

# Algoritmos para Juegos con Información Incompleta y No Determinismo

Rubmary Rojas

Universidad Simón Bolívar, Caracas, Venezuela

Enero 2020



# Teoría de Juegos

## Definición

- *Estudio de **modelos matemáticos** de **conflicto** y **cooperación**.*
- *Agentes que toman decisiones de forma **racional** e **inteligente**.*

## Aplicaciones



Ciencias sociales



Economía



Matemática



Computación

# Juegos no deterministas con información incompleta

## No determinismo

*Incertidumbre probabilística:*

- Lanzar dados
- Repartir cartas



## Información incompleta

*Información parcial sobre algunas de las acciones que fueron tomadas previamente.*



## Interrogantes

- ¿Qué significa que un juego sea resuelto?
- ¿Cuándo un jugador juega de forma óptima?

# Objetivo General

Comprender los conceptos en el área de juegos de dos personas que involucran información incompleta y no determinismo, así como implementar los algoritmos para resolverlos, realizando experimentos sobre distintos juegos que son capturados por el modelo.

# Forma Normal o Estratégica

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Piedra, papel o tijera

	$\mathcal{R}$ (piedra)	$\mathcal{P}$ (papel)	$\mathcal{S}$ (tijera)
$\mathcal{R}$ (piedra)	0, 0	-1, 1	1, -1
$\mathcal{P}$ (papel)	1, -1	0, 0	-1, 1
$\mathcal{S}$ (tijera)	-1, 1	1, -1	0, 0

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Piedra, papel o tijera

	$\mathcal{R}$ (piedra)	$\mathcal{P}$ (papel)	$\mathcal{S}$ (tijera)
$\mathcal{R}$ (piedra)	0, 0	-1, 1	1, -1
$\mathcal{P}$ (papel)	1, -1	0, 0	-1, 1
$\mathcal{S}$ (tijera)	-1, 1	1, -1	0, 0

jugador 1

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Piedra, papel o tijera

	$\mathcal{R}$ (piedra)	$\mathcal{P}$ (papel)	$\mathcal{S}$ (tijera)	jugador 2
$\mathcal{R}$ (piedra)	0, 0	-1, 1	1, -1	
$\mathcal{P}$ (papel)	1, -1	0, 0	-1, 1	
$\mathcal{S}$ (tijera)	-1, 1	1, -1	0, 0	



# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Piedra, papel o tijera

	$\mathcal{R}$ (piedra)	$\mathcal{P}$ (papel)	$\mathcal{S}$ (tijera)
$\mathcal{R}$ (piedra)	0, 0	-1, 1	1, -1
$\mathcal{P}$ (papel)	1, -1	0, 0	-1, 1
$\mathcal{S}$ (tijera)	-1, 1	1, -1	0, 0

primer jugador **gana** 1

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Piedra, papel o tijera

	$\mathcal{R}$ (piedra)	$\mathcal{P}$ (papel)	$\mathcal{S}$ (tijera)
$\mathcal{R}$ (piedra)	0, 0	-1, 1	1, -1
$\mathcal{P}$ (papel)	1, -1	0, 0	-1, 1
$\mathcal{S}$ (tijera)	-1, 1	1, -1	0, 0

segundo jugador **pierde** 1

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Piedra, papel o tijera

	$\mathcal{R}$ (piedra)	$\mathcal{P}$ (papel)	$\mathcal{S}$ (tijera)
$\mathcal{R}$ (piedra)	0, 0	-1, 1	1, -1
$\mathcal{P}$ (papel)	1, -1	0, 0	-1, 1
$\mathcal{S}$ (tijera)	-1, 1	1, -1	0, 0

## Elementos

- 1 Jugadores.
- 2 Acciones o estrategias puras:  
 $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{S}$ .
- 3 Función de pago o utilidades.

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Piedra, papel o tijera

	$\mathcal{R}$ (piedra)	$\mathcal{P}$ (papel)	$\mathcal{S}$ (tijera)
$\mathcal{R}$ (piedra)	0, 0	-1, 1	1, -1
$\mathcal{P}$ (papel)	1, -1	0, 0	-1, 1
$\mathcal{S}$ (tijera)	-1, 1	1, -1	0, 0

Juego de  
dos jugadores  
de suma cero

## Elementos

- 1 Jugadores.
- 2 Acciones o estrategias puras:  
 $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{S}$ .
- 3 Función de pago o utilidades.

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Piedra, papel o tijera

	$\mathcal{R}$ (piedra)	$\mathcal{P}$ (papel)	$\mathcal{S}$ (tijera)
$\mathcal{R}$ (piedra)	0, 0	-1, 1	1, -1
$\mathcal{P}$ (papel)	1, -1	0, 0	-1, 1
$\mathcal{S}$ (tijera)	-1, 1	1, -1	0, 0

Juego de  
dos jugadores  
de suma cero

### Elementos

- 1 Jugadores.
- 2 Acciones o estrategias puras:  
 $\mathcal{R}$ ,  $\mathcal{P}$ ,  $\mathcal{S}$ .
- 3 Función de pago o utilidades.

### Estrategias

- 1 Estrategias puras: siempre se elige la misma acción.
- 2 Estrategias mixtas: cada acción se elige con cierta probabilidad.

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Batalla de los sexos

		José	
		ballet	béisbol
María	ballet	2, 1	0, 0
	béisbol	0, 0	1, 2

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Batalla de los sexos

		José	
		ballet	béisbol
María	ballet	2, 1	0, 0
	béisbol	0, 0	1, 2

Ninguno obtiene ganancia.

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Batalla de los sexos

		José	
		ballet	béisbol
María	ballet	2, 1	0, 0
	béisbol	0, 0	1, 2

María obtiene una ganancia mayor que José.



# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Batalla de los sexos

		José	
		ballet	béisbol
María	ballet	2, 1	0, 0
	béisbol	0, 0	1, 2

José obtiene una ganancia mayor que María.

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Batalla de los sexos

		José	
		ballet	béisbol
María	ballet	2, 1	0, 0
	béisbol	0, 0	1, 2

## Conceptos

### ① Ganancia Esperada

Valor promedio que un determinado jugador obtendría si jugara infinitas veces cuando cada jugador utiliza una estrategia dada.

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Batalla de los sexos

		José	
		ballet	béisbol
María	ballet	2, 1	0, 0
	béisbol	0, 0	1, 2

## Conceptos

- ① Ganancia Esperada
- ② Mejor Respuesta

La mejor forma en que puede jugar un jugador dadas las estrategias seleccionadas de sus oponentes.

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Batalla de los sexos

		José	
		ballet	béisbol
María	ballet	2, 1	0, 0
	béisbol	0, 0	1, 2

Si María siempre elige ballet.

## Conceptos

- ① Ganancia Esperada
- ② Mejor Respuesta

La mejor forma en que puede jugar un jugador dadas las estrategias seleccionadas de sus oponentes.

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Batalla de los sexos

		José	
		ballet	béisbol
María	ballet	2, 1	0, 0
	béisbol	0, 0	1, 2

Lo mejor para José es siempre elegir ballet.

## Conceptos

- ① Ganancia Esperada
- ② Mejor Respuesta

La mejor forma en que puede jugar un jugador dadas las estrategias seleccionadas de sus oponentes.

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Batalla de los sexos

		José	
		ballet	béisbol
María	ballet	2, 1	0, 0
	béisbol	0, 0	1, 2

## Conceptos

- 1 Ganancia Esperada
- 2 Mejor Respuesta
- 3 Equilibrio de Nash

Cada jugador utiliza una mejor respuesta frente a las estrategias de sus oponentes.

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Batalla de los sexos

		José	
		ballet	béisbol
María	ballet	2, 1	0, 0
	béisbol	0, 0	1, 2

## Conceptos

- 1 Ganancia Esperada
- 2 Mejor Respuesta
- 3 Equilibrio de Nash

Cada jugador utiliza una mejor respuesta frente a las estrategias de sus oponentes.

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Batalla de los sexos

		José	
		ballet	béisbol
María	ballet	2, 1	0, 0
	béisbol	0, 0	1, 2

María no tiene motivos para cambiar su estrategia.

## Conceptos

- 1 Ganancia Esperada
- 2 Mejor Respuesta
- 3 Equilibrio de Nash

Cada jugador utiliza una mejor respuesta frente a las estrategias de sus oponentes.



# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Batalla de los sexos

		José	
		ballet	béisbol
María	ballet	2, 1	0, 0
	béisbol	0, 0	1, 2

José no tiene motivos para cambiar su estrategia.

## Conceptos

- 1 Ganancia Esperada
- 2 Mejor Respuesta
- 3 Equilibrio de Nash

Cada jugador utiliza una mejor respuesta frente a las estrategias de sus oponentes.

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Batalla de los sexos

		José	
		ballet	béisbol
María	ballet	2, 1	0, 0
	béisbol	0, 0	1, 2

## Conceptos

- 1 Ganancia Esperada
- 2 Mejor Respuesta
- 3 Equilibrio de Nash

Cada jugador utiliza una mejor respuesta frente a las estrategias de sus oponentes.

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Batalla de los sexos

		José	
		ballet	béisbol
María	ballet	2, 1	0, 0
	béisbol	0, 0	1, 2

## Conceptos

- 1 Ganancia Esperada
- 2 Mejor Respuesta
- 3 Equilibrio de Nash
- 4 Equilibrio Correlacionado

Puede haber cooperación entre los jugadores.

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Batalla de los sexos

		José	
		ballet	béisbol
María	ballet	2, 1	0, 0
	béisbol	0, 0	1, 2

Lanzar una moneda

① cara  $\implies$  ballet

② sello  $\implies$  béisbol

## Conceptos

- ① Ganancia Esperada
- ② Mejor Respuesta
- ③ Equilibrio de Nash
- ④ Equilibrio Correlacionado

Puede haber cooperación entre los jugadores.

# Juegos en Forma Normal o Estratégica

## Batalla de los sexos

		José	
		ballet	béisbol
María	ballet	2, 1	0, 0
	béisbol	0, 0	1, 2

Lanzar una moneda

① cara  $\implies$  ballet

② sello  $\implies$  béisbol

## Conceptos

- ① Ganancia Esperada
- ② Mejor Respuesta
- ③ Equilibrio de Nash
- ④ Equilibrio Correlacionado

Puede haber cooperación entre los jugadores.

