

मुद्रित पृष्ठों की संख्या : 16

अनुक्रमांक

नाम

131 324(XC)

2020

गणित

समय : तीन घण्टे 15 मिनट] [पूर्णांक : 100

नोट : प्रारम्भ के 15 मिनट परीक्षार्थियों को प्रश्नपत्र पढ़ने के लिए निर्धारित हैं।

Note : First 15 minutes are allotted for the candidates to read the question paper.

- निर्देश :
- इस प्रश्नपत्र में कुल नौ प्रश्न हैं।
 - सभी प्रश्न अनिवार्य हैं।
 - प्रत्येक प्रश्न के प्रारम्भ में स्पष्टतः लिख दिया गया है कि उसके कितने खण्ड हल करने हैं।
 - प्रश्नों के अंक उनके सम्मुख अंकित हैं।
 - प्रथम प्रश्न से आरम्भ कीजिए और अन्त तक करते जाइए।
 - जो प्रश्न न आता हो, उस पर समय नष्ट मत कीजिए।

H985671

[Turn over

324(XC)

2

Instructions :

- There are in all *nine* questions in this question paper.
- All questions are compulsory.
- In the beginning of each question, the number of parts to be attempted are clearly mentioned.
- Marks allotted to the questions are indicated against them.
- Start solving from the first question and proceed to solve till the last one.
- Do not waste your time over a question you cannot solve.

1. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, तो

x का मान होगा

- $0, \frac{1}{2}$
- $1, \frac{1}{2}$
- 0
- $\frac{1}{2}$

1

H985671



collegedunia.com
India's largest Student Review Platform

ख) समाकलन $\int x \sin x dx$ का मान होगा

- i) $x \sin x + \cos x + c$
- ii) $x \cos x + \sin x + c$
- iii) $x \sin x - \cos x + c$
- iv) $\sin x - x \cos x + c$ 1

ग) अवकल समीकरण

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 + y = 0 \text{ की कोटि है}$$

- i) 1 ii) 2
- iii) 3 iv) 4. 1

घ) $\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j})$ का मान है

- i) -1 ii) 0
- iii) 3 iv) 1. 1

ड) समुच्चय $A = \{a, b\}$ में द्विआधारी संक्रियाओं की संख्या है

- i) 4 ii) 16
- iii) 8 iv) 32. 1

H985671

[Turn over

1. Attempt all the parts :

a) If $\sin^{-1}(1-x) - 2\sin^{-1}x = \frac{\pi}{2}$, then value of x will be

- i) $0, \frac{1}{2}$ ii) $1, \frac{1}{2}$
- iii) 0 iv) $\frac{1}{2}$. 1

b) The value of the integral $\int x \sin x dx$ will be

- i) $x \sin x + \cos x + c$
- ii) $x \cos x + \sin x + c$
- iii) $x \sin x - \cos x + c$
- iv) $\sin x - x \cos x + c$. 1

c) Order of the differential equation

$$\frac{d^3 y}{dx^3} - 2 \left(\frac{d^2 y}{dx^2} \right)^2 + y = 0 \text{ is}$$

- i) 1 ii) 2
- iii) 3 iv) 4. 1

d) The value of

$$\hat{i} \cdot (\hat{j} \times \hat{k}) + \hat{j} \cdot (\hat{i} \times \hat{k}) + \hat{k} \cdot (\hat{i} \times \hat{j}) \text{ is}$$

- i) -1 ii) 0
- iii) 3 iv) 1. 1

e) The number of binary operations on the set $A = \{a, b\}$ is

- i) 4 ii) 16
- iii) 8 iv) 32. 1

H985671



2. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) समुच्चय $A = \{1, 2, 3\}$ से स्वयं तक सभी एकैकी फलनों की संख्या ज्ञात कीजिए। 1

ख) यदि $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ तथा $A + A' = I$ हो, तो α का मान है

- i) $\frac{\pi}{6}$ ii) $\frac{\pi}{3}$
iii) π iv) $\frac{3\pi}{2}$. 1

ग) सिद्ध कीजिए कि $f(x) = x^2$ द्वारा परिभाषित फलन $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ न तो एकैकी है और न आच्छादक है। 1

घ) दिखाइए कि $f(x) = \sin(x^2)$ एक सतत फलन है। 1

ङ) यदि A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तथा $P(A) = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{4}{10}$ है, तो $P(A \cap B)$ का मान ज्ञात कीजिए। 1

2. Attempt all the parts :

a) Find the number of all one-one functions from the set $A = \{1, 2, 3\}$ to itself. 1

b) If $A = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}$ and $A + A' = I$, then value of α is

- i) $\frac{\pi}{6}$ ii) $\frac{\pi}{3}$
iii) π iv) $\frac{3\pi}{2}$. 1

c) Prove that the function $f(x) = x^2$ defined on $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ is neither one-one nor onto. 1

d) Show that $f(x) = \sin(x^2)$ is a continuous function. 1

e) If A and B be two independent events and $P(A) = \frac{3}{10}, P(B) = \frac{4}{10}$, then find the value of $P(A \cap B)$. 1

3. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि $f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ जहाँ $f(x) = \frac{x}{1+|x|}, \forall x \in \mathbb{R}$ द्वारा परिभाषित फलन एकैकी तथा आच्छादक है। 2

ख) यदि $e^y(1+x) = 1$ है, तो दिखाइए कि

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \quad 2$$



ग) यदि सदिश $(a\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ तथा सदिश $(3\hat{i} + b\hat{j})$ लम्बवत् हों, तो सिद्ध कीजिए कि $3a + 2b = 0$. 2

घ) एक परिवार में दो बच्चे हैं। यदि यह ज्ञात हो कि बच्चों में से कम से कम एक बच्चा लड़का है, तो दोनों बच्चों के लड़का होने की क्या प्रायिकता है ? 2

3. Attempt all the parts :

a) Prove that the function

$f: \mathbb{R} \rightarrow (-1, 1)$ where

$f(x) = \frac{x}{1+|x|}$, $\forall x \in \mathbb{R}$ is one-one and onto. 2

b) If $e^y(1+x) = 1$, then show that

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \left(\frac{dy}{dx}\right)^2. \quad 2$$

c) If the vectors $(a\hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k})$ and $(3\hat{i} + b\hat{j})$ are perpendicular, then prove that $3a + 2b = 0$. 2

H985671

[Turn over

d) There are two children in a family. It is known that at least one child is boy. Then find the probability that both children are boys. 2

4. निम्नलिखित सभी खण्डों को हल कीजिए :

क) दिखाइए कि

$$\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right) = \pi. \quad 2$$

ख) यदि $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो

सिद्ध कीजिए $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$. 2

ग) यदि $y = x^{\sin x}$ है, तो $\frac{dy}{dx}$ ज्ञात कीजिए। 2

घ) दिखाइए कि स्थिति सदिशों $4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}$, $-(\hat{j} + \hat{k})$, $(3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k})$ तथा $4(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$ वाले क्रमशः चारों बिन्दु A, B, C तथा D समतलीय हैं। 2

H985671



4. Attempt all the parts :

a) Show that

$$\sin^{-1}\left(\frac{12}{13}\right) + \cos^{-1}\left(\frac{4}{5}\right) + \tan^{-1}\left(\frac{63}{16}\right) = \pi.$$

2

b) If $F(x) = \begin{bmatrix} \cos x & -\sin x & 0 \\ -\sin x & \cos x & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, then

prove that $F(x+y) = F(x) \cdot F(y)$. 2

c) If $y = x^{\sin x}$, then find $\frac{dy}{dx}$. 2

d) Show that the position vectors of four points A, B, C and D are

$$4\hat{i} + 5\hat{j} + \hat{k}, -(\hat{j} + \hat{k}),$$

$$(3\hat{i} + 9\hat{j} + 4\hat{k}) \text{ and } 4(-\hat{i} + \hat{j} + \hat{k})$$

respectively are coplanar. 2

5. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) यदि $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$ है, तो दिखाइए कि

$$A^3 - 23A - 40I = 0. \quad 5$$

ख) यदि R_1 तथा R_2 दो तुल्यता सम्बन्ध समुच्चय A में हैं, तो सिद्ध कीजिए कि $R_1 \cap R_2$ भी एक तुल्यता सम्बन्ध है। 5

ग) यदि $\cos y = x \cos(a+y)$ तथा $\cos a \neq \pm 1$, तो सिद्ध कीजिए

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a+y)}{\sin a}. \quad 5$$

घ) रेखीय प्रोग्रामन समस्या का निम्न अवरोधों के अन्तर्गत हल कीजिए :

$$5x + 3y \leq 15, 2x + 5y \leq 10 \text{ तथा}$$

$$x \geq 0, y \geq 0, Z = 10x + 3y \text{ का}$$

अधिकतम मान ज्ञात कीजिए। 5

ङ) दिखाइए कि पूर्णाकों के समुच्चय में

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (a-b) \text{ को } 7 \text{ विभाजित करता है} \}$$

एक तुल्यता सम्बन्ध है। 5

च) सिद्ध कीजिए

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot ((\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{a})) = 2[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]. \quad 5$$



5. Attempt any *five* parts of the following :

a) If $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & -2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 \end{bmatrix}$, then show that

$$A^3 - 23A - 40I = 0. \quad 5$$

b) If R_1 and R_2 are two equivalence relations on a set A , then prove that $R_1 \cap R_2$ is also an equivalence relation. 5

c) If $\cos y = x \cos(a + y)$ and $\cos a \neq \pm 1$, then prove that

$$\frac{dy}{dx} = \frac{\cos^2(a + y)}{\sin a}. \quad 5$$

d) Solve the linear programming problem under the following constraints :

$$5x + 3y \leq 15, \quad 2x + 5y \leq 10 \quad \text{and} \\ x \geq 0, \quad y \geq 0. \text{ Find maximum value of } Z = 10x + 3y. \quad 5$$

e) Show that a relation

$$R = \{(a, b) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} : (a - b) \text{ is divisible by } 7\}$$

in the set of integers is an equivalence relation. 5

f) Prove that

$$(\vec{a} + \vec{b}) \cdot ((\vec{b} + \vec{c}) \times (\vec{c} + \vec{a})) = 2[\vec{a} \vec{b} \vec{c}]. \quad 5$$

