MÅL OG INTEGRALE TEORI

Aflevering 1

Rud V. Faden, Alex Larsen, Markus Bak Hansen, Nemo Breme, Theis Kehlet

December 2, 2014

1 Karakterisering af et mål

SPØRGSMÅL 1 Lad f være en funktion fra $\mathbb{R}^2 - \mathbb{R}_+ \times 0 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ defineret som

$$f(\|x\|_2, \omega(x)) \tag{1.1}$$

Normen $\|x\|$ er altid kontinuer og da det er antaget, at ω også er kontinuer på $\mathbb{R}^2 \setminus (\{x_1, 0\}) \mid x_1 \geqslant 0$, da er f kontinuer. Vi skal nu vise, at urbilledet af f

$$f^{-1}(\|x\|_2, \omega(x)) \tag{1.2}$$

er lukket. Men f er en kontinuer, og en funktion er kontinuer hvis og kun hvis dens urbillede af en afsluttet mængde er afsluttet. Heraf følger at B er en afluttet mængde.
$\mathbb{D}$ er i $\mathbb{B}_2$, fordi $\mathbb{B}_2$ genereres af mængden af lukkede mængder, som indeholder $\mathbb{D}$.

SPØRGSMÅL 2 Lad

$$B = B_i \cap B_j = \left\{ x \in \mathbb{R}^2 \mid \omega(x) \in ([\theta_i, \eta_i] \cap [\theta_j, \eta_j], \|x\| \in ([r_i, R_i] \cap [r_j, R_j])) \right\}$$

Hvis $i = j$

$$[\theta_i, \eta_i] \cap [\theta_j, \eta_j] = [\theta_i, \eta_i] \text{ og } [r_i, R_i] \cap [r_j, R_j] = [r_j, R_j] \text{ eller} \tag{1.3}$$
$$[\theta_i, \eta_i] \cap [\theta_j, \eta_j] = \emptyset \qquad \text{og } [r_i, R_i] \cap [r_j, R_j] = \emptyset \tag{1.4}$$

Hvis $i \neq j$

$$[\theta_i, \eta_i] \cap [\theta_j, \eta_j] = \emptyset \text{ eller } [r_i, R_i] \cap [r_j, R_j] = \emptyset \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset \tag{1.5}$$

Ellers danner $B_i \cap B_j$ et nyt buesegment i $\mathbb{D}$, da fællesmængden af et lukket interval er et lukket interval.

