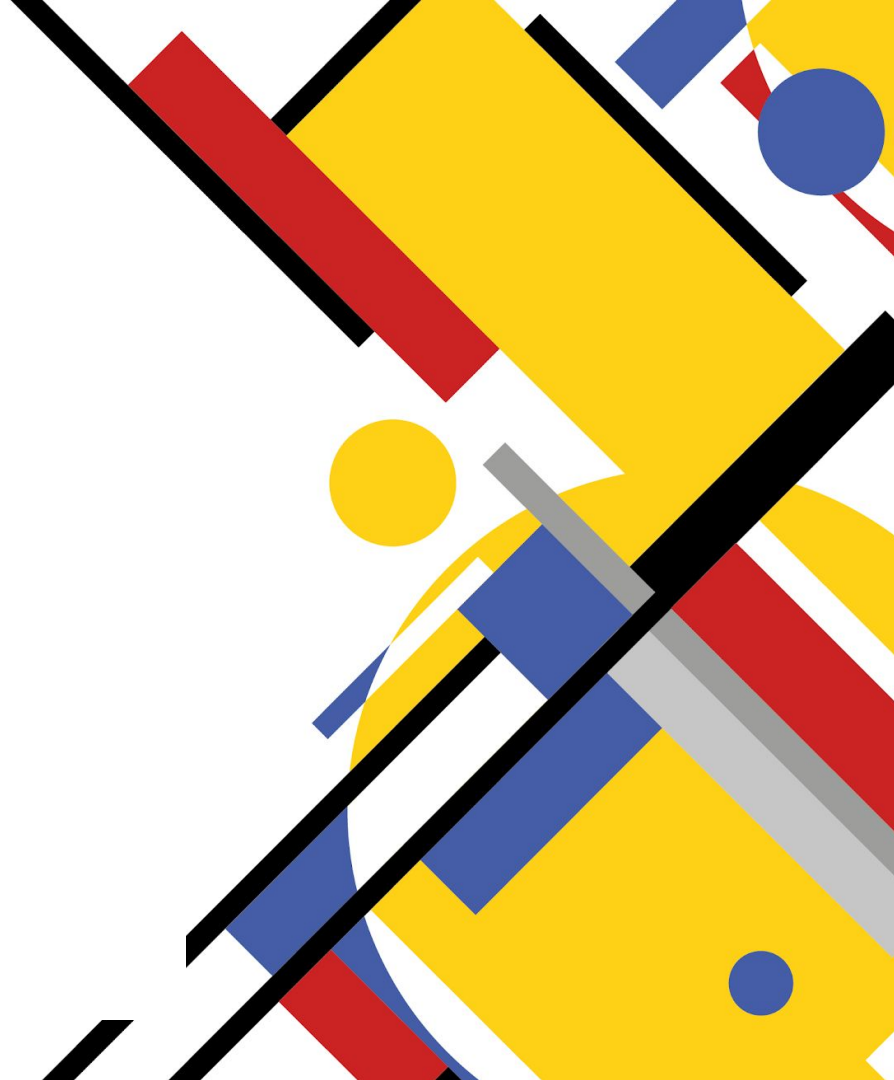




Дивизион D. День 3
Вычислительная геометрия

Лектор: Дмитрий Руденко



Базовые понятия и операции

Точка

```
struct Point {  
    double x;  
    double y;  
}
```

Базовые понятия и операции

Точка

```
struct Point {  
    double x;  
    double y;  
}
```

```
if (point1.x == point2.x) {  
    // do some staff  
} else {  
    // do another staff  
}
```

Базовые понятия и операции

Точка

```
struct Point {  
    double x;  
    double y;  
}
```

```
if (point.x > 0) {  
    // do something  
} else {  
    // do something else  
}
```



Базовые понятия и операции

Точка

```
if (fabs(point1.x - point2.x) < EPS) {  
    // do some staff  
} else {  
    // do another staff  
}  
  
p1.x = 25.12857391413;  
p2.x = 25.12857385032;  
  
double EPS = 0.000001;  
  
// fabs(p1.x - p2.x) = 0.000000...
```

Базовые понятия и операции

Точка (Лексикографический порядок)

Точка A меньше B , если:

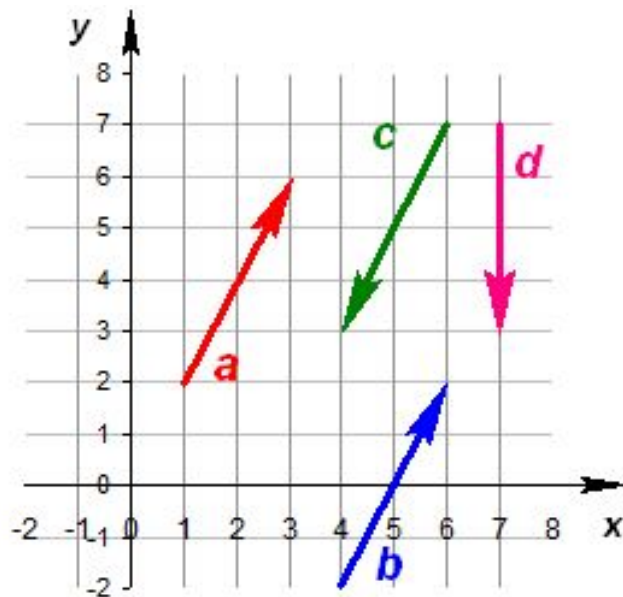
$$(a.x < b.x) \quad || \quad (a.x == b.x \ \&\& \ a.y < b.y)$$

Базовые понятия и операции

Вектор

```
struct Vector {  
    double x;  
    double y;  
}
```

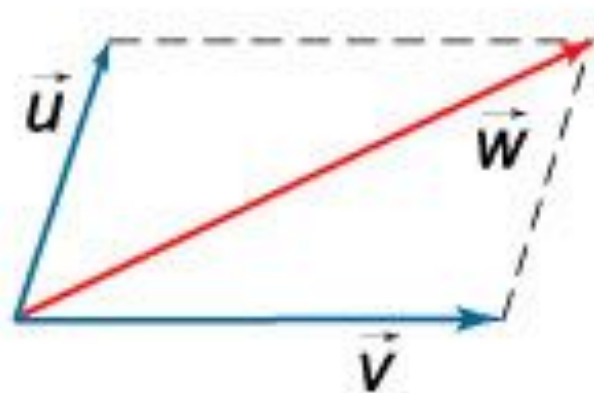
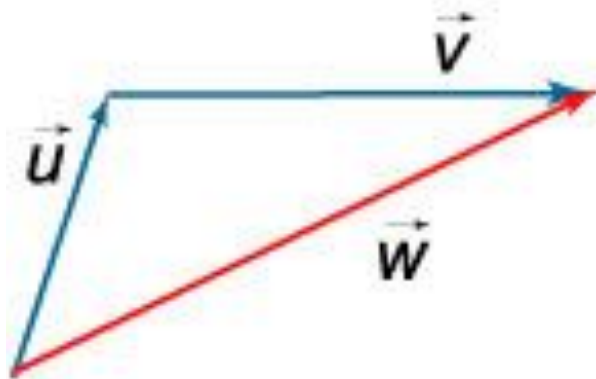
```
Vector(Point begin, Point end) {  
    this->x = end.x - begin.x;  
    this->y = end.y - begin.y;  
}
```



