16.11.20

Неопределённый интеграл

① Первообразная ф-ция

$f(x)$ - опред. на (a, b), тогда $F(x)$ назыв. первообразной для $f(x)$ на интервале (a, b), если $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in (a, b)$

$$\left.\begin{array}{l} F(x) \text{ - первообр.} \\ C = const \end{array}\right| \Rightarrow F(x) + C \text{ - первообразная}$$

$$\left.\begin{array}{l} F(x) \text{ - первообраз.} \\ G(x) \text{ - первообраз} \end{array}\right| \Rightarrow F(x) - G(x) = C, \text{ где } C \in \mathbb{R}$$

$f(x)$ - непрерывна на (a, b) $\Rightarrow \exists F(x)$ на (a, b)

② Неопределённый интеграл

Совокупность всех первообразных для ф-ции $f(x)$ назыв. неопределённым интегралом от ф-ции $f(x)$

Обозначение: $\int f(x)\,dx = F(x) + C$

Операция нахождения неопред. интеграла назыв. интегрирова[ние]

$\forall f(x)$ - непрерывна на (a, b) $\exists \int f(x)\,dx$

③ Св-ва неопред. интеграла

1) $\int dF(x) = F(x) + C$

2) $d\int f(x)\,dx = f(x)\,dx$

3) $\int \alpha \cdot f(x)\,dx = \alpha \int f(x)\,dx$, $\alpha \neq 0$

4) $\int (f(x)+g(x))\,dx = \int f(x)\,dx + \int g(x)\,dx$

5) Если $\int f(x)\,dx = F(x)+C$, то $\int f(ax+b)\,dx = \frac{1}{a}F(ax+b)+C$, $a \neq 0$

$a, b, C \in R$

③ Таблица простейших интегралов

(табличные интегралы)

1) $\int 0\,dx = C$

2) $\int x^{\alpha}\,dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$, $\alpha \neq -1$

В частности:

2.1) $\int 1 \cdot dx = \int x^0\,dx = \frac{x^{0+1}}{0+1} + C = x + C$

2.2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x}} = \int x^{-\frac{1}{2}}\,dx = \frac{x^{-\frac{1}{2}+1}}{-\frac{1}{2}+1} + C = \frac{x^{1/2}}{1/2} + C = 2\sqrt{x} + C$

2.3) $\int \frac{dx}{x^2} = \int x^{-2}\,dx = \frac{x^{-2+1}}{-2+1} + C = \frac{x^{-1}}{-1} + C = -\frac{1}{x} + C$

3) $\int \frac{dx}{x} = \ln|x| + C$

4) $\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$, $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$

В частности:

4.1) $\int e^x\,dx = \frac{e^x}{\ln e} + C = \frac{e^x}{1} + C = e^x + C$

5) $\int \sin x\,dx = -\cos x + C$

6) $\int \cos x\,dx = \sin x + C$

7) $\int \frac{dx}{\cos^2 x} = tg\,x + C$

8) $\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -ctg\,x + C$

9) $\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a} \cdot arctg\,\frac{x}{a} + C, \quad a \neq 0$

В частности

9.1) $\int \frac{dx}{x^2+1} = \int \frac{dx}{x^2+1^2} = \frac{1}{1}\, arctg\,\frac{x}{1} + C = arctg\,x + C$

10) $\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{a} + C, \quad a > 0$

В частности:

10.1) $\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{1^2-x^2}} = \arcsin \frac{x}{1} + C = \arcsin x + C$

11) $\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} \ln\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C, \quad a > 0$

12) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left|x + \sqrt{x^2+a}\right| + C$

$y = sh(x)$ – гиперболический синус

$y = sh(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

$y = ch(x)$ – гиперболический косинус $= \frac{e^x + e^{-x}}{2}$

$y = th(x)$ – гиперболический тангенс $= \frac{sh(x)}{ch(x)} = \frac{\frac{e^x - e^{-x}}{2}}{\frac{e^x + e^{-x}}{2}} = \frac{e^x - e}{e^x + e}$

$y = cth(x)$ – гиперболический котангенс $= \frac{ch(x)}{sh(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$

13) $\int sh(x)dx = ch(x) + C$

14) $\int ch(x)dx = sh(x) + C$

15) $\int tg\, x\, dx = -\ln|\cos x| + C$

16) $\int ctg\, x\, dx = \ln|\sin x| + C$

17) $\int \frac{dx}{\sin x} = \ln\left|tg \frac{x}{2}\right| + C$

18) $\int \frac{dx}{\cos x} = \ln\left|tg\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4}\right)\right| + C$

5 Почти табличные интегралы – это интегралы, полученные из табличных интегралов линейным сдвигом аргумента.

Например: $\int \cos(3x)dx$, $\int \frac{dx}{4x-5}$, $\int e^{7x+1} dx$

Решение задач

8.1.1

1) $\int \frac{dx}{x^3} = \int x^{-3} dx = \frac{x^{-2}}{-2} + C = -\frac{1}{2x^2} + C$

2) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^3}} = \int x^{-\frac{3}{2}} dx = \frac{x^{-\frac{3}{2}+1}}{-\frac{3}{2}+1} + C = \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{-\frac{1}{2}} + C = -\frac{2}{\sqrt{x}} + C$

3) $\int 2^x dx = \frac{2^x}{\ln 2} + C$

4) $\int \frac{dx}{\sqrt{5-x^2}} = \int \frac{dx}{\sqrt{\sqrt{5}^2 - x^2}} = \arcsin \frac{x}{\sqrt{5}} + C$

5) $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-7}} = \int \frac{dx}{\sqrt{x^2+(-7)}} = \left[\int \frac{dx}{\sqrt{x^2+a}} = \ln\left| x + \sqrt{x^2+a} \right| + C \right] =$

$= \ln\left| x + \sqrt{x^2+(-7)} \right| + C = \ln\left| x + \sqrt{x^2-7} \right| + C$

8.1.8. 1) $\int \left(3 \cdot 5^x - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} + 7\right) dx = \int 3 \cdot 5^x dx - \int \frac{2}{\sqrt[3]{x}} dx + \int 7 dx =$

$= 3 \int 5^x dx - 2 \int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} + 7 \int dx = 3 \cdot \frac{5^x}{\ln 5} - 2 \cdot \frac{x^{-1/3+1}}{-\frac{1}{3}+1} + 7 \cdot x + C =$

$= \frac{3 \cdot 5^x}{\ln 5} - \frac{2 \cdot x^{2/3}}{2/3} + 7x + C = \frac{3 \cdot 5^x}{\ln 5} - 3x^{2/3} + 7x + C$

2) $\int \frac{x^2 - 3x + 5}{\sqrt{x}} dx = x^{2-\frac{1}{2}} - 3x^{1-\frac{1}{2}} + \frac{5}{\sqrt{x}} = x^{3/2} - 3x^{1/2} + 5x^{-1/2} =$

$= \int \left(x^{3/2} - 3x^{1/2} + 5x^{-1/2}\right) dx = \int x^{3/2} dx - 3\int x^{1/2} dx + 5 \int x^{-1/2} dx =$

$= \frac{\sqrt{x^5}}{2,5} - 3 \cdot \frac{\sqrt{x^3}}{1,5} + 5 \cdot \frac{\sqrt{x}}{0,5} + C =$

$= \frac{2}{5} x^{5/2} - 2x^{3/2} + 10x^{1/2} + C$