Perspektif Lain dari Segiempat Talibusur Harmonik

Prihandoko Rudi

24 Desember 2019

Anda mungkin pernah mendengar kata harmonik, rasio harmonik. Kali ini kita akan membahas tentang segiempat khusus yaitu segiempat harmonik, namun bukan dari perspektif harmoniknya, namun dari perspektif geometri klasiknya. Untuk yang belum pernah mendengar segiempat harmonik, no worries! Kita akan mulai dengan melihat banyak sekali segitiga sebangun. Pengetahuan yang dibutuhkan hanyalah kesebangunan dua segitiga dan beberapa pengetahuan dasar setingkat sekolah menengah pertama.

Segiempat talibusur

Suatu segiempat dikatakan segiempat talibusur apabila keempat titiknya terletak pada satu lingkaran yang sama.

Teorema. Suatu segiempat $ABCD$ adalah segempat talibusur jika sudut-sudut yang berhadapan berjumlah 180 derajat atau sudut-sudut yang menghadap busur yang sama besarnya sama.

Bukti. Bukti diserahkan kepada pembaca sebagai latihan.

Berikutnya, kita akan mulai dengan konfigurasi yang akan sering sama. Agar tidak terlihat menyeramkan, untuk sementara kita sebut saja segiempat cantik. Segiempat cantik ini sering disebut segiempat harmonik.

Segiempat Talibusur Cantik

Diberikan segiempat talibusur $ABCD$ konveks. Segiempat $ABCD$ disebut segiempat cantik jika

$$\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD}.$$

Teorema. Diberikan suatu lingkaran dan titik-titik B dan D pada lingkaran. Misalkan titik P berada di luar lingkaran sehingga garis PB dan PD keduanya adalah garis singgung lingkaran. Misalkan A dan C titik pada lingkaran sehingga P, A, dan C segaris, dengan C

lebih dekat ke P daripada A. Maka segiempat talibusur $ABCD$ adalah segiempat cantik.

Bukti. Karena A dan C segaris, kita peroleh bahwa $\angle APB = \angle BPC$. Di sisi lain, berdasarkan teorema segmen alternatif, kita juga punya $\angle PBC = \angle BAC$. Akibatnya kedua segitiga $\triangle APB$ dan segitiga $\triangle BPC$ sebangun berdasarkan sudut-sudut-sudut (lihat kesebangunan segitiga). Akibatnya $\frac{PA}{PB} = \frac{PB}{PC} = \frac{AB}{BC}$ atau kalau diambil sebagian $\frac{PA}{PB} = \frac{AB}{BC}$ Dengan cara yang sama bisa diperoleh $\frac{PA}{PD} = \frac{AD}{DC}$ Lebih jauh, karena PB dan PD merupakan garis singgung suatu lingkaran dari titik yang sama, maka

$$\frac{AB}{BC} = \frac{AD}{DC}.$$

Kebalikan dari teorema ini juga berlaku, namun dalam bentuk yang sedikit berbeda.

Teorema. Diberikan segiempat talibusur $ABCD$ dan P di luar lingkaran sehingga PB dan PD garis singgung lingkaran luar $ABCD$. Jika $ABCD$ adalah segiempat cantik, maka P, A, dan C kolinear.

Bukti. Misalkan C' adalah titik pada lingkaran, pada busur BD yang tidak memuat A sehingga P, A, dan C' segaris. Menurut teorema sebelumnya, kita punya $\frac{AB}{BC'} = \frac{AD}{DC'}$ atau jika ditulis ulang $\frac{AB}{AD} = \frac{BC'}{DC'}$. Di sisi lain, segiempat $ABCD$ cantik maka $\frac{AB}{AD} = \frac{BC}{DC}$. Dari kedua persamaan tersebut, kita simpulkan

$$\frac{BC'}{DC'} = \frac{BC}{DC}.$$

Karena C dan C' berada di talibusur yang sama, maka haruslah $C = C'$. Dengan demikian P, A, dan C segaris.

Akibat

Akibat dari teorema ini cukup menarik. Kita bisa mengeksplorasi cukup banyak dari diagram dengan menambahkan beberapa titik.

Akibat. 1 Diberikan segiempat talibusur $ABCD$. Misalkan P adalah perpotongan antara garis singgung lingkaran yang melalui B dan D; misalkan Q adalah perpotongan antara garis singgung lingkaran yang melalui A dan C. Titik-titik P, A, dan C segaris jika dan hanya jika Q, B, D segaris.

Latihan

Soal 1. Buktikan Akibat 1.

Soal 2. Diberikan segiempat talibusur $ABCD$. Misalkan P adalah perpotongan antara garis singgung lingkaran yang melalui B dan D; misalkan Q adalah perpotongan antara garis singgung lingkaran yang melalui A dan C. Misalkan X adalah perpotongan AB dan DC; misalkan Y adalah perpotongan AD dan BC. Buktikan bahwa P, Q, X, dan Y segaris.

Soal 3. Diberikan segiempat talibusur $ABCD$ sedemikian sehingga

$$\frac{AB}{AD} = \frac{CB}{CD}.$$

Misalkan titik M adalah titik tengah talibusur AC. Tunjukkan bahwa AC adalah garis bagi sudut BMD.

Soal 4. Diberikan segitiga sama kaki ABC dengan $AB = AC$. Titik P berada di dalam segitiga sedemikian hingga

$$\angle ABP = \angle PCB \quad \text{dan} \quad \angle ACP = \angle PCB.$$

Misalkan M adalah titik tengah BC. Tunjukkan bahwa $\angle APB + \angle MPC = \pi$.