



IEL – protokol k projektu

Rudolf Jurišica
xjuris02

18. prosince 2021

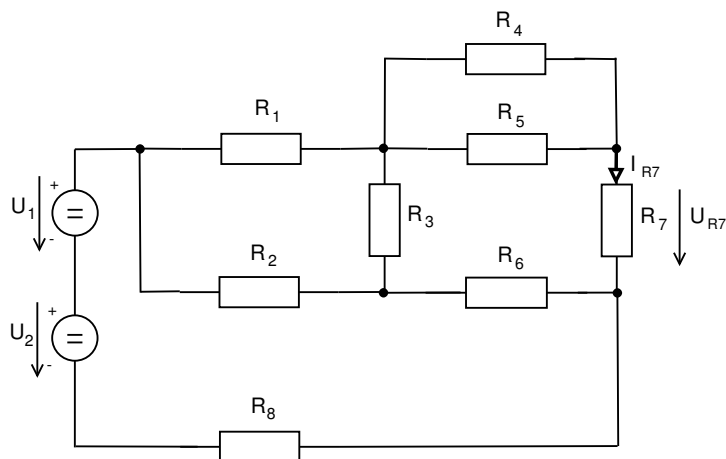
Obsah

1	Příklad 1	2
1.1	Zjednodušení obvodu na R_{ekv}	2
1.2	Výpočet celkového proudu a dosazení	4
2	Příklad 2	6
2.1	Zjednodušení obvodu pomocí Théveninova teorému	6
2.2	Dosazení a výpočet R_1 a I_1	7
3	Příklad 3	8
3.1	Nahrazení napěťového zdroje za proudový zdroj	8
3.2	Počítání matic a determinantů	9
3.3	Dosazení	10
4	Příklad 4	11
4.1	Sestavení a vyjádření smyčkových proudů	11
4.2	Výpočet smyčkových proudů	12
5	Příklad 5	13
5.1	Sestavení diferenciální rovnice	13
5.2	Dosazení čísel	14
5.3	Kontrola výpočtu	15
6	Shrnutí výsledků	16

Příklad 1

Stanovte napětí U_{R7} a proud I_{R7} . Použijte metodu postupného zjednodušování obvodu.

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]	R_6 [Ω]	R_7 [Ω]	R_8 [Ω]
E	115	55	485	660	100	340	575	815	255	225



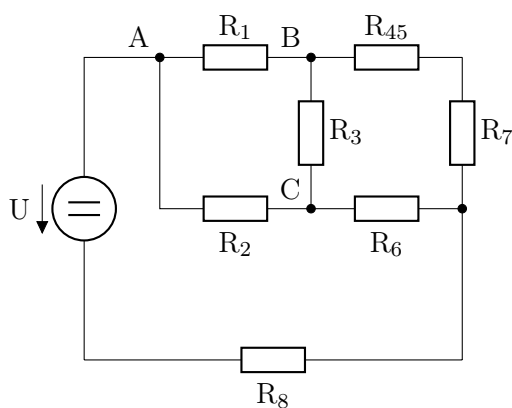
Zjednodušení obvodu na R_{ekv}

Sečtení sériově zapojených napěťových zdrojů:

$$U = U_1 + U_2 = (115 + 55) = 170 \text{ V}$$

a zjednodušení rezistorů R_3 a R_4 na:

$$R_{45} = \frac{R_4 \times R_5}{R_4 + R_5} \Rightarrow R_{45} = \frac{340 \times 575}{340 + 575} = 213.6612 \Omega$$

