, ряд	256 двоичных знаков	0.591
$g_{0,0}(100)$	численно, интеграл, контур $[1 - 10i, 1 + 10i]$	100 десятичных знаков	$-2 \times 10^{19}$
	численно, интеграл, контур $[1 - 100i, 1 + 100i]$	100 десятичных знаков	Вычисляется дольше 1 часа
	численно, ряд	256 двоичных знаков	-0.440

Для численного вычисления интеграла. Мы использовали шаг 0,1 и  $\alpha = 0,1$ . И использовали  $m = \{-5, \dots, 5\}$ ,  $n = \{-5, \dots, 5\}$

Рис. 4.1:  $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

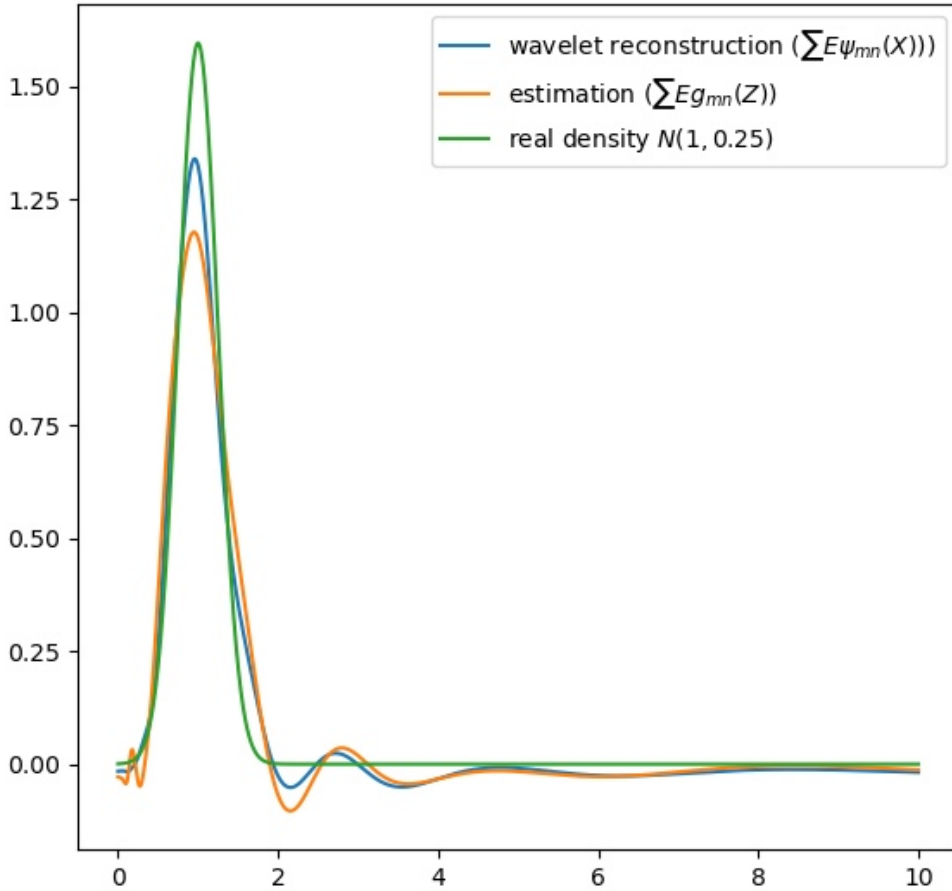


Рис. 4.2:  $X \sim \exp(1)$

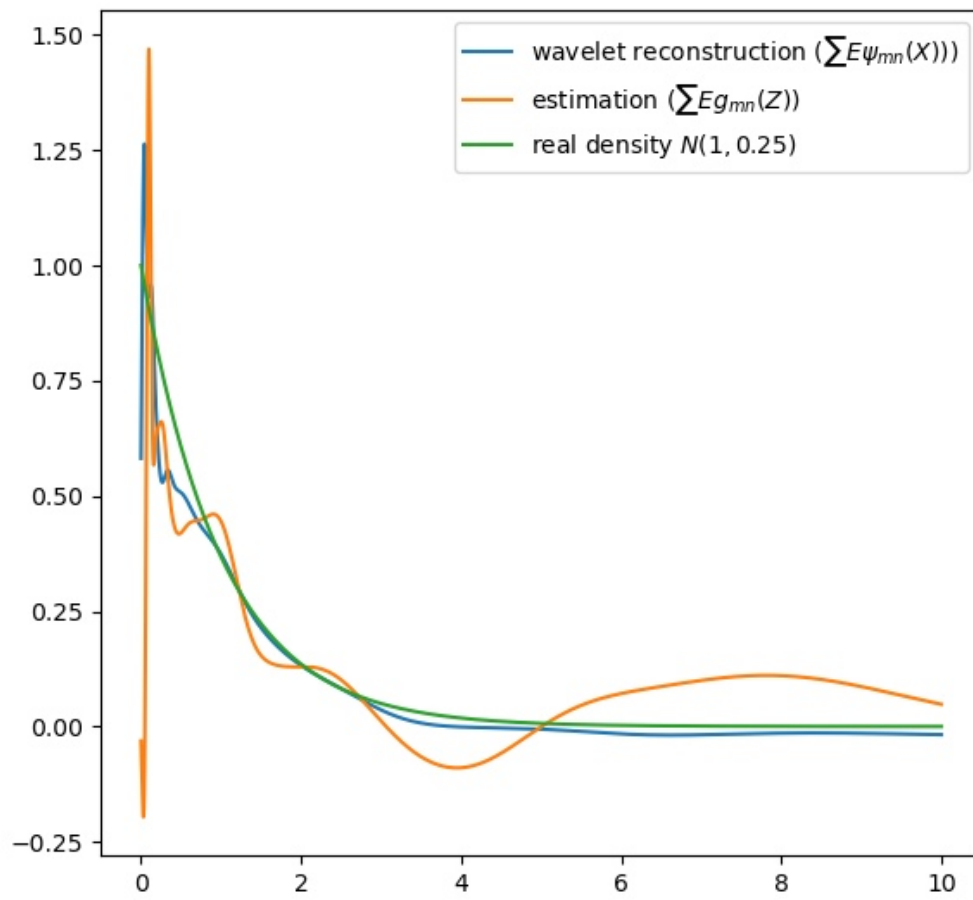
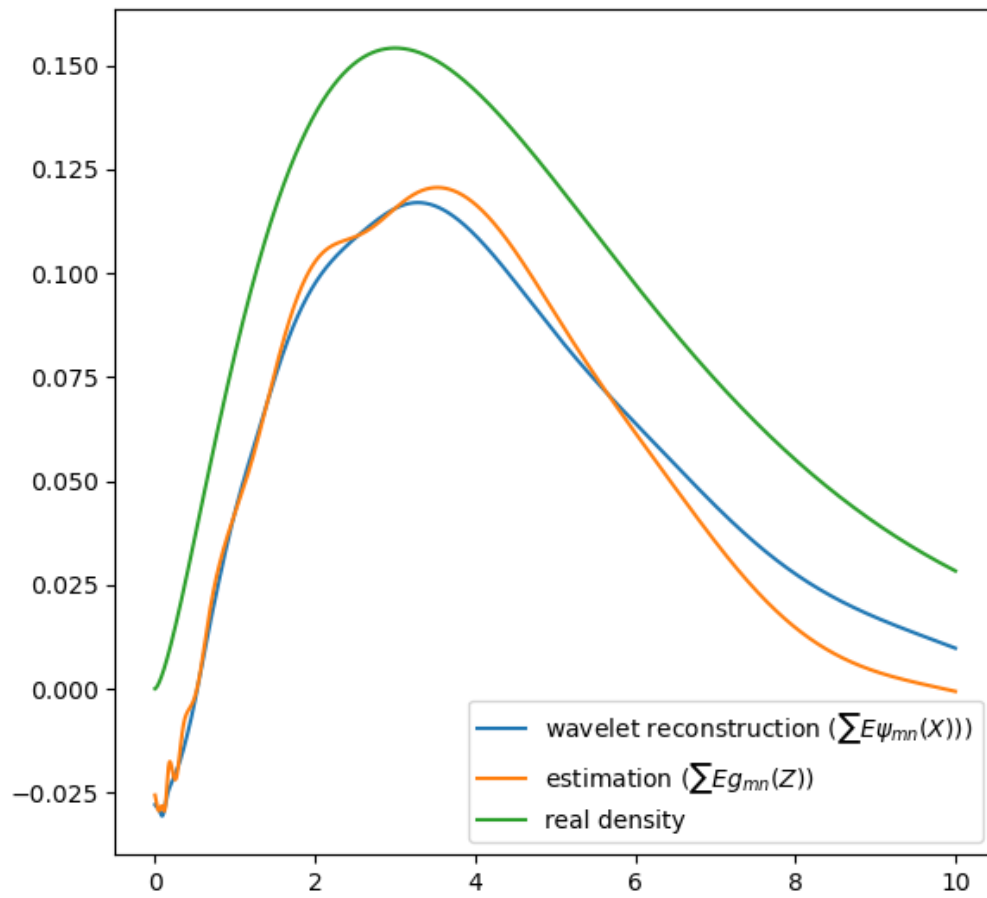


