

ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ БЮДЖЕТНОЕ
ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ
УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ОБРАЗОВАНИЯ
«МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М.В.ЛОМОНОСОВА»

МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ
КАФЕДРА МАТЕМАТИЧЕСКОЙ СТАТИСТИКИ И СЛУЧАЙНЫХ
ПРОЦЕССОВ

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА
(ДИПЛОМНАЯ РАБОТА)
специалиста

Оценивание плотности размеров наночастиц на основе вейвлетов

Выполнил студент
603 группы
Купряков Василий Юрьевич

(подпись студента)

Научный руководитель:
с.н.с., к.ф.-м.н.
Шкляев Александр Викторович

(подпись научного руководителя)

Москва
2022

1 Введение

В работе мы изучим задачу, которая возникает при исследовании коллоидных примесей в жидкости.

Примеси в исследуемой жидкости — это движущиеся частицы с размерами порядка 10^{-8} м. Для исследования таких примесей используется анализ траекторий наночастиц.

Жидкость просвечивают лазером, когда луч попадает на частицу, она рассеивает свет. К микроскопу присоединена камера, которая фиксирует рассеянный свет.

Получается последовательность изображений. Для каждой частицы эта последовательность является последовательностью проекций частиц на площадь камеры. Мы можем построить векторы перемещений частиц в проекции на плоскость камеры по этим снимкам. Для отдельной частицы такие перемещения образуют броуновское движение с нулевым сносом и дисперсией $\sigma^2 = c/d$, где c — некоторая константа, а d — размер частицы.

Проблема в том, что размер частицы не связан напрямую с размером ее изображения. Наша задача — оценить распределение истинных размеров частиц по размерам на снимках.

Будем изучать равносильную задачу: оценить распределение σ^2 . Рассмотрим n случайно выбранных частиц E_1, \dots, E_n . Обозначим дисперсии для их движения как $\sigma_1^2, \dots, \sigma_n^2$. Для i -й частицы у нас есть два $k(i)$ -мерных вектора перемещений: $A_i^1, \dots, A_i^{k(i)}$ по оси x и $A_i^{k(i)+1}, \dots, A_i^{2k(i)}$ по оси y . Мы будем рассматривать только частный случай, когда все $k(i)$ равны k , а σ_i^2 непрерывна.

A_i^1, \dots, A_i^{2k} условно независимы при условии σ_i^2 и имеют условное распределение $\mathcal{N}(0, \sigma_i^2)$. Дальше вместо выборки A_i^1, \dots, A_i^{2k} будем рассматривать достаточную статистику $Z_i = \sum_{j=1}^{2k} (A_i^j)^2$. Заметим далее, что $Z_i = \sigma_i^2 Y_i$, где $Y_i \sim \chi_{2k}^2$.

При этом, Y_i независимы и не зависят от дисперсии σ_i^2 .

Обозначим $X_i = \sigma_i^2$. Тогда задачу можно сформулировать так: X_1, \dots, X_n — независимые одинаково распределенные непрерывные случайные величины с неизвестным распределением и положительным носителем; Y_1, \dots, Y_n — независимые от них н.о.р. с.в. с распределением χ_{2k}^2 ; $Z_1, \dots, Z_n = X_1 Y_1, \dots, X_n Y_n$ — наблюдаемые случайные величины; а сама задача — по наблюдениям Z_1, \dots, Z_n оценить распределение X_1 .

2 Предварительные сведения

Мы будем рассматривать дискретное вейвлет-преобразование. Сформулируем основные определения и свойства.

Определение. Материнский вейвлет — это функция $\psi(t)$, которая отвечает

следующему свойству:

$$\int_0^{\infty} \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi = \int_{-\infty}^0 \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} d\xi < \infty,$$

где $\hat{\psi}(\xi)$ – образ Фурье $\psi(\xi)$.

Из этого свойства следует, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \psi(t) dt = 0.$$

Из материнского вейвлета $\psi(t)$ строится система вейвлетов

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{a^m}} \psi\left(\frac{t}{a^m} - nb\right).$$

В дальнейшем мы будем использовать вейвлеты с $a = 2$ и $b = 1$. Таким образом, мы будем использовать систему:

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi\left(\frac{t}{2^m} - n\right).$$

Часто система вейвлетов не является ортогональной, но образует фрейм.

Определение. Семейство ϕ_k является фреймом в $L_2(\mathbb{R})$, если существуют постоянные A и B такие, что

$$\forall f \in L_2(\mathbb{R}) \quad A\|f\|^2 \leq \sum_k |(f, \phi_k)|^2 \leq B\|f\|^2$$

Лемма. Если семейство ϕ_k образует фрейм, то

$$f = \frac{2}{A+B} \sum_k (f, \phi_k) \phi_k + Rf,$$

где

$$\|R\| \leq \frac{B-A}{B+A}$$

Мы будем использовать два вейвлета: Mexican hat и вейвлет Мейера. Приведем их материнские функции.

Определение. Материнская функция вейвлета Mexican hat:

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}} \pi^{-1/4} (1-t^2) e^{-t^2/2}.$$

Определение. Материнская функция вейвлета Мейера:

$$\psi(t) = \psi_1(t) + \psi_2(t),$$

где

$$\psi_1(t) = \frac{\frac{4}{3\pi} \left(t - \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{2\pi}{3} \left(t - \frac{1}{2}\right)\right) - \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{3} \left(t - \frac{1}{2}\right)\right)}{\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{16}{9} \left(t - \frac{1}{2}\right)^3},$$

$$\psi_2(t) = \frac{\frac{8}{3\pi} \left(t - \frac{1}{2}\right) \cos\left(\frac{8\pi}{3} \left(t - \frac{1}{2}\right)\right) + \frac{1}{\pi} \sin\left(\frac{4\pi}{3} \left(t - \frac{1}{2}\right)\right)}{\left(t - \frac{1}{2}\right) - \frac{64}{9} \left(t - \frac{1}{2}\right)^3}.$$

Вейвлет Mexican hat образует фрейм с границами $A = 3,223$, $B = 3,596$, вейвлет Мейера является ортогональным, т. е. образует базис $L_2(\mathbb{R})$.

Также нам потребуются преобразование Лапласа и формула Меллина обратного преобразования Лапласа.

Определение. Преобразование лапласа функции $f(t)$ – это функция $L_t[f](s)$, которая задается формулой

$$L_t[f](s) = \int_0^{\infty} f(t) e^{-st} dt.$$

Лемма (Формула Меллина). Пусть $F(s) = L_s[f](t)$ – преобразование Лапласа функции $f(t)$. Тогда

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{ts} ds,$$

где α такое, что контур лежит правее всех особенностей $F(s)$ и $F(s)$ ограничена на этом контуре.

3 Преобразование задачи для использования вейвлетов

Повторим задачу. Есть независимые одинаково распределенные непрерывные (н. о. р) положительные случайные величины (с. в.) X_1, \dots, X_N с неизвестным распределением. Есть н. о. р. с. в. Y_1, \dots, Y_N с распределением $\chi^2(2k)$. Мы наблюдаем случайные величины Z_1, \dots, Z_N , которые задаются как $Z_i = X_i Y_i$. Нужно оценить распределение X_1 .