H985671

[Turn over

6. निम्नलिखित में से किन्हीं पाँच खण्डों को हल कीजिए :

क) सिद्ध कीजिए कि एक शंकु के अन्तर्गत महत्तम वक्रपृष्ठ वाले लम्बवृत्तीय बेलन की त्रिज्या शंकु की त्रिज्या की आधी होती है। 5

ख) अवकल समीकरण $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+5}{2(x+y)+3}$ का हल ज्ञात कीजिए। 5

ग) वक्र $y = \cos(x + y)$, $-2\pi < x < 2\pi$ की स्पर्श रेखाओं का समीकरण ज्ञात कीजिए जो रेखा $x - 2y = 0$ के समान्तर है। 5

घ) यदि A तथा B स्वतंत्र घटनाएँ हैं तो दिखाइए कि A या B में से न्यूनतम एक के होने की प्रायिकता $1 - P(A')P(B')$ होगी। 5

ङ) $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$ को ज्ञात कीजिए। 5

च) फलन $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$, $\forall x \in [1, 3]$ के लिए मध्यमान प्रमेय सत्यापित कीजिए। 5

6. Attempt any *five* parts of the following :

a) Prove that the radius of a right circular cylinder inside a cone is half of the radius of cone. The right circular cylinder has maximum curved surface. 5

H985671



- b) Find the solution of the differential equation $\frac{dy}{dx} = \frac{x+y+5}{2(x+y)+3}$. 5
- c) Find the equation of tangent lines of the curve $y = \cos(x+y)$, $-2\pi < x < 2\pi$ which is parallel to the line $x - 2y = 0$. 5
- d) If A and B be two independent events, then show that the probability of occurrence of at least one is $1 - P(A')P(B')$. 5
- e) Find $\int \frac{dx}{a \sin x + b \cos x}$. 5
- f) Verify mean value theorem for the function $f(x) = x^3 - 5x^2 - 3x$, $\forall x \in [1, 3]$. 5
7. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :
- क) निम्नलिखित समीकरण निकाय
 $x + y + z = 6$, $y + 3z = 11$,
 $x + z = 2y$ को आव्यूह विधि से हल कीजिए। 8

- ख) i) यदि $x^y = e^{x-y}$ है, तो सिद्ध कीजिए कि $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2}$. 4
- ii) यदि A तथा B दो सममित आव्यूह है तो सिद्ध कीजिए कि $(AB - BA)$ एक विषम सममित आव्यूह होगा। 4
7. Attempt any one part of the following :
- a) Solve the following system of equations by matrix method :
 $x + y + z = 6$, $y + 3z = 11$,
 $x + z = 2y$. 8
- b) i) If $x^y = e^{x-y}$, then prove that $\frac{dy}{dx} = \frac{\log x}{(1 + \log x)^2}$. 4
- ii) If A and B be two symmetric matrices then prove that $(AB - BA)$ is a skew-symmetric matrix. 4
8. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :
- क) उस क्षेत्र का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जो $x = 0$ एवं $x = 2\pi$ के मध्य वक्र $y = \cos x$ से घिरा हुआ है। 8



ख) सदिश विधि से निम्न रेखाओं के बीच न्यूनतम दूरी ज्ञात कीजिए

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1} \text{ तथा}$$

$$\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4} \quad 8$$

8. Attempt any one part of the following :

a) Find the area of the region of the curve $y = \cos x$ bounded between $x = 0$ and $x = 2\pi$. 8

b) Find the shortest distance between the following lines by vector method :

$$\frac{x-3}{3} = \frac{y-8}{-1} = \frac{z-3}{1} \text{ and}$$

$$\frac{x+3}{-3} = \frac{y+7}{2} = \frac{z-6}{4} \quad 8$$

9. निम्नलिखित में से किसी एक खण्ड को हल कीजिए :

क) i) सिद्ध कीजिए कि

$$\int_0^{\pi/4} \log \sin 2x \, dx = -\frac{\pi}{4} \log 2. \quad 4$$

ii) यदि $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$ है, तो सिद्ध कीजिए

$$\text{कि } (1-x)^2 \frac{dy}{dx} + y = 0. \quad 4$$

ख) प्रारंभिक संक्रियाओं के प्रयोग से

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ का व्युत्क्रम प्राप्त कीजिए।}$$

8

9. Attempt any one part of the following :

a) i) Prove that

$$\int_0^{\pi/4} \log \sin 2x \, dx = -\frac{\pi}{4} \log 2. \quad 4$$

ii) If $y = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$, then prove that

$$(1-x)^2 \frac{dy}{dx} + y = 0. \quad 4$$

b) Find the inverse of the matrix

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ by using elementary}$$

operations. 8