Рис. 4.3:  $X \sim \chi_5^2$



## §5. Теоремы

### 5.1 Связь мат. ожидания $\chi_{2k}^2$ и преобразования Лапласа

**Теорема** (О связи мат. ожидания  $\chi_{2k}^2$  и преобразования Лапласа). Пусть  $f$  — функция плотности  $\chi_{2k}^2$ ;  $a > 0$ . Тогда

$$Eg(aY) = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g(z)z^{k-1}] \left(\frac{1}{2a}\right)$$

*Доказательство.*

$$Eg(aY) = \int_0^\infty g(ay) f(y) dy$$

Подставим функцию плотности:

$$Eg(aY) = \int_0^\infty g(ay) \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{1}{2^k} y^{k-1} e^{-y/2} dy$$

Возьмем  $z = ay$ :

$$Eg(aY) = \int_0^\infty g(z) \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{1}{2^k} \left(\frac{z}{a}\right)^{k-1} e^{-z/(2a)} \frac{dz}{a} = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty g(z) z^{k-1} e^{-z(\frac{1}{2a})} dz = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g(z)z^{k-1}] \left(\frac{1}{2a}\right)$$

■

### 5.2 Замена переменной в обратном преобразовании Лапласа

**Теорема.** Пусть  $c > 0$ ;  $\alpha$  такое, что все особенности  $f$  лежат левее  $c\alpha$ . Тогда

$$L_u^{-1} [f(cu)](t) = L_s^{-1} \left[ \frac{1}{c} f(s) \right] \left( \frac{t}{c} \right)$$

*Доказательство.*

$$L_u^{-1} [f(cu)](t) = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{ut} f(cu) du = \frac{1}{c} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{(cu)\frac{t}{c}} f(cu) d(cu) = \frac{1}{c} \int_{c\alpha-i\infty}^{c\alpha+i\infty} e^{s\frac{t}{c}} f(s) ds = L_s^{-1} \left[ \frac{1}{c} f(s) \right] \left( \frac{t}{c} \right)$$

■

### 5.3 Правильная часть произведения голоморфной функции и функции с нулевой правильной частью

**Теорема.** Пусть  $f, g$  — голоморфные функции; правильная часть  $g$  нулевая;  $\{a_n\}_{n=-\infty}^\infty$  — коэффициенты разложения в ряд Лорана функции  $f$ ;  $\{b_n\}_{n=-\infty}^0$  — коэффициенты разложения в ряд Лорана функции  $g$ .