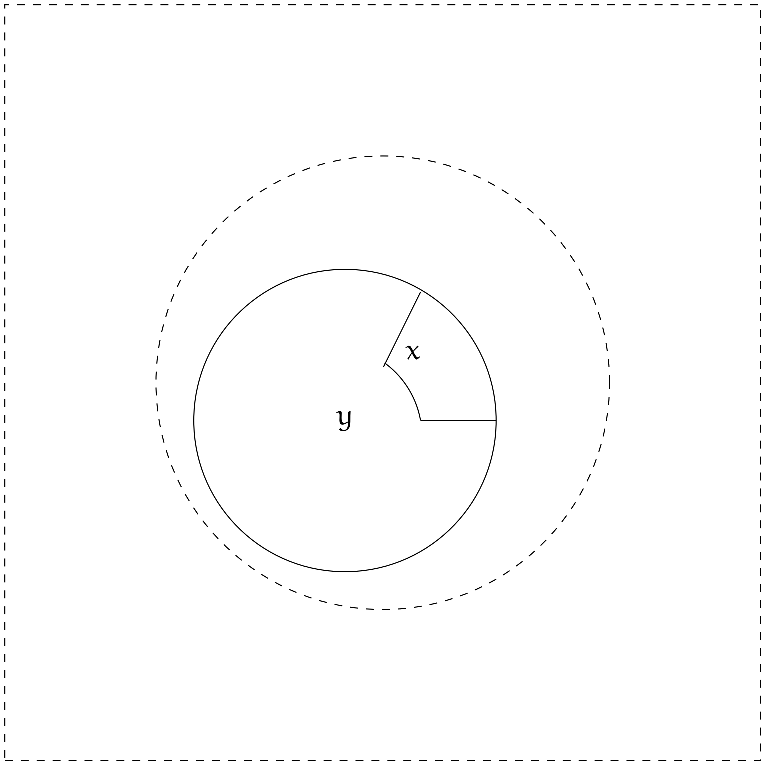

Figure 1.1: Bevis i opgave 3

SPØRGSMÅL 3 Det følger at

$$\sigma(\mathbb{D}) \subset \mathbb{B}_2 \tag{1.6}$$

per definition af $\sigma(\mathbb{D})$, da $\mathbb{D} \subset \mathbb{B}_2$. Vi vil vise at $\mathrm{K}^{o,2} \subset \sigma(\mathbb{D})$ (hvor $\mathrm{K}^{o,2}$ er de åbne kasser), for så er $\mathbb{B}_2 = \sigma(\mathrm{K}^{o,2}) \subset \sigma(\mathbb{D})$ og $\sigma(\mathbb{D}) \subset \mathbb{B}_2$, så er $\mathbb{B}_2 = \sigma(\mathbb{D})$.
$B(x,r)$ betegner en lukket kugle i 2D (dvs. en cirkel) med centrum i x og radius r, og at $B^o(x,r)$ betegner den tilsvarende åbne kugle i 2D (dvs. en cirkel).
Lad $K \in \mathrm{K}^{o,2}$ og lad

$$\mathbb{D}_{\mathbb{Q}} = \left\{B(\theta,\eta,r,R) \mid \theta,\eta,r,R \in \mathbb{Q}\right\} \subset \mathbb{D} \subset \sigma(\mathbb{D}) \tag{1.7}$$

Vi vil nu vise at $K = \bigcup_{B \in \mathbb{D}_r, B \in K} B$
Det er klart at $K \supset \bigcup_{B \in \mathbb{D}_r, B \in K} B$.
Lad nu $x \in K$. Da K er åben, findes det en radius r, så $B^o(x,r) \subset K$. Da findes $r' \in \mathbb{Q}$ og $y \in B^o(x,y)$, så $x \neq y$ og $x \in B(y,x) \subset B(y,x)^o$. Da findes $B \in \mathbb{D}_{\mathbb{Q}}$, så $x \in B$. Da ses at $K \subset \bigcup_{B \in \mathbb{D}_{\mathbb{Q}}, B \in K} B$, og dermed $K = \bigcup_{B \in \mathbb{D}_{\mathbb{Q}}, B \in K} B$

SPØRGSMÅL 4 For at μ er et sansynlighedmål skal følgende gælde

(1) μ skal antage værdier i enhedsintervallet $[0,1]$.

(2) $\mu(\emptyset) = 0$

(3) μ skal være tællelige sigma-additiv. Dvs. at at $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_n\right)) = \sum_{i=1}^{n} \mu(A_n)$

For at vise 1. løser vi integralet. Da B kun er defineret på $\mathbb{R}_+$, skal vi at integralet for $r \to 0, R \to \infty$ går (2) mod 1.

$$\frac{2\pi - 0}{2\pi} \int_r^R u e^{-u^2/2} \, du \Leftrightarrow \tag{1.8}$$

$$\int_r^R u e^{-u^2/2} \, du \Leftrightarrow \tag{1.9}$$

$$\left[-e^{-u^2/2} \right]_r^R \Leftrightarrow \tag{1.10}$$

$$\left[e^{-r^2/2} - e^{-R^2/2} \right] \tag{1.11}$$

$$\lim_{r \to 0} \left(\lim_{R \to \infty} \left[e^{-r^2/2} - e^{-R^2/2} \right] \right) = 1 \tag{1.12}$$

$$\tag{1.13}$$

For $B = 0$, da for vi

$$\frac{0 - 0}{2\pi} \int_0^0 u e^{-u^2/2} \, du = 0 \tag{1.14}$$

For 2. har vi at B indeholder den tomme mængde per definition. Så

$$\mu(\emptyset) = \frac{\theta - \eta}{2\pi} \int_R^r 1_{\emptyset} u e^{-u^2/2} \, du = \frac{\theta - \eta}{2\pi} \int_R^r 0 \, du = 0 \tag{1.15}$$