Будем строить функции $g_{m,n}$ такие, что $E g_{m,n}(Z) = E \psi_{m,n}(X)$. Заметим, что достаточно выполнения:

$$\forall x \in \text{Im } X \quad E g_{m,n}(xY) = \psi_{m,n}(x).$$

Таким образом, нам нужно найти функции $g_{m,n}$ такие, что

$$\int_0^\infty g_{m,n}(xy) f_Y(y) dy = \psi_{m,n}(x).$$

Тогда

$$f_X(x) \approx \sum_{m,n} \mathbb{E} \psi_{m,n}(X) \psi_{m,n}(x) = \sum_{m,n} \mathbb{E} g_{m,n}(Z) \psi_{m,n}(x),$$

причем в случае с ортогональным вейвлетом здесь будет равенство.

Получаем оценку:

$$f_X(x) \approx \sum_{m,n} \sum_i \frac{g_{m,n}(z_i)}{N} \psi_{m,n}(x)$$

4 Аналитическое вычисление $g_{m,n}(t)$ для Mexican hat вейвлета

4.1 Вспомогательные леммы

В дальнейшем для вычислений нам понадобится несколько технических фактов. Сформулируем и докажем их в этом разделе.

Лемма 1 (О связи мат. ожидания χ_{2k}^2 и преобразования Лапласа). Пусть $Y \sim \chi_{2k}^2$ с плотностью $f_Y(y)$, $a > 0$. Тогда

$$\mathbb{E} g(aY) = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g(z) z^{k-1}] \left(\frac{1}{2a}\right).$$

Доказательство. Раскроем математическое ожидание:

$$\mathbb{E} g(aY) = \int_0^\infty g(ay) f_Y(y) dy.$$

Подставим функцию плотности:

$$\mathbb{E} g(aY) = \int_0^\infty g(ay) \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{1}{2^k} y^{k-1} e^{-y/2} dy.$$

Подставим $z = ay$:

$$\mathbb{E} g(aY) = \int_0^\infty g(z) \frac{1}{\Gamma(k)} \frac{1}{2^k} \left(\frac{z}{a}\right)^{k-1} e^{-z/(2a)} \frac{dz}{a} = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty g(z) z^{k-1} \exp\left(-z \frac{1}{2a}\right) dz.$$

Заменим интеграл преобразованием Лапласа:

$$Eg(aY) = \left(\frac{1}{2a}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g(z)z^{k-1}] \left(\frac{1}{2a}\right).$$

■

Лемма 2 (Замена переменной в обратном преобразовании Лапласа). Пусть существует $L_u^{-1}[f(cu)](t)$, $c > 0$. Тогда

$$L_u^{-1}[f(cu)](t) = L_s^{-1} \left[\frac{1}{c} f(s) \right] \left(\frac{t}{c} \right).$$

Доказательство. Воспользуемся формулой Меллина:

$$L_u^{-1}[f(cu)](t) = \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{ut} f(cu) du = \frac{1}{c} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{(cu)(t/c)} f(cu) d(cu).$$

Произведем замену $s = cu$

$$L_u^{-1}[f(cu)](t) = \frac{1}{c} \int_{c\alpha-i\infty}^{c\alpha+i\infty} e^{s(t/c)} f(s) ds.$$

Заменим интеграл на обратное преобразование Лапласа

$$L_u^{-1}[f(cu)](t) = L_s^{-1} \left[\frac{1}{c} f(s) \right] \left(\frac{t}{c} \right)$$

■

Лемма 3 (Правильная часть произведения голоморфной функции и функции с нулевой положительной частью). Пусть $f(z)$, $g(z)$ — аналитические функции, коэффициента ряда Лорана для $g(z)$ при положительных степенях нулевые, $\{a_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — коэффициенты разложения в ряд Лорана функции $f(z)$; $\{b_n\}_{n=-\infty}^0$ — коэффициенты разложения в ряд Лорана функции $g(z)$.

Тогда в правильной части разложения в ряд Лорана произведения $f(z)g(z)$ участвуют только коэффициенты правильной части функции $f(z)$. При этом сам ряд имеет вид:

Доказательство. Разложим $f(z)g(z)$ в ряд Лорана:

$$f(z)g(z) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \right) \left(\sum_{m=-\infty}^0 b_m z^m \right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \sum_{m=-\infty}^0 a_{k-m} b_m.$$

Нас интересуют только правильная часть, поэтому рассматриваем коэффициенты при $k \geq 0$. При этом из ряда Лорана функции $f(z)$ используются коэффициенты $k - m$. Принимая во внимание, что $k \geq 0$ и $m \leq 0$, получаем, что $k - m \geq 0$. А значит, используется только правильная часть функции $f(z)$. ■

Лемма 4 (Правильная часть ряда Лорана для $f(s) = e^{as}e^{-1/(2s^2)}$). *Правильная часть ряда Лорана для функции*

$$f(z) = e^{az}e^{-1/(2z^2)}$$

равна

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k} / (-2)^m}{(2m+k)! m!}.$$

Доказательство. Заменим экспоненты рядами:

$$e^{az}e^{-1/(2z^2)} = \left(\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(az)^n}{n!} \right) \left(\sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1/(2z^2))^m}{m!} \right).$$

Обе функции аналитичны в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, поэтому их ряды сходятся абсолютно. Находим ряд Лорана для $f(z)$, перемножая по Коши эти два ряда:

$$e^{az}e^{-1/(2z^2)} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} z^k \sum_{n-2m=k} \chi(n \geq 0) \chi(m \geq 0) \frac{a^n / (-2)^m}{n! m!}.$$

Тогда правильная часть:

$$\sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{n-2m=k} \chi(n \geq 0) \chi(m \geq 0) \frac{a^n / (-2)^m}{n! m!} = \sum_{k=0}^{\infty} z^k \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k} / (-2)^m}{(2m+k)! m!}.$$

■

Лемма 5 (Правильная часть ряда Лорана для $f(z) = e^{az}e^{-1/(2s^2)}e^{n/s}$). *Пусть $k \geq 0$; пусть*

$$f(z) = e^{az}e^{-1/(2z^2)}e^{b/z}.$$

Тогда k -й член ряда Лорана для f равен

$$\sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k+l} / (-2)^m}{(2m+k+l)! m!} \frac{n^l}{l!}.$$

Доказательство. Определим

$$g(z) = e^{az}e^{-1/(2z^2)}$$

$$h(z) = e^{b/z}.$$

Обе функции аналитичны в $\mathbb{C} \setminus \{0\}$. Поэтому их ряды сходятся абсолютно и мы можем умножить ряды по Коши, чтобы получить ряд Лорана для f .

У функции $e^{n/z}$ положительная часть нулевая. Поэтому, согласно лемме 3 о правильной части произведения голоморфной функции и функции с нулевой положительной частью, нам достаточно знать только правильную часть разложения функции g , которую мы нашли в предыдущей лемме 4.

Пусть $\{\alpha_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — коэффициенты разложения $g(z)$ в ряд Лорана, $\{\beta_n\}_{n=-\infty}^0$ — коэффициенты разложения $h(z)$, а $\{\gamma_n\}_{n=-\infty}^{\infty}$ — коэффициенты разложения f .