# Equilibrio de Nash

## Piedra, papel o tijera

	$\mathcal{R}$ (piedra)	$\mathcal{P}$ (papel)	$\mathcal{S}$ (tijera)
$\mathcal{R}$ (piedra)	0, 0	-1, 1	1,-1
$\mathcal{P}$ (papel)	1,-1	0, 0	-1, 1
$\mathcal{S}$ (tijera)	-1, 1	1,-1	0, 0

# Equilibrio de Nash

## Piedra, papel o tijera

	$\mathcal{R}$ (piedra)	$\mathcal{P}$ (papel)	$\mathcal{S}$ (tijera)
$\mathcal{R}$ (piedra)	0, 0	-1, 1	1, -1
$\mathcal{P}$ (papel)	1, -1	0, 0	-1, 1
$\mathcal{S}$ (tijera)	-1, 1	1, -1	0, 0

# Equilibrio de Nash

## Piedra, papel o tijera

	$\mathcal{R}$ (piedra)	$\mathcal{P}$ (papel)	$\mathcal{S}$ (tijera)
$\mathcal{R}$ (piedra)	0, 0	-1, 1	1, -1
$\mathcal{P}$ (papel)	1, -1	0, 0	-1, 1
$\mathcal{S}$ (tijera)	-1, 1	1, -1	0, 0



# Equilibrio de Nash

## Piedra, papel o tijera

	$\mathcal{R}$ (piedra)	$\mathcal{P}$ (papel)	$\mathcal{S}$ (tijera)
$\mathcal{R}$ (piedra)	0, 0	-1, 1	1, -1
$\mathcal{P}$ (papel)	1, -1	0, 0	-1, 1
$\mathcal{S}$ (tijera)	-1, 1	1, -1	0, 0

# Equilibrio de Nash

## Piedra, papel o tijera

	$\mathcal{R}$ (piedra)	$\mathcal{P}$ (papel)	$\mathcal{S}$ (tijera)
$\mathcal{R}$ (piedra)	0, 0	-1, 1	1, -1
$\mathcal{P}$ (papel)	1, -1	0, 0	-1, 1
$\mathcal{S}$ (tijera)	-1, 1	1, -1	0, 0

# Equilibrio de Nash

## Piedra, papel o tijera

	$\mathcal{R}$ (piedra)	$\mathcal{P}$ (papel)	$\mathcal{S}$ (tijera)
$\mathcal{R}$ (piedra)	0, 0	-1, 1	1, -1
$\mathcal{P}$ (papel)	1, -1	0, 0	-1, 1
$\mathcal{S}$ (tijera)	-1, 1	1, -1	0, 0

# Equilibrio de Nash

## Piedra, papel o tijera

	$\mathcal{R}$ (piedra)	$\mathcal{P}$ (papel)	$\mathcal{S}$ (tijera)
$\mathcal{R}$ (piedra)	0, 0	-1, 1	1, -1
$\mathcal{P}$ (papel)	1, -1	0, 0	-1, 1
$\mathcal{S}$ (tijera)	-1, 1	1, -1	0, 0

# Equilibrio de Nash

## Piedra, papel o tijera

	$\mathcal{R}$ (piedra)	$\mathcal{P}$ (papel)	$\mathcal{S}$ (tijera)
$\mathcal{R}$ (piedra)	0, 0	-1, 1	1,-1
$\mathcal{P}$ (papel)	1,-1	0, 0	-1, 1
$\mathcal{S}$ (tijera)	-1, 1	1,-1	0, 0

**No todos los juegos tienen un equilibrio de Nash en estrategias puras.**

# Equilibrio de Nash

## Piedra, papel o tijera

	$\mathcal{R}$ (piedra)	$\mathcal{P}$ (papel)	$\mathcal{S}$ (tijera)
$\mathcal{R}$ (piedra)	0, 0	-1, 1	1, -1
$\mathcal{P}$ (papel)	1, -1	0, 0	-1, 1
$\mathcal{S}$ (tijera)	-1, 1	1, -1	0, 0

**No todos los juegos tienen un equilibrio de Nash en estrategias puras.**

## Teorema de Nash

*Todo juego finito tiene al menos un equilibrio de Nash (en estrategias mixtas).*

# Juegos de Dos Jugadores de Suma Cero

# Juegos de Dos Jugadores de Suma Cero

- ➊ Equilibrio de Nash como principal concepto de solución.



# Juegos de Dos Jugadores de Suma Cero

- Equilibrio de Nash como principal concepto de solución.
- Valor del juego ( $u$ ): ganancia del primer jugador cuando ambos jugadores utilizan un equilibrio de Nash.

# Regret Matching: Cálculo del Equilibrio de Nash

Esquema General:

# Regret Matching: Cálculo del Equilibrio de Nash

## Esquema General:

- ① Se juega de forma repetida a través del tiempo  $t = 1, 2, 3, \dots$

# Regret Matching: Cálculo del Equilibrio de Nash

## Esquema General:

- ① Se juega de forma repetida a través del tiempo  $t = 1, 2, 3, \dots$
- ② A tiempo  $t + 1$  cada jugador elige una acción siguiendo una estrategia mixta **determinada**.

# Regret Matching: Cálculo del Equilibrio de Nash

## Esquema General:

- ① Se juega de forma repetida a través del tiempo  $t = 1, 2, 3, \dots$
- ② A tiempo  $t + 1$  cada jugador elige una acción siguiendo una estrategia mixta **determinada**.
- ③ La **estrategia empírica** converge a un equilibrio de Nash; en la práctica el algoritmo es detenido después de cierto número de iteraciones.

# Regret Matching: Cálculo del Equilibrio de Nash

## Esquema General:

- 1 Se juega de forma repetida a través del tiempo  $t = 1, 2, 3, \dots$
- 2 A tiempo  $t + 1$  cada jugador elige una acción siguiendo una estrategia mixta **determinada**.
- 3 La **estrategia empírica** converge a un equilibrio de Nash; en la práctica el algoritmo es detenido después de cierto número de iteraciones.

Diferentes formas de calcular la estrategia mixta conducen a diferentes algoritmos:

- 1 Regret condicional.
- 2 Regret incondicional.
- 3 Vector invariante de probabilidad.

# Regret Matching: Procedimientos

## Regret

*Métrica de **arrepentimiento** de no haber elegido una acción en particular.*

# Regret Matching: Procedimientos

## Regret

*Métrica de **arrepentimiento** de no haber elegido una acción en particular.*

## Tres procedimientos

$\mathcal{R}, \mathcal{S}$	$\mathcal{R}, \mathcal{P}$	$\mathcal{S}, \mathcal{S}$	$\bar{u}$
1	-1	0	0



# Regret Matching: Procedimientos

## Regret

*Métrica de **arrepentimiento** de no haber elegido una acción en particular.*

### Tres procedimientos

- 1 Regret condicional.

$\mathcal{R}, \mathcal{S}$	$\mathcal{R}, \mathcal{P}$	$\mathcal{S}, \mathcal{S}$	$\bar{u}$
1	-1	0	0

# Regret Matching: Procedimientos

## Regret

Métrica de **arrepentimiento** de no haber elegido una acción en particular.

### Tres procedimientos

- 1 Regret condicional.

$\mathcal{R}, \mathcal{S}$	$\mathcal{R}, \mathcal{P}$	$\mathcal{S}, \mathcal{S}$	$\bar{u}$
1	-1	0	0

$\mathcal{S}, \mathcal{S}$	$\mathcal{S}, \mathcal{P}$	$\mathcal{S}, \mathcal{S}$	$\bar{u}$
0	1	0	$\frac{1}{3}$

$$R_1(\mathcal{R}, \mathcal{S}) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

# Regret Matching: Procedimientos

## Regret

Métrica de **arrepentimiento** de no haber elegido una acción en particular.

### Tres procedimientos

- 1 Regret condicional.

$\mathcal{R}, \mathcal{S}$	$\mathcal{R}, \mathcal{P}$	$\mathcal{S}, \mathcal{S}$	$\bar{u}$
1	-1	0	0

$\mathcal{P}, \mathcal{S}$	$\mathcal{P}, \mathcal{P}$	$\mathcal{S}, \mathcal{S}$	$\bar{u}$
-1	0	0	$-\frac{1}{3}$

$$R_1(\mathcal{R}, \mathcal{P}) = -\frac{1}{3} - 0 = -\frac{1}{3}$$

# Regret Matching: Procedimientos

## Regret

Métrica de **arrepentimiento** de no haber elegido una acción en particular.

### Tres procedimientos

- 1 Regret condicional.
- 2 Regret incondicional.

$\mathcal{R}, \mathcal{S}$	$\mathcal{R}, \mathcal{P}$	$\mathcal{S}, \mathcal{S}$	$\bar{u}$
1	-1	0	0

# Regret Matching: Procedimientos

## Regret

Métrica de **arrepentimiento** de no haber elegido una acción en particular.

### Tres procedimientos

- 1 Regret condicional.
- 2 Regret incondicional.

$\mathcal{R}, \mathcal{S}$	$\mathcal{R}, \mathcal{P}$	$\mathcal{S}, \mathcal{S}$	$\bar{u}$
1	-1	0	0

$\mathcal{S}, \mathcal{S}$	$\mathcal{S}, \mathcal{P}$	$\mathcal{S}, \mathcal{S}$	$\bar{u}$
0	1	0	$\frac{1}{3}$

$$R_1(\mathcal{S}) = \frac{1}{3} - 0 = \frac{1}{3}$$

# Regret Matching: Procedimientos

## Regret

Métrica de **arrepentimiento** de no haber elegido una acción en particular.

### Tres procedimientos

- 1 Regret condicional.
- 2 Regret incondicional.

$\mathcal{R}, \mathcal{S}$	$\mathcal{R}, \mathcal{P}$	$\mathcal{S}, \mathcal{S}$	$\bar{u}$
1	-1	0	0

$\mathcal{P}, \mathcal{S}$	$\mathcal{P}, \mathcal{P}$	$\mathcal{P}, \mathcal{S}$	$\bar{u}$
-1	0	-1	$-\frac{2}{3}$

$$R_1(\mathcal{P}) = -\frac{2}{3} - 0 = -\frac{2}{3}$$

# Regret Matching: Procedimientos

## Regret

*Métrica de **arrepentimiento** de no haber elegido una acción en particular.*

### Tres procedimientos

- 1 Regret condicional.
- 2 Regret incondicional.
- 3 Vector invariante de probabilidad.

$\mathcal{R}, \mathcal{S}$	$\mathcal{R}, \mathcal{P}$	$\mathcal{S}, \mathcal{S}$	$\bar{u}$
1	-1	0	0

# Regret Matching: Procedimientos

## Regret

*Métrica de **arrepentimiento** de no haber elegido una acción en particular.*

### Tres procedimientos

- 1 Regret condicional.
- 2 Regret incondicional.
- 3 Vector invariante de probabilidad.