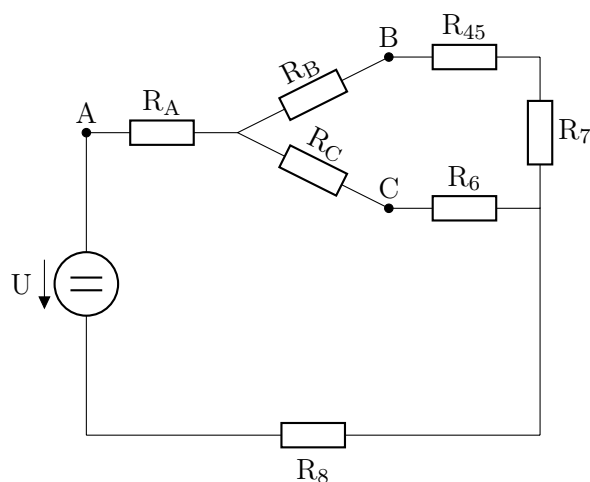


$$R_A = \frac{R_1 \times R_2}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{485 \times 660}{485 + 660 + 100} = 257.1084 \, \Omega$$

$$R_B = \frac{R_1 \times R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{485 \times 100}{485 + 660 + 100} = 38.9558 \, \Omega$$

$$R_C = \frac{R_2 \times R_3}{R_1 + R_2 + R_3} = \frac{660 \times 100}{485 + 660 + 100} = 53.012 \, \Omega$$

Transfigurace trojúhelník \rightarrow hvězda.

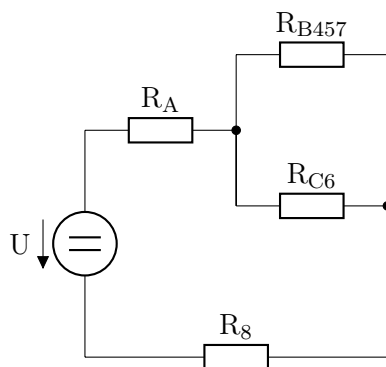


Zjednodušení rezistorů R_B , R_{45} a R_7 v sérii do jednoho:

$$R_{B457} = R_B + R_{45} + R_7 = (38.9558 + 213.6612 + 255) = 507.617 \, \Omega$$

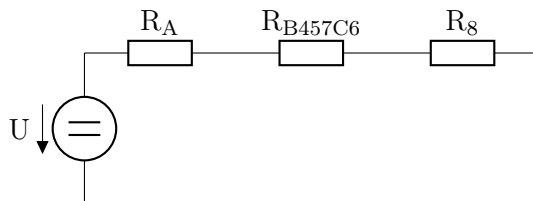
a rezistorů R_C a R_6 :

$$R_{C6} = R_C + R_6 = (53.012 + 815) = 868.012 \, \Omega$$



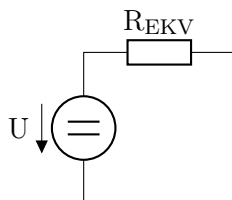
Zjednodušení rezistorů R_{B457} a R_{C6} zapojených paralelně do

$$R_{B457C6} = \frac{R_{B457} \times R_{C6}}{R_{B457} + R_{C6}} = \frac{507.617 \times 868.012}{507.617 + 868.012} = 320.3027 \Omega$$



Konečný výpočet R_{EKV} (sériově zapojené rezistory R_A , R_{B457C6} a R_8)

$$R_{EKV} = R_A + R_{B457C6} + R_8 = (257.1084 + 320.3027 + 225) = 802.4111 \Omega$$



Výpočet celkového proudu a dosazení

Celkový proud vypočítáme Ohmovým zákonem dosazením R_{EKV} do rovnice:

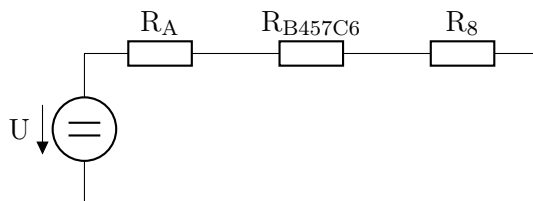
$$I = \frac{U_{12}}{R_{EKV}} = \frac{170}{802.4111} = 0.2119 \text{ A}$$

