Оглавление

1 Сведение задачи к вычислению обратного преобразования Лапласа **2**

2 Вычисление обратного преобразования Лапласа с помощью формулы Меллина и основной теоремы о вычетах **3**

2.1 Находим $L_u^{-1}[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u)](t)$ . . . 3

2.2 Находим обратное преобразование Лапласа . . . 4

2.2.1 Случай $n = 0$ . . . 5

2.2.2 Случай $n \neq 0$ . . . 6

2.3 Результат . . . 6

3 Эксперименты **8**

4 Теоремы **9**

4.1 Связь мат. ожидания χ^2_{2k} и преобразования Лапласа . . . 9

4.2 Замена переменной в обратном преобразовании Лапласа . . . 9

4.3 Правильная часть произведения голоморфной функции и функции с нулевой правильной частью . . . 9

4.4 Правильная часть ряда Лорана для $f(s) = e^{as}\, e^{b/s}$ . . . 10

4.5 Правильная часть ряда Лорана для $f(s) = e^{as} e^{-1/(2s^2)}$ . . . 10

4.6 Правильная часть ряда Лорана для $f(z) = e^{az} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s}$ . . . 10

4.7 Модифицированная лемма Жордана . . . 11

§1. Сведение задачи к вычислению обратного преобразования Лапласа

Есть случайные величины X, Y, Z. Мы не знаем распределение X, знаем распределение Y и наблюдаем Z. Кроме того, известно, что $Z = XY$, и что все величины непрерывны. Нужно оценить распределение X.

Мы будем использовать вейвлет «Mexican hat», потому что он прост и непрерывен. Его формула:

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}(1-t^2)e^{-t^2/2}$$

Определим элементы фрейма:

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}}\psi\left(\frac{t}{2^m} - n\right) = \frac{1}{\sqrt{2^m}}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\left(1 - \left(\frac{t}{2^m} - n\right)^2\right)e^{-\left(\frac{t}{2^m}-n\right)^2/2}$$

Рассмотрим случай $Y \sim \chi^2_{2k}$; $X > \delta > 0$, абсолютно непрерывен. Плотность Y:

$$\chi^2_{2k} \sim \frac{1}{2^k}\frac{1}{\Gamma(k)}x^{k-1}e^{-x/2}$$

Будем строить функции $g_{m,n}$ такие, что $\mathrm{E}\, g_{m,n}(Z) = \mathrm{E}\, \psi_{m,n}(X)$. Заметим, что достаточно выполнения:

$$\forall x \in \operatorname{Im} X \quad \mathrm{E}\, g_{m,n}(xY) = \psi_{m,n}(x)$$

Заменим мат. ожидание преобразованием Лапласа и раскроем $\psi_{m,n}$:

$$\left(\frac{1}{2x}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z\left[g_{m,n}(z)z^{k-1}\right]\left(\frac{1}{2x}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{x}{2^m} - n\right)$$

Сделаем замену $u = \frac{1}{2x}$:

$$u^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z\left[g_{m,n}(z)z^{k-1}\right](u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)$$

Используя обратное преобразование Лапласа, найдем $g_{m,n}(t)$:

$$u^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z\left[g_{m,n}(z)z^{k-1}\right](u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)$$
$$L_z\left[g_{m,n}(z)z^{k-1}\right](u) = \frac{\Gamma(k)}{u^k}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)$$
$$g_{m,n}(t)t^{k-1} = L_u^{-1}\left[\frac{\Gamma(k)}{u^k}\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)\right](t)$$
$$g_{m,n}(t) = \frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)\right](t)$$

Таким образом мы получили выражение для $g_{m,n}(t)$. Далее мы выразим его через ряды, используя формулу Меллина и основную теорему о вычетах.