$\mathcal{R}, \mathcal{S}$	$\mathcal{R}, \mathcal{P}$	$\mathcal{S}, \mathcal{S}$	$\bar{u}$
1	-1	0	0



# Regret Matching: Observaciones

## Regret Matching: Observaciones

- 1 Las probabilidades son elegidas proporcional a los regrets positivos.

## Regret Matching: Observaciones

- ① Las probabilidades son elegidas proporcional a los regrets positivos.
- ② El regret positivo tiende a cero cuando el número de juegos tiende a infinito.

## Regret Matching: Observaciones

- ① Las probabilidades son elegidas proporcional a los regrets positivos.
- ② El regret positivo tiende a cero cuando el número de juegos tiende a infinito.
- ③ Si el regret positivo es pequeño, la **estrategia empírica** es una aproximación a un equilibrio de Nash.

# Regret Matching: Observaciones

- 1 Las probabilidades son elegidas proporcional a los regrets positivos.
- 2 El regret positivo tiende a cero cuando el número de juegos tiende a infinito.
- 3 Si el regret positivo es pequeño, la **estrategia empírica** es una aproximación a un equilibrio de Nash.

## Estrategia Empírica

La probabilidad de que un determinado jugador elija una acción  $a$  es igual a:

$$p(a) = \frac{\text{número de veces que el jugador eligió } a}{\text{número total de juegos}}$$

# Regret Matching: Experimentos

# Regret Matching: Experimentos

- ① 4 juegos para dos jugadores de suma cero.

# Regret Matching: Experimentos

- ① 4 juegos para dos jugadores de suma cero.
- ② 10 corridas por cada uno de los juegos y cada uno de los procedimientos.



# Regret Matching: Experimentos

- ① 4 juegos para dos jugadores de suma cero.
- ② 10 corridas por cada uno de los juegos y cada uno de los procedimientos.
- ③ Criterio de parada: regret incondicional menor que 0,005.

# Regret Matching: Experimentos

- ① 4 juegos para dos jugadores de suma cero.
- ② 10 corridas por cada uno de los juegos y cada uno de los procedimientos.
- ③ Criterio de parada: regret incondicional menor que 0,005.
- ④ Gráficas del regret con respecto al número de iteraciones.

# Regret Matching: Experimentos

- ① 4 juegos para dos jugadores de suma cero.
- ② 10 corridas por cada uno de los juegos y cada uno de los procedimientos.
- ③ Criterio de parada: regret incondicional menor que 0,005.
- ④ Gráficas del regret con respecto al número de iteraciones.
- ⑤ Verificación realizada con programación lineal.

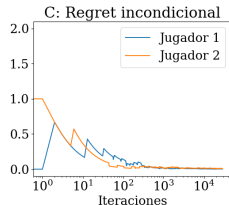
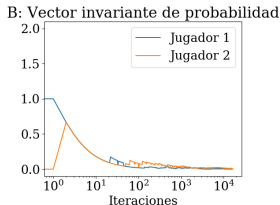
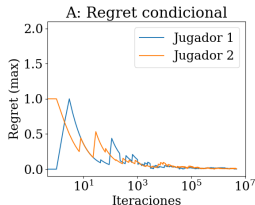
# Regret Matching: Experimentos

- ① 4 juegos para dos jugadores de suma cero.
- ② 10 corridas por cada uno de los juegos y cada uno de los procedimientos.
- ③ Criterio de parada: regret incondicional menor que 0,005.
- ④ Gráficas del regret con respecto al número de iteraciones.
- ⑤ Verificación realizada con programación lineal.
- ⑥ Verificación: la explotabilidad mide la distancia entre la estrategia actual y un equilibrio de Nash.

# Matching Pennies

Valor del juego ( $u$ ): 0.

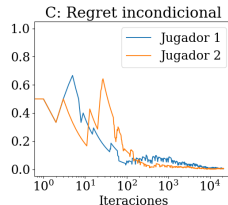
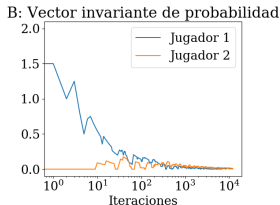
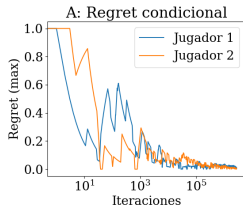
	A	B	C
Ganancia esperada $u(\sigma)$	0,000	0,000	0,000
Explotabilidad $\varepsilon_\sigma$	0,006	0,006	0,008
Tiempo $T$	10,276	0,777	0,042
Iteraciones $I$	3.892.550,4	25.616,6	16.260,5
$T/I$	$2,64 \times 10^{-6}$	$3,03 \times 10^{-5}$	$2,58 \times 10^{-6}$



# Piedra, Papel o Tijera

Valor del juego ( $u$ ): 0.

	A	B	C
Ganancia esperada $u(\sigma)$	-0,000012	0,000004	0,000022
Explotabilidad $\varepsilon_\sigma$	0,006	0,010	0,009
Tiempo $T$	12,198	0,345	0,049
Iteraciones $I$	4.519.054,1	6.601,3	19.321,1
$T/I$	$2,70 \times 10^{-6}$	$5,23 \times 10^{-5}$	$2,54 \times 10^{-6}$



# Ficha vs. Dominó

# Ficha vs. Dominó

**Jugador 1**



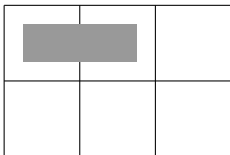
**Jugador 2**





# Ficha vs. Dominó

**Jugador 1**

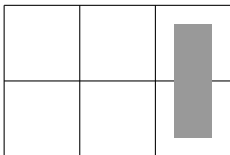


**Jugador 2**



# Ficha vs. Dominó

**Jugador 1**

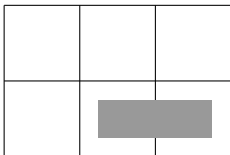


**Jugador 2**

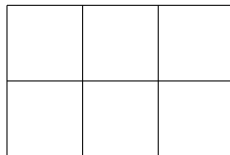


# Ficha vs. Dominó

**Jugador 1**

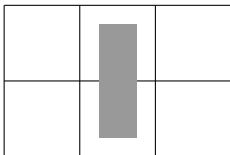


**Jugador 2**



# Ficha vs. Dominó

**Jugador 1**

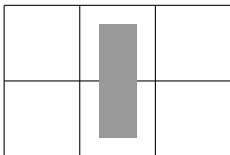


**Jugador 2**

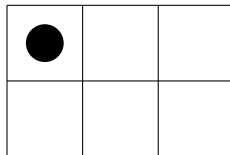


# Ficha vs. Dominó

**Jugador 1**

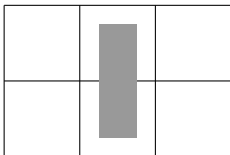


**Jugador 2**

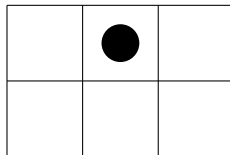


# Ficha vs. Dominó

**Jugador 1**

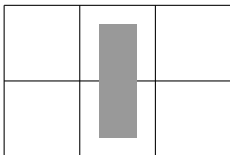


**Jugador 2**

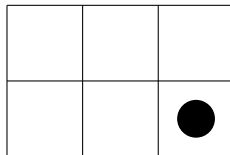


# Ficha vs. Dominó

**Jugador 1**

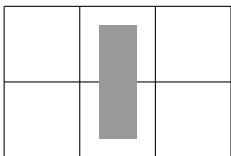


**Jugador 2**

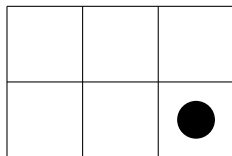


# Ficha vs. Dominó

**Jugador 1**

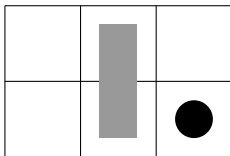


**Jugador 2**



## Resultado

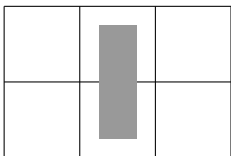
- 1 La ficha y el dominó no se superponen: gana el jugador 1.



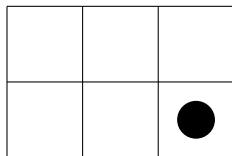


# Ficha vs. Dominó

**Jugador 1**

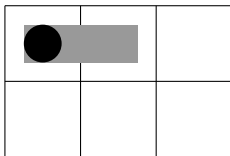


**Jugador 2**



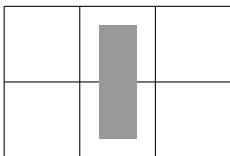
## Resultado

- ① La ficha y el dominó no se superponen: gana el jugador 1.
- ② La ficha y el dominó sí se superponen: gana el jugador 2.

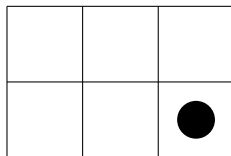


# Ficha vs. Dominó

**Jugador 1**

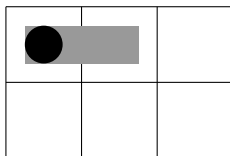


**Jugador 2**



## Resultado

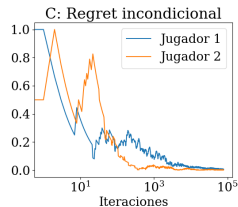
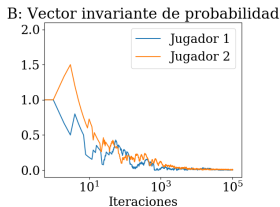
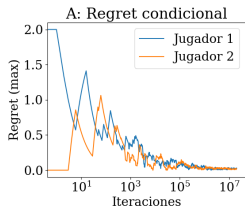
- ① La ficha y el dominó no se superponen: gana el jugador 1.
- ② La ficha y el dominó sí se superponen: gana el jugador 2.



# Ficha vs. Dominó

Valor del juego ( $u$ ):  $\frac{1}{3}$ .

