Reeksamen 2013/2014

Mål- og integralteori

Københavns Universitet
Institut for Matematiske Fag

Formalia

Eksamensopgaven består af 4 opgaver med ialt 12 spørgsmål. Ved bedømmelsen indgår de 12 spørgsmål med samme vægt. Besvarelsen bedømmes med en karakter i henhold til 12-skalaen.

Eksamen er en 4 timers skriftlig eksamen med hjælpemidler. Dvs. bøger, kompendier og andet undervisningsmateriale kan benyttes. Det er ligeledes tilladt at benytte lommeregner eller computer. Elektroniske hjælpemidler må **ikke** på nogen måde bruges til kommunikation med andre, og det er ligeledes **ikke** tilladt at etablere forbindelse til internettet eller andre netværk under eksamen. Det er tilladt at skrive med blyant.

Opgave 1

Denne opgave består af 4 uafhængige spørgsmål. Hvert spørgsmål besvares med et kort argument, et modeksempel eller en reference til undervisningsmaterialet. Alle stokastiske variable er defineret på målrummet $(\Omega, \mathbb{F}, P)$.

Spørgsmål 1.1. Lad μ være et mål på $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ som opfylder

$$\mu((-\infty, x]) = \begin{cases} x^2 & \text{for } x \geq 0 \\ 0 & \text{for } x < 0. \end{cases} \tag{1.1}$$

Afgør hvorvidt (1.1) entydigt bestemmer μ.

Mængderne $(-\infty, x]$ for $x \in \mathbb{R}$ udgør et $\cap$-stabilt frembringersystem for $\mathbb{B}$. Endvidere er $\mathbb{R} = \cup_{n \in \mathbb{N}}(-\infty, n]$ og $\mu((-\infty, n]) = n^2 < \infty$. Det følger derfor af sætning 3.9 at (1.1) entydigt bestemmer målet μ.

Spørgsmål 1.2. Lad X og Y være uafhængige reelle stokastiske variable. Antag $E|Y| < \infty$ og $E|X| < \infty$ samt at $\mathbb{D} \subseteq \sigma(Y) \subseteq \mathbb{F}$ for en σ-algebra $\mathbb{D}$. Vis at

$$E(XY \mid \mathbb{D}) = EXE(Y \mid \mathbb{D}).$$

Det følger af uafhængigheden at $E|XY| < \infty$. Fra sætning 2.6 (tårnegenskaben) fås at

$$E(XY \mid \mathbb{D}) = E(E(XY \mid \sigma(Y)) \mid \mathbb{D}) = E(\underbrace{E(X \mid \sigma(Y))}_{=EX} Y \mid \mathbb{D}) = EXE(Y \mid \mathbb{D}) \quad \text{n.s.}$$

hvor vi udnytter at Y er $\sigma(Y)$-målelig (tredje lighed) og at $X \perp\!\!\!\perp Y$ (fjerde lighed).

Spørgsmål 1.3. Lad X og Y være reelle stokastiske variable således at fordelingen af (X, Y) har tæthed

$$f(x, y) = \begin{cases} 2 & \text{for } 0 \le y \le x \le 1 \\ 0 & \text{ellers} \end{cases}$$

m.h.t. lebesguemålet m_2. Afgør hvorvidt $X \perp\!\!\!\perp Y$.

Fordelingen af (X, Y) er ikke et produkt af de marginale fordelinger, derfor er X og Y ikke uafhængige. Konkret kan vi se på $B = (0, 0.5) \times (0.5, 1)$. Tætheden f er 0 på denne kasse, så $P((X, Y) \in B) = 0$. Derimod ses det ved direkte udregning at $P(X \in (0, 0.5)) = P(Y \in (0.5, 1)) = 0.25 > 0$, så hvis X og Y havde været uafhængige, så havde $P((X, Y) \in B) = 0.25^2 > 0$.

