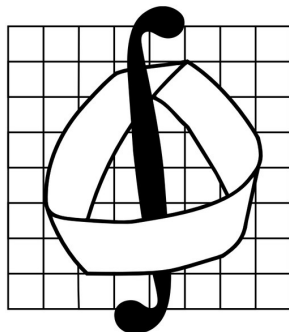


Московский государственный университет имени М. В. Ломоносова
механико-математический факультет
кафедра математической статистики и случайных процессов



Курсовая работа
студента 403 группы
Купрякова Василия Юрьевича

Непараметрическая оценка плотности мультипликативно зашумленных данных

Научный руководитель:
с.н.с., к.ф.-м.н.
Шкляев Александр Викторович

Москва, 2020

Оглавление

1	Введение	2
2	Сведение задачи к вычислению обратного преобразования Лапласа	3
3	Вычисление обратного преобразования Лапласа с помощью формулы Меллина и основной теоремы о вычетах	5
3.1	Находим $L_u^{-1}[\frac{1}{u^k}r_{m,n}(u)](t)$	6
3.2	Находим обратное преобразование Лапласа	7
3.2.1	Случай $n = 0$	8
3.2.2	Случай $n \neq 0$	9
3.3	Результат	11
4	Альтернативный подход к задаче	12
5	Эксперименты	14
6	Теоремы	18
6.1	Связь мат. ожидания χ_{2k}^2 и преобразования Лапласа	18
6.2	Замена переменной в обратном преобразовании Лапласа	18
6.3	Правильная часть произведения голоморфной функции и функции с нулевой правильной частью	19
6.4	Правильная часть ряда Лорана для $f(s) = e^{as} e^{b/s}$	19
6.5	Правильная часть ряда Лорана для $f(s) = e^{as} e^{-1/(2s^2)}$	20
6.6	Правильная часть ряда Лорана для $f(z) = e^{az} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s}$	21
6.7	Модифицированная лемма Жордана	22

§1. Введение

В работу мы изучим задачу, которая возникает при исследовании примесей в жидкости.

Примеси в исследуемой жидкости — это движущиеся частицы с размерами порядка 10^{-8} м. Жидкость просвечивают лазером, а камера фиксирует частицы, которые попали в луч.

Получается последовательность изображений. Для каждой частицы эта последовательность является последовательностью проекций частиц на площадь камеры. Мы можем построить векторы перемещений частиц в проекции на плоскость камеры по этим снимкам. Для отдельной частицы такие перемещения образуют броуновское движение с нулевым сносом и дисперсией $\sigma^2 = c/d$, где c — некоторая константа, а d — размер частицы.

Проблема в том, что размер частицы не связан напрямую с размером ее изображения. Наша задача — оценить распределение истинных размеров частиц по размерам на снимках.

Будем изучать равносильную задачу: оценить распределение σ^2 . Рассмотрим n случайно выбранных частиц E_1, \dots, E_n . Обозначим дисперсии для их движения как $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$. Для i -й частицы у нас есть два $k(i)$ -мерных вектора перемещений: $A_i^1, \dots, A_i^{k(i)}$ по оси x и $A_i^{k(i)+1}, \dots, A_i^{2k(i)}$ по оси y . Мы будем рассматривать только частный случай, когда все $k(i)$ равны k , а σ_i^2 непрерывна.

A_i^1, \dots, A_i^{2k} условно независимы при условии σ_i^2 и имеют условное распределение $\mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$. Дальше вместо выборки A_i^1, \dots, A_i^{2k} будем рассматривать достаточную статистику $Z_i = \sum_{j=1}^{2k} (A_i^j)^2$. Заметим далее, что $Z_i = \sigma_i^2 Y_i$, где $Y_i \sim \chi_{2k}^2$.

При этом, Y_i независимы и не зависят от дисперсии σ_i^2 .

Обозначим $X_i = \sigma_i^2$. Тогда задачу можно сформулировать так: X_1, \dots, X_n — независимые одинаково распределенные случайные величины с неизвестным распределением и положительным носителем; Y_1, \dots, Y_n — независимые от них н.о.р. с.в. с распределением χ_{2k}^2 ; $Z_1, \dots, Z_n = X_1 Y_1, \dots, X_n Y_n$ — наблюдаемые случайные величины; а сама задача — по наблюдениям Z_1, \dots, Z_n оценить распределение X_1 .

§2. Сведение задачи к вычислению обратного преобразования Лапласа

Есть случайные величины X, Y, Z . Мы не знаем распределение X , знаем распределение Y и наблюдаем Z . Кроме того, известно, что $Z = XY$, и что все величины непрерывны. Нужно оценить распределение X .