§2. Вычисление обратного преобразования Лапласа с помощью формулы Меллина и основной теоремы о вычетах

Мы выразили $g_{m,n}(t)$ как:

$$g_{m,n}(t) = \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) \tag{2.1}$$

Теперь нужно вычислить обратное преобразование Лапласа. Для этого мы будем использовать формулу Меллина:

$$L_s^{-1} \left[F\left(s \right) \right] (t) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\alpha - i\infty}^{\alpha + i\infty} e^{ts} F(s) ds$$

Итак, нам нужно вычислить:

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t)$$

Подставим вместо ψ формулу нашего вейвлета:

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) = L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left(1 - \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 \right) \right] (t)$$

Распишем множитель перед экспонентой:

$$1 - \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 = 1 - \left(\frac{1}{2^{2(m+1)}u^2} - 2\frac{1}{2^{m+1}u} n + n^2 \right) = (1 - n^2) + \frac{1}{u} \left(\frac{n}{2^m} \right) - \frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right)$$

Введем обозначение:

$$r_{m,n}(u) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right)$$

Таким образом,

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) = \left(1 - n^2 \right) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) + \left(\frac{n}{2^m} \right) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^{k+1}} r_{m,n}(u) \right] (t) - \\ - \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^{k+2}} r_{m,n}(u) \right] (t) \tag{2.2}$$

Отсюда видно, что достаточно найти $L_u^{-1}[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u)](t)$ для каждого k.

2.1 Находим $L_u^{-1}[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u)](t)$

Выше мы ввели

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t)$$

Подставим обратно $r_{m,n}(u)$:

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 \right) \right] (t)$$

Раскроем квадрат под экспонентой:

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left((n^2) - \frac{1}{u} \left(\frac{n}{2^m} \right) + \frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right) \right) \right) \right] (t)$$

Сгруппируем $2^{m+1}u$:

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t) = L_u^{-1}\left[\frac{2^{k(m+1)}}{\left(2^{m+1}u\right)^k}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\exp\left(-\frac{n^2}{2}+\frac{n}{2^{m+1}u}-\frac{1}{2\left(2^{m+1}u\right)^2}\right)\right](t)$$

Вынесем множители, не зависящие от u, за L_u^{-1}:

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t) = e^{-\frac{n^2}{2}}2^{k(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}L_u^{-1}\left[\frac{1}{\left(2^{m+1}u\right)^k}\exp\left(\frac{n}{2^{m+1}u}-\frac{1}{2\left(2^{m+1}u\right)^2}\right)\right](t)$$

Используя теорему о замене переменной в обратном преобразовании Лапласа, делаем замену $s = 2^{m+1}u$:

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t) = e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}-\frac{1}{2s^2}\right)\right]\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)$$

2.2 Находим обратное преобразование Лапласа

В предыдущем разделе мы выразили:

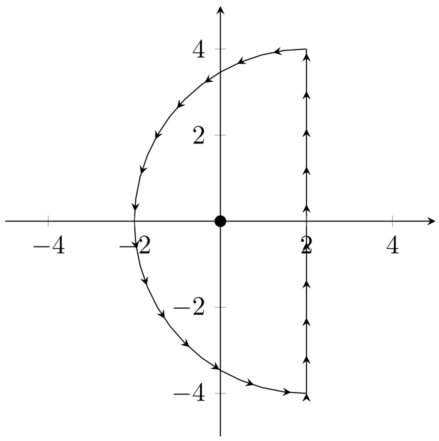
$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t) = e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}-\frac{1}{2s^2}\right)\right]\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right) \tag{2.3}$$

Чтобы вычислить правую часть, найдем теперь

$$L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}\right)\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\right](\tau) \tag{2.4}$$

Воспользуемся формулой Меллина обратного преобразования Лапласа. У нас особенность только в нуле, поэтому можно взять любую $\alpha > 0$:

$$L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}\right)\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\right](\tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau}\frac{1}{s^k}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}ds$$



Берем контур $C = C_1 + C_2$, где C_1 — искомый, а C_2 — дуга окружности (слева от C_1 с центром в $(\alpha, 0)$).