Базовые понятия и операции

Вектор (Операции)

$$\{ 5, 3 \} + \{ 2, -1 \} = \{ 7, 2 \}$$

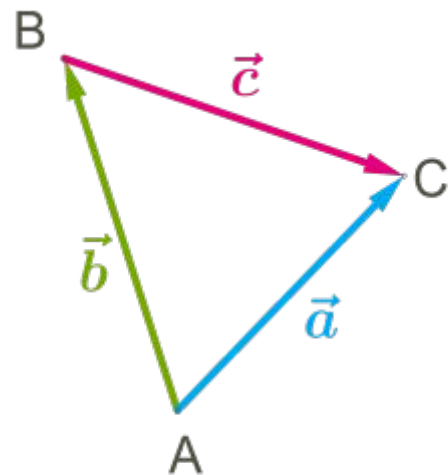


Базовые понятия и операции

Вектор (Операции)

$$\{ 5, 3 \} + \{ 2, -1 \} = \{ 7, 2 \}$$

$$\{ 5, 3 \} - \{ 2, -1 \} = \{ 3, 4 \}$$



$$\vec{c} = \vec{a} - \vec{b}$$

$$\vec{a} = \vec{b} + \vec{c}$$

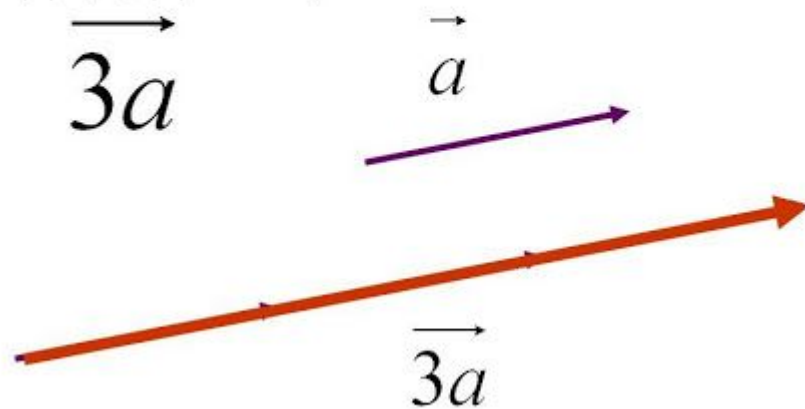
Базовые понятия и операции

Вектор (Операции)

$$\{ 5, 3 \} + \{ 2, -1 \} = \{ 7, 2 \}$$

$$\{ 5, 3 \} - \{ 2, -1 \} = \{ 3, 4 \}$$

$$\{ 5, 3 \} * 3 = \{ 15, 9 \}$$



Базовые понятия и операции

Вектор (Реализация операций)

```
struct Vector {  
    Vector(Point point) {  
        this->x = point.x;  
        this->y = point.y;  
    }  
    Vector(Point begin, Point end) {  
        this->x = end.x - begin.x;  
        this->y = end.y - begin.y;  
    }  
    double x, y;  
}
```

Базовые понятия и операции

Вектор (Реализация операций)

```
Vector operator+(Vector left, Vector right) {  
    Vector result;  
    result.x = left.x + right.x;  
    result.y = left.y + right.y;  
    return result;  
}
```

```
Vector a(5, 3);  
Vector b(1, -2);  
Vector c(6, 1);  
//a + b == c -> true
```

Базовые понятия и операции

Вектор (Реализация операций)

```
Vector operator-(Vector left, Vector right) {  
    Vector result;  
    result.x = left.x - right.x;  
    result.y = left.y - right.y;  
    return result;  
}
```

```
Vector a(5, 3);  
Vector b(1, -2);  
Vector c(4, 5);  
//a + b == c -> true
```

Базовые понятия и операции

Вектор (Реализация операций)

```
Vector operator*(Vector left, double scalar) {  
    Vector result;  
    result.x = left.x * scalar;  
    result.y = left.y * scalar;  
    return result;  
}
```

```
Vector a(5, 3);  
Vector c(15, 9);  
// a * 3 == c -> true
```

Базовые понятия и операции

Вектор (Реализация операций)

```
bool operator==(Vector left, Vector right) {  
    return fabs(left.x - right.x) < EPS && fabs(left.y - right.y);  
}
```

Базовые понятия и операции

Вектор (Реализация операций)

```
double len(Vector vec) {  
    return sqrt(vec.x * vec.x + vec.y * vec.y);  
}
```


Базовые понятия и операции

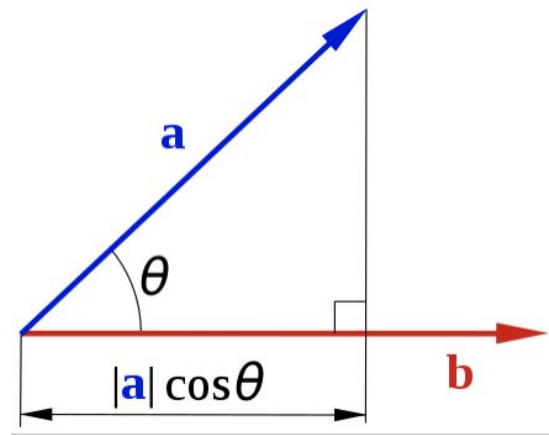
Вектор (Скалярное произведение)

$$a * b = \text{len}(a) * \text{len}(b) * \cos(a, b);$$

$\cos(a, b)$ – косинус угла между векторами a и b

$$a * b = a.x * b.x + a.y * b.y$$

// Примечание: вектора a и b – ненулевые



Базовые понятия и операции

Вектор (Скалярное произведение)

$$a.x * b.x + a.y * b.y = \text{len}(a) * \text{len}(b) * \cos(a, b);$$

$$\cos(a, b) = (a.x * b.x + a.y * b.y) / (\text{len}(a) * \text{len}(b))$$

$$\text{angle}(a, b) = \arccos(\cos(a, b));$$

Базовые понятия и операции

Вектор (Свойства скалярного произведения)