Приведем формулу k -го члена их произведения, где $k \geq 0$:

$$\gamma_k = \sum_{l=-\infty}^0 \alpha_{k-l} \beta_l = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{k+l} \beta_{-l}.$$

Формулу для α_k возьмем из леммы 4:

$$\alpha_k = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k} / (-2)^m}{(2m+k)! m!}.$$

И выпишем формулу для β_{-k} :

$$\beta_{-k} = \frac{n^k}{k!}.$$

Подставим α_k и β_{-k} в формулу для γ_k :

$$\gamma_k = \sum_{l=0}^{\infty} \alpha_{k+l} \beta_{-l} = \sum_{l=0}^{\infty} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a^{2m+k+l} / (-2)^m}{(2m+k+l)! m!} \frac{n^l}{l!}.$$

■

Лемма Жордана позволяет использовать основную теорему о вычетах для интеграла по контуру $(-\infty, \infty)$. Обратное преобразование Лапласа можно найти, используя интеграл Меллина. Этот интеграл использует контур $(\alpha - i\infty, \alpha + i\infty)$. Если мы модифицируем лемму Жордана, чтобы она использовала контур в виде левой полуокружности с центром в α , то сможем использовать основную теорему о вычетах для вычисления обратного преобразования Лапласа.

Лемма 6 (Модифицированная лемма Жордана). Пусть $\alpha, t, R_0 > 0$, функция $F(s)$ непрерывна в области

$$G = \{s \mid \operatorname{Re} s \leq \alpha\} \cap \{s \mid |s - \alpha| \geq R_0 > 0\}$$

Обозначим C_R — полуокружность $|z - \alpha| = R$ в области G . И пусть выполняется:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \sup_{s \in C_R} |F(s)| = 0.$$

Тогда

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \int_{C_R} e^{ts} F(s) ds = 0.$$

Доказательство. Для наглядности схематично изобразим контур интегрирования и область G :

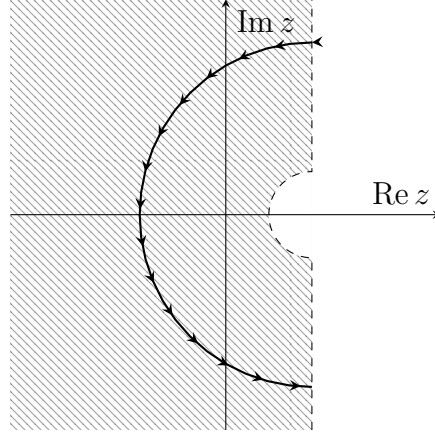


Рис. 1: контур и область

По условию,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists R \quad \forall s \in C_R \quad |F(s)| = |F(\alpha + Re^{i\varphi})| < \varepsilon,$$

тогда

$$\left| \int_{C_R} e^{ts} F(s) ds \right| \leq \int_{C_R} |e^{ts} F(s)| |ds| \leq \varepsilon \int_{C_R} |e^{ts}| |ds|.$$

На полуокружности C_R мы можем представить экспоненту e^{ts} в виде:

$$|e^{ts}| = |e^{t(\alpha + R \cos \varphi + Ri \sin \varphi)}| = e^{t(\alpha + R \cos \varphi)}.$$

Подставим это в интеграл:

$$\varepsilon \int_{C_R} |e^{st}| |ds| = \varepsilon \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\alpha t + Rt \cos \varphi} |d(Re^{i\varphi})|$$

И упростим его:

$$\begin{aligned} \varepsilon \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{\alpha t + Rt \cos \varphi} |d(Re^{i\varphi})| &= \varepsilon \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} |e^{\alpha t + Rt \cos \varphi} Rie^{i\varphi}| d\varphi = R\varepsilon e^{\alpha t} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} e^{Rt \cos \varphi} d\varphi \\ &= R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\pi} e^{Rt \cos(\varphi + \frac{\pi}{2})} d\varphi = R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\pi} e^{-Rt \sin \varphi} d\varphi = 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt \sin \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

На отрезке $[0, \frac{\pi}{2}]$ выполняется: $\sin \varphi \geq \frac{2}{\pi} \varphi$. А значит,

$$2R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt \sin \varphi} d\varphi \leq 2R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt \frac{2}{\pi} \varphi} d\varphi = .$$

Этот интеграл уже легко вычисляется:

$$2R\varepsilon e^{\alpha t} \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{-Rt\frac{2}{\pi}\varphi} d\varphi = 2R\varepsilon e^{\alpha t} \left(\frac{1}{-\frac{2Rt}{\pi}} e^{-\frac{2Rt\varphi}{\pi}} \right) \Big|_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{\pi\varepsilon}{t} e^{\alpha t} (1 - e^{-Rt}).$$

Получившаяся функции стремится к нулю при $R \rightarrow \infty$. Отсюда интеграл по дуге стремится к 0. ■

4.2 Сведение задачи к вычислению обратного преобразования Лапласа

Рассмотрим только случай $X_i > \delta > 0$.

Мы будем использовать вейвлет «Mexican hat», потому что он прост и непрерывен. Его формула:

$$\psi(t) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} (1 - t^2) e^{-t^2/2}.$$

Определим элементы фрейма:

$$\psi_{m,n}(t) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \psi\left(\frac{t}{2^m} - n\right) = \frac{1}{\sqrt{2^m}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left(1 - \left(\frac{t}{2^m} - n\right)^2\right) e^{-\left(\frac{t}{2^m} - n\right)^2/2}.$$

Напишем плотность Y_i :

$$f_Y(y) = \frac{1}{2^k} \frac{1}{\Gamma(k)} y^{k-1} e^{-y/2}.$$

Раскроем $E g_{m,n}(xY)$:

$$E g_{m,n}(xY) = \int_0^\infty g_{m,n}(xy) f_Y(y) dy = \int_0^\infty g_{m,n}(xy) \frac{1}{2^k} \frac{1}{\Gamma(k)} y^{k-1} e^{-y/2} dy.$$

Произведем замену $z = xy$:

$$\begin{aligned} E g_{m,n}(xY) &= \frac{1}{2^k} \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty g_{m,n}(z) \frac{z^{k-1}}{x^{k-1}} e^{-z/(2x)} \frac{dz}{x} \\ &= \left(\frac{1}{2x}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} \int_0^\infty g_{m,n}(z) z^{k-1} \exp\left(-z \frac{1}{2x}\right) dz. \end{aligned}$$

Заменим интеграл преобразованием Лапласа:

$$E g_{m,n}(xY) = \left(\frac{1}{2x}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g_{m,n}(z) z^{k-1}] \left(\frac{1}{2x}\right).$$

Получаем функциональное уравнение:

$$\left(\frac{1}{2x}\right)^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g_{m,n}(z) z^{k-1}] \left(\frac{1}{2x}\right) = \psi_{m,n}(x) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi\left(\frac{x}{2^m} - n\right)$$

Сделаем замену $u = \frac{1}{2x}$:

$$u^k \frac{1}{\Gamma(k)} L_z [g_{m,n}(z) z^{k-1}] (u) = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right).$$

Перенесем множители в правую часть:

$$L_z [g_{m,n}(z) z^{k-1}] (u) = \frac{\Gamma(k)}{u^k} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right).$$

Произведем обратное преобразование Лапласа:

$$g_{m,n}(z) z^{k-1} = L_u^{-1} \left[\frac{\Gamma(k)}{u^k} \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^m \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right) \right] (z).$$

Выразим $g_{m,n}(z)$:

$$g_{m,n}(z) = \frac{1}{z^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right) \right] (z). \quad (1)$$

Итак, нам нужно вычислить:

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right) \right] (t).$$

Подставим вместо ψ формулу нашего вейвлета:

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right) \right] (t) = \\ L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left(1 - \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)^2\right) \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)^2\right) \right] (t). \end{aligned}$$

Введем обозначение:

$$r_{m,n}(u) = \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)^2\right).$$

И сразу воспользуемся им:

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n}\left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right) \right] (t) = L_u^{-1} \left[\left(1 - \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n\right)^2\right) r_{m,n}(u) \right] (t).$$

Распишем множитель перед экспонентой:

$$\begin{aligned} 1 - \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 &= 1 - \left(\frac{1}{2^{2(m+1)}u^2} - 2\frac{1}{2^{m+1}u}n + n^2 \right) = \\ &= (1 - n^2) + \frac{1}{u} \left(\frac{n}{2^m} \right) - \frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) &= \\ &= (1 - n^2) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) + \left(\frac{n}{2^m} \right) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^{k+1}} r_{m,n}(u) \right] (t) - \\ &\quad - \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^{k+2}} r_{m,n}(u) \right] (t). \quad (2) \end{aligned}$$

Отсюда видно, что достаточно найти $L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t)$ для каждого k .