Spørgsmål 1.4. Afgør hvorvidt funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ givet ved

$$f(x, y) = e^{-x^4 - y^4 - 2x^2y^2}$$

er integrabel m.h.t. lebesguemålet m_2 på $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$.
Vink: Sammenlign med tætheden for en normalfordeling.

Observer at

$$x^4 + y^4 + 2x^2y^2 = (x^2 + y^2)^2 \ge x^2 + y^2 - 1.$$

Heref følger at

$$\int f \, \mathrm{d}m_2 \le e \int e^{-x^2 - y^2} \, \mathrm{d}m_2(x, y) = e \left(\int e^{-x^2} \mathrm{d}x \right)^2 = e\pi < \infty$$

idet vi genkender integralet som normeringskonstanten $\sqrt{\pi}$ i normalfordelingen med middelværdi 0 og varians 0.5. Vi har undervejs brugt at f er positiv, samt Tonellis sætning i den første lighed, jf. også eksempel 12.18.

Opgave 2

Antag at $X_1, X_2, \ldots$ er uafhængige identisk fordelte stokastiske variable med

$$P(X_i = 1) = P(X_i = -1) = \frac{1}{2}.$$

Spørgsmål 2.1. Vis at

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \leq 2\sqrt{n}\right) \to 1 - 2\Phi(-2) \simeq 0.9545$$

for $n \to \infty$.

Vi skal bruge CLT. Vi konstaterer først at $EX_i = 1/2 - 1/2 = 0$, og at

$$VX_i = \frac{1^2}{2} + \frac{(-1)^2}{2} = 1.$$

Vi har derfor at

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \leq x\sqrt{n}\right) = P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - 0\right| \leq x\frac{1}{\sqrt{n}}\right) \to 1 - 2\Phi(-x)$$

ved CLT – mere præcist, bemærkningerne på side 2 og 3 i notatet. Resultatet følger med $x = 2$ idet $\Phi(-2) \simeq 0.022750$.

Spørgsmål 2.2. Vis at

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \leq 2\sqrt{n}\right) \geq \frac{3}{4}.$$

Den stokastiske variabel

$$Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$$

har middelværdi 0, jf. udregningerne i opgave 2.1. Den har envidere endeligt 2. moment og $VY = nVX_1 = n$, da X_i'erne er uafhængige med varians 1. Det følger derfor at Chebychevs ulighed, sætning 16.19, med $\varepsilon = 2\sqrt{n}$ at

$$P(|Y - 0| > 2\sqrt{n}) \leq \frac{n}{(2\sqrt{n})^2} = \frac{1}{4}.$$

Heraf følger, at

$$P\left(\left|\sum_{i=1}^{n} X_i\right| \leq 2\sqrt{n}\right) = 1 - P(|Y| > 2\sqrt{n}) \geq 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}.$$

Opgave 3

Definer funktionen $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ved

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi\sqrt{1-x^2}} & \text{for } x \in (-1,1) \\ 0 & \text{ellers.} \end{cases}$$

Lad $\nu = f \cdot m$ være målet med tæthed f m.h.t. lebesguemålet m på $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$.

Spørgsmål 3.1. Find tætheden for det transformerede mål $\arccos(\nu)$. Gør rede for at ν er et sandsynlighedsmål.
Bemærk: Funktionen arccos, der betegner den inverse til cos, er som udgangspunkt kun defineret på $[-1, 1]$.

Vi bemærker først at $\nu((-1,1)^c) = 0$, og at $h = \arccos$ afbilder $I = (-1,1)$ bijektivt på $J = (0,\pi)$ med C^1-invers $h^{-1} = \cos : (0,\pi) \to (-1,1)$. Endvidere er $|(h^{-1})'(y)| = |\sin(y)|$. Det følger nu af sætning 12.6 at $\mu := \arccos(\nu) = \tilde{f} \cdot m$ hvor tætheden $\tilde{f}$ er givet ved

$$\tilde{f}(y) = f(\cos(y))|\sin(y)| = \frac{1}{\pi} \frac{|\sin(y)|}{\underbrace{\sqrt{1-\cos(y)^2}}_{=|\sin(y)|}} = \frac{1}{\pi}$$

for $y \in (0,\pi)$. Det er tætheden for ligefordelingen på $(0,\pi)$, og altså et sandsynlighedsmål. Derfor er $\nu = \cos(\mu)$ også et sandsynlighedsmål.

