Planche 5 — Correction

Variance — Écart-type — Dispersion

Exercice 1

Série : 2; 4; 6.

a) Moyenne :

$$\overline{x} = \frac{2+4+6}{3} = 4.$$

b) Variance :

$$V = \frac{1}{3}\left[(2-4)^2 + (4-4)^2 + (6-4)^2\right] = \frac{1}{3}(4+0+4) = \frac{8}{3} \approx 2{,}67.$$

c) Écart-type :

$$\sigma = \sqrt{V} = \sqrt{\frac{8}{3}} \approx 1{,}63.$$

$\overline{x} = 4$; $V \approx 2{,}67$; $\sigma \approx 1{,}63$

d) Interprétation : les valeurs s'écartent en moyenne d'environ 1,6 unités autour de 4.

Exercice 2

Série : 5; 7; 7; 9.

a) Moyenne :

$$\overline{x} = \frac{5+7+7+9}{4} = \frac{28}{4} = 7.$$

b) Tableau :

x_i	5	7	7	9
$x_i - \overline{x}$	-2	0	0	2
$(x_i - \overline{x})^2$	4	0	0	4

c) Variance :

$$V = \frac{4+0+0+4}{4} = 2. \qquad \sigma = \sqrt{2} \approx 1{,}41.$$

$\overline{x} = 7$; $V = 2$; $\sigma \approx 1{,}41$

Exercice 3

x_i	8	10	12	16
n_i	3	5	4	2

a) Effectif total :

$$N = 3+5+4+2 = 14.$$

b) Moyenne :

$$\overline{x} = \frac{8\cdot 3 + 10\cdot 5 + 12\cdot 4 + 16\cdot 2}{14} = \frac{24+50+48+32}{14} = \frac{154}{14} = 11.$$

c) Variance :

$$V = \frac{1}{14}\left[3(8-11)^2 + 5(10-11)^2 + 4(12-11)^2 + 2(16-11)^2\right]$$

$$= \frac{1}{14}\left[3\cdot 9 + 5\cdot 1 + 4\cdot 1 + 2\cdot 25\right] = \frac{1}{14}(27+5+4+50) = \frac{86}{14} \approx 6{,}14.$$

d) Écart-type :

$$\sigma = \sqrt{6{,}14} \approx 2{,}48.$$

$\overline{x} = 11$; $V \approx 6{,}14$; $\sigma \approx 2{,}48$

Exercice 4

A : 12; 12; 12; 12 B : 8; 12; 12; 16.

a) Moyennes :

$$\overline{x}_A = 12, \qquad \overline{x}_B = \frac{8+12+12+16}{4} = 12.$$

$\overline{x}_A = \overline{x}_B = 12$

b) La série A est parfaitement homogène, donc $\sigma_A = 0$. La série B est dispersée, donc $\sigma_B > 0$.

Sans calcul : $\sigma_B > \sigma_A$

c) Variance de B :

$$V_B = \frac{1}{4}\left[(8-12)^2 + (12-12)^2 + (12-12)^2 + (16-12)^2\right]$$

$$= \frac{1}{4}(16+0+0+16) = 8. \qquad \sigma_B = \sqrt{8} \approx 2{,}83.$$

$$V_B = 8 \quad ; \quad \sigma_B \approx 2{,}83$$

Exercice 5

a) Si $y = x + 5$, alors tous les écarts à la moyenne restent identiques. Donc :

V ne change pas, et σ ne change pas.

Ajouter une constante : V et σ inchangés

b) Si $y = 3x$, alors les écarts sont multipliés par 3, donc les carrés par 9 :

$$V_y = 9V, \qquad \sigma_y = 3\sigma.$$

Multiplier par 3 : V est multipliée par 9 et σ par 3

c) Si $\sigma = 2{,}4$:

$$\sigma_y = 3 \times 2{,}4 = 7{,}2.$$

$$\sigma_{\textbf{nouveau}} = 7{,}2$$

Exercice 6

Temps : 10; 12; 15; 18; 25.

a) Moyenne :

$$\overline{x} = \frac{10+12+15+18+25}{5} = \frac{80}{5} = 16.$$

b) Variance :

$$V = \frac{1}{5}\left[(10-16)^2 + (12-16)^2 + (15-16)^2 + (18-16)^2 + (25-16)^2\right]$$
$$= \frac{1}{5}(36+16+1+4+81) = \frac{138}{5} = 27{,}6. \quad \sigma = \sqrt{27{,}6} \approx 5{,}25.$$

$$\overline{x} = 16 \quad ; \quad V = 27{,}6 \quad ; \quad \sigma \approx 5{,}25$$

c) Interprétation : un écart-type d'environ 5,3 minutes est assez grand par rapport à la moyenne 16. La série est donc plutôt dispersée (trajets assez différents).

Exercice 7

A : 5; 5; 5; 5; 5   B : 5; 5; 5; 5; 25.

a) Moyennes :

$$\overline{x}_A = 5, \qquad \overline{x}_B = \frac{5+5+5+5+25}{5} = \frac{45}{5} = 9.$$

b) Dispersion : A est totalement homogène ($\sigma_A = 0$). B contient une valeur extrême 25 : dispersion forte.

c) L'écart-type augmente fortement dès qu'une valeur est très éloignée de la moyenne : il « détecte » les valeurs extrêmes car les écarts sont mis au carré.

La série B est beaucoup plus dispersée (valeur extrême).

Exercice 8

a) Vrai. b) Faux (grand σ = série dispersée). c) Faux (ajouter une constante ne change pas σ). d) Faux : multiplier par 2 multiplie la variance par 4.

(a) V (b) F (c) F (d) F

Exercice 9

a) Le groupe 1 est plus homogène car $\sigma = 1{,}5$ est plus petit que 3,0.

Groupe 1 plus homogène

b) Interprétation : les notes du groupe 1 sont plus proches de la moyenne. Dans le groupe 2, les notes sont plus étalées autour de la moyenne.

c) Non : l'écart-type mesure la dispersion globale, mais ne donne pas directement les valeurs extrêmes. Il faudrait connaître min/max ou un diagramme en boîte.

On ne conclut pas sur les extrêmes avec σ seul.