- 1) $a * b = b * a$ - симметричность
- 2) $(a + b) * c = a * c + b * c$ - аддитивность
- 3) $(\text{scalar} * a) * b = \text{scalar} * (a * b)$ - однородность
- 4) $\text{len}(a) = \sqrt{a * a}$

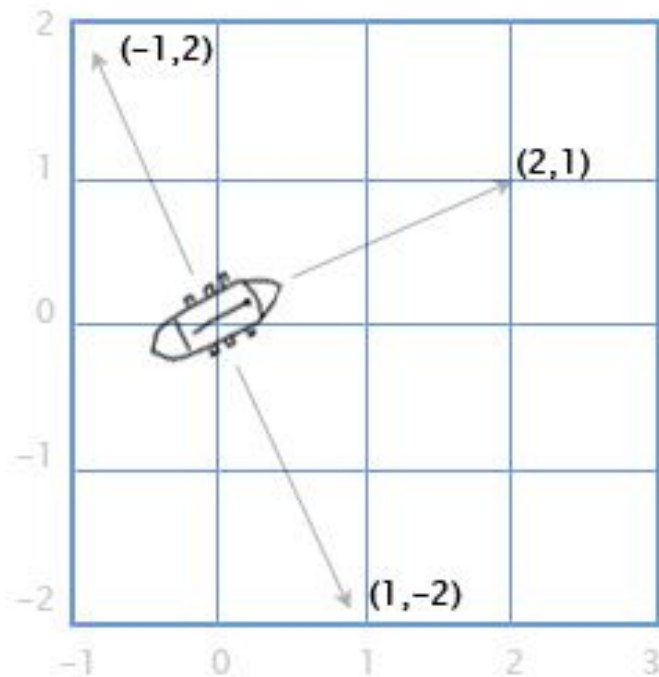
Базовые понятия и операции

Вектор (Реализация скалярного произведения)

```
double operator*(Vector left, Vector right) {  
    return left.x * right.x + left.y * right.y;  
}  
  
// Угол в радианах  
double angle(Vector left, Vector right) {  
    return acos((left * right) / (len(a) * len(b)));  
}  
  
double radian_to_grad(double radian) {  
    return radian * 180.0 / PI;  
}  
  
// const double PI = acos(-1.0);
```

Базовые понятия и операции

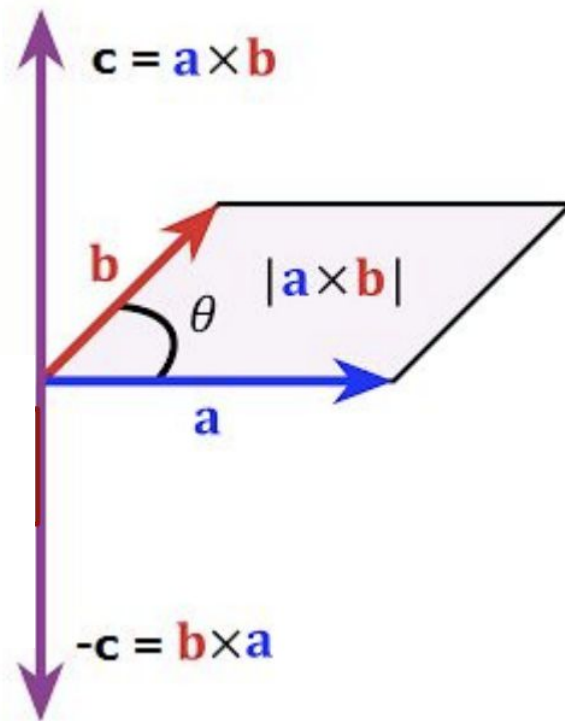
Вектор (Повернуть на 90 градусов)



Базовые понятия и операции

Вектор (Векторное произведение)

- 1) $c = a \times b$
- 2) вектор c направлен в ту сторону, откуда **кратчайший поворот** от a к b виден **против часовой стрелки** – правая тройка векторов
- 3) $a \times b \neq b \times a \rightarrow$ антикоммутативность
- 4) $\text{len}(c) = \text{len}(a) * \text{len}(b) * \sin(a, b)$
- 5) $\text{len}(c) = |a.x * b.y - a.y * b.x|$

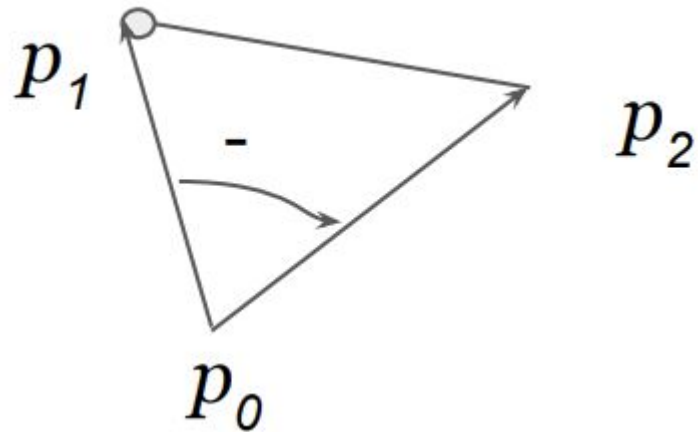
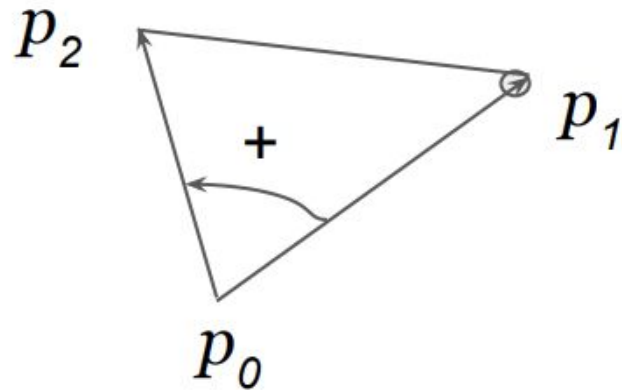