Dále potřebujeme vypočítat napětí na R_{B357C6} , abychom následně mohli vypočítat proud I_{R7} :

$$U_{RA} = R_A \times I = 257.1084 \times 0.2119 = 54.4813 \text{ V}$$

$$U_{R8} = R_8 \times I = 225 \times 0.2119 = 47.6775 \text{ V}$$

$$U_{RB457C6} = U_{12} - U_{RA} - U_{R8} = (170 - 54.4813 - 47.6775) = 67.8412 \text{ V}$$

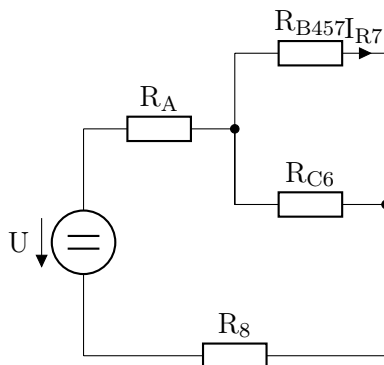


Výpočet I_{R7} za pomoci Ohmova zákona a II. Kirchhoffova zákona:

$$I_{R7} = \frac{U_{RB457C6}}{R_{B457}} = \frac{67.8412}{507.617} = 0.1336 \text{ A}$$

a následně U_{R7} dosazením:

$$U_{R7} = R_7 \times I_{R7} = 255 \times 0.1336 = 34.068 \text{ V}$$

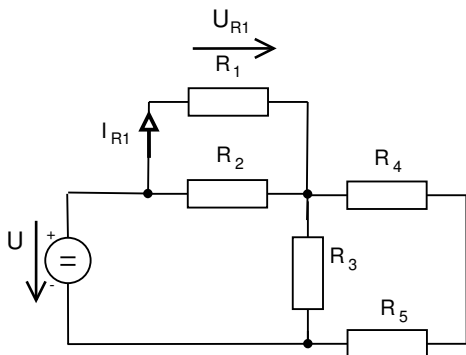


P.S. Napětí U_{R7} mi ve Fastladu vyšlo 34.089 V, nejspíše je to dáno tím, že jsem zaokrouhloval mezivýsledky, avšak zaokrouhloval jsem je na 4 desetinná místa, jak bylo v instrukcích.

Příklad 2

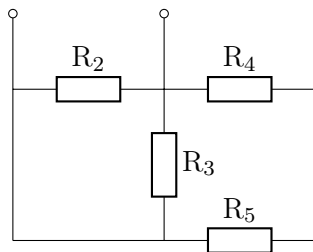
Stanovte napětí U_{R1} a proud I_{R1} . Použijte metodu Théveninovy věty.

sk.	U [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
H	220	190	360	580	205	560



Zjednodušení obvodu pomocí Théveninova teorému

Napěťový zdroj nahradíme zkratem a rezistor R_1 odpojíme.



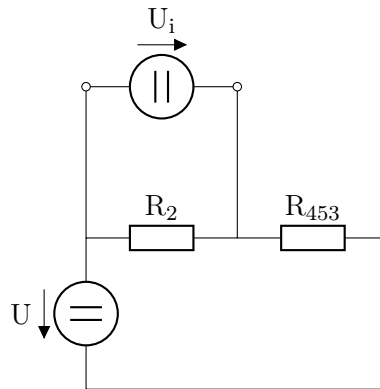
Převedení sériově zapojených rezistorů R_4 a R_5 do jednoho:

$$R_{45} = R_4 + R_5 = (205 + 560) = 765 \, \Omega$$

a následně paralelně zapojených rezistorů R_{45} a R_3 do jednoho:

$$R_{453} = \frac{R_{45} \times R_3}{R_{45} + R_3} = \frac{765 \times 580}{765 + 580} = 329.8885 \, \Omega$$

a připojíme voltmetr U_i a napěťový zdroj U



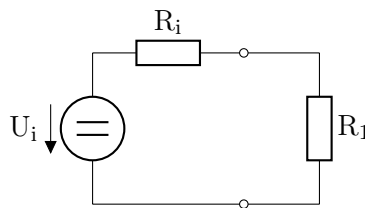
Spočítáme proud U_i z rovnice

$$U_i = U \times \frac{R_2}{R_2 + R_{453}} = 220 \times \frac{360}{360 + 329.8885} = 114.8012 \text{ V}$$