Оценим $F(s) := (1/s^k)e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}$ на C_r, где $r > 4\alpha$. Для этого оценим каждый из множителей. Сначала $1/s$:

$$\left|\frac{1}{s}\right| = \left|\frac{1}{\alpha + re^{i\phi}}\right| = \frac{1}{\sqrt{\left(\alpha + r\cos\phi\right)^2 + \left(r\sin\phi\right)^2}} = \frac{1}{r\sqrt{\left(\frac{\alpha}{r}+\cos\phi\right)^2+\sin^2\phi}} \le \frac{1}{r\sqrt{1+\frac{2\alpha\cos\phi}{r}}} \le \frac{1}{r\sqrt{1+\frac{\cos\phi}{2}}} \le \frac{\sqrt{2}}{r}$$

Теперь оценим $e^{-1/(2s^2)}$ на том же контуре. Известно, что $|e^z| = e^{|z|}$

$$\left|\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\right| \le \exp\left(\left|-\frac{1}{2s^2}\right|\right) = \exp\left(\frac{1}{r^2}\right)$$

Аналогично оцениваем $e^{n/s}$:

$$\left|\exp\left(\frac{n}{s}\right)\right| \le \exp\left(\left|\frac{n}{s}\right|\right) = \exp\left(\frac{|n|\sqrt{2}}{r}\right)$$

Объединяем оценки и получаем:

$$\left|\frac{1}{s^k}\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\exp\left(\frac{n}{s}\right)\right| \le \left(\frac{\sqrt{2}}{r}\right)^k \exp\left(\frac{1}{r^2}\right)\exp\left(\frac{|n|\sqrt{2}}{r}\right) \xrightarrow[r\to\infty]{} 0$$

А значит, по лемме Жордана $\int\limits_{C_r} e^{s\tau} F(s) ds$ стремится к нулю. Поэтому можем использовать основную теорему о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau}\frac{1}{s^k}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}ds = \frac{1}{2\pi i}2\pi i\operatorname*{Res}_0\left(e^{s\tau}\frac{1}{s^k}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}ds\right)$$

У нас возникает два случая: $n = 0$ и $n \neq 0$

2.2.1 Случай $n = 0$

Воспользуемся теоремой о правильной части функции $e^{s\tau}e^{-1/(2s^2)}$. Нам нужен $k-1$-й член ряда Лорана. Получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau}\frac{1}{s^k}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}ds = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tau^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!}$$

Таким образом, мы выразили вычислили 2.4:

$$L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}\right)\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\right](\tau) = \sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tau^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!}$$

Подставим это выражение в 2.3, заменяя τ на $t/2^{m+1}$:

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t) = e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}-\frac{1}{2s^2}\right)\right]\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right) =$$
$$e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!}$$

Наконец, подставим это в 2.2:

$$\begin{aligned}
L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u}-n\right)\right](t) &= \left(1-n^2\right)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t) + \left(\frac{n}{2^m}\right)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+1}}r_{m,n}(u)\right](t) + \\
&+ \left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+2}}r_{m,n}(u)\right](t) = \\
&= \left(1-n^2\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!} + \left(\frac{n}{2^m}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{k(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k}/(-2)^j}{(2j+k)!\,j!} - \\
&- \left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k+1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1}/(-2)^j}{(2j+k+1)!\,j!}
\end{aligned} \tag{2.5}$$

Теперь получим выражение для $g(t)$, подставляя только что полученную формулу в 2.1:

$$\begin{aligned}
g_{m,n}(t) = \frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u}-n\right)\right](t) = \\
= \frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\left(1-n^2\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!} + \\
+ \frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\left(\frac{n}{2^m}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{k(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k}/(-2)^j}{(2j+k)!\,j!} - \\
- \frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k+1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1}/(-2)^j}{(2j+k+1)!\,j!}
\end{aligned}$$

Начнем упрощать выражение. Для начала, вынесем из суммы, степень, не зависящую от переменной суммирования и сделаем замену $n = 0$ (так как рассматриваем именно этот случай):

$$g_{m,0}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!} - \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j}/(-2)^j}{(2j+k+1)!\,j!}\right)$$