Базовые понятия и операции

Ориентированная площадь треугольника

$$1) \quad (p_0 \rightarrow p_1) \times (p_0 \rightarrow p_2) = c > 0$$

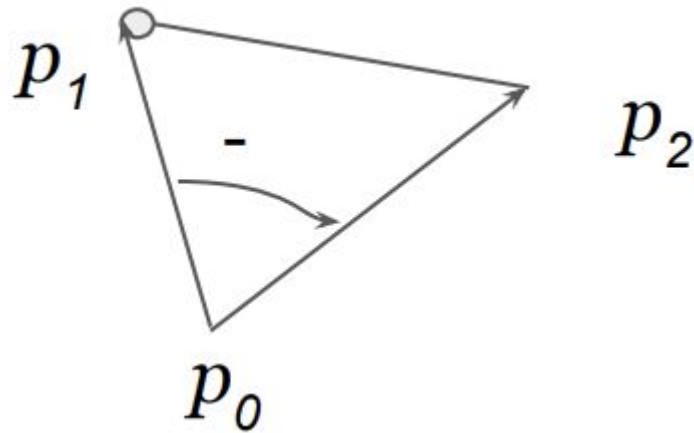
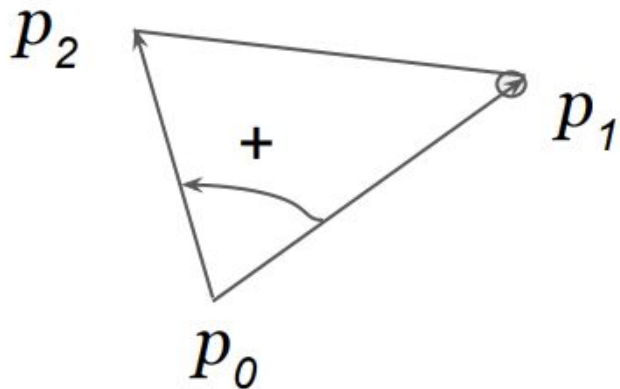
$$2) \quad (p_0 \rightarrow p_1) \times (p_0 \rightarrow p_2) = c < 0$$



Базовые понятия и операции

Ориентированная площадь треугольника

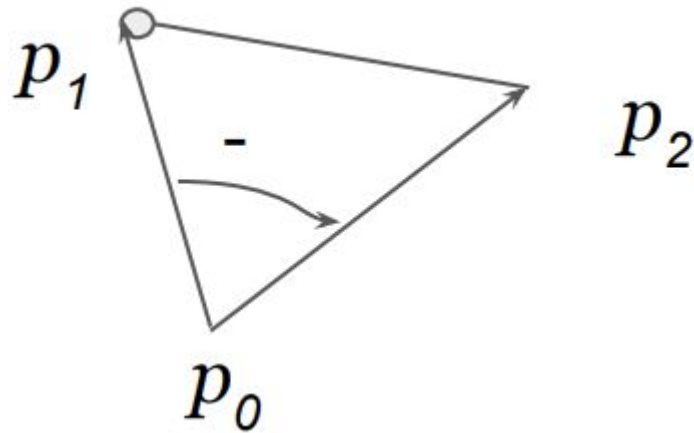
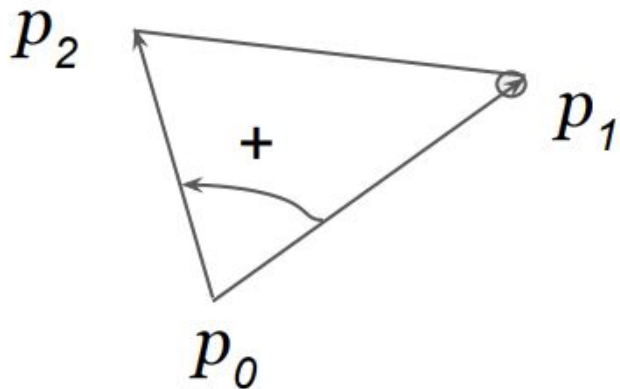
```
double pseudo_scalar(Vector left, Vector right) {  
    return left.x * right.y - left.y * right.x;  
}  
// (p1.x - p0.x) * (p2.y - p0.y) - (p1.y - p0.y) * (p2.x - p0.x) > 0.0  
bool isLeftTurn(Point p0, Point p1, Point p2) {  
    return pseudo_scalar(Vector(p0, p1), Vector(p0, p2)) > 0.0;  
}
```



Базовые понятия и операции

Ориентированная площадь треугольника

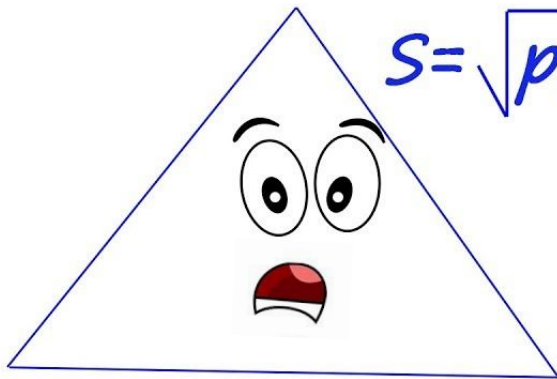
```
double pseudo_scalar(Vector left, Vector right) {  
    return left.x * right.y - left.y * right.x;  
}  
// (p1.x - p0.x) * (p2.y - p0.y) - (p1.y - p0.y) * (p2.x - p0.x) > 0.0  
double triangle_area(Point p0, Point p1, Point p2) {  
    return fabs(pseudo_scalar(Vector(p0, p1), Vector(p0, p2))) / 2.0;  
}
```



Базовые понятия и операции

А как же формула Герона?

ФОРМУЛА ГЕРОНА



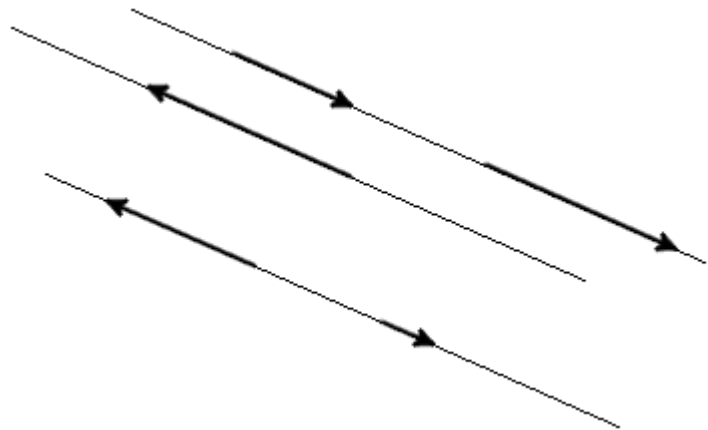
$$S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

Базовые понятия и операции

Вектор (Коллинеарность)