	A	B	C
Ganancia esperada $u(\sigma)$	0,333	0,334	0,334
Explotabilidad $\varepsilon_\sigma$	0,010	0,007	0,004
Tiempo $T$	319,179	11,275	0,237
Iteraciones $I$	108.319.272,4	75.250,2	84.318,5
$T/I$	$2,95 \times 10^{-6}$	$1,50 \times 10^{-4}$	$2,81 \times 10^{-6}$

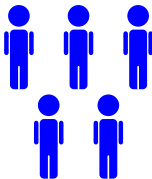


# Coronel Blotto

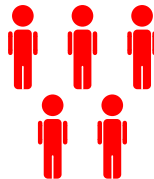
# Coronel Blotto

- $S$  soldados por jugador.

Jugador 1

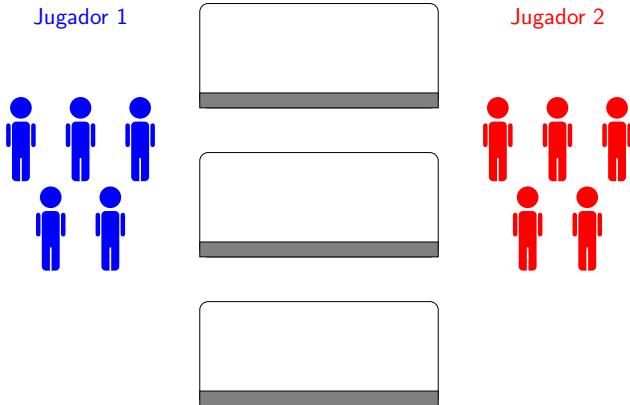


Jugador 2



# Coronel Blotto

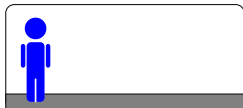
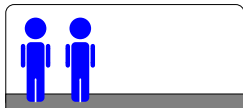
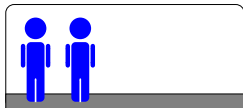
- $S$  soldados por jugador.
- $N$  campos de batalla.



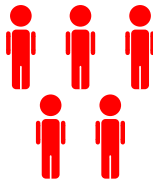
# Coronel Blotto

- $S$  soldados por jugador.
- $N$  campos de batalla.

Jugador 1



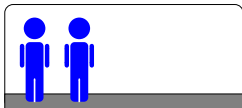
Jugador 2



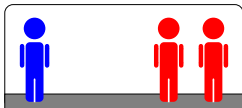
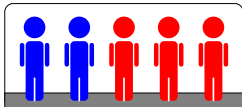
# Coronel Blotto

- $S$  soldados por jugador.
- $N$  campos de batalla.

Jugador 1



Jugador 2

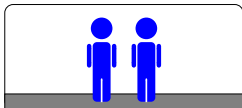




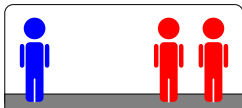
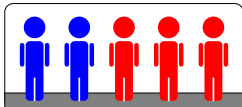
# Coronel Blotto

- $S$  soldados por jugador.
- $N$  campos de batalla.

Jugador 1



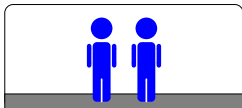
Jugador 2



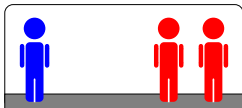
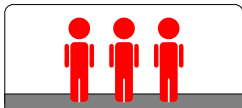
# Coronel Blotto

- $S$  soldados por jugador.
- $N$  campos de batalla.

Jugador 1



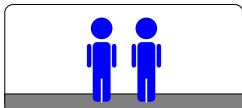
Jugador 2



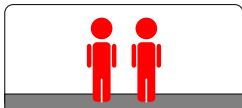
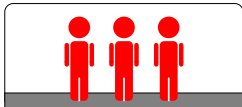
# Coronel Blotto

- $S$  soldados por jugador.
- $N$  campos de batalla.

Jugador 1



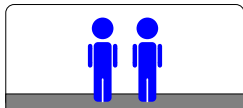
Jugador 2



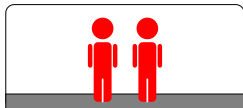
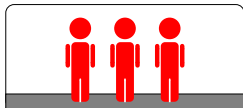
# Coronel Blotto

- $S$  soldados por jugador.
  - $N$  campos de batalla.
- $u_1 = 1 - 2 = -1$
  - $u_2 = 2 - 1 = 1$ .

Jugador 1



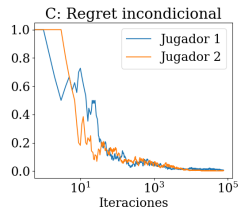
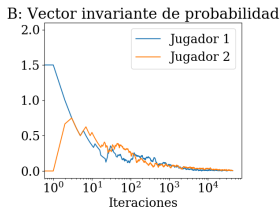
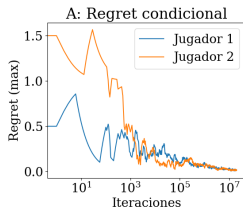
Jugador 2



# Coronel Blotto

Valor del juego ( $u$ ): 0.

	A	B	C
Ganancia esperada $u(\sigma)$	0,000219	0,000150	0,000024
Explotabilidad $\varepsilon_\sigma$	0,010	0,010	0,009
Tiempo $T$	875,533	70,453	0,166
Iteraciones $I$	190.222.305,3	58.794,4	48.613,5
$T/I$	$4,60 \times 10^{-6}$	$1,20 \times 10^{-3}$	$3,41 \times 10^{-6}$



# Forma Extensiva

# Forma Extensiva: Modelo

Juegos secuenciales

# Forma Extensiva: Modelo

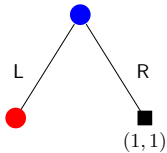
## Juegos secuenciales





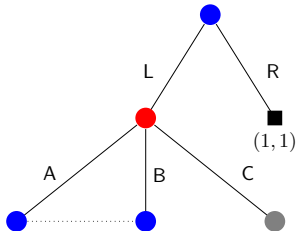
# Forma Extensiva: Modelo

## Juegos secuenciales



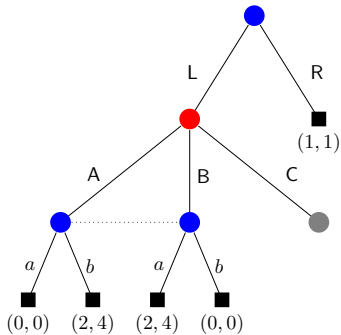
# Forma Extensiva: Modelo

## Juegos secuenciales



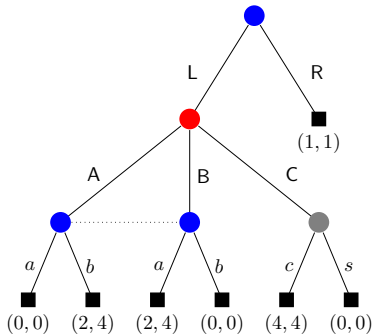
# Forma Extensiva: Modelo

## Juegos secuenciales



# Forma Extensiva: Modelo

## Juegos secuenciales

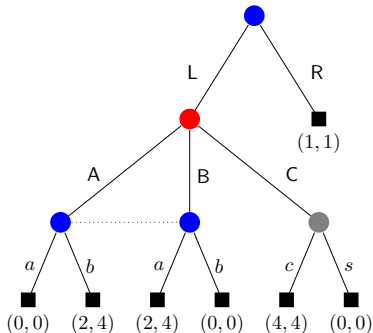


# Forma Extensiva: Modelo

## Juegos secuenciales

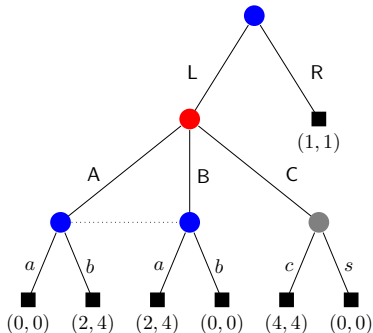
## Elementos

- 1 Historias o nodos.  
Ej:  $\emptyset$ ,  $LA$ ,  $LBb$ ,  $R$ .



# Forma Extensiva: Modelo

## Juegos secuenciales

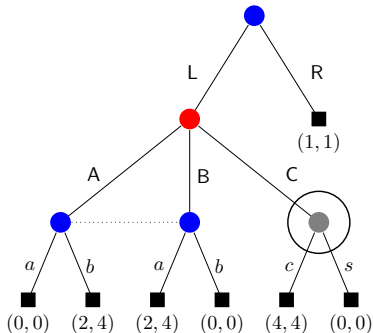


## Elementos

- 1 Historias o nodos.  
Ej:  $\emptyset$ ,  $LA$ ,  $LBb$ ,  $R$ .
- 2 Función que asigna a cada historia (nodo) no terminal un jugador.

# Forma Extensiva: Modelo

## Juegos secuenciales

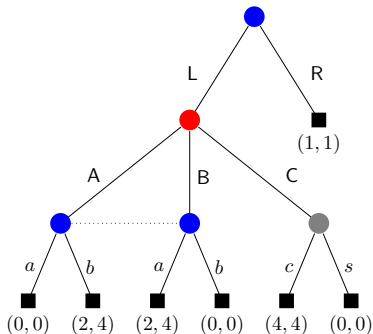


## Elementos

- 1 Historias o nodos.  
Ej:  $\emptyset$ ,  $LA$ ,  $LBb$ ,  $R$ .
- 2 Función que asigna a cada historia (nodo) no terminal un jugador.
  - Nodos de azar.

# Forma Extensiva: Modelo

## Juegos secuenciales



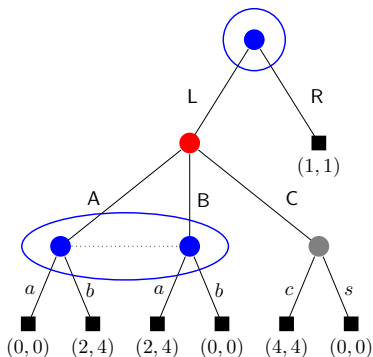
## Elementos

- 1 Historias o nodos.  
Ej:  $\emptyset$ ,  $LA$ ,  $LBb$ ,  $R$ .
- 2 Función que asigna a cada historia (nodo) no terminal un jugador.  
► Nodos de azar.
- 3 Conjuntos de información.



# Forma Extensiva: Modelo

## Juegos secuenciales

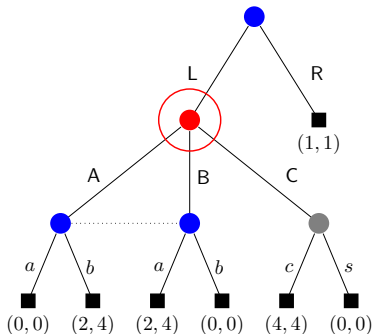


## Elementos

- 1 Historias o nodos.  
Ej:  $\emptyset$ ,  $LA$ ,  $LBb$ ,  $R$ .
- 2 Función que asigna a cada historia (nodo) no terminal un jugador.  
► Nodos de azar.
- 3 Conjuntos de información.