Мы будем использовать вейвлет «Mexican hat», потому что он прост и непрерывен. Его формула:

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}(1 - t^2)e^{-t^2/2}.$$

Определим элементы фрейма:

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}}\psi\left(\frac{t}{2^m} - n\right) = \frac{1}{\sqrt{2^m}}\frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}}\left(1 - \left(\frac{t}{2^m} - n\right)^2\right)e^{-\left(\frac{t}{2^m} - n\right)^2/2}.$$

Рассмотрим случай $Y \sim \chi_{2k}^2$; $X > \delta > 0$, абсолютно непрерывен. Плотность Y :

$$\chi_{2k}^2 \sim \frac{1}{2^k} \frac{1}{\Gamma(k)} x^{k-1} e^{-x/2}.$$

Будем строить функции $g_{m,n}$ такие, что $E g_{m,n}(Z) = E \psi_{m,n}(X)$. Заметим, что достаточно выполнения:

$$\forall x \in \text{Im } X \quad E g_{m,n}(xY) = \psi_{m,n}(x).$$

Заменим мат. ожидание преобразованием Лапласа и раскроем $\psi_{m,n}$:

$$\left(\frac{1}{2x}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g_{m,n}(z) z^{k-1}] \left(\frac{1}{2x}\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{x}{2^m} - n\right).$$

Сделаем замену $u = \frac{1}{2x}$:

$$u^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g_{m,n}(z) z^{k-1}] (u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right).$$

Используя обратное преобразование Лапласа, найдем $g_{m,n}(t)$:

$$\begin{aligned}
u^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g_{m,n}(z) z^{k-1}] (u) &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^m \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \\
L_z [g_{m,n}(z) z^{k-1}] (u) &= \frac{\Gamma(k)}{u^k} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^m \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \\
g_{m,n}(t) t^{k-1} &= L_u^{-1} \left[\frac{\Gamma(k)}{u^k} \left(\frac{1}{\sqrt{2}} \right)^m \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) \\
g_{m,n}(t) &= \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t).
\end{aligned}$$

Таким образом мы получили выражение для $g_{m,n}(t)$. Далее мы выразим его через ряды, используя формулу Меллина и основную теорему о вычетах.

§3. Вычисление обратного преобразования Лапласа с помощью формулы Меллина и основной теоремы о вычетах

Мы выразили $g_{m,n}(t)$ как:

$$g_{m,n}(t) = \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t). \quad (3.1)$$

Теперь нужно вычислить обратное преобразование Лапласа. Для этого мы будем использовать формулу Меллина:

$$L_s^{-1} [F(s)](t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{ts} F(s) ds.$$

Итак, нам нужно вычислить:

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t).$$

Подставим вместо ψ формулу нашего вейвлета:

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) = \\ L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left(1 - \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 \right) \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 \right) \right] (t). \end{aligned}$$

Распишем множитель перед экспонентой:

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 &= 1 - \left(\frac{1}{2^{2(m+1)}u^2} - 2\frac{1}{2^{m+1}u}n + n^2 \right) = \\ &= (1 - n^2) + \frac{1}{u} \left(\frac{n}{2^m} \right) - \frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right). \end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$r_{m,n}(u) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)\right).$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) &= \\ &= (1 - n^2) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) + \left(\frac{n}{2^m} \right) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^{k+1}} r_{m,n}(u) \right] (t) - \\ &\quad - \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^{k+2}} r_{m,n}(u) \right] (t). \end{aligned} \quad (3.2)$$

Отсюда видно, что достаточно найти $L_u^{-1}[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u)](t)$ для каждого k .

3.1 Находим $L_u^{-1}[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u)](t)$

Выше мы ввели

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t).$$

Подставим обратно $r_{m,n}(u)$:

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)^2\right) \right] (t).$$

Раскроем квадрат под экспонентой:

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) &= \\ &= L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left((n^2) - \frac{1}{u}\left(\frac{n}{2^m}\right) + \frac{1}{u^2}\left(\frac{1}{4^{m+1}}\right)\right)\right) \right] (t). \end{aligned}$$

Сгруппируем $2^{m+1}u$:

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) &= \\ &= L_u^{-1} \left[\frac{2^{k(m+1)}}{(2^{m+1}u)^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2^{m+1}u} - \frac{1}{2(2^{m+1}u)^2}\right) \right] (t). \end{aligned}$$

Вынесем множители, не зависящие от u , за L_u^{-1} :

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) &= \\ &= e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_u^{-1} \left[\frac{1}{(2^{m+1}u)^k} \exp\left(\frac{n}{2^{m+1}u} - \frac{1}{2(2^{m+1}u)^2}\right) \right] (t). \end{aligned}$$

Используя теорему о замене переменной в обратном преобразовании Лапласа, делаем замену $s = 2^{m+1}u$:

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_s^{-1} \left[\frac{1}{s^k} \exp \left(\frac{n}{s} - \frac{1}{2s^2} \right) \right] \left(\frac{t}{2^{m+1}} \right).$$

3.2 Находим обратное преобразование Лапласа

В предыдущем разделе мы выразили:

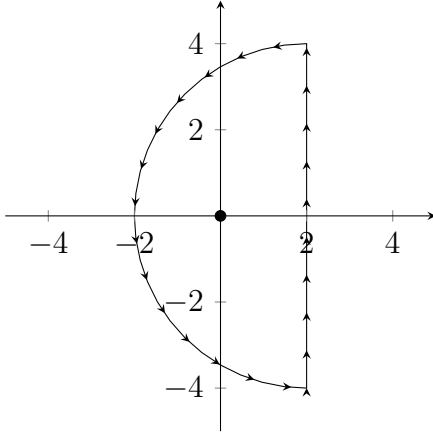
$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_s^{-1} \left[\frac{1}{s^k} \exp \left(\frac{n}{s} - \frac{1}{2s^2} \right) \right] \left(\frac{t}{2^{m+1}} \right). \quad (3.3)$$