Spørgsmål 3.2. Vis at ν har k'te moment for alle $k \in \mathbb{N}$.

Observer at $|x|^k f(x) \leq f(x)$ for alle $x \in \mathbb{R}$ idet $|x|^k \leq 1$ for $x \in (-1,1)$ og $f(x) = 0$ for $|x| > 1$. Det følger nu af sætning 11.7 at

$$\int |x|^k \, \mathrm{d}\nu(x) = \int |x|^k f(x) \, \mathrm{d}x \leq \int f(x) \, \mathrm{d}x = 1 < \infty$$

for alle $k \in \mathbb{N}$. Det viser, jf. definition 16.7, at ν har k'te moment for alle $k \in \mathbb{N}$.

Spørgsmål 3.3. Lad X være en stokastisk variabel med fordeling ν. Vis at

$$V(X) = \frac{1}{2}.$$

Iflg. opgave 3.2 har ν alle momenter, specielt har X endelig middelværdi og varians. Funktionen $x \mapsto xf(x)$ ses at være ulige, så det følger af opgave 10.12(c) at

$$EX = \int xf(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

Vi har så

$$VX = \int x^2 f(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{1} x^2 (1-x^2)^{-1/2} \, \mathrm{d}x.$$

Integranden er lige, så ved opgave 10.12(a) samt substitutionen $z = x^2$ fås

$$VX = \frac{1}{\pi} \int_0^1 z^{1/2}(1-z)^{-1/2}\,\mathrm{d}z = \frac{B(3/2,1/2)}{\pi} = \frac{1}{2}$$

hvor

$$B(3/2,1/2) = \Gamma(3/2)\Gamma(1/2) = \pi/2$$

er B-funktionen i $(3/2,1/2)$, jf. eksempel 12.16.

Alternativt (i såvel opgave 3.2 som 3.3) kan man bruge at $X = \cos(Y)$ hvor Y er ligefordelt på $(0,\pi)$ iflg. opgave 2.1. Heraf følger f.eks. ved stamfunktionsbestemmelse at

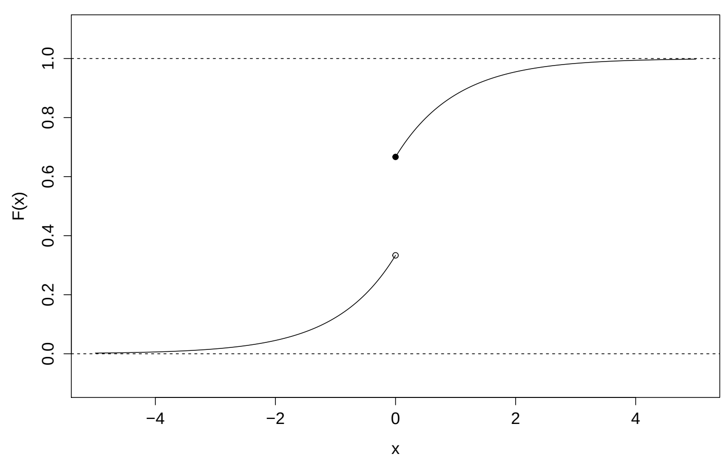
$$VX = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \cos(y)^2\,\mathrm{d}y = \frac{1}{\pi}\left[\frac{1}{2}(y + \sin(y)\cos(y))\right]_0^\pi = \frac{1}{2}.$$

Opgave 4

Lad funktionen $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{3}e^x & \text{for } x < 0 \\ 1 - \frac{1}{3}e^{-x} & \text{for } x \geq 0. \end{cases}$$

Spørgsmål 4.1. Tegn en skitse af grafen for F. Vis at F er en fordelingsfunktion for et sandsynlighedsmål.