# Forma Extensiva: Modelo

## Juegos secuenciales

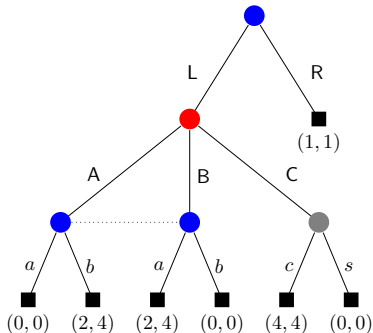


## Elementos

- 1 Historias o nodos.  
Ej:  $\emptyset$ ,  $LA$ ,  $LBb$ ,  $R$ .
- 2 Función que asigna a cada historia (nodo) no terminal un jugador.
  - Nodos de azar.
- 3 Conjuntos de información.

# Forma Extensiva: Modelo

## Juegos secuenciales

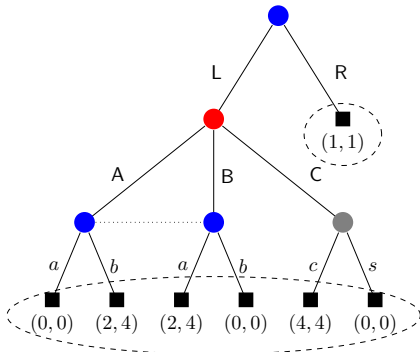


## Elementos

- 1 Historias o nodos.  
Ej:  $\emptyset$ ,  $LA$ ,  $LBb$ ,  $R$ .
- 2 Función que asigna a cada historia (nodo) no terminal un jugador.  
► Nodos de azar.
- 3 Conjuntos de información.
- 4 Función que asigna por cada historia (nodo) terminal y cada jugador una utilidad.

# Forma Extensiva: Modelo

## Juegos secuenciales

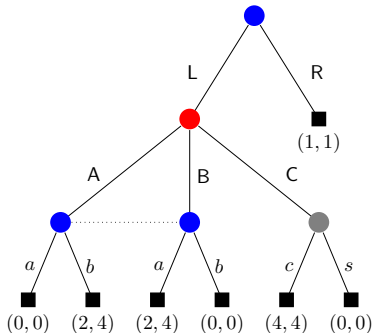


## Elementos

- 1 Historias o nodos.  
Ej:  $\emptyset$ ,  $LA$ ,  $LBb$ ,  $R$ .
- 2 Función que asigna a cada historia (nodo) no terminal un jugador.  
► Nodos de azar.
- 3 Conjuntos de información.
- 4 Función que asigna por cada historia (nodo) terminal y cada jugador una utilidad.

# Forma Extensiva: Modelo

## Juegos secuenciales

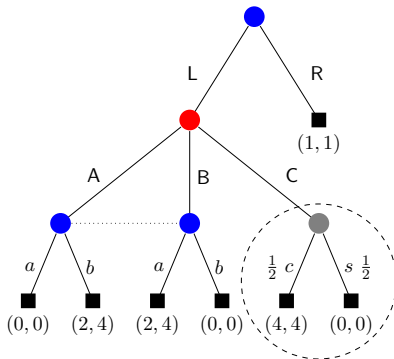


## Elementos

- 1 Historias o nodos.  
Ej:  $\emptyset$ ,  $LA$ ,  $LBb$ ,  $R$ .
- 2 Función que asigna a cada historia (nodo) no terminal un jugador.
  - Nodos de azar.
- 3 Conjuntos de información.
- 4 Función que asigna por cada historia (nodo) terminal y cada jugador una utilidad.
- 5 Distribución de probabilidad sobre el conjunto de acciones en cada nodo de azar.

# Forma Extensiva: Modelo

## Juegos secuenciales

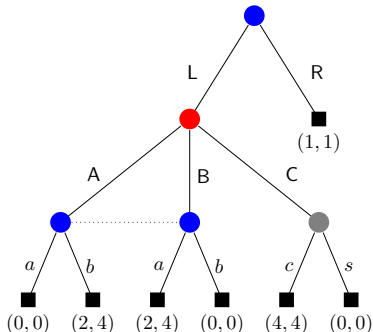


## Elementos

- 1 Historias o nodos.  
Ej:  $\emptyset$ ,  $LA$ ,  $LBb$ ,  $R$ .
- 2 Función que asigna a cada historia (nodo) no terminal un jugador.
  - Nodos de azar.
- 3 Conjuntos de información.
- 4 Función que asigna por cada historia (nodo) terminal y cada jugador una utilidad.
- 5 Distribución de probabilidad sobre el conjunto de acciones en cada nodo de azar.

# Forma Extensiva: Modelo

## Juegos secuenciales

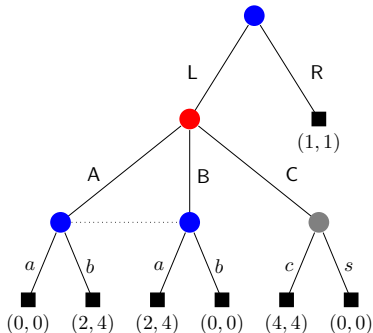


## Elementos

- 1 Historias o nodos.  
Ej:  $\emptyset$ ,  $LA$ ,  $LBb$ ,  $R$ .
- 2 Función que asigna a cada historia (nodo) no terminal un jugador.
  - Nodos de azar.
- 3 Conjuntos de información.
- 4 Función que asigna por cada historia (nodo) terminal y cada jugador una utilidad.
- 5 Distribución de probabilidad sobre el conjunto de acciones en cada nodo de azar.

# Forma Extensiva: Modelo

## Juegos secuenciales



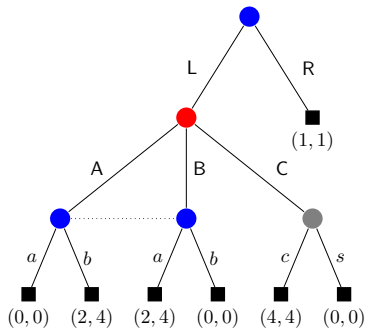
## Perfect Recall

## Elementos

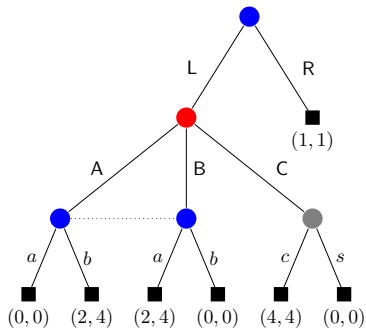
- 1 Historias o nodos.  
Ej:  $\emptyset$ ,  $LA$ ,  $LBb$ ,  $R$ .
- 2 Función que asigna a cada historia (nodo) no terminal un jugador.
  - Nodos de azar.
- 3 Conjuntos de información.
- 4 Función que asigna por cada historia (nodo) terminal y cada jugador una utilidad.
- 5 Distribución de probabilidad sobre el conjunto de acciones en cada nodo de azar.



## Forma Extensiva: Estrategias



## Forma Extensiva: Estrategias

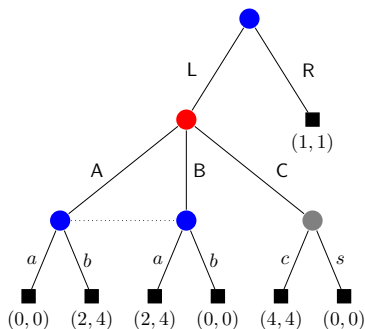


## Forma Normal

	A	B	C
(L, a)	0, 0	2, 4	2, 2
(L, b)	2, 4	0, 0	2, 2
(R, a)	1, 1	1, 1	1, 1
(R, b)	1, 1	1, 1	1, 1

# Forma Extensiva: Estrategias

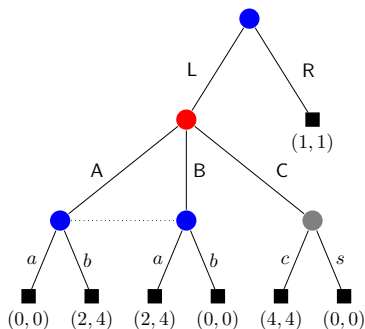
## Estrategias



## Forma Normal

	A	B	C
(L, a)	0, 0	2, 4	2, 2
(L, b)	2, 4	0, 0	2, 2
(R, a)	1, 1	1, 1	1, 1
(R, b)	1, 1	1, 1	1, 1

# Forma Extensiva: Estrategias



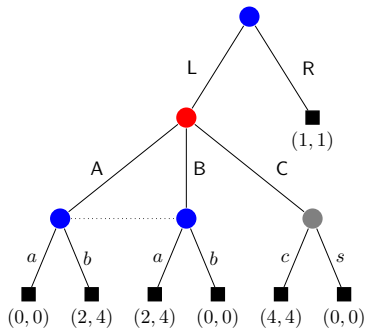
## Estrategias

- 1 Estrategias Puras.

## Forma Normal

	A	B	C
(L, a)	0, 0	2, 4	2, 2
(L, b)	2, 4	0, 0	2, 2
(R, a)	1, 1	1, 1	1, 1
(R, b)	1, 1	1, 1	1, 1

# Forma Extensiva: Estrategias



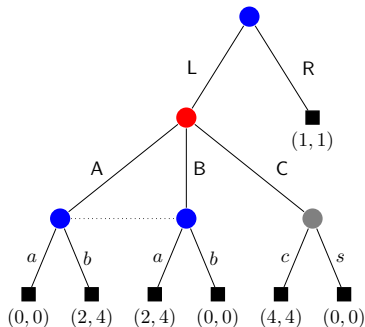
## Estrategias

- 1 Estrategias Puras.

## Forma Normal

	A	B	C
(L, a)	0, 0	2, 4	2, 2
(L, b)	2, 4	0, 0	2, 2
(R, a)	1, 1	1, 1	1, 1
(R, b)	1, 1	1, 1	1, 1

# Forma Extensiva: Estrategias



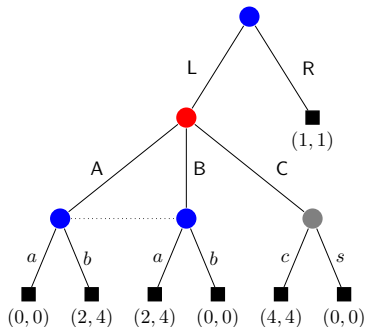
## Estrategias

- 1 Estrategias Puras.