Чтобы вычислить правую часть, найдем теперь

$$L_s^{-1} \left[\frac{1}{s^k} \exp \left(\frac{n}{s} \right) \exp \left(-\frac{1}{2s^2} \right) \right] (\tau). \quad (3.4)$$

Воспользуемся формулой Меллина обратного преобразования Лапласа. У нас особенность только в нуле, поэтому можно взять любую $\alpha > 0$:

$$L_s^{-1} \left[\frac{1}{s^k} \exp \left(\frac{n}{s} \right) \exp \left(-\frac{1}{2s^2} \right) \right] (\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s} ds.$$



Берем контур $C = C_1 + C_2$, где C_1 — искомый, а C_2 — дуга окружности (слева от C_1 с центром в $(\alpha, 0)$).

Оценим $F(s) := (1/s^k) e^{-1/(2s^2)} e^{n/s}$ на C_r , где $r > 4\alpha$. Для этого оценим каждый из множителей. Сначала $1/s$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{s} \right| &= \left| \frac{1}{\alpha + re^{i\phi}} \right| = \frac{1}{\sqrt{(\alpha + r \cos \phi)^2 + (r \sin \phi)^2}} = \frac{1}{r \sqrt{\left(\frac{\alpha}{r} + \cos \phi \right)^2 + \sin^2 \phi}} \leq \\ &\leq \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{2\alpha \cos \phi}{r}}} \leq \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{\cos \phi}{2}}} \leq \frac{\sqrt{2}}{r}. \end{aligned}$$

Теперь оценим $e^{-1/(2s^2)}$ на том же контуре. Известно, что $|e^z| = e^{|z|}$

$$\left| \exp \left(-\frac{1}{2s^2} \right) \right| \leq \exp \left(\left| -\frac{1}{2s^2} \right| \right) = \exp \left(\frac{1}{r^2} \right).$$

Аналогично оцениваем $e^{n/s}$:

$$\left| \exp \left(\frac{n}{s} \right) \right| \leq \exp \left(\left| \frac{n}{s} \right| \right) = \exp \left(\frac{|n|\sqrt{2}}{r} \right).$$

Объединяем оценки и получаем:

$$\left| \frac{1}{s^k} \exp \left(-\frac{1}{2s^2} \right) \exp \left(\frac{n}{s} \right) \right| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{r} \right)^k \exp \left(\frac{1}{r^2} \right) \exp \left(\frac{|n|\sqrt{2}}{r} \right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

А значит, по лемме Жордана $\int_{C_r} e^{s\tau} F(s) ds$ стремится к нулю. Поэтому можем использовать основную теорему о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s} ds = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \operatorname{Res}_0 \left(e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s} ds \right).$$

У нас возникает два случая: $n = 0$ и $n \neq 0$

3.2.1 Случай $n = 0$

Воспользуемся теоремой о правильной части функции $e^{s\tau} e^{-1/(2s^2)}$. Нам нужен $k - 1$ -й член ряда Лорана. Получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s} ds = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)! j!}.$$

Таким образом, мы выразили вычислили [3.4](#):

$$L_s^{-1} \left[\frac{1}{s^k} \exp \left(\frac{n}{s} \right) \exp \left(-\frac{1}{2s^2} \right) \right] (\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)! j!}.$$

Подставим это выражение в [3.3](#), заменяя τ на $t/2^{m+1}$:

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) &= \\ &= e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_s^{-1} \left[\frac{1}{s^k} \exp \left(\frac{n}{s} - \frac{1}{2s^2} \right) \right] \left(\frac{t}{2^{m+1}} \right) = \\ &= e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)! j!}. \end{aligned}$$

Наконец, подставим это в 3.2:

$$\begin{aligned}
L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) &= \\
&= (1 - n^2) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) + \left(\frac{n}{2^m} \right) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^{k+1}} r_{m,n}(u) \right] (t) + \\
&\quad + \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^{k+2}} r_{m,n}(u) \right] (t) = \\
&= (1 - n^2) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1} / (-2)^j}{(2j+k-1)! j!} + \\
&\quad + \left(\frac{n}{2^m} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k} / (-2)^j}{(2j+k)! j!} - \\
&\quad - \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k+1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1} / (-2)^j}{(2j+k+1)! j!}. \quad (3.5)
\end{aligned}$$

Теперь получим выражение для $g(t)$, подставляя только что полученную формулу в 3.1:

$$\begin{aligned}
g_{m,n}(t) &= \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) = \\
&= \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} (1 - n^2) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1} / (-2)^j}{(2j+k-1)! j!} + \\
&\quad + \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \left(\frac{n}{2^m} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k} / (-2)^j}{(2j+k)! j!} - \\
&\quad - \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k+1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1} / (-2)^j}{(2j+k+1)! j!}.
\end{aligned}$$