2.2.2 Случай $n \neq 0$

Воспользуемся теоремой о правильной части функции $e^{s\tau}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}$. Нам нужен $k-1$-й член ряда Лорана. Получаем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau}\frac{1}{s^k}e^{-1/2s^2}e^{n/s}ds = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tau^{2j+k-1+i}/(-2)^j}{(2j+k-1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}$$

Таким образом, мы выразили вычислили 2.4:

$$L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}\right)\exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right)\right](\tau) = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\tau^{2j+k-1+i}/(-2)^j}{(2j+k-1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}$$

Подставим это выражение в 2.3, заменяя τ на $t/2^{m+1}$:

$$L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t) = e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}L_s^{-1}\left[\frac{1}{s^k}\exp\left(\frac{n}{s}-\frac{1}{2s^2}\right)\right]\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right) =$$
$$e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1+i}/(-2)^j}{(2j+k-1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}$$

Наконец, подставим это в 2.2:

$$\begin{aligned}
L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u}-n\right)\right](t) &= \left(1-n^2\right)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)\right](t)+\left(\frac{n}{2^m}\right)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+1}}r_{m,n}(u)\right](t)+\\
&+\left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^{k+2}}r_{m,n}(u)\right](t) =\\
&= \left(1-n^2\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1+i}/(-2)^j}{(2j+k-1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}+\\
&+\left(\frac{n}{2^m}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{k(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+i}/(-2)^j}{(2j+k+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}-\\
&-\left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k+1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1+i}/(-2)^j}{(2j+k+1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}
\end{aligned} \tag{2.6}$$

Теперь получим выражение для $g_{m,n}(t)$, подставляя только что полученную формулу в 2.1

$$\begin{aligned}
g_{m,n}(t) &= \frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}L_u^{-1}\left[\frac{1}{u^k}\psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u}-n\right)\right](t) =\\
&= \frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\left(1-n^2\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k-1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1+i}/(-2)^j}{(2j+k-1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}+\\
&+\frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\left(\frac{n}{2^m}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{k(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+i}/(-2)^j}{(2j+k+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}-\\
&-\frac{1}{t^{k-1}}\frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)e^{-\frac{n^2}{2}}2^{(k+1)(m+1)}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1+i}/(-2)^j}{(2j+k+1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}
\end{aligned}$$

Упростим:

$$\begin{aligned}
g_{m,n}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}e^{-\frac{n^2}{2}}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\Bigg(&\left(1-n^2\right)\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i}/(-2)^j}{(2j+k-1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}+\left(\frac{nt}{2^m}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i}/(-2)^j}{(2j+k+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}-\\
&+\left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right)\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i}/(-2)^j}{(2j+k+1+i)!\,j!}\frac{n^i}{i!}\Bigg)
\end{aligned}$$

2.3 Результат

Выпишем обе полученные формулы вместе:

$$g_{m,0}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\left(\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j}/(-2)^j}{(2j+k-1)!\,j!}-\left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right)\sum_{j=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j}/(-2)^j}{(2j+k+1)!\,j!}\right)$$

$$g_{m,n}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} e^{-\frac{n^2}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left(\left(1-n^2\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)!\, j!} \frac{n^i}{i!} + \left(\frac{nt}{2^m}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+i)!\, j!} \frac{n^i}{i!} - \right.$$

$$\left. + \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+1+i)!\, j!} \frac{n^i}{i!} \right)$$

§3. Эксперименты

Функция	Способ вычисления	Машинная точность (размер мантиссы),	Значение
$g_{0,0}(1)$	численно, интеграл, контур $[1-100i, 1+100i]$	100 десятичных знаков	0.864
	численно, ряд	256 двоичных знаков	0.864
$g_{0,0}(10)$	численно, интеграл, контур $[1-100i, 1+100i]$	100 десятичных знаков	0.591
	численно, ряд	256 двоичных знаков	0.591
$g_{0,0}(100)$	численно, интеграл, контур $[1-10i, 1+10i]$	100 десятичных знаков	-2×10^{19}
	численно, интеграл, контур $[1-100i, 1+100i]$	100 десятичных знаков	Вычисляется дольше 1 часа
	численно, ряд	256 двоичных знаков	-0.440