## Forma Normal

	A	B	C
(L, a)	0, 0	2, 4	2, 2
(L, b)	2, 4	0, 0	2, 2
(R, a)	1, 1	1, 1	1, 1
(R, b)	1, 1	1, 1	1, 1

# Forma Extensiva: Estrategias



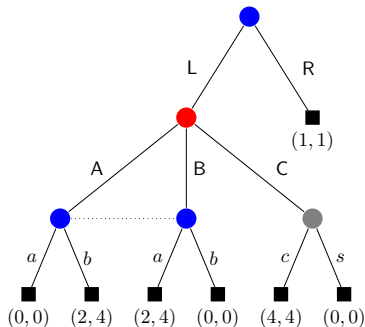
## Estrategias

- 1 Estrategias Puras.

## Forma Normal

	A	B	C
(L, a)	0, 0	2, 4	2, 2
(L, b)	2, 4	0, 0	2, 2
(R, a)	1, 1	1, 1	1, 1
(R, b)	1, 1	1, 1	1, 1

# Forma Extensiva: Estrategias



## Estrategias

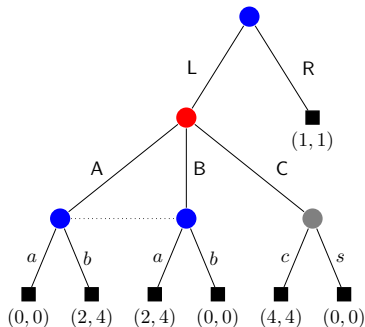
- 1 Estrategias Puras.
- 2 Estrategias Mixtas.

## Forma Normal

	A	B	C
(L, a)	0, 0	2, 4	2, 2
(L, b)	2, 4	0, 0	2, 2
(R, a)	1, 1	1, 1	1, 1
(R, b)	1, 1	1, 1	1, 1



# Forma Extensiva: Estrategias



## Estrategias

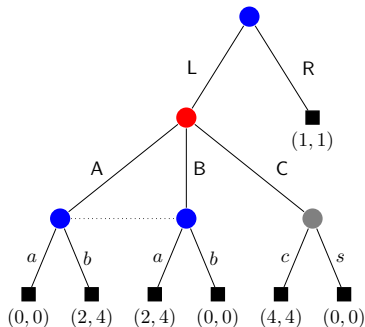
- 1 Estrategias Puras.
- 2 Estrategias Mixtas.

$(L, a)$	$(L, b)$	$(R, a)$	$(R, b)$
0.45	0.30	0.00	0.25
A	B	C	
0.25	0.25	0.50	

## Forma Normal

	A	B	C
$(L, a)$	0, 0	2, 4	2, 2
$(L, b)$	2, 4	0, 0	2, 2
$(R, a)$	1, 1	1, 1	1, 1
$(R, b)$	1, 1	1, 1	1, 1

# Forma Extensiva: Estrategias



## Estrategias

- 1 Estrategias Puras.
- 2 Estrategias Mixtas.

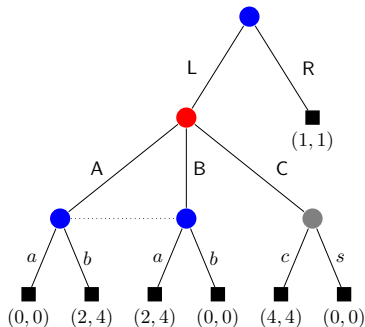
$(L, a)$	$(L, b)$	$(R, a)$	$(R, b)$
0.45	0.30	0.00	0.25
A	B	C	
0.25	0.25	0.50	

- 3 Estrategias de Comportamiento.

## Forma Normal

	A	B	C
$(L, a)$	0, 0	2, 4	2, 2
$(L, b)$	2, 4	0, 0	2, 2
$(R, a)$	1, 1	1, 1	1, 1
$(R, b)$	1, 1	1, 1	1, 1

# Forma Extensiva: Estrategias



## Estrategias

- 1 Estrategias Puras.
- 2 Estrategias Mixtas.

$(L, a)$	$(L, b)$	$(R, a)$	$(R, b)$
0.45	0.30	0.00	0.25

A	B	C
0.25	0.25	0.50

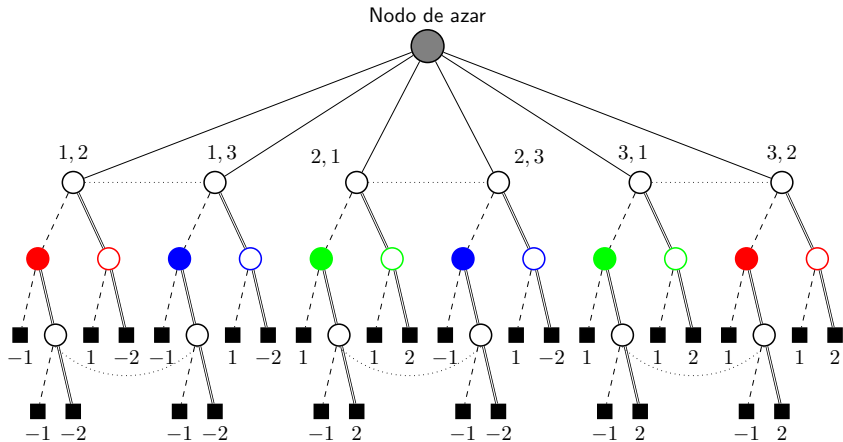
- 3 Estrategias de Comportamiento.

L	R	$a$	$b$
0.65	0.35	0.40	0.60

## Forma Normal

	A	B	C
$(L, a)$	0, 0	2, 4	2, 2
$(L, b)$	2, 4	0, 0	2, 2
$(R, a)$	1, 1	1, 1	1, 1
$(R, b)$	1, 1	1, 1	1, 1

# Kuhn Poker



# Counterfactual Regret Minimization (CFR)

# Counterfactual Regret Minimization (CFR)

- 1 El árbol del juego se recorre repetidamente.

# Counterfactual Regret Minimization (CFR)

- ① El árbol del juego se recorre repetidamente.
- ② Inicia con una estrategia uniforme en cada conjunto de información.

# Counterfactual Regret Minimization (CFR)

- ① El árbol del juego se recorre repetidamente.
- ② Inicia con una estrategia uniforme en cada conjunto de información.
- ③ En cada iteración se elige una mejor estrategia revisando las decisiones pasadas, utilizando las métricas de regret.



# Counterfactual Regret Minimization (CFR)

- ① El árbol del juego se recorre repetidamente.
- ② Inicia con una estrategia uniforme en cada conjunto de información.
- ③ En cada iteración se elige una mejor estrategia revisando las decisiones pasadas, utilizando las métricas de regret.
- ④ La estrategia promedio converge a un equilibrio de Nash; en la práctica el algoritmo es detenido después de cierto número de iteraciones.

# Counterfactual Regret Minimization (CFR)

- ① El árbol del juego se recorre repetidamente.
- ② Inicia con una estrategia uniforme en cada conjunto de información.
- ③ En cada iteración se elige una mejor estrategia revisando las decisiones pasadas, utilizando las métricas de regret.
- ④ La estrategia promedio converge a un equilibrio de Nash; en la práctica el algoritmo es detenido después de cierto número de iteraciones.

**¿Cómo se mejora la estrategia en cada iteración?**

# Counterfactual Regret Minimization (CFR)

- 1 El árbol del juego se recorre repetidamente.
- 2 Inicia con una estrategia uniforme en cada conjunto de información.
- 3 En cada iteración se elige una mejor estrategia revisando las decisiones pasadas, utilizando las métricas de regret.
- 4 La estrategia promedio converge a un equilibrio de Nash; en la práctica el algoritmo es detenido después de cierto número de iteraciones.

## ¿Cómo se mejora la estrategia en cada iteración?

- Sumar el regret contrafactual que se tiene en cada conjunto de información por cada acción.

# Counterfactual Regret Minimization (CFR)

- 1 El árbol del juego se recorre repetidamente.
- 2 Inicia con una estrategia uniforme en cada conjunto de información.
- 3 En cada iteración se elige una mejor estrategia revisando las decisiones pasadas, utilizando las métricas de regret.
- 4 La estrategia promedio converge a un equilibrio de Nash; en la práctica el algoritmo es detenido después de cierto número de iteraciones.

## ¿Cómo se mejora la estrategia en cada iteración?

- Sumar el regret contrafactual que se tiene en cada conjunto de información por cada acción.
- **Regret contrafactual:** cuánto mejor lo habría hecho en todos los juegos hasta ahora si siempre hubiera jugado esta acción en este conjunto de información.

# Counterfactual Regret Minimization (CFR)

- 1 El árbol del juego se recorre repetidamente.
- 2 Inicia con una estrategia uniforme en cada conjunto de información.
- 3 En cada iteración se elige una mejor estrategia revisando las decisiones pasadas, utilizando las métricas de regret.
- 4 La estrategia promedio converge a un equilibrio de Nash; en la práctica el algoritmo es detenido después de cierto número de iteraciones.

## ¿Cómo se mejora la estrategia en cada iteración?

- Sumar el regret contrafactual que se tiene en cada conjunto de información por cada acción.
- **Regret contrafactual**: cuánto mejor lo habría hecho en todos los juegos hasta ahora si siempre hubiera jugado esta acción en este conjunto de información.
- **Regret Matching**: en la nueva estrategia las acciones son elegidas con probabilidades proporcionales a los regrets positivos.

# Counterfactual Regret Minimization (CFR)

- 1 El árbol del juego se recorre repetidamente.
- 2 Inicia con una estrategia uniforme en cada conjunto de información.
- 3 En cada iteración se elige una mejor estrategia revisando las decisiones pasadas, utilizando las métricas de regret.
- 4 La estrategia promedio converge a un equilibrio de Nash; en la práctica el algoritmo es detenido después de cierto número de iteraciones.

## ¿Cómo se mejora la estrategia en cada iteración?

- Sumar el regret contrafactual que se tiene en cada conjunto de información por cada acción.
- **Regret contrafactual:** cuánto mejor lo habría hecho en todos los juegos hasta ahora si siempre hubiera jugado esta acción en este conjunto de información.
- **Regret Matching:** en la nueva estrategia las acciones son elegidas con probabilidades proporcionales a los regrets positivos.

# CFR: Experimentos

# CFR: Experimentos

- ① Tres clases de juegos, cada uno con diferentes parámetros.