Начнем упрощать выражение. Для начала, вынесем из суммы, степень, не зависящую от переменной суммирования и сделаем замену $n = 0$ (так как рассматриваем именно этот случай):

$$g_{m,0}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j} / (-2)^j}{(2j+k-1)! j!} - \left(\frac{t^2}{4^{m+1}} \right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j} / (-2)^j}{(2j+k+1)! j!} \right).$$

3.2.2 Случай $n \neq 0$

Воспользуемся теоремой о правильной части функции $e^{s\tau} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s}$. Нам нужен $k - 1$ -й член ряда Лорана. Получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/2s^2} e^{n/s} ds = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}.$$

Таким образом, мы выразили вычислили 3.4:

$$L_s^{-1} \left[\frac{1}{s^k} \exp \left(\frac{n}{s} \right) \exp \left(-\frac{1}{2s^2} \right) \right] (\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}.$$

Подставим это выражение в 3.3, заменяя τ на $t/2^{m+1}$:

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) &= \\ &= e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_s^{-1} \left[\frac{1}{s^k} \exp \left(\frac{n}{s} - \frac{1}{2s^2} \right) \right] \left(\frac{t}{2^{m+1}} \right) = \\ &= e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}. \end{aligned}$$

Наконец, подставим это в 3.2:

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) &= \\ &= (1 - n^2) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) + \left(\frac{n}{2^m} \right) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^{k+1}} r_{m,n}(u) \right] (t) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^{k+2}} r_{m,n}(u) \right] (t) = \\ &= (1 - n^2) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} + \\ &\quad + \left(\frac{n}{2^m} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k+i} / (-2)^j}{(2j+k+i)! j!} \frac{n^i}{i!} - \\ &\quad - \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k+1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k+1+i} / (-2)^j}{(2j+k+1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}. \quad (3.6) \end{aligned}$$

Теперь получим выражение для $g_{m,n}(t)$, подставляя только что полученную формулу в 3.1

$$\begin{aligned} g_{m,n}(t) &= \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) = \\ &= \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} (1 - n^2) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} + \\ &\quad + \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \left(\frac{n}{2^m} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k+i} / (-2)^j}{(2j+k+i)! j!} \frac{n^i}{i!} - \\ &\quad - \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k+1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k+1+i} / (-2)^j}{(2j+k+1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}. \end{aligned}$$

Упростим:

$$g_{m,n}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} e^{-\frac{n^2}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left((1-n^2) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j n^i}{(2j+k-1+i)! j! i!} + \right. \\ \left. + \left(\frac{nt}{2^m}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j n^i}{(2j+k+i)! j! i!} - \right. \\ \left. - \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j n^i}{(2j+k+1+i)! j! i!} \right).$$

3.3 Результат

Выпишем обе полученные формулы вместе:

$$g_{m,0}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j} / (-2)^j}{(2j+k-1)! j!} - \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j} / (-2)^j}{(2j+k+1)! j!} \right).$$

$$g_{m,n}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} e^{-\frac{n^2}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left((1-n^2) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j n^i}{(2j+k-1+i)! j! i!} + \right. \\ \left. + \left(\frac{nt}{2^m}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j n^i}{(2j+k+i)! j! i!} - \right. \\ \left. - \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j n^i}{(2j+k+1+i)! j! i!} \right).$$

К сожалению, такой способ не привел к успеху из-за непригодности для численных методов.

§4. Альтернативный подход к задаче

Вспомним наше изначальное интегральное уравнение:

$$\psi_{m,n}(x) = \int_0^{\infty} g(xy) f_Y(y) dy.$$

Преобразуем интеграл, чтобы интегрирование было по xy :

$$\psi_{m,n}(x) = \int_0^{\infty} g(xy) f_Y\left(\frac{xy}{x}\right) d\frac{xy}{x} = \int_0^{\infty} \int_0^{\infty} g(z) \frac{1}{x} f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dz.$$

Таким образом мы получили интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$\psi_{m,n}(x) = \int_0^{\infty} K(x, z) g(z) dz.$$

Дальше мы будем использовать равномерную сетку $\left[\frac{1}{n_x}, \dots, \frac{l_x n_x}{n_x}\right]$ для x , $\left[\frac{1}{n_z}, \dots, \frac{l_z n_z}{n_z}\right]$ для z и дискретизируем наше уравнение. Получаем:

$$\psi_{m,n}[x] = \int_0^{\infty} K[x, z] g[z] dz = \frac{1}{n_z} \sum_{p=1}^{l_z n_z} g\left(\frac{p}{n_z}\right) K\left[x, \frac{p}{n_z}\right].$$

Таким образом, мы получили систему линейных уравнений. Запишем их в матричном виде:

$$\boldsymbol{\psi}_{m,n} = \frac{1}{n_z} \mathbf{K} \mathbf{g}.$$

Увеличим матрицу \mathbf{K} , чтобы добавить регуляризацию.