Тогда в правильной части разложения в ряд Лорана произведения  $f(z)g(z)$  участвуют только коэффициенты правильной части функции  $f$

*Доказательство.*

$$f(z)g(z) = \left( \sum_{n=-\infty}^\infty a_n z^n \right) \left( \sum_{m=-\infty}^0 b_m z^m \right) = \sum_{k=-\infty}^\infty z^k \sum_{m=-\infty}^0 a_{k-m} b_m$$

Правильная часть при  $k \geq 0$ . При этом у нас  $m \leq 0$ . А значит,  $n = k - m \geq 0$  для каждого коэффициента правильной части.

■

## 5.4 Правильная часть ряда Лорана для $f(s) = e^{as} e^{b/s}$

**Теорема.** *Правильная часть ряда Лорана для функции*

$$f(s) = e^{as} e^{b/s}$$

*Равна*

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{n}\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(ab)^n}{n! (n-k)!}$$

*Доказательство.* Заменяем экспоненты соответствующими рядами:

$$e^{as} e^{b/s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(as)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(b/s)^m}{m!}$$

Обе функции аналитичны в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , а потому их ряды сходятся абсолютно. Ряд для функции–произведения можно получить перемножением рядов по Коши.

$$e^{as} e^{b/s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} s^k \sum_{n-m=k} \chi(n \geq 0) \chi(m \geq 0) \frac{a^n b^m}{n! m!} = \sum_{k=-\infty}^{-1} s^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n b^{n-k}}{n! (n-k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a^n b^{n-k}}{n! (n-k)!}$$

Упростим правильную часть:

$$\sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a^n b^{n-k}}{n! (n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{n}\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(ab)^n}{n! (n-k)!}$$

■

## 5.5 Правильная часть ряда Лорана для $f(s) = e^{as} e^{-1/(2s^2)}$

**Теорема.** *Правильная часть ряда Лорана для функции*

$$f(z) = e^{az} e^{-1/(2z^2)}$$

*Равна*

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k} / (-2)^m}{(2m+k)! m!}$$

*Доказательство.* Заменяем экспоненты рядами:

$$e^{az} e^{-1/(2z^2)} = \left( \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(az)^n}{n!} \right) \left( \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1/(2z^2))^m}{m!} \right)$$

Обе функции аналитичны в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ , поэтому их ряды сходятся абсолютно. Находим ряд Лорана для  $f$ , перемножая по Коши эти два ряда:

$$e^{az} e^{-1/(2z^2)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \sum_{n-2m=k} \chi(n \geq 0) \chi(m \geq 0) \frac{a^n / (-2)^m}{n! m!}$$

Тогда правильная часть:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{n-2m=k} \chi(n \geq 0) \chi(m \geq 0) \frac{a^n / (-2)^m}{n! m!} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k} / (-2)^m}{(2m+k)! m!}$$

■

## 5.6 Правильная часть ряда Лорана для $f(z) = e^{az} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s}$

**Теорема.** *Пусть  $k \geq 0$ ; пусть*

$$f(z) = e^{az} e^{-1/(2s^2)} e^{b/z}$$

*Тогда  $k$ -й член ряда Лорана для  $f$  равен*

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k+l} / (-2)^m}{(2m+k+l)! m!} \frac{n^l}{l!}$$

*Доказательство.* Определим

$$g(t) = e^{az} e^{-1/(2s^2)}$$

$$h(t) = e^{b/z}$$

Обе функции голоморфны в  $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ . Поэтому их ряды сходятся абсолютно и мы можем умножить ряды по Коши, чтобы получить ряд Лорана для  $f$ .

У функции  $e^{n/s}$  правильная часть константна. Поэтому, согласно теореме о правильной части произведения голоморфной функции и функции с константной правильной частью, нам достаточно знать только правильную часть разложения функции  $g$ , которую мы нашли в предыдущей теореме.

