

DS 3 – Statistiques descriptives

Corrigé : variance, écart-type, interprétation

55 min – Calculatrice autorisée – Corrigé

Rappels

Pour une série x_1, \dots, x_n :

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i, \quad \text{Var} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2, \quad \sigma = \sqrt{\text{Var}}.$$

Exercice 1 – Calcul complet

Série : 4, 6, 8, 10, 12, 14 (6 valeurs).

$$\bar{x} = \frac{4 + 6 + 8 + 10 + 12 + 14}{6} = \frac{54}{6} = 9.$$

Écarts à la moyenne : $-5, -3, -1, 1, 3, 5$. Carrés : 25, 9, 1, 1, 9, 25. Somme des carrés : $25 + 9 + 1 + 1 + 9 + 25 = 70$.

$$\text{Var} = \frac{70}{6} = \frac{35}{3} \approx 11,67, \quad \sigma = \sqrt{\frac{35}{3}} \approx 3,42.$$

$$\bar{x} = 9$$

$$\text{Var} = \frac{35}{3} \approx 11,67$$

$$\sigma \approx 3,42$$

Exercice 2 – Série pondérée

Table :

$$(5; 4), (8; 6), (10; 5), (15; 5), \quad N = 4 + 6 + 5 + 5 = 20.$$

Moyenne pondérée :

$$\bar{x} = \frac{5 \cdot 4 + 8 \cdot 6 + 10 \cdot 5 + 15 \cdot 5}{20} = \frac{20 + 48 + 50 + 75}{20} = \frac{193}{20} = 9,65.$$

Variance :

$$\text{Var} = \frac{1}{20} \left(4(5 - 9,65)^2 + 6(8 - 9,65)^2 + 5(10 - 9,65)^2 + 5(15 - 9,65)^2 \right).$$

Calculs :

$$(5 - 9,65)^2 = 21,6225, \quad (8 - 9,65)^2 = 2,7225,$$

$$(10 - 9,65)^2 = 0,1225, \quad (15 - 9,65)^2 = 28,6225.$$

Pondération :

$$4 \cdot 21,6225 = 86,49, \quad 6 \cdot 2,7225 = 16,335, \quad 5 \cdot 0,1225 = 0,6125, \quad 5 \cdot 28,6225 = 143,1125.$$

$$\text{Somme} : 86,49 + 16,335 + 0,6125 + 143,1125 = 246,55.$$

$$\text{Var} = \frac{246,55}{20} = 12,3275, \quad \sigma = \sqrt{12,3275} \approx 3,51.$$

$$\bar{x} = 9,65$$

$$\text{Var} \approx 12,33$$

$$\sigma \approx 3,51$$

Exercice 3 – Comparer deux séries

Série A : 8, 9, 10, 11, 12.

$$\bar{x}_A = \frac{8 + 9 + 10 + 11 + 12}{5} = \frac{50}{5} = 10.$$

Écarts : $-2, -1, 0, 1, 2$; carrés : 4, 1, 0, 1, 4; somme = 10.

$$\text{Var}_A = \frac{10}{5} = 2, \quad \sigma_A = \sqrt{2} \approx 1,41.$$

Série B : 5, 7, 10, 13, 15.

$$\bar{x}_B = \frac{5 + 7 + 10 + 13 + 15}{5} = \frac{50}{5} = 10.$$

Écarts : $-5, -3, 0, 3, 5$; carrés : 25, 9, 0, 9, 25; somme = 68.

$$\text{Var}_B = \frac{68}{5} = 13,6, \quad \sigma_B = \sqrt{13,6} \approx 3,69.$$

Conclusion : mêmes moyennes, mais dispersion plus grande pour B.

$$\bar{x}_A = \bar{x}_B = 10$$

$$\sigma_B > \sigma_A \Rightarrow \text{B plus dispersée}$$

Exercice 4 – Interprétation

1) « $\sigma = 3$ » signifie que les notes sont en moyenne à environ 3 points de la moyenne (dispersion).

2) 18 est à $18 - 12 = 6$ points de la moyenne, soit $6 = 2\sigma$: c'est une valeur assez éloignée.

3) Non, un écart-type est toujours ≥ 0 (racine carrée d'une variance).

4) $\text{Var} = \sigma^2 = 3^2 = 9$.

$$\text{Var} = 9$$

$$\sigma \geq 0$$

18 est à 2σ de la moyenne