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} \\ \alpha \mathbf{E} \end{pmatrix}.$$

И соответствующий $\tilde{\mathbf{f}}$:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

И будем использовать МНК-оптимизацию. Получаем:

$$\mathbf{g}_* = \arg \min_{\mathbf{g}} \|\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{g} - \mathbf{f}\|.$$

§5. Эксперименты

Для аналитического способа.

Функция	Способ вычисления	Машинная точность (размер мантиссы),	Значение
$g_{0,0}(1)$	численно, интеграл, контур $[1 - 100i, 1 + 100i]$	100 десятичных знаков	0.864
	численно, ряд	256 двоичных знаков	0.864
$g_{0,0}(10)$	численно, интеграл контур $[1 - 100i, 1 + 100i]$	100 десятичных знаков	0.591
	численно, ряд	256 двоичных знаков	0.591
$g_{0,0}(100)$	численно, интеграл контур $[1 - 10i, 1 + 10i]$	100 десятичных знаков	-2×10^{19}
	численно, ряд	256 двоичных знаков	-0.440

Для численного вычисления интеграла. Мы использовали шаг 0,1 и $\alpha = 0,1$.
И использовали $m = \{-5, \dots, 5\}$, $n = \{-5, \dots, 5\}$.

Рис. 5.1: $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

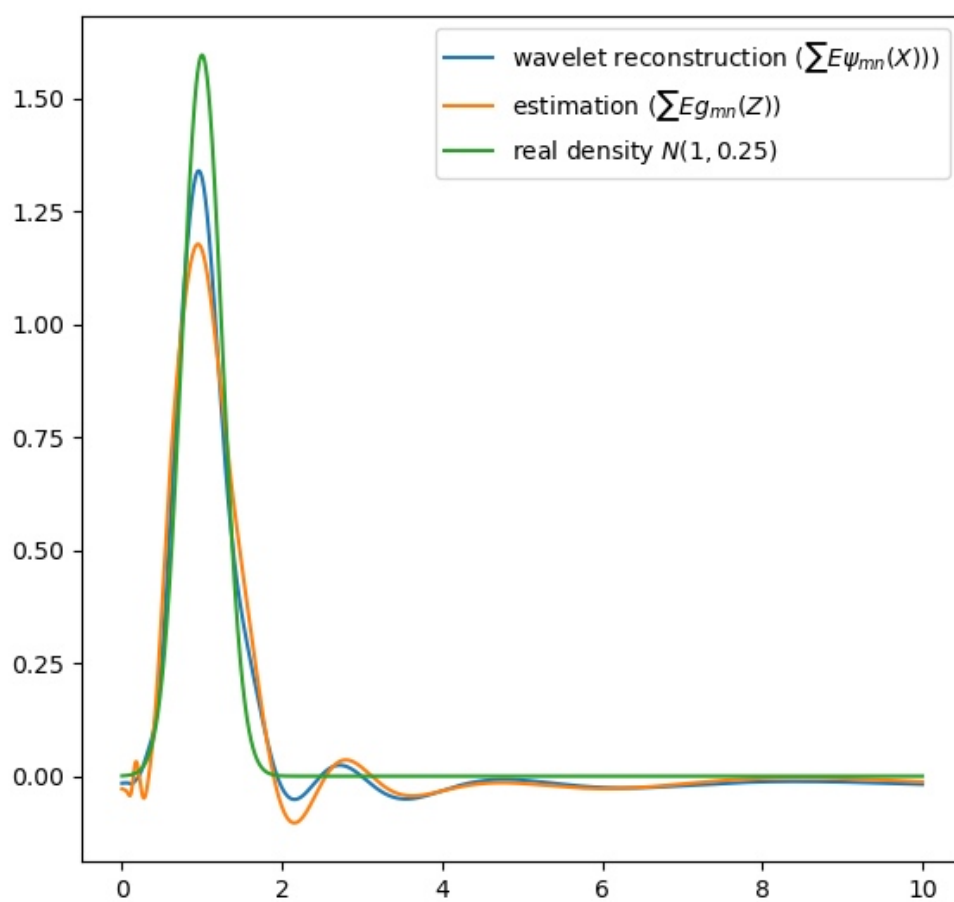


Рис. 5.2: $X \sim \exp(1)$

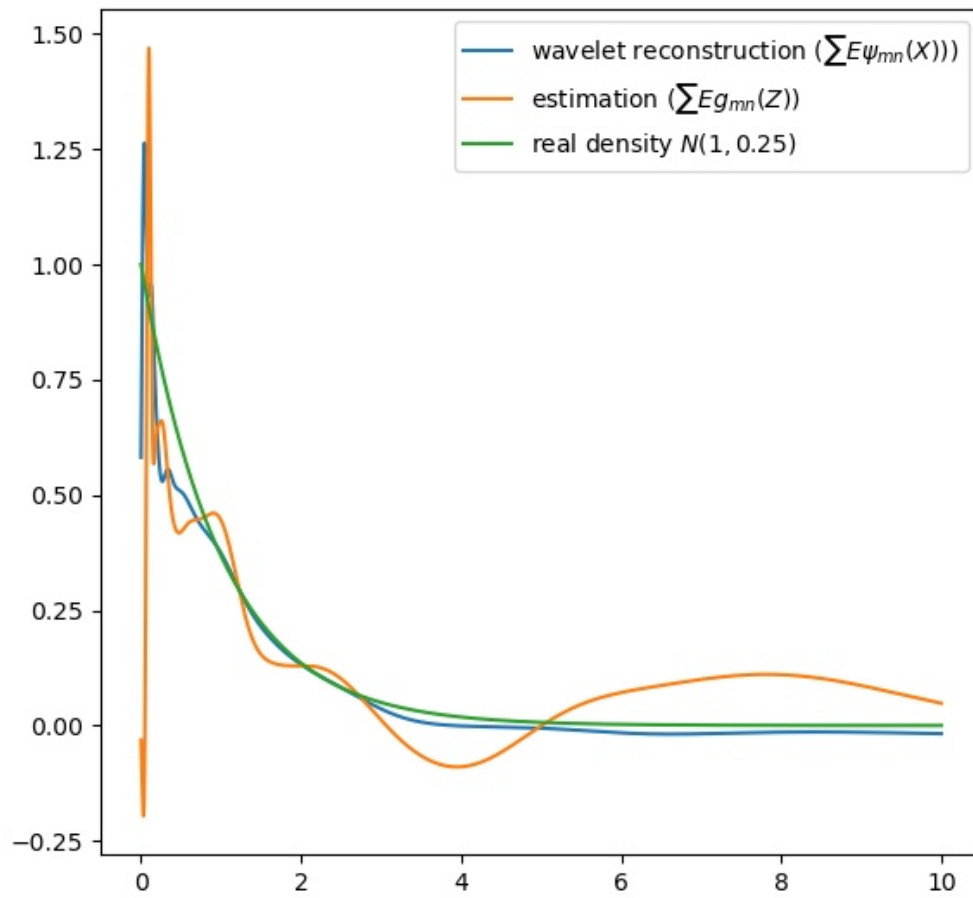
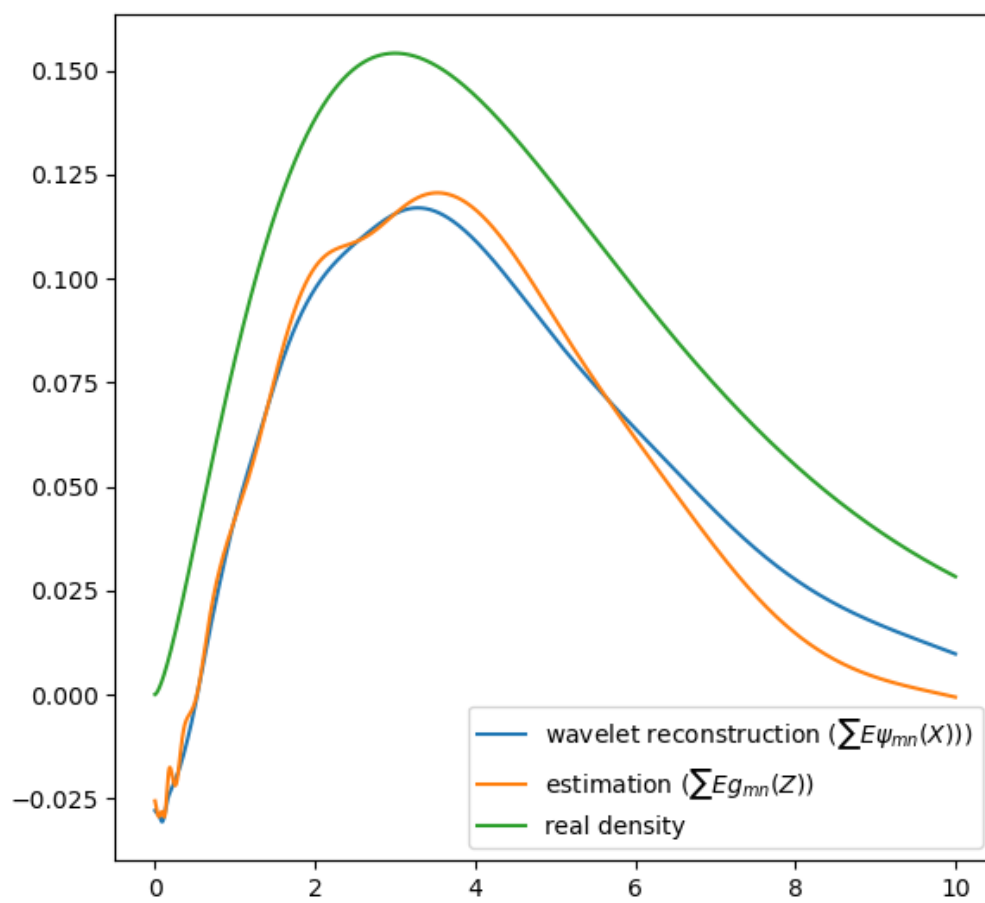