Zjednodušení rezistorů R_2 a R_{453} do jednoho:

$$R_i = \frac{R_{453} \times R_2}{R_{453} + R_2} = \frac{329.8885 \times 360}{329.8885 + 360} = 172.1436 \text{ } \Omega$$

a připojení rezistoru R_1



Dosazení a výpočet R_1 a I_1

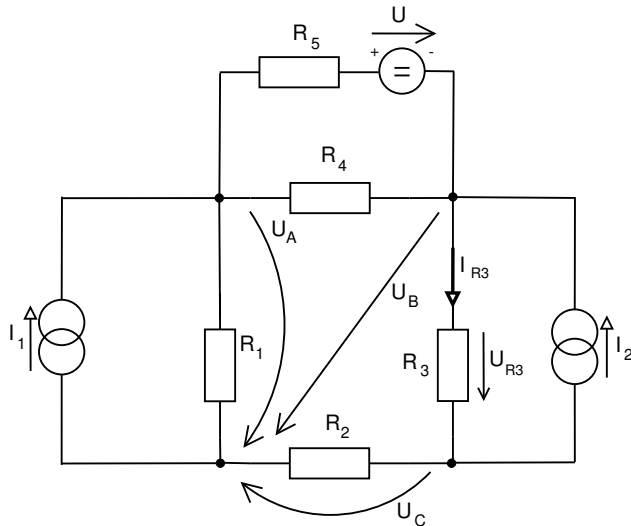
$$I_{R1} = \frac{U_i}{R_i + R_1} = \frac{114.8012}{172.1436 + 190} = 0.317 \text{ A}$$

$$U_{R1} = R_1 \times I_{R1} = 190 \times 0.317 = 60.23 \text{ V}$$

Příklad 3

Stanovte napětí U_{R3} a proud I_{R3} . Použijte metodu uzlových napětí (U_A , U_B , U_C).

sk.	U [V]	I_1 [A]	I_2 [A]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	R_3 [Ω]	R_4 [Ω]	R_5 [Ω]
E	135	0.55	0.65	52	42	52	42	21

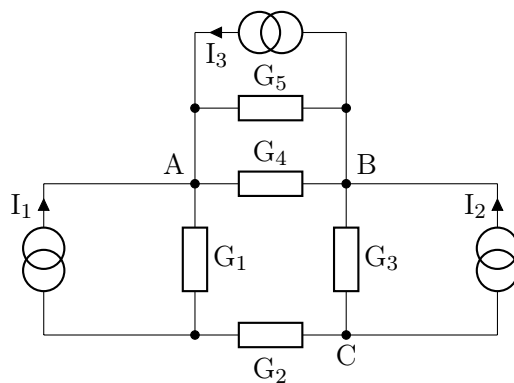


Nahrazení napěťového zdroje za proudový zdroj

Nahradíme si napěťový zdroj za proudový I_3 , pro který platí:

$$I_3 = G_5 \times U = \frac{21}{135} = 0.1556 \text{ A}$$

$$G = \frac{1}{R}$$



Proudy rozložíme na součin odporů a uzlových napětí:

$$G_5(U_A - U_B) - G_4(U_A - U_B) - G_1 U_A = -I_1$$

$$-G_3(U_B - U_C) + G_4(U_A - U_B) = -I_A$$

$$G_3(U_B - U_C) - G_2 U_C = I_2$$

Vytkneme si jednotlivá napětí:

$$U_A(G_5 - G_4 - G_1) + U_B(-G_5 + G_4) = -I_1$$

$$U_A(G_4) + U_B(-G_3 - G_4) + U_C(G_3) = -I_2$$

$$U_B(G_3) + U_C(-G_3 - G_2) = I_2$$

Vyjádríme si proudy:

$$I_{R1} = G_1 \times U_A$$

$$I_{R2} = G_2 \times U_C$$

$$I_{R3} = G_3 \times (U_B - U_C)$$

$$I_{R4} = G_4 \times (U_A - U_B)$$

$$I_{R3} = G_5 \times (U_A - U_B)$$

Nyní vytvoříme rovnice pro uzly (proudy, které protékají uzly A, B a C):

$$A : I_1 + I_{R5} - I_{R4} - I_{R1} = 0$$

$$B : I_2 - I_{R3} + I_{R4} = 0$$

$$C : I_{R3} - I_{R2} - I_2 = 0$$

Soustavu rovnic převedeme do matic ve formě $Ax = B$

A je matice odporů, x je matice napětí a B je matice výsledných proudů

$$\begin{pmatrix} G_5 - G_4 - G_1 & -G_5 + G_4 & 0 \\ G_4 & -G_3 - G_4 & G_3 \\ 0 & G_3 & -G_3 - G_2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -I_1 \\ -I_2 \\ I_2 \end{pmatrix}$$

Počítání matic a determinantů

Dosazení do matice:

$$\begin{pmatrix} \frac{5}{1092} & -\frac{1}{42} & 0 \\ \frac{1}{42} & -\frac{47}{1092} & \frac{1}{52} \\ 0 & \frac{1}{52} & -\frac{47}{1092} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} U_A \\ U_B \\ U_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{11}{20} \\ -\frac{13}{20} \\ \frac{13}{20} \end{pmatrix}$$

Vypočítáme determinanty $\Delta, \Delta_B, \Delta_C$ pomocí Sarrusova pravidla:

$$\Delta = \begin{vmatrix} \frac{5}{1092} & -\frac{1}{42} & 0 \\ \frac{1}{42} & -\frac{47}{1092} & \frac{1}{52} \\ 0 & \frac{1}{52} & -\frac{47}{1092} \end{vmatrix} = \left(\frac{11045}{1302170688} - \frac{5}{2952768} - \frac{47}{1926288} \right) = -\frac{1}{56784}$$

$$\Delta_B = \begin{vmatrix} \frac{5}{1092} & -\frac{11}{20} & 0 \\ \frac{1}{42} & -\frac{13}{20} & \frac{1}{52} \\ 0 & \frac{13}{20} & -\frac{47}{1092} \end{vmatrix} = \left(\frac{3055}{23849280} - \frac{65}{1135680} - \frac{517}{917280} \right) = -\frac{113}{229320}$$

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} \frac{5}{1092} & -\frac{1}{42} & -\frac{11}{20} \\ \frac{1}{42} & -\frac{47}{1092} & -\frac{13}{20} \\ 0 & \frac{1}{52} & -\frac{13}{20} \end{vmatrix} = \left(-\frac{3055}{23849280} - \frac{11}{43680} - \frac{65}{1135680} + \frac{13}{35280} \right) = \frac{1}{21804}$$

Dosazení

Využitím Cramerova pravidla vypočítáme uzlová napětí:

$$U_B = \frac{\Delta_B}{\Delta} = \frac{-\frac{113}{229320}}{-\frac{1}{56784}} = \frac{2938}{105} = 27.981 \text{ V}$$

$$U_C = U_{R2} = \frac{\Delta_C}{\Delta} = \frac{\frac{1}{21840}}{-\frac{1}{56784}} = -\frac{13}{5} = 2.6 \text{ V}$$