# CFR: Experimentos

- ① Tres clases de juegos, cada uno con diferentes parámetros.
- ② CFR con muestreo en los nodos de azar.

# CFR: Experimentos

- ① Tres clases de juegos, cada uno con diferentes parámetros.
- ② CFR con muestreo en los nodos de azar.
- ③ 10 horas de entrenamiento.

# CFR: Experimentos

- ① Tres clases de juegos, cada uno con diferentes parámetros.
- ② CFR con muestreo en los nodos de azar.
- ③ 10 horas de entrenamiento.
- ④ Gráfica del regret con respecto al número de iteraciones.

# CFR: Experimentos

- ① Tres clases de juegos, cada uno con diferentes parámetros.
- ② CFR con muestreo en los nodos de azar.
- ③ 10 horas de entrenamiento.
- ④ Gráfica del regret con respecto al número de iteraciones.
- ⑤ Verificación: la explotabilidad mide la distancia entre la estrategia actual y un equilibrio de Nash.

## CFR: Experimentos

- ① Tres clases de juegos, cada uno con diferentes parámetros.
- ② CFR con muestreo en los nodos de azar.
- ③ 10 horas de entrenamiento.
- ④ Gráfica del regret con respecto al número de iteraciones.
- ⑤ Verificación: la explotabilidad mide la distancia entre la estrategia actual y un equilibrio de Nash.
- ⑥ Un juego se considera resuelto si la explotabilidad es menor que el 1% de la mínima ganancia positiva posible.

# One Card Poker (OCP)

# One Card Poker (OCP)

- Generalización del Juego Kuhn Poker.

# One Card Poker (OCP)

- Generalización del Juego Kuhn Poker.
- $N$ : número de cartas.



# One Card Poker (OCP)

- Generalización del Juego Kuhn Poker.
- $N$ : número de cartas.
- $\text{OCP}(N)$ .

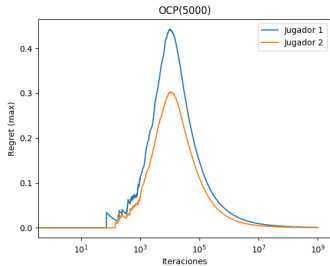
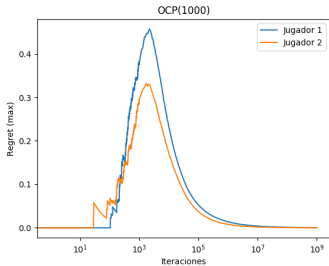
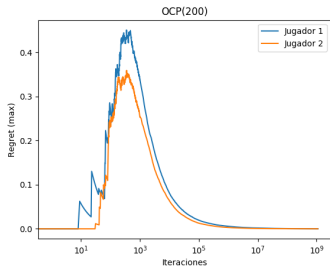
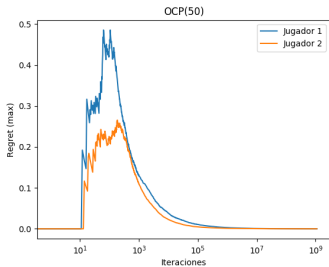
# One Card Poker (OCP)

- Generalización del Juego Kuhn Poker.
- $N$ : número de cartas.
- $OCP(N)$ .

## Tabla de Resultados

Juego	$N$	$I$	Iteraciones	$u(\sigma)$	$\varepsilon_\sigma$ (%)	Resuelto
OCP(3)	55	12	1.181.763.638	-0,056	0,0098	✓
OCP(12)	1.189	48	1.147.919.240	-0,062	0,0032	✓
OCP(50)	22.051	200	1.145.291.974	-0,058	0,0099	✓
OCP(200)	358.201	800	1.128.993.847	-0,056	0,0078	✓
OCP(1000)	8.991.001	4.000	1.087.573.694	-0,056	0,0098	✓
OCP(5000)	224.955.001	20.000	1.038.367.354	-0,056	0,0241	✓

# One Card Poker (OCP)



**Dudo**

## Dudo

- Juego de dados y apuestas.

# Dudo

- Juego de dados y apuestas.
- $K$ : número de caras de los dados.

## Dudo

- Juego de dados y apuestas.
- $K$ : número de caras de los dados.
- $D_1, D_2$ : número de dados del primer y segundo jugador, respectivamente.

## Dudo

- Juego de dados y apuestas.
- $K$ : número de caras de los dados.
- $D_1, D_2$ : número de dados del primer y segundo jugador, respectivamente.
- $\text{Dudo}(K, D_1, D_2)$ .



# Dudo

- Juego de dados y apuestas.
- $K$ : número de caras de los dados.
- $D_1, D_2$ : número de dados del primer y segundo jugador, respectivamente.
- $\text{Dudo}(K, D_1, D_2)$ .

## Tabla de Resultados

Juego	$N$	$I$	Iteraciones	$u(\sigma)$	$\varepsilon_\sigma$ (%)	Resuelto
Dudo(4, 1, 1)	8.177	512	18.697.532	-0,125	0,0259	✓
Dudo(4, 1, 2)	327.641	14.366	1.215.600	-0,508	0,0971	✓
Dudo(4, 2, 1)	327.641	14.366	1.213.799	0,552	0,3701	✓
Dudo(4, 2, 2)	13.107.101	327.680	63.109	0,0069	2,1132	✗
Dudo(5, 1, 1)	51.176	2.560	4.521.208	-0,120	0,1186	✓
Dudo(5, 1, 2)	4.915.126	163.840	151.235	-0,565	0,6197	✓
Dudo(5, 2, 1)	4.915.126	163.840	143.698	0,581	0,0122	✓
Dudo(5, 2, 2)	471.858.976	7.864.320	3.826	0,836	15,1963	✗
Dudo(6, 1, 1)	294.877	12.288	1.067.782	-0,111	0,0975	✓
Dudo(6, 1, 2)	66.060.163	1.769.472	17.702	-0,593	4,5781	✗
Dudo(6, 2, 1)	66.060.163	1.769.472	17.221	0,592	3,9594	✗

# Dudo

- Juego de dados y apuestas.
- $K$ : número de caras de los dados.
- $D_1, D_2$ : número de dados del primer y segundo jugador, respectivamente.
- $\text{Dudo}(K, D_1, D_2)$ .

## Tabla de Resultados

Juego	$N$	$I$	Iteraciones	$u(\sigma)$	$\varepsilon_\sigma$ (%)	Resuelto
Dudo(4, 1, 1)	8.177	512	18.697.532	-0,125	0,0259	✓
Dudo(4, 1, 2)	327.641	14.366	1.215.600	-0,508	0,0971	✓
Dudo(4, 2, 1)	327.641	14.366	1.213.799	0,552	0,3701	✓
Dudo(4, 2, 2)	13.107.101	327.680	63.109	0,0069	2,1132	✗
Dudo(5, 1, 1)	51.176	2.560	4.521.208	-0,120	0,1186	✓
Dudo(5, 1, 2)	4.915.126	163.840	151.235	-0,565	0,6197	✓
Dudo(5, 2, 1)	4.915.126	163.840	143.698	0,581	0,0122	✓
Dudo(5, 2, 2)	471.858.976	7.864.320	3.826	0,836	15,1963	✗
Dudo(6, 1, 1)	294.877	12.288	1.067.782	-0,111	0,0975	✓
Dudo(6, 1, 2)	66.060.163	1.769.472	17.702	-0,593	4,5781	✗
Dudo(6, 2, 1)	66.060.163	1.769.472	17.221	0,592	3,9594	✗

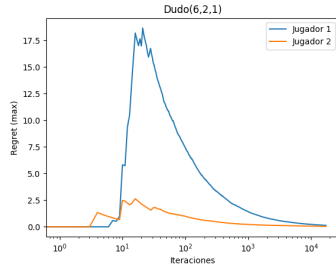
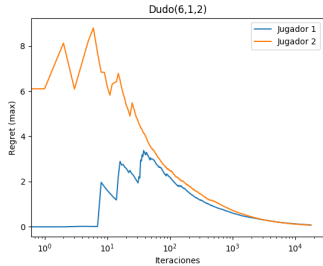
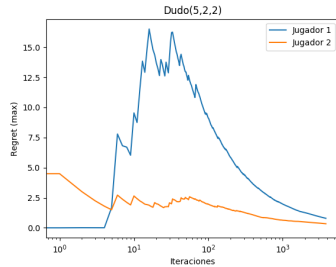
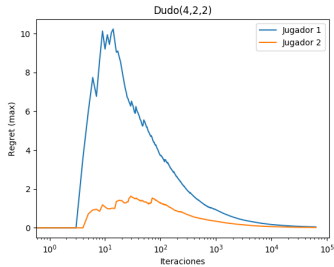
# Dudo

- Juego de dados y apuestas.
- $K$ : número de caras de los dados.
- $D_1, D_2$ : número de dados del primer y segundo jugador, respectivamente.
- $\text{Dudo}(K, D_1, D_2)$ .

## Tabla de Resultados

Juego	$N$	$I$	Iteraciones	$u(\sigma)$	$\varepsilon_\sigma$ (%)	Resuelto
Dudo(4, 1, 1)	8.177	512	18.697.532	-0,125	0,0259	✓
Dudo(4, 1, 2)	327.641	14.366	1.215.600	-0,508	0,0971	✓
Dudo(4, 2, 1)	327.641	14.366	1.213.799	0,552	0,3701	✓
Dudo(4, 2, 2)	13.107.101	327.680	63.109	0,0069	2,1132	✗
Dudo(5, 1, 1)	51.176	2.560	4.521.208	-0,120	0,1186	✓
Dudo(5, 1, 2)	4.915.126	163.840	151.235	-0,565	0,6197	✓
Dudo(5, 2, 1)	4.915.126	163.840	143.698	0,581	0,0122	✓
Dudo(5, 2, 2)	471.858.976	7.864.320	3.826	0,836	15,1963	✗
Dudo(6, 1, 1)	294.877	12.288	1.067.782	-0,111	0,0975	✓
Dudo(6, 1, 2)	66.060.163	1.769.472	17.702	-0,593	4,5781	✗
Dudo(6, 2, 1)	66.060.163	1.769.472	17.221	0,592	3,9594	✗

# Dudo



# Dominó

# Dominó

- Versión para dos jugadores.

# Dominó

- Versión para dos jugadores.
- $M$ : máximo número de puntos en una cara de una pieza.

# Dominó

- Versión para dos jugadores.
- $M$ : máximo número de puntos en una cara de una pieza.
- $N$ : número de piezas de la mano inicial para cada jugador.