Vi skal eftervise de fire betingelser i sætning 17.3. Vi starter med at konstatere at $e^x \to 0$ for $x \to -\infty$, så betingelse 3) er opfyldt. Ligeledes vil $e^{-x} \to 0$ for $x \to \infty$, så $F(x) = 1 - e^{-x}/3 \to 1$, og 4) er også opfyldt. På hvert af de åbne intervaller $(-\infty, 0)$ og $(0, \infty)$ er F kontinuert, og F er også højrekontinuert i 0, så 3) følger. Endvidere er $F(0) = 2/3 > F(0-0) = 1/3$ og F er kontinuert differentiabel på $(-\infty, 0)$ såvel som $(0, \infty)$ med $F'(x) = e^{-|x|}/3 > 0$. Heraf følger det at F er voksende, så 1) gælder. Sætning 17.4 sikrer at F er fordelingsfunktion for et sandsynlighedsmål.

Lad ν betegne sandsynlighedsmålet på $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$ med fordelingsfunktion F.

Spørgsmål 4.2. Beregn $\nu((-\infty, 0))$ og $\nu(\{0\})$. Afgør hvorvidt ν har tæthed m.h.t. lebesguemålet på $\mathbb{R}$.

Det følger af formlerne side 397 at

$$\nu((-\infty, 0)) = F(0-0) = \frac{1}{3}.$$

Heraf følger nu at

$$\nu(\{0\}) = \nu((-\infty, 0] \setminus (-\infty, 0)) = F(0) - F(0-0) = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}.$$

Hvis ν havde tæthed m.h.t. lebesguemålet ville alle etpunktsmængder havde ν-mål 0. Ovenstående viser, at $\{0\}$ har positivt ν-mål. Vi konkluderer, at ν ikke har tæthed m.h.t. lebesguemålet.

Spørgsmål 4.3. Gør rede for at ν har første moment og beregn

$$\int x \, \mathrm{d}\nu(x).$$

Observer først at for $n \in \mathbb{N}$ er

$$\nu([-n, -n+1)) = \nu((n-1, n]) = \frac{1}{3} e^{-n}(e-1)$$

Eftersom $|x| \leq n$ på $[-n, -n+1) \cup (n-1, n]$ har vi følgende vurdering

$$\int |x| \, \mathrm{d}\nu(x) \leq \frac{2}{3}(e-1) \sum_{n=1}^{\infty} n e^{-n} < \infty.$$

Det følger direkte af definitionen af F at

$$F(-x) + F(x-0) = 1$$

for alle $x \in \mathbb{R}$, dvs. fordelingen er symmetrisk omkring 0, jf. eksempel 17.24, formel (17.18). Dvs. med $h(x) = -x$ opfylder ν at $h(\nu) = \nu$. Integraltransformationssætningen giver nu at

$$\int x \, \mathrm{d}\nu(x) = \int x \, \mathrm{d}h(\nu)(x) = \int h(x) \, \mathrm{d}\nu(x) = -\int x \, \mathrm{d}\nu(x),$$

og vi slutter at integralet er 0.

Alternativt giver analysen i spørgsmål 4.1 at

$$\nu = \frac{1}{3}e^{-|x|} \cdot m + \frac{1}{3}\delta_0.$$

Heraf fås at

$$\int |x| \, \mathrm{d}\nu(x) = \frac{1}{3}\int xe^{-|x|} \, \mathrm{d}x + \frac{1}{3}\underbrace{\int x\mathrm{d}\delta_0(x)}_{=0} = \frac{2}{3}\underbrace{\int_0^\infty xe^{-x} \, \mathrm{d}x}_{=1} = \frac{2}{3} < \infty.$$

Eftersom $x \mapsto xe^{-|x|}$ er ulige er integralet

$$\int x \, \mathrm{d}\nu(x) = \frac{1}{3}\int xe^{-|x|} \, \mathrm{d}\nu(x) = 0$$

iflg. opgave 10.12(c).