Vypočítáme napětí:

$$U_{R3} = U_B - U_C = \left(\frac{2938}{105} + \frac{13}{5} \right) = 30.581 \text{ V}$$

a proud

$$I_{R3} = \frac{U_{R3}}{R_3} = \frac{\frac{3211}{105}}{52} = 0.5881 \text{ A}$$

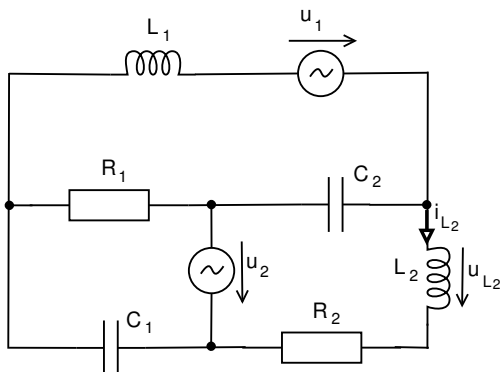
Příklad 4

Pro napájecí napětí platí: $u_1 = U_1 \cdot \sin(2\pi ft)$, $u_2 = U_2 \cdot \sin(2\pi ft)$.

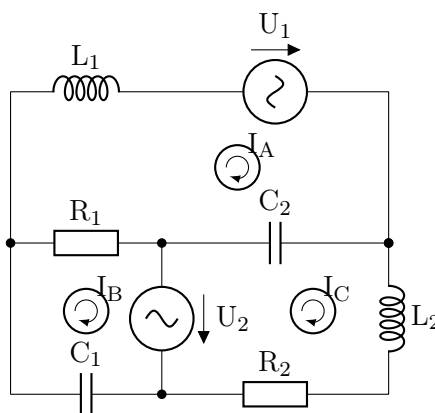
Ve vztahu pro napětí $u_{L_2} = U_{L_2} \cdot \sin(2\pi ft + \varphi_{L_2})$ určete $|U_{L_2}|$ a φ_{L_2} . Použijte metodu smyčkových proudů.

Pozn: Pomocné směry šipek napájecích zdrojů platí pro speciální časový okamžik ($t = \frac{\pi}{2\omega}$).

sk.	U_1 [V]	U_2 [V]	R_1 [Ω]	R_2 [Ω]	L_1 [mH]	L_2 [mH]	C_1 [μ F]	C_2 [μ F]	f [Hz]
E	5	3	14	13	130	60	100	65	90



Sestavení a vyjádření smyčkových proudů



Kondenzátory a cívky si převedeme na impedance pro snazší manipulaci s nimi pro počítání v matici.

$$\omega = 2\pi f \Rightarrow 2\pi \times 180 \Rightarrow 180\pi \text{ rad/s}$$

$$Z_{L1} = j\omega L_1 = 180\pi \times 0.13 = 73.5133j\omega$$

$$Z_{L2} = j\omega L_2 = 180\pi \times 0.06 = 33.9292j\omega$$

$$Z_{C1} = -\frac{j}{\omega C_1} = -\frac{j}{180\pi \times 100 \times 10^{-6}} = -17.6839j\omega$$

$$Z_{C2} = -\frac{j}{\omega C_2} = -\frac{j}{180\pi \times 65 \times 10^{-6}} = -27.206j\omega$$

Vyjádříme si smyčkové proudy:

$$I_A : Z_{L1}I_A + Z_{C2}(I_A - I_C) + R_1(I_A - I_B) = 0$$

$$I_B : R_1(I_B - I_A) + U_2 + Z_{C1}I_B = 0$$

$$I_C : (R_2 + Z_{L2})I_C + Z_{C2}(I_C - I_A) - U_2 = 0$$

Dále vytvoříme matici pro smyčkové proudy:

$$\begin{pmatrix} Z_{L1} + Z_{C2} + R_1 & -R_1 & -Z_{C2} \\ -R_1 & Z_{C1} + R_1 & 0 \\ -Z_{C2} & 0 & R_2 + Z_{L2} + Z_{C2} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -U_1 \\ -U_2 \\ U_2 \end{pmatrix}$$

