Eksamen 2013/2014

Mål- og integralteori

Københavns Universitet
Institut for Matematiske Fag

Formalia

Eksamensopgaven består af 4 opgaver med ialt 12 spørgsmål. Ved bedømmelsen indgår de 12 spørgsmål med samme vægt. Besvarelsen bedømmes med en karakter i henhold til 12-skalaen.

Eksamen er en 4 timers skriftlig eksamen med hjælpemidler. Dvs. bøger, kompendier og andet undervisningsmateriale kan benyttes. Det er ligeledes tilladt at benytte lommeregner eller computer. Elektroniske hjælpemidler må **ikke** på nogen måde bruges til kommunikation med andre, og det er ligeledes **ikke** tilladt at etablere forbindelse til internettet eller andre netværk under eksamen. Det er tilladt at skrive med blyant.

Opgave 1

Denne opgave består af 4 uafhængige spørgsmål. Hvert spørgsmål besvares med et kort argument, et modeksempel eller en reference til undervisningsmaterialet. Alle stokastiske variable er defineret på målrummet $(\Omega, \mathbb{F}, P)$.

Spørgsmål 1.1. Lad $X \sim \mathcal{N}(0,1)$. Gør rede for at fordelingen af $\exp(X)$ har en tæthed m.h.t. lebesguemålet på $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Det er ikke nødvendigt at finde tætheden.

Spørgsmål 1.2. Antag at

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \mathcal{N}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \right).$$

Afgør hvorvidt $X_1 \perp\!\!\!\perp X_2$.

Spørgsmål 1.3. Lad μ og ν være to σ-endelige mål på $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Hvis $\mu \otimes \nu$ er et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$, er μ og ν så også sandsynlighedsmål?

Spørgsmål 1.4. Antag at $X_1, \dots, X_n$ er uafhængige og identisk fordelte med

$$P(X_i = 2) = P(X_i = -2) = \frac{1}{2}.$$

Afgør hvorvidt

$$P\left(\sum_{i=1}^{n} X_i \leq 2x\sqrt{n}\right) \to \Phi(x)$$

for $n \to \infty$.

Opgave 2

Antag at X og Y er uafhængige reelle stokastiske variable, at X er ligefordelt på $(-1, 1)$, og at Y er Γ-fordelt med formparameter $\lambda = 3$.

Spørgsmål 2.1. Vis at

$$E\left(\frac{1}{Y}\right) = \frac{1}{2}.$$

Spørgsmål 2.2. Udregn

$$E\left(\frac{X}{Y} \,\middle|\, X\right) \quad \text{og vis at} \quad E\left(\frac{X}{Y}\right) = 0.$$

Opgave 3

Definer funktionen $F : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ ved

$$F(x) = 1 - \frac{1}{1 + \log(x+1)}$$

for $x \geq 0$ og $F(x) = 0$ for $x < 0$. Det kan uden bevis benyttes at F er en fordelingsfunktion for et sandsynlighedsmål på $(\mathbb{R}, \mathbb{B})$. Lad ν være sandsynlighedsmålet med fordelingsfunktion F. Dvs.

$$F(x) = \nu((-\infty, x]).$$

Spørgsmål 3.1. Tegn en skitse af grafen for fordelingsfunktionen F. Gør rede for at ν har tæthed m.h.t. lebesguemålet m og find tætheden.

Spørgsmål 3.2. Lad $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ være givet ved

$$h(x) = \begin{cases} \log(x+1) & \text{for } x > 0 \\ 0 & \text{for } x \leq 0. \end{cases}$$

Vis at $h(\nu)$ har tæthed m.h.t. lebesguemålet m og find tætheden.

Opgave 4

I denne opgave betegner

$$B = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq 1,\ y \geq 0\}$$

den øvre halvdel af den afsluttede enhedsdisk i planen, og $g : [0, \infty) \to [0, \infty]$ antages at være en målelig funktion. Funktionen $f : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty]$ defineret ved

$$f(x, y) = g(\sqrt{x^2 + y^2})$$

er ligeledes målelig. Bemærk at

$$1_B(x, y) = 1_{[0,\infty)}(y) 1_{[0,1]}(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Spørgsmål 4.1. Vis at

$$\int_B f \mathrm{d}m_2 = \pi \int_0^1 g(r) r \mathrm{d}r.$$

Spørgsmål 4.2. Udregn

$$\int_B \frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2}} \mathrm{d}m_2(x, y).$$

Spørgsmål 4.3. Vis at

$$\int_B f \mathrm{d}m_2 = \int_{-1}^1 \int_0^{\sqrt{1-x^2}} g(\sqrt{x^2 + y^2}) \mathrm{d}y \mathrm{d}x.$$

Det oplyses nu, at funktionen $H(y) = \log(y + \sqrt{a + y^2})$ for $a > 0$ opfylder

$$H'(y) = \frac{1}{\sqrt{a + y^2}}.$$

Spørgsmål 4.4. Vis at

$$\int_{-1}^1 \log \frac{\sqrt{1 - x^2} + 1}{|x|} \mathrm{d}x = \pi.$$

Her er konventionen for $x = 0$ at $2/0 = \infty$ og $\log(\infty) = \infty$.