For at vise 3., kan vi bemærke at der at tale om en stigende følge at mængder. Dvs. for $n \in \mathbb{N}$, har vi at $B_1 \subset B_2 \subset \ldots$ for all $B_n \in B$. Derved kan vi konstruere en disjunkt mængde defineret ved

$$A_n = B_b \setminus B_{n-1} \tag{1.16}$$

hvor om det gælder at

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \tag{1.17}$$

Således har vi at

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \tag{1.18}$$

Dermed er μ et sansynglighedsmål

SPØRGSMÅL 5 Lad μ og υ være 2 sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$. Da $\mathbb{D}$ også er stabil under forening (vist i spørgsmål 2) og da $\mathbb{B}_2 = \sigma(\mathbb{D})$, da er 2 sandsynlighedsmål μ, υ unikke, hvis

$$\mu(D) = \upsilon(D) \qquad \forall D \in \mathbb{D}$$

. Jf. 3.7. Lad derfor p_i være et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$ og lad $p_i = \mu(B_i)$ og $p_i = \upsilon(B_i)$. Da følger at $\mu(B_i) = \upsilon(B_i)$. Dermed følger at $\mu = \upsilon$

2 Konstruktion af et mål

SPØRGSMÅL 6 Målbarhed af t^{-1} følger direkte af 4.7, da $\sigma(\mathbb{D}) = \mathbb{B}_2$. Derfor

$$K = B(\theta, \eta, r, R) = \sqrt{-2\log v}\begin{pmatrix}\cos 2\pi u \\ \sin 2\pi u\end{pmatrix} \tag{2.1}$$

For hvilke u, v?

$$\|K\|_2 = \|\sqrt{-2\log v}\begin{pmatrix}\cos 2\pi u \\ \sin 2\pi u\end{pmatrix}\| \tag{2.2}$$

$$= \sqrt{-2\log v}\|\begin{pmatrix}\cos 2\pi u \\ \sin 2\pi u\end{pmatrix}\| \tag{2.3}$$

Da

$$\|\begin{pmatrix}\cos 2\pi u \\ \sin 2\pi u\end{pmatrix}\| = 1 \tag{2.4}$$

pga. idiot formlen, da følger at

$$\|K\|_2 = \sqrt{-2\log v} \Rightarrow v = e^{-\|K\|_2/2} \tag{2.5}$$

Vil vil nu finde v. Vi kan skrive B som

$$B(\theta, \eta, r, R) = \left\{\begin{pmatrix}v \\ v\end{pmatrix} \mid \omega\begin{pmatrix}v \\ v\end{pmatrix} \in [\theta, \eta], \left\|\begin{matrix}v \\ v\end{matrix}\right\| \in [r, R]\right\} \tag{2.6}$$

Heraf følger at

$$\{v\} = \left[e^{-R^2/2}, e^{-r^2/2}\right] \tag{2.7}$$

Se nu på

$$v = K \times \frac{1}{\sqrt{-2\log v}} = \begin{pmatrix}\cos 2\pi u \\ \sin 2\pi u\end{pmatrix} \tag{2.8}$$

Således har vi at

$$\omega\left(K \times \frac{1}{\sqrt{-2\log v}}\right) = \omega(K) = \begin{pmatrix}\cos 2\pi u \\ \sin 2\pi u\end{pmatrix} \tag{2.9}$$

hvis $v \in \left[\frac{\theta}{2\pi}, \frac{\eta}{2\pi}\right]$, som ønsket

SPØRGSMÅL 7 Det ses at

$$\begin{aligned}
t(m_2(B)) &= m_2(t^{-1}(B)) && (2.10)\\
&= m_2\left(\left[\frac{\theta}{2\pi}, \frac{\eta}{2\pi}\right] \times \left[e^{-R^2/2}, e^{-r^2/2}\right]\right) && (2.11)\\
&= \frac{\eta-\theta}{2\pi}\left(e^{-r^2/2} - e^{-R^2/2}\right) && (2.12)\\
&= \frac{\eta-\theta}{2\pi}\int_r^R ue^{-u^2/2}\,du && (2.13)
\end{aligned}$$