Dosadíme hodnoty do matice:

$$\begin{pmatrix} 14 + 46.3073j & -14 & 27.206j \\ -14 & 14 - 17.6839j & 0 \\ 27.206j & 0 & 13 + 6.7232j \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} I_A \\ I_B \\ I_C \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Výpočet smyčkových proudů

Matice spočítáme pomocí Cramerova pravidla:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 14 + 46.3073j & -14 & 27.206j \\ -14 & 14 - 17.6839j & 0 \\ 27.206j & 0 & 13 + 6.7232j \end{vmatrix} = 18313.7764 - 2373.9837j$$

$$\Delta_C = \begin{vmatrix} 14 + 46.3073j & -14 & -5 \\ -14 & 14 - 17.6839j & -3 \\ 27.206j & 0 & 3 \end{vmatrix} = 4862.2219 + 4249.2548j$$

$$I_C = I_{L2} = \frac{\Delta_C}{\Delta} = \frac{4862.2219 + 4249.2548j}{18313.7764 - 2373.9837j} = (0.2315 + 0.262j)\text{A}$$

Vypočítáme napětí U_{L2} :

$$U_{L2} = I_{L2} \times Z_{L2} = (0.2315 + 0.262j) \times 33.9292j = (-8.8895 + 7.8546j)\text{V}$$

Vypočítáme $|U_{L2}|$ a φ_{L2} :

$$|U_{L2}| = \sqrt{\text{Re}(U_{L2})^2 + \text{Im}(U_{L2})^2} = \sqrt{(-8.8895)^2 + (7.8546)^2} = 11.8625 \text{ V}$$

$$\varphi_{L2} = \arctg\left(\frac{\text{Im}(U_{L2})}{\text{Re}(U_{L2})}\right) = \arctg\frac{7.8546}{-8.8895} = -0.7237\text{rad}$$

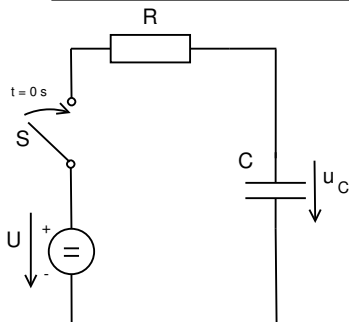
Protože jsme ve II. kvadrantu, musíme připočíst π :

$$\varphi_{L2} = \pi - 0.7237 = 2.4179\text{rad} = 138.5355^\circ$$

Příklad 5

V obvodu na obrázku níže v čase $t = 0$ [s] sepne spínač S . Sestavte diferenciální rovnici popisující chování obvodu na obrázku, dále ji upravte dosazením hodnot parametrů. Vypočítejte analytické řešení $u_C = f(t)$. Proveďte kontrolu výpočtu dosazením do sestavené diferenciální rovnice.

sk.	U [V]	R [Ω]	C [F]	$u_C(0)$ [V]
H	8	50	40	4



Sestavení diferenciální rovnice

Vytvoříme si rovnici pro napětí na kondenzátoru:

$$u'_C = \frac{i_C}{C}$$

Rovnici pro celkové napětí:

$$u_R + u_C = U \Rightarrow u_R = U - u_C$$

Rovnici pro proud:

$$i = \frac{u_R}{R}$$

Dosadíme rovnici pro proud:

$$u'_C = \frac{u_R}{R \cdot C}$$

Dosadíme rovnici pro u_R :

$$u'_C = \frac{U - u_C}{R \cdot C}$$

Vznikne nám diferenciální rovnice:

$$u'_C \cdot R \cdot C + u_C = U$$

u_C si nahradíme λ a u_C nahradíme 1 a vyjádříme:

$$u'_C = \lambda$$

$$u_C = 1$$

$$R \cdot C \cdot \lambda + 1 = 0$$

$$\lambda = -\frac{1}{R \cdot C}$$

$$\lambda = -\frac{1}{2000}$$

Počáteční podmínka:

$$u_C(0) = u_{Cp}$$

Očekávané řešení:

$$u_C(t) = K(t) \times e^{\lambda t}$$

$$u_C(t) = K(t) \times e^{-\frac{1}{R.C}t}$$

Zderivujeme u_C :

$$u'_C = K'(t) \times e^{-\frac{1}{R.C}t} + K(t) \times \left(-\frac{1}{R.C}\right) \times e^{-\frac{1}{R.C}t}$$