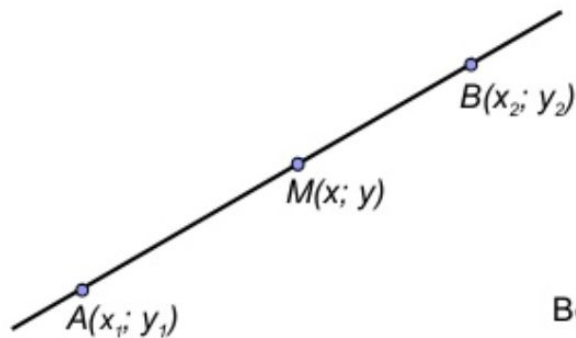
```
double pseudo_scalar(Vector left, Vector right) {  
    return left.x * right.y - left.y * right.x;  
}
```

```
bool is_collinear(Vector left, Vector right) {  
    return pseudo_scalar(left, right) < EPS:  
}
```



Базовые понятия и операции

Прямая (Через 2 точки)



$$\overrightarrow{AB} = \{x_2 - x_1; y_2 - y_1\}$$

$$\overrightarrow{AM} = \{x - x_1; y - y_1\}$$

Векторы \overrightarrow{AB} и \overrightarrow{AM} коллинеарны

$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1}$$

Базовые понятия и операции

Прямая (Нормальное уравнение прямой $Ax + By + C = 0$)

$$1) \quad (x - x_1) / (x_2 - x_1) = (y - y_1) / (y_2 - y_1)$$

$$2) \quad (x - x_1) * (y_2 - y_1) = (y - y_1) * (x_2 - x_1)$$

$$3) \quad x * (y_2 - y_1) - x_1 * (y_2 - y_1) = \\ y * (x_2 - x_1) - y_1 * (x_2 - x_1)$$

$$4) \quad x * (y_2 - y_1) + y * (x_1 - x_2) + y_1 * (x_2 - x_1) + x_1 * (y_1 - y_2)$$

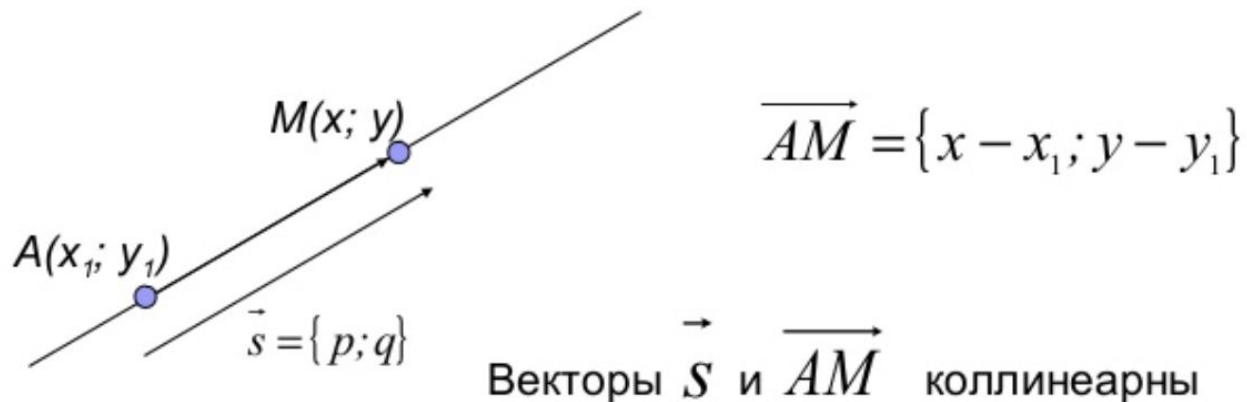
$$5) \quad A = (y_2 - y_1),$$

$$6) \quad B = (x_1 - x_2),$$

$$7) \quad C = y_1 * (x_2 - x_1) + x_1 * (y_1 - y_2)$$

Базовые понятия и операции

Прямая (Точка и направляющий вектор)

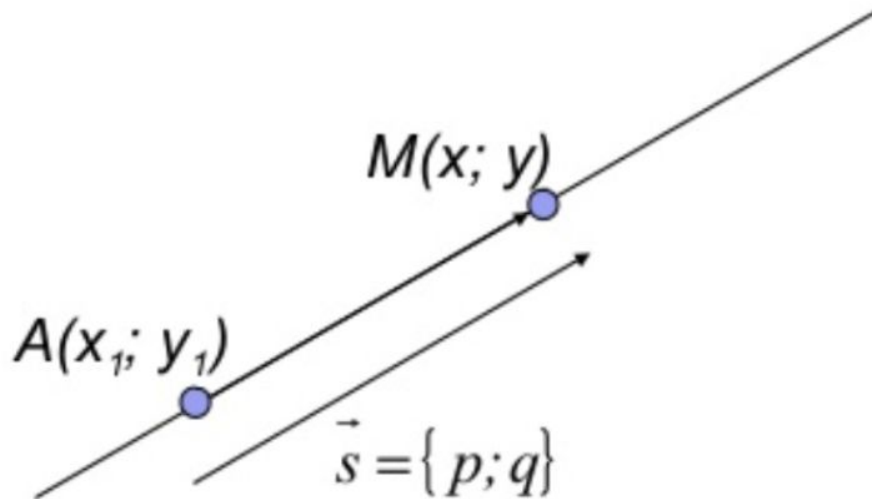


$$\frac{x - x_1}{p} = \frac{y - y_1}{q}$$

Базовые понятия и операции

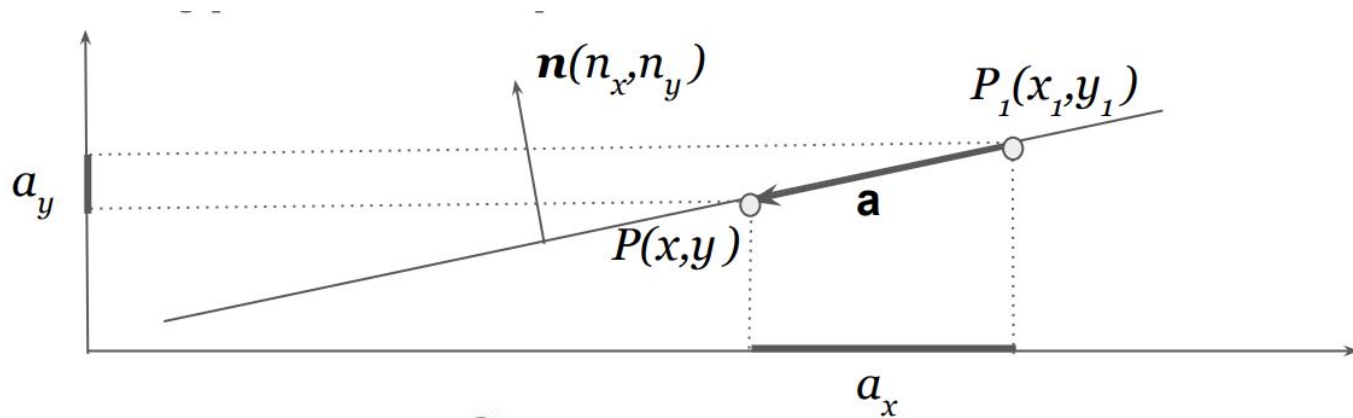
Прямая (Точка и направляющий вектор)