4.3 Нахождение $L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t)$

Выше мы ввели

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t).$$

Подставим обратно $r_{m,n}(u)$:

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right)^2 \right) \right] (t).$$

Раскроем квадрат под экспонентой:

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) &= \\ &= L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp \left(-\frac{1}{2} \left((n^2) - \frac{1}{u} \left(\frac{n}{2^m} \right) + \frac{1}{u^2} \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right) \right) \right) \right] (t). \end{aligned}$$

Сгруппируем $2^{m+1}u$:

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) &= \\ &= L_u^{-1} \left[\frac{2^{k(m+1)}}{(2^{m+1}u)^k} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \exp \left(-\frac{n^2}{2} + \frac{n}{2^{m+1}u} - \frac{1}{2(2^{m+1}u)^2} \right) \right] (t). \end{aligned}$$

Вынесем множители, не зависящие от u , за L_u^{-1} :

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) &= \\ &= e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_u^{-1} \left[\frac{1}{(2^{m+1}u)^k} \exp \left(\frac{n}{2^{m+1}u} - \frac{1}{2(2^{m+1}u)^2} \right) \right] (t). \end{aligned}$$

Используя лемму 2 о замене переменной в обратном преобразовании Лапласа, делаем замену $s = 2^{m+1}u$:

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_s^{-1} \left[\frac{1}{s^k} \exp \left(\frac{n}{s} - \frac{1}{2s^2} \right) \right] \left(\frac{t}{2^{m+1}} \right).$$

4.4 Вычисление обратного преобразование Лапласа

В предыдущем разделе мы выразили:

$$L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) = e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_s^{-1} \left[\frac{1}{s^k} \exp \left(\frac{n}{s} - \frac{1}{2s^2} \right) \right] \left(\frac{t}{2^{m+1}} \right). \quad (3)$$

Чтобы вычислить правую часть, найдем теперь

$$L_s^{-1} \left[\frac{1}{s^k} \exp \left(\frac{n}{s} \right) \exp \left(-\frac{1}{2s^2} \right) \right] (\tau). \quad (4)$$

Воспользуемся формулой Меллина обратного преобразования Лапласа. У данной функции особенность только в нуле, поэтому можно взять любое число $\alpha > 0$:

$$L_s^{-1} \left[\frac{1}{s^k} \exp \left(\frac{n}{s} \right) \exp \left(-\frac{1}{2s^2} \right) \right] (\tau) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s} ds.$$

Берем контур $C = C_1 + C_2$, где C_1 — искомый, а C_2 — дуга окружности (слева от C_1 с центром в $(\alpha, 0)$).

Оценим $F(s) := (1/s^k) e^{-1/(2s^2)} e^{n/s}$ на C_r , где $r > 4\alpha$. Для этого оценим каждый из множителей. Сначала $1/s$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{s} \right| &= \left| \frac{1}{\alpha + re^{i\phi}} \right| = \frac{1}{\sqrt{(\alpha + r \cos \phi)^2 + (r \sin \phi)^2}} = \frac{1}{r \sqrt{\left(\frac{\alpha}{r} + \cos \phi\right)^2 + \sin^2 \phi}} \leq \\ &\leq \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{2\alpha \cos \phi}{r}}} \leq \frac{1}{r \sqrt{1 + \frac{\cos \phi}{2}}} \leq \frac{\sqrt{2}}{r}. \end{aligned}$$

Теперь оценим $e^{-1/(2s^2)}$ на том же контуре. Известно, что $|e^z| = e^{\operatorname{Re} z}$

$$\left| \exp \left(-\frac{1}{2s^2} \right) \right| \leq \exp \left(\left| -\frac{1}{2s^2} \right| \right) = \exp \left(\frac{1}{r^2} \right).$$

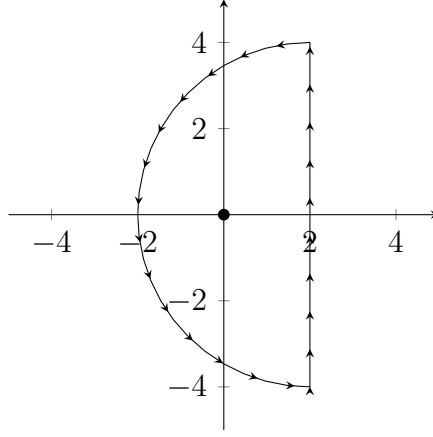


Рис. 2: Наглядное изображение контура.

Аналогично оцениваем $e^{n/s}$:

$$\left| \exp\left(\frac{n}{s}\right) \right| \leq \exp\left(\left|\frac{n}{s}\right|\right) = \exp\left(\frac{|n|\sqrt{2}}{r}\right).$$

Объединяем оценки и получаем:

$$\left| \frac{1}{s^k} \exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right) \exp\left(\frac{n}{s}\right) \right| \leq \left(\frac{\sqrt{2}}{r}\right)^k \exp\left(\frac{1}{r^2}\right) \exp\left(\frac{|n|\sqrt{2}}{r}\right) \xrightarrow{r \rightarrow \infty} 0.$$

А значит, по лемме Жордана $\int_{C_r} e^{s\tau} F(s) ds$ стремится к нулю. Поэтому можем использовать основную теорему о вычетах:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s} ds = \frac{1}{2\pi i} 2\pi i \operatorname{Res}_0 \left(e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s} ds \right).$$

У нас возникает два случая: $n = 0$ и $n \neq 0$

4.4.1 Случай $n = 0$

Воспользуемся леммой 4 о правильной части функции $e^{s\tau} e^{-1/(2s^2)}$. Нам нужен $k - 1$ -й член ряда Лорана. Получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s} ds = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!j!}.$$

Таким образом, мы вычислили выражение 4 для $n = 0$:

$$L_s^{-1} \left[\frac{1}{s^k} \exp\left(\frac{n}{s}\right) \exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right) \right] (\tau) = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j+k-1}/(-2)^j}{(2j+k-1)!j!}.$$

Подставим этот ряд в выражение 3, заменяя τ на $t/2^{m+1}$:

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) &= \\ &= e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_s^{-1} \left[\frac{1}{s^k} \exp \left(\frac{n}{s} - \frac{1}{2s^2} \right) \right] \left(\frac{t}{2^{m+1}} \right) = \\ &= e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k-1} / (-2)^j}{(2j+k-1)! j!}. \end{aligned}$$