Dosadíme do diferenciální rovnice:

$$R \times C \times K'(t) \times e^{-\frac{1}{R.C}t} - K(t) \times e^{-\frac{1}{R.C}t} + K(t) \times e^{-\frac{1}{R.C}t} = U$$

Upravíme:

$$R \times C \times K'(t) \times e^{-\frac{1}{R.C}t} = U$$

$$K'(t) = \frac{U}{R.C} \times e^{\frac{1}{R.C}t}$$

Integrujeme:

$$K(t) = \frac{U}{R.C} \times R \times C \times e^{\frac{1}{R.C}t} + k$$

$$K(t) = U \times e^{\frac{1}{R.C}t} + k$$

Dosadíme do u_C :

$$u_C(t) = (U \times e^{\frac{1}{R.C}t} + k) \times e^{-\frac{1}{R.C}t}$$

$$u_C(t) = U + k \times e^{-\frac{1}{R.C}t}$$

Dosadíme počáteční podmínku $u_C(0) = u_{Cp}$:

$$u_{Cp} = U + k \times e^0 \Rightarrow k = u_{Cp} - U \Rightarrow k = 4 - 8 = -4$$

$$u_c(t) = U + (u_{Cp} - U) \times e^{-\frac{1}{R.C}t}$$

Dosazení čísel

$$K(t) = 8 \times e^{\frac{1}{2000}t} + k$$

$$K'(t) = \frac{8}{2000} \times e^{\frac{1}{2000}t}$$

Konečné vyjádření rovnice:

$$u_C(t) = 8 - 4 \times e^{-\frac{1}{2000}t}$$

Kontrola výpočtu

Zkontrolujeme si výpočet dosazením do diferenciální rovnice:

$$u'_C(t) = \frac{8}{2000} \times e^{\frac{1}{2000}t} \times e^{-\frac{1}{2000}t} + (8 \times e^{\frac{1}{2000}t} - 4) \times \left(-\frac{1}{2000}\right) \times e^{-\frac{1}{2000}t}$$

$$u_C(t) = 8 - 4 \times e^{-\frac{1}{2000}t}$$

$$2000u'_C + u_C = 8$$

$$2000\left(\frac{8}{2000} \times e^{\frac{1}{2000}t} \times e^{-\frac{1}{2000}t} + (8 \times e^{\frac{1}{2000}t} - 4) \times \left(-\frac{1}{2000}\right) \times e^{-\frac{1}{2000}t}\right) + (8 - 4 \times e^{-\frac{1}{2000}t}) = 8$$

$$4 \times e^{-\frac{1}{2000}t} + 8 - 4 \times e^{-\frac{1}{2000}t} = 8$$

$$8 = 8$$

Shrnutí výsledků

Příklad	Skupina	Výsledky	
1	E	$U_{R7} = 34.068 \text{ V}$	$I_{R7} = 0.1336 \text{ A}$
2	H	$U_{R1} = 60.23 \text{ V}$	$I_{R1} = 0.317 \text{ A}$
3	E	$U_{R3} = 30.581 \text{ V}$	$I_{R3} = 0.5881 \text{ A}$
4	E	$ U_{L2} = 11.8625 \text{ V}$	$\varphi_{L2} = 138.5355^\circ$
5	H	$u_C = u_C(t) = 8 - 4 \times e^{-\frac{1}{2000}t}$	