# Dominó

- Versión para dos jugadores.
- $M$ : máximo número de puntos en una cara de una pieza.
- $N$ : número de piezas de la mano inicial para cada jugador.
- $\text{Domino}(M, N)$ .

# Dominó

- Versión para dos jugadores.
- $M$ : máximo número de puntos en una cara de una pieza.
- $N$ : número de piezas de la mano inicial para cada jugador.
- $\text{Domino}(M, N)$ .

## Tabla de Resultados

Juego	$N$	$I$	Iteraciones	$u(\sigma)$	$\varepsilon_\sigma$ (%)	Resuelto
Domino(2, 2)	7.321	102	540.186.366	2,4000	0,0000	✓
Domino(3, 2)	46.534.657	88.947	400.047.334	2,8767	0,0315	✓
Domino(3, 3)	246.760.993	107.854	72.492.951	2,1539	0,3854	✓
Domino(3, 4)	1.547.645.185	104.050	11.213.463	3,2034	1,4871	✗

# Dominó

- Versión para dos jugadores.
- $M$ : máximo número de puntos en una cara de una pieza.
- $N$ : número de piezas de la mano inicial para cada jugador.
- $\text{Domino}(M, N)$ .

## Tabla de Resultados

Juego	$N$	$I$	Iteraciones	$u(\sigma)$	$\varepsilon_\sigma$ (%)	Resuelto
Domino(2, 2)	7.321	102	540.186.366	2,4000	0,0000	✓
Domino(3, 2)	46.534.657	88.947	400.047.334	2,8767	0,0315	✓
Domino(3, 3)	246.760.993	107.854	72.492.951	2,1539	0,3854	✓
Domino(3, 4)	1.547.645.185	104.050	11.213.463	3,2034	1,4871	✗

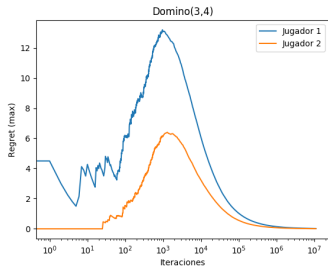
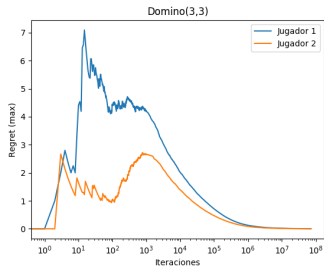
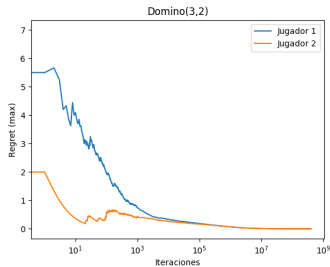
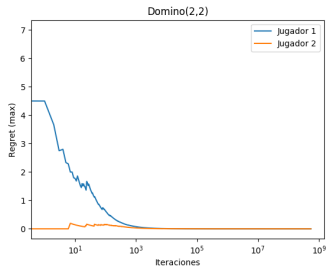
# Dominó

- Versión para dos jugadores.
- $M$ : máximo número de puntos en una cara de una pieza.
- $N$ : número de piezas de la mano inicial para cada jugador.
- $\text{Domino}(M, N)$ .

## Tabla de Resultados

Juego	$N$	$I$	Iteraciones	$u(\sigma)$	$\varepsilon_\sigma$ (%)	Resuelto
Domino(2, 2)	7.321	102	540.186.366	2,4000	0,0000	✓
Domino(3, 2)	46.534.657	88.947	400.047.334	2,8767	0,0315	✓
Domino(3, 3)	246.760.993	107.854	72.492.951	2,1539	0,3854	✓
Domino(3, 4)	1.547.645.185	104.050	11.213.463	3,2034	1,4871	✗

# Dominó



# Experimentos Nuevos

## Experimentos Nuevos

- Juegos no resueltos con 10 horas de entrenamiento.

## Experimentos Nuevos

- Juegos no resueltos con 10 horas de entrenamiento.
- 200 horas de entrenamiento.



# Experimentos Nuevos

- Juegos no resueltos con 10 horas de entrenamiento.
- 200 horas de entrenamiento.

## Tabla de Resultados

Juego	$N$	$I$	Iteraciones	$u(\sigma)$	$\varepsilon_\sigma$ (%)	Resuelto
Dudo(4, 2, 2)	13.107.101	327.680	2.276.259	0,00875	0,2382	✓
Dudo(5, 2, 2)	471.858.976	7.864.320	133.863	-0,00004	1,7695	✗
Dudo(6, 1, 2)	66.060.163	1.769.472	543.485	-0,597	0,5102	✓
Dudo(6, 2, 1)	66.060.163	1.769.472	513.786	0,597	0,6727	✓
Domino(3, 4)	1.547.645.185	104.050	365.484.932	3.2027	0,1812	✓

# Experimentos Nuevos

- Juegos no resueltos con 10 horas de entrenamiento.
- 200 horas de entrenamiento.

## Tabla de Resultados

Juego	$N$	$I$	Iteraciones	$u(\sigma)$	$\varepsilon_\sigma$ (%)	Resuelto
Dudo(4, 2, 2)	13.107.101	327.680	2.276.259	0,00875	0,2382	✓
Dudo(5, 2, 2)	471.858.976	7.864.320	133.863	-0,00004	1,7695	✗
Dudo(6, 1, 2)	66.060.163	1.769.472	543.485	-0,597	0,5102	✓
Dudo(6, 2, 1)	66.060.163	1.769.472	513.786	0,597	0,6727	✓
Domino(3, 4)	1.547.645.185	104.050	365.484.932	3.2027	0,1812	✓

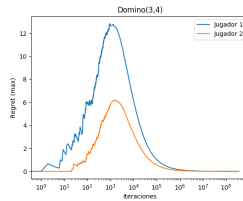
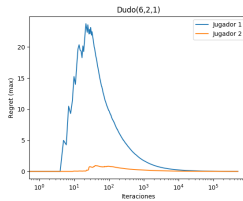
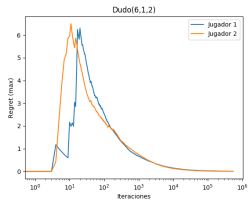
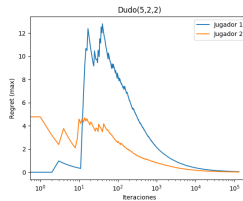
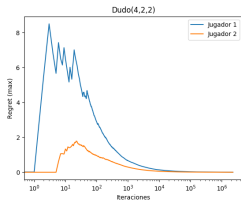
# Experimentos Nuevos

- Juegos no resueltos con 10 horas de entrenamiento.
- 200 horas de entrenamiento.

## Tabla de Resultados

Juego	$N$	$I$	Iteraciones	$u(\sigma)$	$\varepsilon_\sigma$ (%)	Resuelto
Dudo(4, 2, 2)	13.107.101	327.680	2.276.259	0,00875	0,2382	✓
Dudo(5, 2, 2)	471.858.976	7.864.320	133.863	-0,00004	1,7695	✗
Dudo(6, 1, 2)	66.060.163	1.769.472	543.485	-0,597	0,5102	✓
Dudo(6, 2, 1)	66.060.163	1.769.472	513.786	0,597	0,6727	✓
Domino(3, 4)	1.547.645.185	104.050	365.484.932	3.2027	0,1812	✓

# Experimentos Nuevos



# Conclusiones

# Conclusiones

- ① La forma normal y forma extensiva son modelos adecuados para representar juegos con información incompleta y no determinista.

# Conclusiones

- ① La forma normal y forma extensiva son modelos adecuados para representar juegos con información incompleta y no determinista.
- ② El equilibrio de Nash es el principal concepto de solución utilizado para juegos de dos jugadores de suma cero.

# Conclusiones

- ① La forma normal y forma extensiva son modelos adecuados para representar juegos con información incompleta y no determinista.
- ② El equilibrio de Nash es el principal concepto de solución utilizado para juegos de dos jugadores de suma cero.
- ③ Los algoritmos de Regret Matching y Counterfactual Regret Minimization son efectivos para encontrar una aproximación a un equilibrio de Nash en el tipo de juego mencionado.



# Conclusiones

- ① La forma normal y forma extensiva son modelos adecuados para representar juegos con información incompleta y no determinista.
- ② El equilibrio de Nash es el principal concepto de solución utilizado para juegos de dos jugadores de suma cero.
- ③ Los algoritmos de Regret Matching y Counterfactual Regret Minimization son efectivos para encontrar una aproximación a un equilibrio de Nash en el tipo de juego mencionado.
- ④ Se utilizó la explotabilidad como métrica para medir la distancia entre una estrategia y un equilibrio de Nash.

# Conclusiones

- 1 La forma normal y forma extensiva son modelos adecuados para representar juegos con información incompleta y no determinista.
- 2 El equilibrio de Nash es el principal concepto de solución utilizado para juegos de dos jugadores de suma cero.
- 3 Los algoritmos de Regret Matching y Counterfactual Regret Minimization son efectivos para encontrar una aproximación a un equilibrio de Nash en el tipo de juego mencionado.
- 4 Se utilizó la explotabilidad como métrica para medir la distancia entre una estrategia y un equilibrio de Nash.
- 5 Se resolvieron diversos juegos captados por el modelo, incluyendo una versión del juego de dominó.

# Conclusiones

- 1 La forma normal y forma extensiva son modelos adecuados para representar juegos con información incompleta y no determinista.
- 2 El equilibrio de Nash es el principal concepto de solución utilizado para juegos de dos jugadores de suma cero.
- 3 Los algoritmos de Regret Matching y Counterfactual Regret Minimization son efectivos para encontrar una aproximación a un equilibrio de Nash en el tipo de juego mencionado.
- 4 Se utilizó la explotabilidad como métrica para medir la distancia entre una estrategia y un equilibrio de Nash.
- 5 Se resolvieron diversos juegos captados por el modelo, incluyendo una versión del juego de dominó.

# Recomendaciones

# Recomendaciones

- 1 Resolver instancias mayores del juego de dominó para 2 personas considerando abstracciones.

# Recomendaciones

- ① Resolver instancias mayores del juego de dominó para 2 personas considerando abstracciones.
- ② Experimentos sobre el juego para 4 personas considerando cada pareja como un único jugador.

# Recomendaciones

- ① Resolver instancias mayores del juego de dominó para 2 personas considerando abstracciones.
- ② Experimentos sobre el juego para 4 personas considerando cada pareja como un único jugador.

**Demo**



**Gracias por  
su atención**

**¿Preguntas?**