- 1) $p + v * t \mid t \in \mathbb{R}$
- 2) p – точка через которую
проходит прямая
- 3) v – направляющий вектор



Базовые понятия и операции

Прямая (Точка и нормаль)



$$\mathbf{n} \cdot \mathbf{a} = 0$$

$$n_x(x - x_1) + n_y(y - y_1) = 0$$

$$n_x x + n_y y + (-n_x x_1 - n_y y_1) = 0$$

Задачи

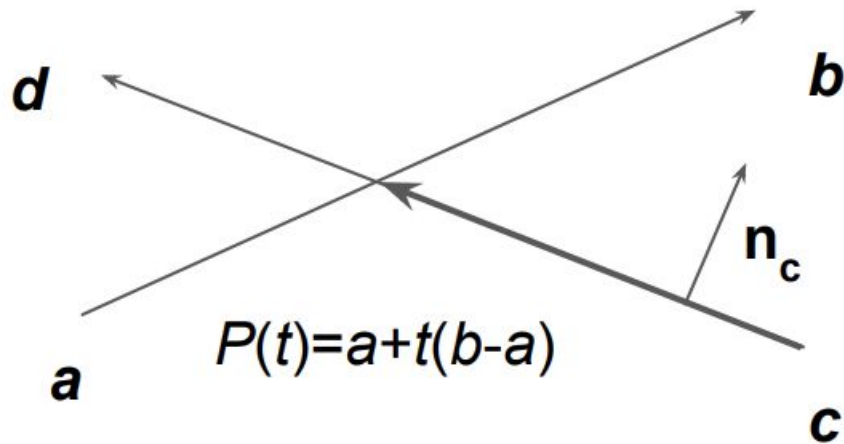
Пересечение двух прямых

- 1) Заданы 2 прямых (по двум точкам) – нужно найти точку их пересечения или сказать что ее не существует

Задачи

Пересечение двух прямых

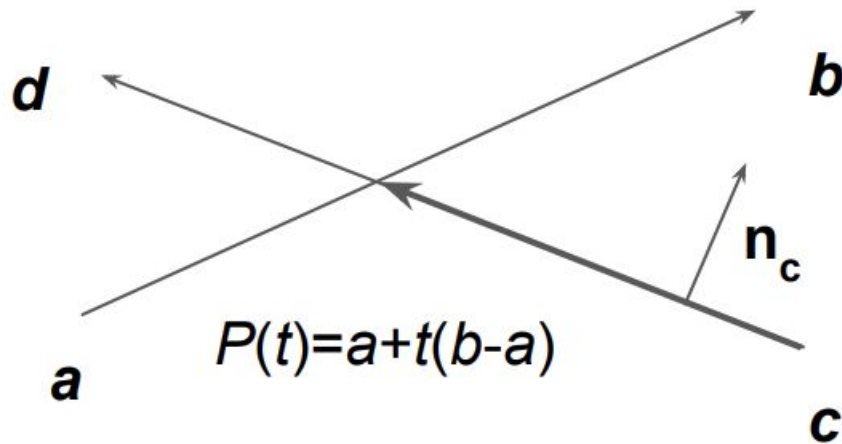
- 1) Пусть прямые проходят через точки (a, b) и (c, d) соответственно
- 1) Пусть точка пересечения прямых $P(t)$
- 2) Так как она лежит на первой прямой, то $P(t) = a + t * (b - a)$



Задачи

Пересечение двух прямых

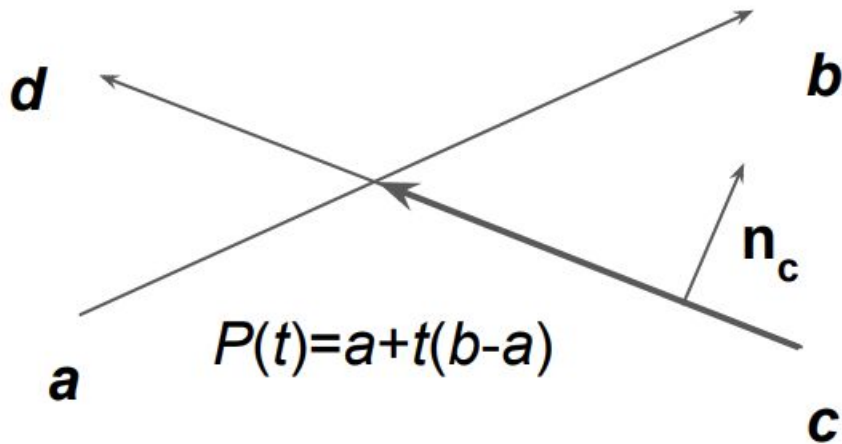
- 1) Пусть n_c – вектор нормали (можем получить путем поворота dc на 90 градусов)
- 2) Тогда $P(t)$ может быть направляющим вектором второй прямой



Задачи

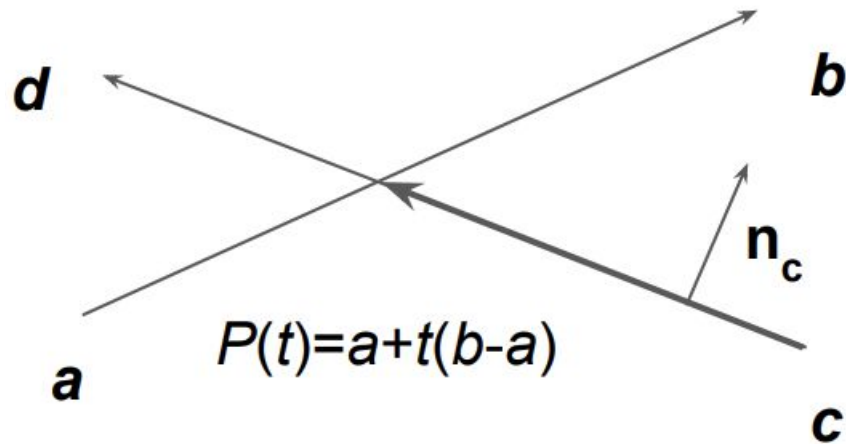
Пересечение двух прямых

- 1) Тогда $P(t)$ может быть направляющим вектором второй прямой
- 2) Направляющий вектор и нормаль перпендикулярны по определению
- 3) $P(t) \cdot n_c = 0$