§4. Теоремы

4.1 Связь мат. ожидания χ^2_{2k} и преобразования Лапласа

Теорема (О связи мат. ожидания χ^2_{2k} и преобразования Лапласа)**.** *Пусть f — функция плотности χ^2_{2k}; $a > 0$. Тогда*

$$Eg(aY) = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z\left[g(z)z^{k-1}\right]\left(\frac{1}{2a}\right)$$

Доказательство.

$$Eg(aY) = \int\limits_0^\infty g(ay)f(y)dy$$

Подставим функцию плотности:

$$Eg(aY) = \int\limits_0^\infty g(ay)\frac{1}{\Gamma(k)}\frac{1}{2^k}y^{k-1}e^{-y/2}dy$$

Возьмем $z = ay$:

$$Eg(aY) = \int\limits_0^\infty g(z)\frac{1}{\Gamma(k)}\frac{1}{2^k}\left(\frac{z}{a}\right)^{k-1}e^{-z/(2a)}\frac{dz}{a} = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)}\int\limits_0^\infty g(z)z^{k-1}e^{-z\left(\frac{1}{2a}\right)}dz = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z\left[g(z)z^{k-1}\right]\left(\frac{1}{2a}\right)$$

■

4.2 Замена переменной в обратном преобразовании Лапласа

Теорема. *Пусть $c > 0$; α такое, что все особенности f лежат левее $c\alpha$. Тогда*

$$L_u^{-1}\left[f(cu)\right](t) = L_s^{-1}\left[\frac{1}{c}f(s)\right]\left(\frac{t}{c}\right)$$

Доказательство.

$$L_u^{-1}\left[f(cu)\right](t) = \int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{ut}f(cu)du = \frac{1}{c}\int\limits_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{(cu)\frac{t}{c}}f(cu)d(cu) = \frac{1}{c}\int\limits_{c\alpha-i\infty}^{c\alpha+i\infty} e^{s\frac{t}{c}}f(s)ds = L_s^{-1}\left[\frac{1}{c}f(s)\right]\left(\frac{t}{c}\right)$$

■

4.3 Правильная часть произведения голоморфной функции и функции с нулевой правильной частью

Теорема. *Пусть f, g — голоморфные функции; правильная часть g нулевая; $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — коэффициенты разложения в ряд Лорана функции f; $\{b_n\}_{n=-\infty}^{0}$ — коэффициенты разложения в ряд Лорана функции g.*

Тогда в правильной части разложения в ряд Лорана произведения $f(z)g(z)$ участвуют только коэффициенты правильной части функции f

Доказательство.

$$f(z)g(z) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n\right)\left(\sum_{m=-\infty}^{0} b_m z^m\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \sum_{m=-\infty}^{0} a_{k-m}b_m$$

Правильная часть при $k \geq 0$. При этом у нас $m \leq 0$. А значит, $n = k - m \geq 0$ для каждого коэффициента правильной части.

■

4.4 Правильная часть ряда Лорана для $f(s) = e^{as}\,e^{b/s}$

Теорема. *Правильная часть ряда Лорана для функции*

$$f(s) = e^{as}e^{b/s}$$

Равна

$$\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{s}{n}\right)^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(ab)^n}{n!\,(n-k)!}$$

Доказательство. Заменим экспоненты соответствующими рядами:

$$e^{as}e^{b/s} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(as)^n}{n!}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{(b/s)^m}{m!}$$

Обе функции аналитичны в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, а потому их ряды сходятся абсолютно. Ряд для функции–произведения можно получить перемножением рядов по Коши.