Наконец, подставим получившееся выражение в формулу 2:

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) &= \\ &= (1 - n^2) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) + \left(\frac{n}{2^m} \right) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^{k+1}} r_{m,n}(u) \right] (t) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^{k+2}} r_{m,n}(u) \right] (t) = \\ &= (1 - n^2) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k-1} / (-2)^j}{(2j+k-1)! j!} + \\ &\quad + \left(\frac{n}{2^m} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k} / (-2)^j}{(2j+k)! j!} - \\ &\quad - \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k+1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k+1} / (-2)^j}{(2j+k+1)! j!}. \quad (5) \end{aligned}$$

Теперь получим выражение для $g(t)$, подставляя только что полученную формулу в выражение 1:

$$\begin{aligned} g_{m,n}(t) &= \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) = \\ &= \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} (1 - n^2) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k-1} / (-2)^j}{(2j+k-1)! j!} + \\ &\quad + \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \left(\frac{n}{2^m} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k} / (-2)^j}{(2j+k)! j!} - \\ &\quad - \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k+1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}} \right)^{2j+k+1} / (-2)^j}{(2j+k+1)! j!}. \end{aligned}$$

Теперь упростим выражение. Вынесем из суммы, степень, не зависящую от переменной суммирования и сделаем замену $n = 0$ (так как рассматриваем

именно этот случай):

$$g_{m,0}(t) = \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j} / (-2)^j}{(2j+k-1)! j!} - \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j} / (-2)^j}{(2j+k+1)! j!} \right).$$

4.4.2 Случай $n \neq 0$

Воспользуемся леммой 5 о правильной части функции $e^{s\tau} e^{-1/(2s^2)} e^{n/s}$. Нам нужен $k-1$ -й член ряда Лорана. Получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\alpha-i\infty}^{\alpha+i\infty} e^{s\tau} \frac{1}{s^k} e^{-1/2s^2} e^{n/s} ds = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}.$$

Таким образом, мы вычислили выражение 4 для $n \neq 0$:

$$L_s^{-1} \left[\frac{1}{s^k} \exp\left(\frac{n}{s}\right) \exp\left(-\frac{1}{2s^2}\right) \right] (\tau) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\tau^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}.$$

Подставим это выражение в выражение 3, заменяя τ на $t/2^{m+1}$:

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) &= \\ &= e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} L_s^{-1} \left[\frac{1}{s^k} \exp\left(\frac{n}{s} - \frac{1}{2s^2}\right) \right] \left(\frac{t}{2^{m+1}} \right) = \\ &= e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}. \end{aligned}$$

Наконец, подставим это в формулу 2:

$$\begin{aligned} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) &= \\ &= (1 - n^2) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} r_{m,n}(u) \right] (t) + \left(\frac{n}{2^m} \right) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^{k+1}} r_{m,n}(u) \right] (t) + \\ &\quad + \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right) L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^{k+2}} r_{m,n}(u) \right] (t) = \\ &= (1 - n^2) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} + \\ &\quad + \left(\frac{n}{2^m} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+i} / (-2)^j}{(2j+k+i)! j!} \frac{n^i}{i!} - \\ &\quad - \left(\frac{1}{4^{m+1}} \right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k+1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1+i} / (-2)^j}{(2j+k+1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}. \quad (6) \end{aligned}$$

Теперь получим выражение для $g_{m,n}(t)$, подставляя только что полученную формулу в выражение 1

$$\begin{aligned}
g_{m,n}(t) &= \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} L_u^{-1} \left[\frac{1}{u^k} \psi_{m,n} \left(\frac{1}{2^{m+1}u} - n \right) \right] (t) = \\
&= \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} (1 - n^2) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k-1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k-1+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} + \\
&\quad + \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \left(\frac{n}{2^m}\right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{k(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+i} / (-2)^j}{(2j+k+i)! j!} \frac{n^i}{i!} - \\
&\quad - \frac{1}{t^{k-1}} \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \left(\frac{1}{4^{m+1}}\right) e^{-\frac{n^2}{2}} 2^{(k+1)(m+1)} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+k+1+i} / (-2)^j}{(2j+k+1+i)! j!} \frac{n^i}{i!}.
\end{aligned}$$

Упростим:

$$\begin{aligned}
g_{m,n}(t) &= \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} e^{-\frac{n^2}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left((1 - n^2) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{nt}{2^m}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+i)! j!} \frac{n^i}{i!} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} \right).
\end{aligned}$$

4.5 Результат

Выпишем обе полученные формулы вместе:

$$\begin{aligned}
g_{m,0}(t) &= \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left(\sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j} / (-2)^j}{(2j+k-1)! j!} - \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j} / (-2)^j}{(2j+k+1)! j!} \right). \\
g_{m,n}(t) &= \frac{\Gamma(k)}{\sqrt{2^m}} e^{-\frac{n^2}{2}} \frac{2}{\sqrt{3}\pi^{1/4}} \left((1 - n^2) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k-1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} + \right. \\
&\quad \left. + \left(\frac{nt}{2^m}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+i)! j!} \frac{n^i}{i!} - \right. \\
&\quad \left. - \left(\frac{t^2}{4^{m+1}}\right) \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2^{m+1}}\right)^{2j+i} / (-2)^j}{(2j+k+1+i)! j!} \frac{n^i}{i!} \right).
\end{aligned}$$

К сожалению, такой способ не привел к успеху из-за непригодности для численных методов.

5 Уравнение Фредгольма

Выпишем еще раз интегральное уравнение 3:

$$\psi_{m,n}(x) = \int_0^{\infty} g(xy) f_Y(y) dy.$$

Введем замену $z = xy$:

$$\psi_{m,n}(x) = \int_0^{\infty} g(xy) f_Y\left(\frac{xy}{x}\right) d\frac{xy}{x} = \int_0^{\infty} g(z) \frac{1}{x} f_Y\left(\frac{z}{x}\right) dz.$$

Таким образом, мы получили интегральное уравнение Фредгольма первого рода:

$$\psi_{m,n}(x) = \int_0^{\infty} K(x, z) g(z) dz,$$

где

$$K(x, z) = \frac{1}{x} f_Y\left(\frac{z}{x}\right).$$

5.1 Дискретизация

Будем использовать равномерную сетку $\left[\frac{1}{n_x}, \dots, \frac{l_x n_x}{n_x}\right]$ для x , $\left[\frac{1}{n_z}, \dots, \frac{l_z n_z}{n_z}\right]$ для z . Для вычисления интеграла используем метод прямоугольников. Дискретизируем функции $K(x, z)$, $g_{m,n}(z)$, $\psi_{m,n}(x)$:

$$\begin{aligned} K[x, z] &= \begin{cases} K\left(\frac{k_x n_x}{n_x}, \frac{k_z n_z}{n_z}\right), & \text{если } z \in \left[\frac{k_z n_z}{n_z}, \frac{(k_z+1)n_z}{n_z}\right), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \\ g_{m,n}[z] &= \begin{cases} g\left(\frac{k_z n_z}{n_z}\right), & \text{если } z \in \left[\frac{k_z n_z}{n_z}, \frac{(k_z+1)n_z}{n_z}\right), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \\ \psi_{m,n}[x] &= \begin{cases} \psi_{m,n}\left(\frac{k_x n_x}{n_x}\right), & \text{если } x \in \left[\frac{k_x n_x}{n_x}, \frac{(k_x+1)n_x}{n_x}\right), \\ 0, & \text{иначе.} \end{cases} \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\int_0^{\infty} K[x, z] g[z] dz = \frac{1}{n_z} \sum_{j=1}^{l_z n_z} K\left[x, \frac{j}{n_z}\right] g_{m,n}\left[\frac{j}{n_z}\right].$$