Рис. 5.3: $X \sim \chi_5^2$



§6. Теоремы

6.1 Связь мат. ожидания χ_{2k}^2 и преобразования Лапласа

Теорема (О связи мат. ожидания χ_{2k}^2 и преобразования Лапласа). Пусть f — функция плотности χ_{2k}^2 ; $a > 0$. Тогда

$$Eg(aY) = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g(z)z^{k-1}] \left(\frac{1}{2a}\right).$$

Доказательство.

$$Eg(aY) = \int_0^\infty g(ay)f(y)dy.$$

Подставим функцию плотности:

$$Eg(aY) = \int_0^\infty g(ay) \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{1}{2^k} y^{k-1} e^{-y/2} dy.$$

Возьмем $z = ay$:

$$\begin{aligned} Eg(aY) &= \int_0^\infty g(z) \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{1}{2^k} \left(\frac{z}{a}\right)^{k-1} e^{-z/(2a)} \frac{dz}{a} = \\ &= \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty g(z) z^{k-1} e^{-z(\frac{1}{2a})} dz = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g(z)z^{k-1}] \left(\frac{1}{2a}\right). \end{aligned}$$

■

6.2 Замена переменной в обратном преобразовании Лапласа

Теорема. Пусть $c > 0$; α такое, что все особенности f лежат левее $c\alpha$. Тогда

$$L_u^{-1} [f(cu)](t) = L_s^{-1} \left[\frac{1}{c} f(s) \right] \left(\frac{t}{c} \right).$$

Доказательство.

$$\begin{aligned} L_u^{-1}[f(cu)](t) &= \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{ut} f(cu) du = \frac{1}{c} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{(cu)\frac{t}{c}} f(cu) d(cu) = \\ &= \frac{1}{c} \int_{c\alpha-i\infty}^{c\alpha+i\infty} e^{s\frac{t}{c}} f(s) ds = L_s^{-1} \left[\frac{1}{c} f(s) \right] \left(\frac{t}{c} \right). \end{aligned}$$

■

6.3 Правильная часть произведения голоморфной функции и функции с нулевой правильной частью

Теорема. Пусть f, g — голоморфные функции; правильная часть g нулевая; $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — коэффициенты разложения в ряд Лорана функции f ; $\{b_n\}_{n=-\infty}^0$ — коэффициенты разложения в ряд Лорана функции g .

Тогда в правильной части разложения в ряд Лорана произведения $f(z)g(z)$ участвуют только коэффициенты правильной части функции f

Доказательство.

$$f(z)g(z) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{m=-\infty}^0 b_m z^m \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \sum_{m=-\infty}^0 a_{k-m} b_m.$$

Правильная часть при $k \geq 0$. При этом у нас $m \leq 0$. А значит, $n = k - m \geq 0$ для каждого коэффициента правильной части. ■

6.4 Правильная часть ряда Лорана для $f(s) = e^{as} e^{b/s}$

Теорема. Правильная часть ряда Лорана для функции

$$f(s) = e^{as} e^{b/s}.$$

Равна

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{n} \right)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(ab)^n}{n! (n-k)!}.$$

Доказательство. Заменим экспоненты соответствующими рядами:

$$e^{as} e^{b/s} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(as)^n}{n!} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(b/s)^m}{m!}.$$

Обе функции аналитичны в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, а потому их ряды сходятся абсолютно. Ряд для функции–произведения можно получить перемножением рядов по Коши.

$$\begin{aligned} e^{as} e^{b/s} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} s^k \sum_{n-m=k} \chi(n \geq 0) \chi(m \geq 0) \frac{a^n b^m}{n! m!} = \\ &= \sum_{k=-\infty}^{-1} s^k \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n b^{n-k}}{n! (n-k)!} + \sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a^n b^{n-k}}{n! (n-k)!}. \end{aligned}$$

Упростим правильную часть:

$$\sum_{k=0}^{\infty} s^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{a^n b^{n-k}}{n! (n-k)!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{s}{n}\right)^k \sum_{n=k}^{\infty} \frac{(ab)^n}{n! (n-k)!}.$$

■

6.5 Правильная часть ряда Лорана для $f(s) = e^{as} e^{-1/(2s^2)}$

Теорема. *Правильная часть ряда Лорана для функции*

$$f(z) = e^{az} e^{-1/(2z^2)}.$$

Равна

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k} / (-2)^m}{(2m+k)! m!}.$$

Доказательство. Заменяем экспоненты рядами:

$$e^{az} e^{-1/(2z^2)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(az)^n}{n!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1/(2z^2))^m}{m!} \right).$$

Обе функции аналитичны в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, поэтому их ряды сходятся абсолютно. Находим ряд Лорана для f , перемножая по Коши эти два ряда:

$$e^{az} e^{-1/(2z^2)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \sum_{n-2m=k} \chi(n \geq 0) \chi(m \geq 0) \frac{a^n / (-2)^m}{n! m!}.$$

Тогда правильная часть:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{n-2m=k} \chi(n \geq 0) \chi(m \geq 0) \frac{a^n / (-2)^m}{n! m!} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k} / (-2)^m}{(2m+k)! m!}.$$

■

6.6 Правильная часть ряда Лорана для $f(z) = e^{az} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s}$

Теорема. Пусть $k \geq 0$; пусть

$$f(z) = e^{az} e^{-1/(2s^2)} e^{b/z}.$$

Тогда k -й член ряда Лорана для f равен

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k+l} / (-2)^m}{(2m+k+l)! m!} \frac{n^l}{l!}.$$

Доказательство. Определим

$$g(t) = e^{az} e^{-1/(2s^2)}$$

$$h(t) = e^{b/z}.$$

Обе функции голоморфны в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому их ряды сходятся абсолютно и мы можем умножить ряды по Коши, чтобы получить ряд Лорана для f .