$$e^{as}e^{b/s} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}s^k\sum_{n-m=k}\chi(n\geq 0)\chi(m\geq 0)\frac{a^n\,b^m}{n!\,m!} = \sum_{k=-\infty}^{-1}s^k\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^n\,b^{n-k}}{n!\,(n-k)!} + \sum_{k=0}^{\infty}s^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{a^n\,b^{n-k}}{n!\,(n-k)!}$$

Упростим правильную часть:

$$\sum_{k=0}^{\infty}s^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{a^n\,b^{n-k}}{n!\,(n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{s}{n}\right)^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{(ab)^n}{n!\,(n-k)!}$$

∎

4.5 Правильная часть ряда Лорана для $f(s) = e^{as}e^{-1/(2s^2)}$

Теорема. *Правильная часть ряда Лорана для функции*

$$f(z) = e^{az}e^{-1/(2z^2)}$$

Равна

$$\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{2m+k}/(-2)^m}{(2m+k)!\,m!}$$

Доказательство. Заменим экспоненты рядами:

$$e^{az}e^{-1/(2z^2)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(az)^n}{n!}\right)\left(\sum_{m=0}^{\infty}\frac{\left(-1/\left(2z^2\right)\right)^m}{m!}\right)$$

Обе функции аналитичны в $\mathbb{C}\setminus\{0\}$, поэтому их ряды сходятся абсолютно. Находим ряд Лорана для f, перемножая по Коши эти два ряда:

$$e^{az}e^{-1/(2z^2)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty}z^k\sum_{n-2m=k}\chi(n\geq 0)\chi(m\geq 0)\frac{a^n/(-2)^m}{n!\,m!}$$

Тогда правильная часть:

$$\sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{n-2m=k}\chi(n\geq 0)\chi(m\geq 0)\frac{a^n/(-2)^m}{n!\,m!} = \sum_{k=0}^{\infty}z^k\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{2m+k}/(-2)^m}{(2m+k)!\,m!}$$

∎

4.6 Правильная часть ряда Лорана для $f(z) = e^{az}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}$

Теорема. *Пусть $k\geq 0$; пусть*

$$f(z) = e^{az}e^{-1/(2s^2)}e^{b/z}$$

Тогда k-й член ряда Лорана для f равен

$$\sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty}\frac{a^{2m+k+l}/\left(-2\right)^m}{(2m+k+l)!\,m!}\frac{n^l}{l!}$$

Доказательство. Определим

$$g(t) = e^{az}e^{-1/(2s^2)}$$
$$h(t) = e^{b/z}$$

Обе функции голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому их ряды сходятся абсолютны и мы можем умножить ряды по Коши, чтобы получить ряд Лорана для f.

У функции $e^{n/s}$ правильная часть константна. Поэтому, согласно теореме о правильной части произведения голоморфной функции и функции с константной правильной частью, нам достаточно знать только правильную часть разложения функции g, которую мы нашли в предыдущей теореме.

Пусть $\{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — коэффициенты для g, а $\{\beta_n\}_{n=-\infty}^{0}$ — коэффициенты для h, а $\{\gamma_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — коэффициенты f. Для наглядности, приведем формулу k-го члена их произведения, где $k \geq 0$:

$$\gamma_k = \sum_{l=-\infty}^{0} \alpha_{k-l}\beta_l = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{k+l}\beta_{-l}$$

Приведем также формулы для α_k и β_{-k}:

$$\alpha_k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k}/\,(-2)^m}{(2m+k)!\,m!}$$
$$\beta_{-k} = \frac{n^k}{k!}$$

Подставим α_k и β_{-k} в формулу для γ_k:

$$\gamma_k = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{k+l}\beta_{-l} = \sum_{l=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k+l}/\,(-2)^m}{(2m+k+l)!\,m!}\frac{n^l}{l!}$$