Заменяя $\psi_{m,n}(x)$ на дискретизированную версию, получаем систему уравнений:

$$\begin{cases} \psi_{m,n} \left[\frac{1}{n_x} \right] = \frac{1}{n_z} \sum_{j=1}^{l_z n_z} K \left[\frac{1}{n_x}, \frac{j}{n_z} \right] g_{m,n} \left[\frac{j}{n_z} \right], \\ \dots \\ \psi_{m,n} \left[\frac{l_x n_x}{n_x} \right] = \frac{1}{n_z} \sum_{j=1}^{l_z n_z} K \left[\frac{l_x n_x}{n_x}, \frac{j}{n_z} \right] g_{m,n} \left[\frac{j}{n_z} \right]. \end{cases}$$

Построим матрицу \mathbf{K} и векторы \mathbf{g} , $\boldsymbol{\psi}_{m,n}$:

$$\begin{aligned} (\mathbf{K})_{i,j} &= K \left[\frac{i}{n_x}, \frac{j}{n_z} \right], \\ (\mathbf{g}_{m,n})_j &= g_{m,n} \left[\frac{j}{n_z} \right], \\ (\boldsymbol{\psi}_{m,n})_i &= \psi_{m,n} \left[\frac{i}{n_x} \right]. \end{aligned}$$

Запишем систему уравнений в матричном виде:

$$\boldsymbol{\psi}_{m,n} = \frac{1}{n_z} \mathbf{K} \mathbf{g}_{m,n}.$$

5.2 МНК-оптимизация с l_2 -регуляризацией

Определение. Пусть \mathbf{K} — матрица, \mathbf{f} — вектор. Рассмотрим уравнение:

$$\mathbf{f} = \mathbf{K} \mathbf{g},$$

где \mathbf{g} неизвестно.

Пусть $\alpha > 0$ — некоторое число, называемое параметром регуляризации. Тогда МНК-оптимизация с l_2 -регуляризацией есть

$$\mathbf{g}_* = \arg \min_g (\|\mathbf{K} \mathbf{g} - \mathbf{f}\|^2 + \alpha^2 \|\mathbf{g}\|^2).$$

Построим матрицу $\tilde{\mathbf{K}}$, увеличив матрицу \mathbf{K} , чтобы добавить регуляризацию:

$$\tilde{\mathbf{K}} = \begin{pmatrix} \mathbf{K} \\ \alpha \mathbf{E} \end{pmatrix}.$$

И соответствующий $\tilde{\mathbf{f}}$:

$$\tilde{\mathbf{f}} = \begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ 0 \end{pmatrix}.$$

И будем использовать МНК-оптимизацию. Получаем:

$$\mathbf{g}_{m,n}^* = \arg \min_g \|\tilde{\mathbf{K}} \mathbf{g} - \tilde{\mathbf{f}}\|.$$

Покажем, что это эквивалентно определению МНК-оптимизации с l_2 -регуляризацией. В силу неотрицательности нормы и монотонности функции x^2 , выполняется:

$$\mathbf{g}_{m,n}^* = \arg \min_{\mathbf{g}} \|\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{g} - \tilde{\mathbf{f}}\| = \arg \min_{\mathbf{g}} \|\tilde{\mathbf{K}}\mathbf{g} - \tilde{\mathbf{f}}\|^2$$

Заметим, что в данном случае квадрат нормы есть сумма квадратов строк векторов. Поэтому выполняется:

$$\mathbf{g}_{m,n}^* = \arg \min_{\mathbf{g}} (\|\mathbf{K}\mathbf{g} - \mathbf{f}\|^2 + \|\alpha\mathbf{E}\mathbf{g} - \mathbf{0}\|^2) = \arg \min_{\mathbf{g}} (\|\mathbf{K}\mathbf{g} - \mathbf{f}\|^2 + \alpha^2\|\mathbf{g}\|^2)$$

5.3 Градиентный спуск

Вместо процедур для решения МНК-задачи мы можем использовать метод градиентного спуска. Будем использовать матричное представление

$$\boldsymbol{\psi}_{m,n} = \frac{1}{n_z} \mathbf{K} \mathbf{g}_{m,n}.$$

Тогда можно ввести функцию потерь $L(\boldsymbol{\psi}_{m,n}, \hat{\boldsymbol{\psi}}_{m,n})$, где $\hat{\boldsymbol{\psi}}_{m,n} = \mathbf{K} \hat{\mathbf{g}}_{m,n}$, а $\hat{\mathbf{g}}_{m,n}$ — оценка для $\mathbf{g}_{m,n}$.

В частности, будем рассматривать следующие функции потерь:

- l_1 -потеря: $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_1$;
- l_2 -потеря: $L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|_2$;
- функция потерь Хьюбера:

$$L(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{2}(x - y)^2, & \text{при } |x - y| \leq 1 \\ |x - y| - \frac{1}{2}, & \text{при } |x - y| > 1 \end{cases}.$$

$$L(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k L(x_i, y_i)$$

Для каждой из них будем использовать l_1 - или l_2 -регуляризацию. Для l_1 -регуляризации:

$$\tilde{L}(\boldsymbol{\psi}_{m,n}, \hat{\boldsymbol{\psi}}_{m,n}) = L(\boldsymbol{\psi}_{m,n}, \hat{\boldsymbol{\psi}}_{m,n}) + \alpha \|\mathbf{g}_{m,n} - \hat{\mathbf{g}}_{m,n}\|_1.$$

Для l_2 -регуляризации:

$$\tilde{L}(\boldsymbol{\psi}_{m,n}, \hat{\boldsymbol{\psi}}_{m,n}) = L(\boldsymbol{\psi}_{m,n}, \hat{\boldsymbol{\psi}}_{m,n}) + \alpha^2 \|\mathbf{g}_{m,n} - \hat{\mathbf{g}}_{m,n}\|_2^2.$$

Алгоритм оптимизации методом градиентного спуска с параметром β стандартен:

1. Берем произвольный начальный вектор $\mathbf{g}_{m,n}^0$.

2. Вычисляем $\psi_{m,n}^0 = K g_{m,n}^0$.
3. Вычисляем $L^0 = \tilde{L}(\psi_{m,n}, \psi_{m,n}^0)$
4. Считая компоненты g_1^0, \dots, g_k^0 вектора $g_{m,n}^0$ переменными, а $L^0 = L^0(a_1^0, \dots, a_k^0)$ функцией от компонент вектора $g_{m,n}^0$, вычисляем частные производные b_i :

$$b_i^0 = \frac{\partial L^0(a_1^0, \dots, a_k^0)}{\partial a_i}.$$

5. Берем $g_{m,n}^1 = (a_1^0 - \beta b_1^0, \dots, a_k^0 - \beta b_k^0)$.
6. Повторяем шаги 1 — 5, пока либо L не станет меньше некоторого заранее заданного числа, либо количество повторений превысит некоторое заранее заданное число

5.4 Итеративные методы

В статье [1] рассматриваются итеративные методы решения задачи Фредгольма первого рода: аддитивный и мультипликативный.