Задачи

Пересечение двух прямых



$$1) \quad P(t)c * n_c = 0$$

$$1) \quad (P(t) - c) * n_c = 0$$

$$2) \quad (a + (b - a) * t - c) * n_c = 0$$

$$3) \quad n_c * (a - c) + t * (n_c * (b - a)) = 0$$

$$4) \quad t = n_c * (c - a) / n_c * (b - a)$$

* n_c вынести не можем - произведения скалярные

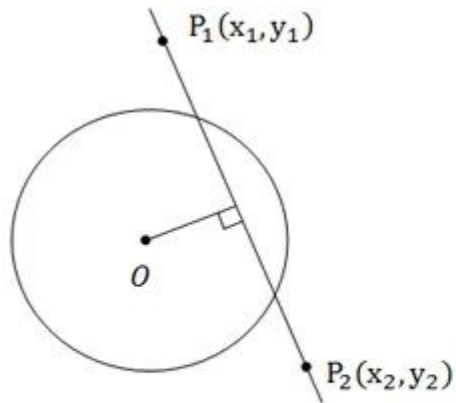
Задачи

Пересечение прямой и окружности

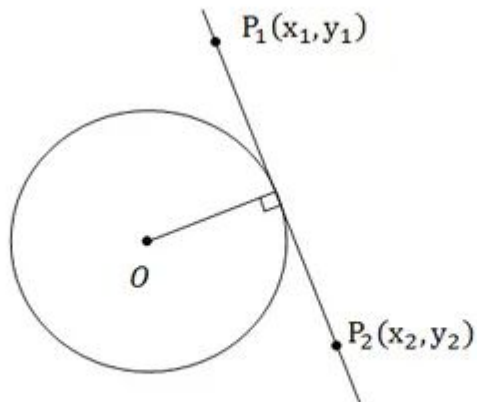
2) Дана прямая (по двум точкам a и b) и окружность с центром в точке c и радиусом r

Задачи

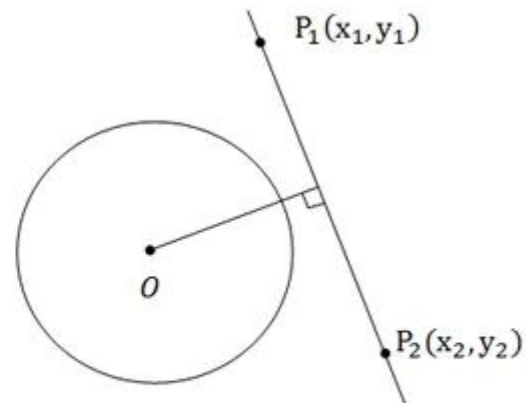
Пересечение прямой и окружности



Две точки пересечения



Одна точка касания



Точек пересечения нет

Задачи

Пересечение прямой и окружности

1) Пусть $P(t)$ пересечение прямой и окружности, тогда:

$$2) \quad P(t) = a + (b - a) * t$$

3) Уравнение окружности $(p - c) * (p - c) = r * r$

$$(p.x - c.x) * (p.x - c.x) + (p.y - c.y) * (p.y - c.y) = r * r$$

$$4) \quad (P(t) - c) * (P(t) - c) = r * r$$

5) Подставляем (2) в (4)

Задачи

Пересечение прямой и окружности

$$1) (a + (b - a) * t - c) * (a + (b - a) * t - c) = r * r$$

$$2) ((a - c) + t * (b - a)) * ((a - c) + t * (b - a)) = r * r$$

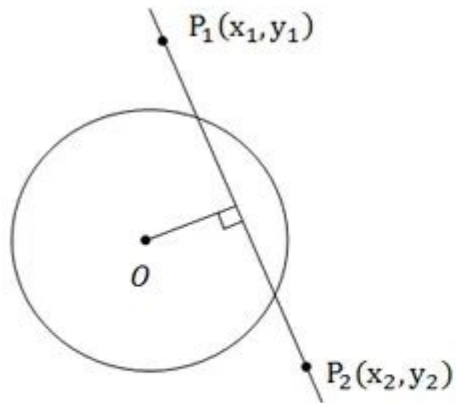
$$3) (a - c) * (a - c) + t * 2 * ((b - a) * (a - c)) + t^2 * (b - a) * (b - a) = r * r$$

$$4) t^2 * (b - a) * (b - a) + t * 2 * ((b - a) * (a - c)) + (a - c) * (a - c) - r^2 = 0$$

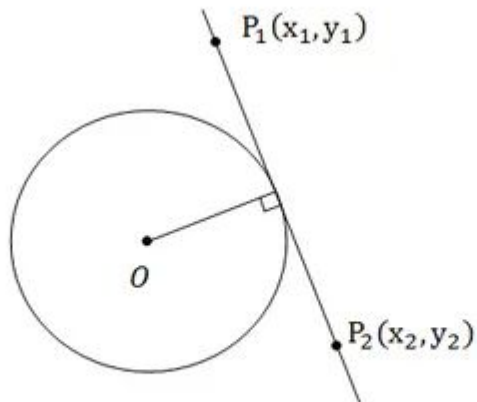
$$5) \text{ Решаем квадратное уравнение } a * t^2 + b * t + c = 0$$

