Segitiga Samasisi*

Prihandoko Rudi

December 30, 2019

Segitiga sama sisi adalah salah satu segitiga yang istimewa, baik bentuknya maupun sifat-sifatnya. Segitiga sama sisi memiliki ketiga sudut dalam yang sama besar yaitu sebesar $60°$. Ketiga sisinya, sesuai namanya, memiliki panjang yang sama. Mengikuti penamaan poligon, segitiga sama sisi disebut juga segitiga regular.

Sifat-sifat Segitiga Sama Sisi

Beberapa sifat yang tidak asing dimiliki segitiga sama sisi (dengan panjang sisi a) adalah sebagai berikut.

1. Semua sudutnya sama besar (equiangular). Akibatnya, semua segitiga sama sisi saling sebangun.
2. Garis tinggi, garis berat, garis bagi, dan garis sumbu dari satu sudut (atau sisi yang bersesuaian) berhimpit. Artinya, garis tinggi juga merupakan garis berat, dst.
3. Ketiga garis tinggi (garis berat, garis bagi, dst) sama panjang.
4. Keliling segitiga $3a$.
5. Tinggi segitiga $a\frac{\sqrt{3}}{2}$.
6. Luas segitiga $\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$.
7. Jari-jari lingkaran luarnya adalah $R = \frac{a}{\sqrt{3}}$
8. Jari-jari lingkaran singgung dalamnya adalah $r = \frac{a}{\sqrt{6}}$
9. Ketaksamaan $R \geq 2r$ mencapai kesamaan, yaitu $2R = r$.

Keliling dan Luas segitiga sama sisi

Keliling segitiga sama sisi mudah dihitung sebab panjang sisinya ketiganya sama. Jika sisinya a, maka kelilingnya $3a$. Untuk menghitung luas segitiga sama sisi, akan kita hitung dengan tiga cara. Cara pertama adalah dengan menghitung tingginya terlebih dahulu.

*Hingga tulisan ini dibuat, penulis masih belum yakin apakah penulisan yang benar adalah segitiga sama sisi atau segitiga samasisi.

Cara 1

Perhatikan gambar berikut.

$$GAMBAR$$

Dengan teorema Phytagoras, diperoleh

$$h^2 = a^2 - (a/2)^2 = (3/4)a^2.$$

Karena panjang tidak boleh bernilai negatif, maka $h = \sqrt{(3/4)a^2} = \sqrt{3}/2\,a$. Berikutnya, untuk menghitung luas, cukup digunakan rumus luas yang sudah kita ketahui yaitu $L = \frac{1}{2}ah$ dengan h adalah tingginya. Diperoleh

$$L = \frac{1}{2}ah = \frac{1}{2} \times a \times \frac{\sqrt{3}}{2}a = \frac{\sqrt{3}}{4}a^2.$$

Cara 2

Cara ini menggunakan rumus luas segitiga yang menggunakan sudut dan dua sisi yang diapitnya, yaitu $L = \frac{1}{2}ab\sin C$. Rumus ini mudah digunakan sebab sudut yang dipunyai segitiga sama sisi mudah dihitung nilai sinusnya.

$$\begin{aligned} L &= \frac{1}{2}a \times a \times \sin 60^\circ \\ &= \frac{1}{2}a^2 \times \frac{1}{2}\sqrt{3} \\ &= \frac{\sqrt{3}}{4}a^2. \end{aligned}$$

Cara 3

Kali ini kita akan menggunakan formula Heron, yaitu $L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ dengan $s = (a+b+c)/2$. Hal ini juga mudah dilakukan sebab ketiga sisinya sama panjang sehingga mudah didapatkan $s = (a+a+a)/2 = (3/2)a$ dan $s - a = (1/2)a$. Akibatnya,

$$L = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)} = \sqrt{(3/2)a \times (1/2)a \times (1/2)a \times (1/2)a} = \sqrt{(3/16)a^4} = (\sqrt{3}/4)a^2.$$

Beberapa Teorema Terkait

Ada beberapa teorema menarik mengenai segitiga sama sisi diantara teorema Viviani, teorema Van Schooten, dan segitiga Napoleon. Beberapa dari teorema tersebut akan dibuktikan, sedangkan lainnya akan digunakan sebagai latihan.
Teorema. Diberikan segitiga sama sisi ABC dan titik P titik dalamnya. Jumlah jarak dari titik tersebut ke ketiga sisi, sama besar

Perhatikan ilustrasi berikut.

GAMBAR

Dengan menggunakan fakta bahwa ketiga garis tinggi dari suatu segitiga sama sisi sama panjang, bukti bisa disusun dengan mudah.

Teorema Van Schooten

Teorema ini membahas satu kasus khusus segitiga sama sisi dengan satu titik yang terletak pada lingkaran luarnya.

Teorema. Diberikan segitiga ABC. Titik P pada lingkaran luar ABC, pada busur BC yang tidak memuat A. Maka berlaku $PA = PB + PC$.

Bukti. Apabila P berada pada lingkaran luar ABC, kita bisa mengaplikasikan teorema Ptolomeus pada segiempat talibusur $ABPC$. Diperoleh

$$AB \times PC + AC \times PB = AP \times BC.$$

Namun karena $AB = AC = BC$, maka persamaan tersebut bila dibagi dengan AB menjadi $PC + PB = PA$.

Teorema ini bisa diperluas dengan cukup cantik mengingat buktinya menggunakan teorema Ptolomeus, yang juga bisa diperluas.

Akibat 1. Diberikan segitiga ABC dan titik P pada bidang. Berlaku ketaksamaan $PB + PC \geq PA$.

Akibat 2. Diberikan segitiga ABC dan titik P tidak terletak pada lingkaran luar ABC. Terdapat segitiga dengan panjang sisi PA, PB, dan PC.

Segitiga sama sisi dan segitiga lainnya

Segitiga sama-sisi juga sering menjadi objek yang menarik karena panjang sisi dan sudutnya. Misalnya Segitiga Napoleon yang menyebutkan konstruksi segitiga sama sisi pada segitiga sembarang, atau digunakan sebagai alat untuk membuktikan suatu permasalahan, bahkan teorema. Beberapa di antaranya adalah sebagai berikut.

Segitiga Napoleon

Diberikan segitiga ABC. Segitiga-segitiga

Problem

1. Titik P berada di dalam segitiga sama sisi ABC. Misalkan h_a, h_b, dan h_c berturut-turut adalah jarak P ke sisi BC, CA, dan AB; misalkan h adalah tinggi segitiga. Buktikan bahwa $h = h_a + h_b + h_c$.
(Teorema Viviani)

2. Titik P berada di dalam segitiga ABC yang mempunyai pusat lingkaran luar O. Buktikan bahwa
$$PA^2 + PB^2 + PC^2 = 3PO^2 + OA^2 + OB^2 + OC^2.$$

3. Diberikan persegi panjang $ABCD$ dan titik P pada segmen BC dan Q pada segmen CD sedemikian sehingga segitiga APQ sama sisi. Misalkan panjang $AB = a$ dan $AD = b$.
   (a) Tentukan masing-masing panjang BP dan DQ dalam a dan b.
   (b) Buktikan bahwa jumlah luas segitiga ABP dan ADQ sama dengan luas segitiga PQC.

4. Suatu garis membagi segitiga sama sisi menjadi dua bagian yang memiliki keliling yang sama dengan luas masing-masing S_1 dan $\S_2$. Buktikan bahwa
$$\frac{7}{9} \leq \frac{S_1}{S_2} \leq \frac{9}{7}.$$