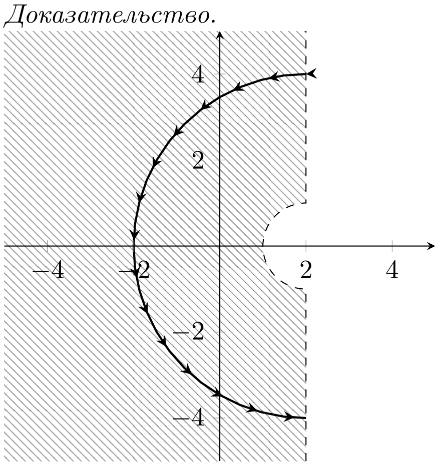
■

4.7 Модифицированная лемма Жордана

Лемма Жордана позволяет использовать основную теорему о вычетах для интеграла по контуру $(-\infty, \infty)$. Обратное преобразование Лапласа можно найти, используя интеграл Меллина. Этот интеграл использует контур $(\alpha - i\infty, \alpha + i\infty)$. Если мы модифицируем лемму Жордана, чтобы она использовала контур в виде левой полуокружности с центром в α, то сможем использовать основную теорему о вычетах для вычисления обратного преобразования Лапласа.

Теорема (Модифицированная лемма Жордана)**.**
Пусть α, $t > 0$; $F(s)$ *непрерывна в области* $G = \{\operatorname{Re} s \leq \alpha\} \cap \{|s-\alpha| \geq R_0 > 0\}$; C_R — *полуокружность* $|z-\alpha| = R$ *в* G;
$\lim\limits_{R\to\infty} \sup\limits_{s\in C_R} |F(s)| = 0$;
Тогда $\lim\limits_{R\to\infty} \int\limits_{C_R} e^{ts}F(s)ds = 0$

Доказательство.



По условию, $\forall\varepsilon > 0\ \ \exists R\ \ \forall s \in C_R \quad |F(s)| = \left|F\left(\alpha + Re^{i\varphi}\right)\right| < \varepsilon$, тогда

$$\left|\int\limits_{C_R} e^{ts}F(s)ds\right| \le \int\limits_{C_R} \left|e^{ts}F(s)\right| |ds| \le \varepsilon \int\limits_{C_R} \left|e^{ts}\right| |ds|$$

Рассмотрим на C_R: $\left|e^{ts}\right| = \left|e^{t(\alpha+R\cos\varphi+Ri\sin\varphi)}\right| = e^{t(\alpha+R\cos\varphi)}$

Отсюда: $\varepsilon\int\limits_{C_R}\left|e^{st}\right||ds| = \varepsilon\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\alpha t+Rt\cos\varphi}\left|d\left(Re^{i\varphi}\right)\right| =$

$$\varepsilon\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}}\left|e^{\alpha t+Rt\cos\varphi}Rie^{i\varphi}\right|d\varphi = R\varepsilon e^{\alpha t}\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Rt\cos\varphi}d\varphi = R\varepsilon e^{\alpha t}\int\limits_{0}^{\pi} e^{Rt\cos\left(\varphi+\frac{\pi}{2}\right)}d\varphi =$$

$$R\varepsilon e^{\alpha t}\int\limits_0^{\pi} e^{-Rt\sin\varphi}d\varphi = 2R\varepsilon e^{\alpha t}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\sin\varphi}d\varphi$$

На $[0,\dfrac{\pi}{2}]\ \ \sin\varphi \ge \dfrac{2}{\pi}\varphi$

$$\implies 2R\varepsilon e^{\alpha t}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\sin\varphi}d\varphi \le 2R\varepsilon e^{\alpha t}\int\limits_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\frac{2}{\pi}\varphi}d\varphi =$$

$$2R\varepsilon e^{\alpha t}\left(\frac{1}{-\frac{2Rt}{\pi}}e^{-\frac{2Rt\varphi}{\pi}}\right)\Bigg|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\varepsilon}{t}e^{\alpha t}\left(1-e^{-Rt}\right)\xrightarrow[R\to\infty]{} 0$$

Отсюда интеграл по дуге стремится к 0. ■