В приложении к задаче аддитивный метод использует следующие итерации:

$$g_{m,n;k}(z) = g_{m,n;k-1}(z) + \int_0^\infty K(x, z)(\psi_{m,n}(x) - \psi_{m,n;k-1}(x))dx,$$

где

$$\psi_{m,n;k}(x) = \int_0^\infty K(x, z)g_{m,n;k}(z)dz.$$

Для мультипликативного метода используются следующие итерации:

$$g_{m,n;k}(z) = \frac{g_{m,n;k-1}(z)}{\int_0^\infty K(x, z)dx} \int_0^\infty \frac{K(x, z)\psi_{m,n;k-1}(x)}{\psi_{m,n;k}(x)}dx,$$

$$\psi_{m,n;k}(x) = \int_0^\infty K(x, z)g_{m,n;k}(z)dz.$$

Этот метод работает только для неотрицательных $\psi_{m,n}(x)$ и $g_{m,n}(z)$. В случае, когда эти функции могут принимать отрицательные значения, мы фиксируем число t такое, что $\psi_{m,n}(x) + t \geq 0$ и $g_{m,n}(z) + t \geq 0$, и решаем следующее эквивалентное уравнение:

$$\tilde{\psi}_{m,n}(x) = \int_0^\infty K(x, z)\tilde{g}_{m,n}(z)dz,$$

где

$$\begin{aligned}\tilde{g}_{m,n}(z) &= g_{m,n}(z) + t, \\ \tilde{\psi}_{m,n}(x) &= \psi_{m,n}(x) + t \int_0^{\infty} K(x, z) dz.\end{aligned}$$

6 Поправка для оценок

Оценка, полученная нашим методом не всегда является функцией распределения. Поэтому будем использовать поправку, предложенную в статье [2]. В ней рассматриваются два случая. Пусть \hat{f}_X — оценка функции плотности f_X .

В случае, когда выполняется:

$$\int_0^{\infty} \max(\hat{f}_X(x), 0) dx > 1,$$

исправленная оценка $\tilde{f}_X(x)$ определяется как:

$$\tilde{f}_X(x) = \max(0, \hat{f}_X(x) - \xi),$$

где ξ выбирается так, чтобы выполнялось

$$\int_0^{\infty} \tilde{f}_X(x) dx = 1.$$

В случае, когда выполняется:

$$\int_0^{\infty} \max(\hat{f}_X(x), 0) dx > 1,$$

исправленная оценка $\tilde{f}_X(x)$ определяется следующим образом. Фиксируем параметр $M > 0$ и положим

$$\tilde{f}_X(x) = \tilde{f}_X(x; M) = \begin{cases} \max(0, \hat{f}_X(x)) + \eta_M, & \text{для } |x| \leq M, \\ \max(0, \hat{f}_X(x)), & \text{для } |x| > M, \end{cases}$$

где

$$\eta_M = \frac{1}{2M} \left(1 - \int_0^{\infty} \max(0, \hat{f}_X(x)) dx \right).$$

7 Эксперименты

Для аналитического способа.

Функция	Способ вычисления	Машинная точность (размер мантиссы),	Значение
$g_{0,0}(1)$	численно, интеграл, контур $[1 - 100i, 1 + 100i]$	100 десятичных знаков	0.864
	численно, ряд	256 двоичных знаков	0.864
$g_{0,0}(10)$	численно, интеграл контур $[1 - 100i, 1 + 100i]$	100 десятичных знаков	0.591
	численно, ряд	256 двоичных знаков	0.591
$g_{0,0}(100)$	численно, интеграл контур $[1 - 10i, 1 + 10i]$	100 десятичных знаков	-2×10^{19}
	численно, ряд	256 двоичных знаков	-0.440

Для численного вычисления интеграла. Мы использовали шаг 0,1 и $\alpha = 0,1$.
И использовали $m = \{-5, \dots, 5\}$, $n = \{-5, \dots, 5\}$.