У функции $e^{n/s}$ правильная часть константна. Поэтому, согласно теореме о правильной части произведения голоморфной функции и функции с константной правильной частью, нам достаточно знать только правильную часть разложения функции g , которую мы нашли в предыдущей теореме.

Пусть $\{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — коэффициенты для g , а $\{\beta_n\}_{n=-\infty}^0$ — коэффициенты для h , а $\{\gamma_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — коэффициенты f . Для наглядности, приведем формулу k -го члена их произведения, где $k \geq 0$:

$$\gamma_k = \sum_{l=-\infty}^0 \alpha_{k-l} \beta_l = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{k+l} \beta_{-l}.$$

Приведем также формулы для α_k и β_{-k} :

$$\alpha_k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k} / (-2)^m}{(2m+k)! m!}$$

$$\beta_{-k} = \frac{n^k}{k!}.$$

Подставим α_k и β_{-k} в формулу для γ_k :

$$\gamma_k = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{k+l} \beta_{-l} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k+l} / (-2)^m}{(2m+k+l)! m!} \frac{n^l}{l!}.$$

■

6.7 Модифицированная лемма Жордана

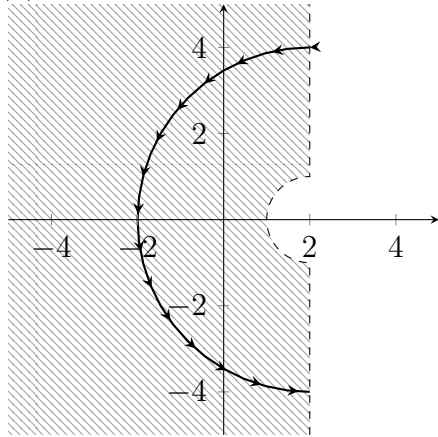
Лемма Жордана позволяет использовать основную теорему о вычетах для интеграла по контуру $(-\infty, \infty)$. Обратное преобразование Лапласа можно найти, используя интеграл Меллина. Этот интеграл использует контур $(\alpha - i\infty, \alpha + i\infty)$. Если мы модифицируем лемму Жордана, чтобы она использовала контур в виде левой полуокружности с центром в α , то сможем использовать основную теорему о вычетах для вычисления обратного преобразования Лапласа.

Теорема (Модифицированная лемма Жордана).

Пусть $\alpha, t > 0$; $F(s)$ непрерывна в области $G = \{\operatorname{Re} s \leq \alpha\} \cap \{|s - \alpha| \geq R_0 > 0\}$; C_R — полуокружность $|z - \alpha| = R$ в G ; $\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{s \in C_R} |F(s)| = 0$.

Тогда $\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{ts} F(s) ds = 0$.

Доказательство.



По условию, $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R \quad \forall s \in C_R \quad |F(s)| = |F(\alpha + Re^{i\varphi})| < \varepsilon$, тогда

$$\left| \int_{C_R} e^{ts} F(s) ds \right| \leq \int_{C_R} |e^{ts} F(s)| |ds| \leq \varepsilon \int_{C_R} |e^{ts}| |ds|$$

Рассмотрим на C_R : $|e^{ts}| = |e^{t(\alpha + R \cos \varphi + Ri \sin \varphi)}| = e^{t(\alpha + R \cos \varphi)}$

$$\text{Отсюда: } \varepsilon \int_{C_R} |e^{st}| |ds| = \varepsilon \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\alpha t + Rt \cos \varphi} |d(Re^{i\varphi})| =$$

$$\varepsilon \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |e^{\alpha t + Rt \cos \varphi} Rie^{i\varphi}| d\varphi = R\varepsilon e^{\alpha t} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Rt \cos \varphi} d\varphi = R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\pi} e^{Rt \cos(\varphi + \frac{\pi}{2})} d\varphi =$$

$$R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\pi} e^{-Rt \sin \varphi} d\varphi = 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt \sin \varphi} d\varphi$$

$$\text{На } [0, \frac{\pi}{2}] \quad \sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$$

$$\implies 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt \sin \varphi} d\varphi \leq 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt \frac{2}{\pi} \varphi} d\varphi =$$

$$2R\varepsilon e^{\alpha t} \left(\frac{1}{-\frac{2Rt}{\pi}} e^{-\frac{2Rt}{\pi} \varphi} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi \varepsilon}{t} e^{\alpha t} (1 - e^{-Rt}) \xrightarrow{R \rightarrow \infty} 0.$$

Отсюда интеграл по дуге стремится к 0. ■