Интегрирование рациональных дробей

05.02.21

$\frac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ - многочлены - это рациональная дробь

Если степень многочлена $P(x)$ меньше степени многочлена $Q(x)$, то дробь правильная. Иначе - неправильная

Примечание: если дробь неправильная, то можно разделить $P(x)$ на $Q(x)$ и получить выражение $\frac{P(x)}{Q(x)} = P_0(x) + \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, где $P_0(x)$ - целая часть при делении, а $\frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$ - правильная дробь

$P_0(x)$, $P_1(x)$, $Q_1(x)$ - многочлены

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \int P_0(x) dx + \int \frac{P_1(x)}{Q_1(x)}$$

Разложение правильной дроби на простейшие дроби

Типы правильных дробей / простейшие (элементарные) дроби:

1) $\frac{A}{x-a}$ $\quad$ A, a - числа $\quad$ $\int \frac{A}{x-a} dx$, $\int \frac{A}{(x-a)^k} dx$ - простые ин...

2) $\frac{A}{(x-a)^k}$ $\quad$ $k = 2, 3, 4 \ldots$

3) $\frac{Ax+B}{x^2+px+q}$ $\quad$ A, B, p, q - действ. числа

$x^2+px+q=0$, $D<0$ $(p^2-4q<0)$

Алгоритм решения:

① $Ax+B = \frac{A}{2}(2x+p) + \left(B - \frac{Ap}{2}\right)$

где $(x^2+px+q)' = 2x+p$

② $\int \frac{Ax+B}{x^2+px+q}dx = \int \frac{\frac{A}{2}(2x+p) + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{x^2+px+q}dx = \frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{x^2+px+q} +$

$+ \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\int\frac{dx}{x^2+px+q}$

4) $\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)^n}$ $A, B, p, q \in \mathbb{R}$, $n>1$, $x^2+px+q=0$, $D<0$, $x_1, x_2 \notin \mathbb{R}$

Алгоритм решения:

① $(Ax+B) = \frac{A}{2}(2x+p) + \left(B-\frac{Ap}{2}\right)$

$(x^2+px+q)' = 2x+p$

② $\int\frac{Ax+B}{(x^2+px+q)}dx = \int\frac{\frac{A}{2}(2x+p)+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)}{(x^2+px+q)^n}dx = \underbrace{\frac{A}{2}\int\frac{(2x+p)dx}{(x^2+px+q)^n}}_{I} +$

$+\left(B-\frac{Ap}{2}\right)\underbrace{\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n}}_{II} = [t = x^2+px+q \Rightarrow dt = (2x+p)dx] =$

I) $\frac{A}{2}\int\frac{dt}{t^n} = \frac{At^{-n+1}}{(-n+1)2} = \frac{A}{2(1-n)t^{n-1}} + C$

II) $B-\frac{Ap}{2}\int\frac{dx}{(x^2+px+q)^n} = \left[y = x+\frac{p}{2} \Rightarrow dy = dx,\ a = \sqrt{q-\frac{p^2}{4}}\right] =$

$\frac{Ap}{2}\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^n} = \{\text{рекуррентная}\} = \left(B-\frac{Ap}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{2(n-1)a^2}\cdot\frac{y}{(y^2+a^2)^{n-1}} + \frac{1}{a^2}\cdot\frac{2n-3}{2n-2}\cdot\right.$

$\left.\int\frac{dy}{(y^2+a^2)^{n-1}}\right) \rightarrow$ считать по рек. формуле

Решение задач

8.3.1. $\int \frac{6x-7}{x^2+4x+13}dx = \left[\begin{matrix} A=6,\ B=-7,\ p=4,\ q=13 \\ x^2+4x+13=0,\ D=16-52<0 \end{matrix}\right] \Rightarrow 6x-7 = \frac{6}{2}(2x+4)+(-7-\frac{6\cdot 4}{2}) = 3(2x+4)+(-19)$

$= 3\cdot\int \frac{(2x+4)\,dx}{x^2+4x+13} - 19\int\frac{dx}{x^2+4x+13} = \left[\begin{matrix} 1)\ x^2+4x+13=t \Rightarrow dt=(2x+4)\,dx \\ 2)\ y=x+p/2 = x+2 \Rightarrow dy=dx \end{matrix}\right] =$

$= \left[a=\sqrt{q-\frac{p^2}{4}}=\sqrt{13-4}=\sqrt{9}=3\right] = \{x^2+4x+13=y^2+3^2\} =$

$= 3\int\frac{dt}{t} - 19\cdot\int\frac{dy}{y^2+3^2} = 3\ln|t| - 19\,\frac{1}{3}\cdot \mathrm{arctg}\left(\frac{y}{3}\right)+C =$

$= 3\ln|x^2+4x+13| - \frac{19}{3}\,\mathrm{arctg}\left(\frac{x+2}{3}\right)+C$

8.3.8 $\int\frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2}dx = \left[\begin{matrix} A=8,\ B=5,\ p=-2,\ q=17,\ n=2 \\ D=(-2)^2-4\cdot 17=-64<0 \end{matrix}\right] \Rightarrow$

$\Rightarrow 8x+5 = \frac{8}{2}(2x+(-2))+(5-\frac{8(-2)}{2}) = 4(2x-2)+13$

$4\int\frac{2x-2}{(x^2-2x+17)^2}dx + 13\int\frac{dx}{(x^2-2x+17)^2}$

Решим интеграл $\int\frac{2x-2}{(x^2-2x+17)^2} = \left[t=x^2-2x+17 \Rightarrow dx=\frac{dt}{2x-2}\right] = \int\frac{dt}{t^2} =$