Пусть  $\{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  — коэффициенты для  $g$ , а  $\{\beta_n\}_{n=-\infty}^0$  — коэффициенты для  $h$ , а  $\{\gamma_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$  — коэффициенты  $f$ . Для наглядности, приведем формулу  $k$ -го члена их произведения, где  $k \geq 0$ :

$$\gamma_k = \sum_{l=-\infty}^0 \alpha_{k-l} \beta_l = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{k+l} \beta_{-l}$$

Приведем также формулы для  $\alpha_k$  и  $\beta_{-k}$ :

$$\alpha_k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k} / (-2)^m}{(2m+k)! m!}$$

$$\beta_{-k} = \frac{n^k}{k!}$$

Подставим  $\alpha_k$  и  $\beta_{-k}$  в формулу для  $\gamma_k$ :

$$\gamma_k = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{k+l} \beta_{-l} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k+l} / (-2)^m}{(2m+k+l)! m!} \frac{n^l}{l!}$$

■

## 5.7 Модифицированная лемма Жордана

Лемма Жордана позволяет использовать основную теорему о вычетах для интеграла по контуру  $(-\infty, \infty)$ . Обратное преобразование Лапласа можно найти, используя интеграл Меллина. Этот интеграл использует контур  $(\alpha - i\infty, \alpha + i\infty)$ . Если мы модифицируем лемму Жордана, чтобы она использовала контур в виде левой полуокружности с центром в  $\alpha$ , то сможем использовать основную теорему о вычетах для вычисления обратного преобразования Лапласа.

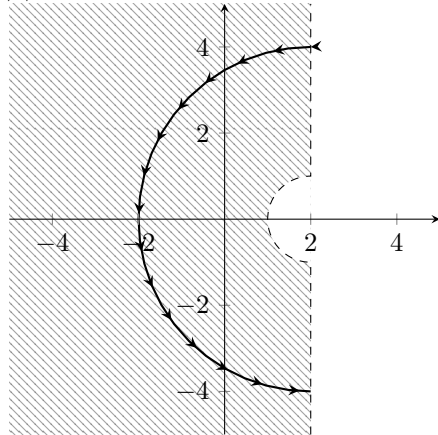
**Теорема** (Модифицированная лемма Жордана).

Пусть  $\alpha, t > 0$ ;  $F(s)$  непрерывна в области  $G = \{\operatorname{Re} s \leq \alpha\} \cap \{|s - \alpha| \geq R_0 > 0\}$ ;  $C_R$  — полуокружность  $|z - \alpha| = R$  в  $G$ ;

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{s \in C_R} |F(s)| = 0;$$

$$\text{Тогда } \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{ts} F(s) ds = 0$$

*Доказательство.*



По условию,  $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R \quad \forall s \in C_R \quad |F(s)| = |F(\alpha + Re^{i\varphi})| < \varepsilon$ , тогда

$$\left| \int_{C_R} e^{ts} F(s) ds \right| \leq \int_{C_R} |e^{ts} F(s)| |ds| \leq \varepsilon \int_{C_R} |e^{ts}| |ds|$$

$$\text{Рассмотрим на } C_R: |e^{ts}| = |e^{t(\alpha + R \cos \varphi + Ri \sin \varphi)}| = e^{t(\alpha + R \cos \varphi)}$$

$$\text{Отсюда: } \varepsilon \int_{C_R} |e^{st}| |ds| = \varepsilon \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\alpha t + Rt \cos \varphi} |d(Re^{i\varphi})| =$$

$$\varepsilon \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |e^{\alpha t + Rt \cos \varphi} Ri e^{i\varphi}| d\varphi = R\varepsilon e^{\alpha t} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Rt \cos \varphi} d\varphi = R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\pi} e^{Rt \cos(\varphi + \frac{\pi}{2})} d\varphi =$$

$$R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\pi} e^{-Rt \sin \varphi} d\varphi = 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt \sin \varphi} d\varphi$$

$$\text{На } [0, \frac{\pi}{2}] \quad \sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$$

$$\implies 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt \sin \varphi} d\varphi \leq 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt \frac{2}{\pi} \varphi} d\varphi =$$

$$2R\varepsilon e^{\alpha t} \left( \frac{1}{-\frac{2Rt}{\pi}} e^{-\frac{2Rt}{\pi} \varphi} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi \varepsilon}{t} e^{\alpha t} (1 - e^{-Rt}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0$$

Отсюда интеграл по дуге стремится к 0. ■