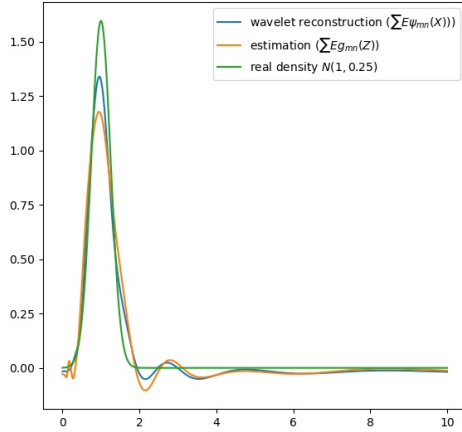


Рис. 3: $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$

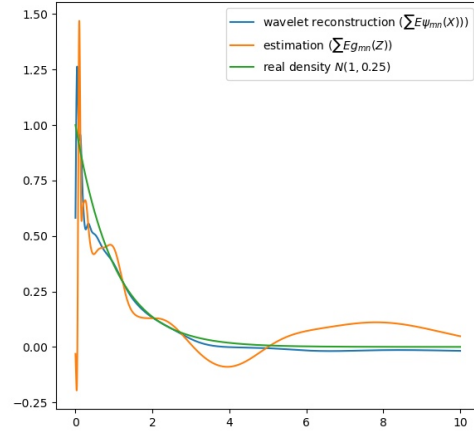


Рис. 4: $X \sim \exp(1)$

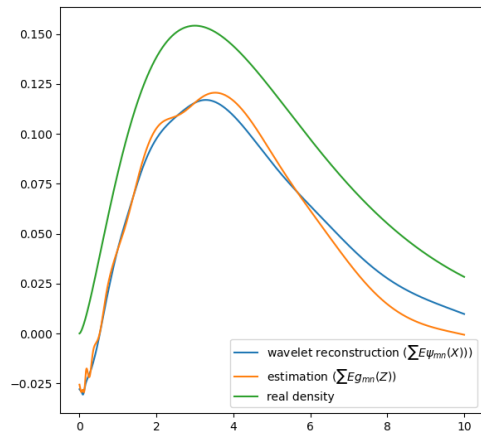


Рис. 5: $X \sim \chi_5^2$

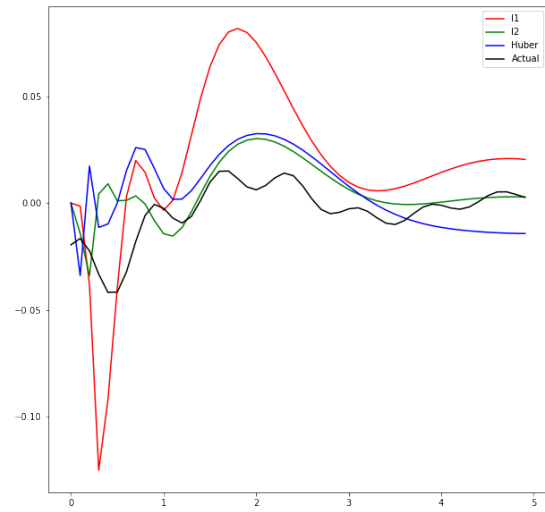


Рис. 6: Сравнение функций ошибок для метода градиентного спуска

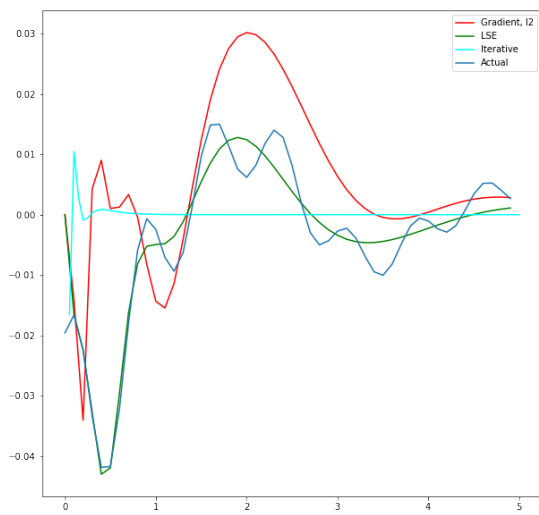


Рис. 7: Сравнение методов градиентного спуска, итеративного и МНК-оценки

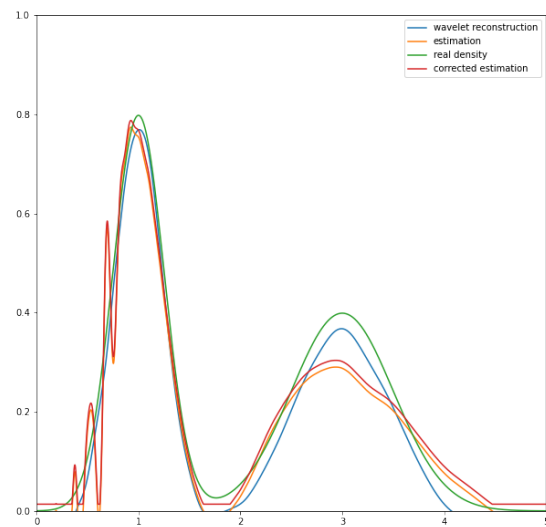


Рис. 8: МНК-оценка для смеси нормальных распределений

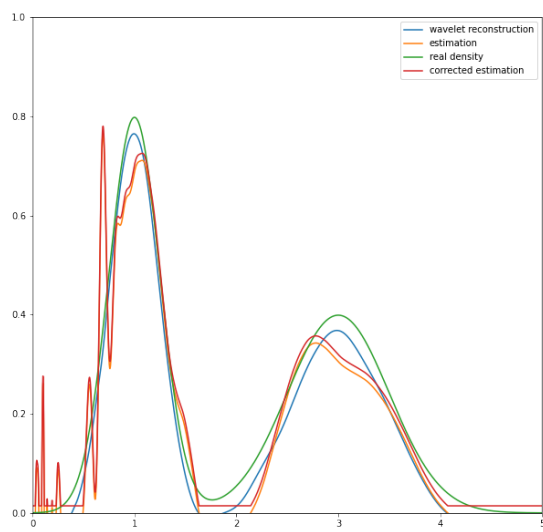


Рис. 9: Оценка методом градиентного спуска для смеси нормальных распределений

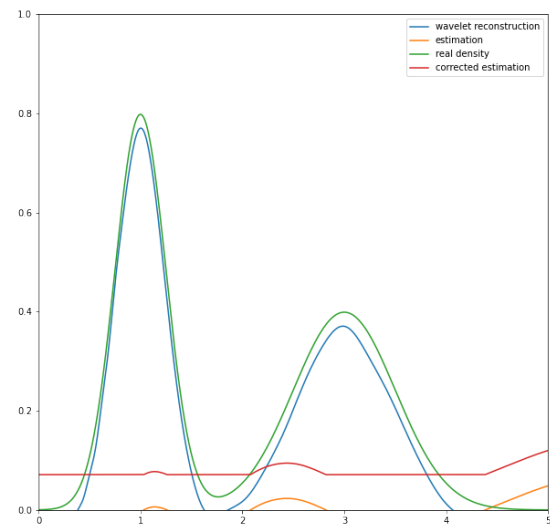


Рис. 10: Оценка итеративным методом для смеси нормальных распределений

8 Обобщение на случай разных длин траекторий

Мы строили функции вида:

$$\mathbb{E} g_{m,n}(XY) = \mathbb{E} \psi_{m,n}(X) = c_{m,n}$$

и находили оценку плотности как

$$f_X(x) = c_{m,n} \psi_{m,n}(x).$$

Теперь рассмотрим случай, когда длины траекторий могут различаться. Для каждой длины k построим функции $g_{m,n,k}$, как описано выше, и построим оценку $f_{X,k}(x)$

Пусть для длины траектории k у нас есть s_k наблюдений. И всего S наблюдений. Тогда оценкой $f_X(x)$ будет:

$$\sum_{k=1}^K \frac{s_k f_{X,k}(x)}{S}.$$

Докажем это. Разложим f_X в ряд по вейвлету:

$$f_X(x) = \sum_{m,n} c_{m,n} \psi_{m,n}(x).$$

Раскроем вейвлет-коэффициенты:

$$f_X(x) = \sum_{m,n} \mathbb{E} \psi_{m,n}(X) \psi_{m,n}(x) = \sum_{m,n} \mathbb{E} g_{m,n}(XY) \psi_{m,n}(x).$$

Представим математическое ожидание в виде математического ожидания условного математического ожидания при условии длины траектории:

$$f_X(x) = \sum_{m,n} \mathbb{E}_k (\mathbb{E} (g_{m,n}(XY) | k)) \psi_{m,n}(x).$$

По линейности математического ожидания, можем внести сумму внутрь:

$$f_X(x) = \mathbb{E}_k \left(\sum_{m,n} \mathbb{E} (g_{m,n}(XY) | k) \psi_{m,n}(x) \right).$$

Вычислим вейвлет-коэффициенты:

$$f_X(x) = \mathbb{E}_k \left(\sum_{m,n} c_{m,n,k} \psi_{m,n}(x) \right).$$

Заменим вейвлет-разложение на оригинальную функцию:

$$f_X(x) = \mathbb{E}_k f_{X,k}(x).$$

Получаем оценку:

$$f_X(x) = \sum_{k=1}^K \frac{s_k f_{X,k}(x)}{S}.$$

9 Вывод

Лучшие результаты показывает МНК-оценка.

Оценка методом градиентного спуска более шумная, но позволяет использовать существенно более точный шаг дискретизации, так как возможно пожертвовать производительностью и не вычислять матрицу K заранее, что существенно снижает требования к количеству видеопамяти.

Итеративная оценка показывает неудовлетворительные результаты и сходится крайне медленно: разница между 1000 итераций и 10000 итераций несущественна.

Поправка для оценок плотностей несильно улучшает оценку.

Список литературы

- [1] Minwoo Chae, Ryan Martin и Stephen G. Walker. “On an algorithm for solving Fredholm integrals of the first kind”. В: *Statistics and Computing* 29.4 (июль 2019), с. 645—654. ISSN: 1573-1375. DOI: [10.1007/s11222-018-9829-z](https://doi.org/10.1007/s11222-018-9829-z). URL: <https://doi.org/10.1007/s11222-018-9829-z>.
- [2] Ingrid K. Glad, Nils Lid Hjort и Nikolai G. Ushakov. “Correction of Density Estimators That Are Not Densities”. В: *Scandinavian Journal of Statistics* 30.2 (2003), с. 415—427. ISSN: 03036898, 14679469. URL: <http://www.jstor.org/stable/4616772>.