$= ~~\ldots~~ -\frac{1}{t}+C = -\frac{1}{(x^2-2x+17)}+C$

~~Тогда:~~

~~$4\int\frac{2x-2}{(x^2-2x+17)^2}dx + 13\int\frac{dx}{(x^2-2x+17)^2}$~~

Решим интеграл $\int \frac{dx}{(x^2-2x+17)^2} = \int \frac{dx}{(x^2-2x+1+16)^2} =$

$= \int \frac{dx}{((x-1)^2+4^2)^2} = \left[t = x-1 \Rightarrow dt = dx \right] = \int \frac{dt}{(t^2+4^2)^2} =$

$= \frac{1}{2 \cdot 1 \cdot 16} \cdot \frac{t}{t^2+16} + \frac{1}{16} \cdot \frac{1}{2} \cdot \int \frac{dt}{t^2+4^2} = \frac{t}{32(t^2+16)} + \frac{1}{32} \cdot \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{t}{4} + C$

$= \frac{1}{32} \left(\frac{x-1}{x^2-2x+17} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{4} \right) + C$

Итого $\int \frac{8x+5}{(x^2-2x+17)^2} dx = \frac{13}{32} \left(\frac{x-1}{x^2-2x+17} + \frac{1}{4} \operatorname{arctg} \frac{x-1}{4} \right) - \frac{4}{x^2-2x+17} + C$

8.3.2. $\int \frac{4dx}{x+3} = 4 \int \frac{dx}{x+3} = 4 \ln|x+3| + C$

8.3.3 $\int \frac{dx}{(x-1)^5} = \int (x-1)^{-5} dx = \frac{(x-1)^{-4}}{-4} + C = -\frac{1}{4(x-1)^4} + C$

8.3.4. $\int \frac{11dx}{(x+2)^3} = 11 \int (x+2)^{-3} dx = 11 \cdot \frac{(x+2)^{-2}}{-2} + C = -\frac{11}{2(x+2)^2} + C$

8.3.5 $\int \frac{dx}{x^2+10x+29} = \int \frac{dx}{x^2+10x+25+4} = \int \frac{dx}{(x+5)^2+4} = \int \frac{dx}{(x+5)^2+2^2} =$

$= \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \frac{x+5}{2} + C$

8.3.6. $\int \frac{(x+6)dx}{x^2-2x+17} = \left[\begin{array}{l} A=1,\ B=6,\ p=-2,\ q=17 \\ D=(-2)^2-4\cdot 17=-64<0 \end{array} \right] \Rightarrow$

$\Rightarrow x+6 = \frac{1}{2}(2x-2) + \left(6 - \frac{-2}{2}\right) = \frac{1}{2}(2x-2) + (6+1)$

$\int \frac{(x+6)dx}{x^2-2x+17} = \int \frac{1/2(2x-2)+(6+1)}{x^2-2x+17}dx = \frac{1}{2}\int \frac{(2x-2)dx}{x^2-2x+17} +$

$+ 7\int \frac{dx}{x^2-2x+17} = \frac{1}{2}\cdot 2\int \frac{(x-1)dx}{x^2-2x+1+16} + 7\int \frac{dx}{x^2-2x+1+16} =$

$= \underset{1}{\int \frac{(x-1)dx}{(x-1)^2+4^2}} + 7\underset{2}{\int \frac{dx}{(x-1)^2+4^2}} = \cancel{\int \frac{(x-1)+4^2-4^2}{(x-1)^2+4^2}dx + 7\int \frac{dx}{(x-1)^2+4^2}} =$

1 $= \left[\begin{array}{l} t = x^2-2x+17 \Rightarrow \\ \Rightarrow dt = 2x-2\,dx \end{array} \right] = \frac{1}{2}\int \frac{dt}{t} = \frac{1}{2}\ln|t|$

2 $= \left[y = x-1 \Rightarrow dy = dx \right] = 7\int \frac{dy}{y^2+4^2} = \frac{7}{4}\operatorname{arctg}\frac{y}{4} = \frac{7}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{4} + C$

$\ldots = \frac{7}{4}\operatorname{arctg}\frac{x-1}{4} + \frac{1}{2}\ln|x^2+2x+17| + C$

8.3.7. $\int \frac{(4x-1)dx}{x^2+x+1} = \left[\begin{array}{l} A=4,\ B=-1,\ p=1,\ q=1 \\ D=1-4=-3<0 \end{array} \right] = \int \frac{2(2x+1)+(1-2)}{x^2+x+1}dx$

$= 2\int \frac{2x+1}{x^2+x+1}dx - \int \frac{dx}{x^2+x+1}$

① $2\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} = \left[t = x^2+x+1 \Rightarrow dx = \frac{dt}{2x+1} \right] = 2\int \frac{dt}{t} =$

$= 2\ln|t| = 2\ln|x^2+x+1|$

② $-\int \frac{dx}{x^2+x+1} = \left[\begin{array}{l} y = x+\frac{1}{2} \Rightarrow dy = dx \\ a = \sqrt{1-\frac{1}{4}} = \frac{\sqrt{3}}{2} \end{array} \right] = -\int \frac{dy}{y^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} =$

$= -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2y}{3} + C = -\frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

$\int \frac{(4x-1)dx}{x^2+x+1} = 2\ln(x^2+x+1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \operatorname{arctg} \frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$