Задачи

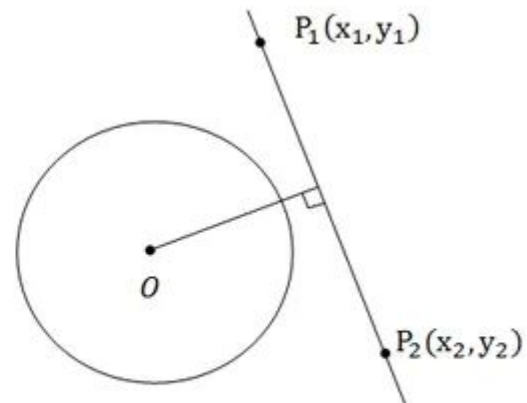
Пересечение прямой и окружности



Две точки пересечения



Одна точка касания



Точек пересечения нет

Задачи

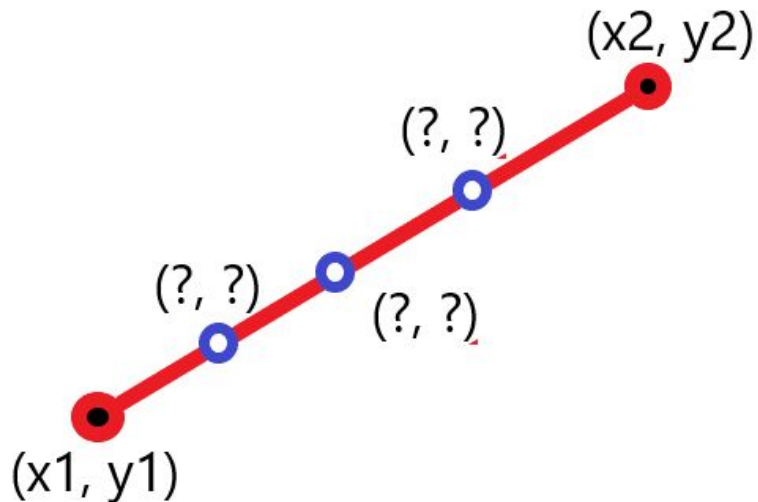
Пересечение отрезков

- 1) Давайте проверим пересекаются ли прямые, на которых лежат отрезки
- 2) Если нет, то отрезки тоже нет
- 3) Иначе проверим, что точка лежит на двух отрезках
- 4) Проверка:
$$\min(a.x, b.x) \leq p.x \leq \max(a.x, b.x) \ \&\&$$
$$\min(a.y, b.y) \leq p.y \leq \max(a.y, b.y)$$

Задачи

Проверка принадлежности точки отрезку

- 1) Если рассматриваем только целочисленные точки:
- 2) Находим НОД $(x_2 - x_1)$ и $(y_2 - y_1)$
- 3) $\text{delta_x} = (x_2 - x_1) / \text{gcd}$
- 4) $\text{delta_y} = (y_2 - y_1) / \text{gcd}$



Задачи

Проверка принадлежности точки отрезку

- 1) Если рассматриваем все точки:
- 2) Проверим лежит ли точка на прямой (через скалярное произведение)
- 3) Аналогичная проверка:
$$\min(a.x, b.x) \leq p.x \leq \max(a.x, b.x) \ \&\&$$
$$\min(a.y, b.y) \leq p.y \leq \max(a.y, b.y)$$

Задачи

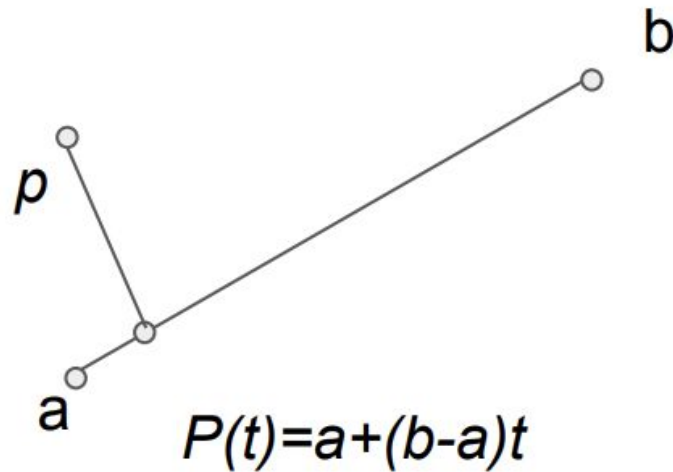
Расстояние от точки до прямой

- 1) Задана точка p и прямая (через 2 точки a и b) – требуется найти расстояние между ними

Задачи

Расстояние от точки до прямой

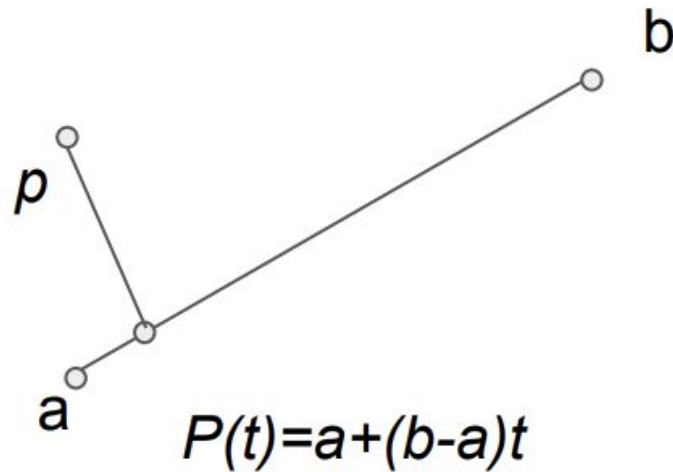
- 1) $(P(t) - p) * (b - a) = 0$
- 2) $(a + (b - a) * t) * (b - a) = 0$
- 3) $a * (b - a) + |(b - a)| * t = 0$
- 4) $t = a * (a - b) / |(b - a)|$
- 5) Ответ: $|p - P(t)|$



Задачи

Расстояние от точки до отрезка

- 1) $(P(t) - p) * (b - a) = 0$
- 2) $(a + (b - a) * t) * (b - a) = 0$
- 3) $a * (b - a) + |(b - a)| * t = 0$
- 4) $t = a * (a - b) / |(b - a)|$
- 5) Ответ: $|p - P(t)|$ если $P(t)$ лежит на отрезке, иначе:
 $\min(|p - a|, |p - b|)$



Задачи

Пересечение окружностей

- 1) Даны две окружности с радиусами r_1 и r , а также центрами (x_1, y_1) (x_2, y_2) – найти их пересечение

Задачи

Пересечение окружностей

- 1) Сразу рассмотрим вырожденный случай, когда центры совпадают:
 - a) радиусы совпадают, тогда решений бесконечное кол-во (окружности полностью совпадают)
 - b) иначе решений нет

Задачи

Пересечение окружностей

2) Сместим центры окружностей так, чтобы центр первой был в точке $(0, 0)$, потом к ответу обратно добавим это смещение

3) Имеем систему из 2 уравнений:

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r_1^2 \\(x - x_2)^2 + (y - y_2)^2 &= r_2^2\end{aligned}$$

4) Давайте вычтем из второго уравнения первое

Задачи

Пересечение окружностей

$$\begin{aligned}x^2 + y^2 &= r_1^2 \\x * -2x_2 + y * -2y_2 + (x_2^2 + y_2^2 + r_1^2 + r_2^2) &= 0\end{aligned}$$

Теперь система отображает задачу пересечения окружности и прямой $Ax + By + C = 0$, где:

$$A = -2x_2$$

$$B = 2y_2$$

$$C = (x_2^2 + y_2^2 + r_1^2 + r_2^2)$$

Ее мы решать уже умеем

Примечание

Вывод с точностью P знаков после запятой в C++

```
#include <iomanip>
```

```
#include <cmath>
```

```
...
```

```
cout << fixed << setprecision(P) << number;
```