MI - Hold 7

2. øvelsestime - ons d. 19/11-2014

3.3, 3.4 + Hurtigopgaven

3.3: $\mathbb{H}$ kaldes en Dynkin klasse (DK), hvis:

D1) $\mathcal{X} \in \mathbb{H}$

D2) Alle $A, B \in \mathbb{H}$ opfylder $A \subset B \Rightarrow B \backslash A \in \mathbb{H}$

D3) Alle $(A_n) \subset \mathbb{H}$ med $i \leq j \Rightarrow A_i \subset A_j$ opfylder:

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{H}.$$

Lad $A, B \subset \mathcal{X}$ opfylde

$$A \not\subset B \quad , \quad B \not\subset A \quad , \quad A \cap B \neq \emptyset \quad \text{og} \quad A \cup B \neq \mathcal{X} \tag{1}$$

Definer

$$\mathbb{H} = \{\emptyset, A, A^c, B, B^c, \mathcal{X}\}.$$

a) Vis at $\mathbb{H}$ er en dynkinklasse.

b) Vis at $\mathbb{H}$ ikke er en σ-algebra.

c) Kan a) og b) vises uden antagelse (1)?

a)

D1) Triviel.

D2) Bemærk at:

$$\begin{aligned}
&A \not\subset B\\
&A \not\subset A^c \Leftarrow A \neq \emptyset \Leftarrow A \cap B \neq \emptyset\\
&A^c \not\subset A \Leftarrow A^c \neq \emptyset \Leftarrow A^c \cap B^c \neq \emptyset \Leftarrow (A^c \cap B^c)^c \neq \mathcal{X} \Leftarrow A \cup B \neq \mathcal{X}\\
&A \not\subset B^c \Leftarrow A \cap B \neq \emptyset\\
&A^c \not\subset B \Leftarrow A^c \cap B^c \neq \emptyset \Leftarrow (A^c \cap B^c)^c \neq \mathcal{X} \Leftarrow A \cup B \neq \mathcal{X}\\
&A^c \not\subset B^c \Leftarrow B \not\subset A
\end{aligned} \tag{2}$$

Ved symmetri fås:

$$B \neq A, B \not\subset B^c, B^c \not\subset B, B \neq A^c, B^c \neq A, B^c \neq A^c$$

Lad $F, G \in \mathbb{H}$ opfylde $F \subset G$. Det følger af (2), at enten:

$$F = \emptyset \quad , \quad G = \mathcal{X} \quad \text{eller} \quad F = G.$$

Hvis $F = \emptyset$ har vi

$$G \backslash F = G \in \mathbb{H}.$$

Hvis $G = \mathcal{X}$ har vi

$$G \backslash F = F^c \in \mathbb{H},$$

da $\mathbb{H}$ tydeligvis er stabil mht. komplementer.

Hvis $F = G$ har vi:

$$G \backslash F = \emptyset \in \mathbb{H}.$$

D3) Lad (A_n) være en voksende følge i $\mathbb{H}$. Sæt:

$$\begin{aligned}
&k_1 = A_1 \quad , \quad k_{n+1} = \inf\{k > k_n, A_k \neq A_n\} \quad \text{for} \quad n \in \mathbb{N} \quad \text{og}\\
&k = \sup\{k_n : n \in \mathbb{N}, k_n < \infty\}
\end{aligned}$$

Bemærk at $k < \infty$, da $\mathbb{H}$ er endelig, og at $A_n = A_k$ for $n \geq A_k$. Da (A_n) endvidere er voksende, fås:

$$A_n \subset A_k \quad \text{for alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Det følger at:

$$\cup_{n=1}^{\infty} A_n = A_k \in \mathbb{H}.$$

Det konkluderes at $\mathbb{H}$ er en dynkinklasse.

b)

Hvis H var en σ-algebra fulgte det af lemma 1.8, at

$$F, G \in \mathbb{H} \Rightarrow F \cap G.$$

Men

$$\begin{aligned}
&A \cap B \neq \emptyset \\
&A \cap B \neq A \Leftarrow A \not\subset B \\
&A \cap B \neq A^c \\
&A \cap B \neq \mathcal{X} \Leftarrow A \cup B \neq \mathcal{X}
\end{aligned}$$

De øvrige $\mathbb{H}$-mængder elimineres ved symmetri, og vi får $A \cap B \notin \mathbb{H}$. Det konkluderes at $\mathbb{H}$ ikke er en σ-algebra.

c)

Hvis $\emptyset \subsetneq A \subset B$ ville 2. antagelse for dynkinklasser ikke være opfyldt, da $B \backslash A \notin \mathbb{H}$.

Hvis $A, B = \emptyset$ ville $\mathbb{H} = \{\emptyset, \mathcal{X}\}$ som er en σ-algebra. Betingelse om generel position er dermed nødvendigt i begge tilfælde.

3.4: Lad $\mathbb{H} \subset \mathbb{P}(\mathcal{X})$.
$\mathbb{H}$ kaldes en Serpinsky klasse (SK), hvis:

S1) $\mathcal{X} \in \mathbb{H}$

S2) $A \in \mathbb{H} \Rightarrow A^c \in \mathbb{H}$

S3) Alle $(A_n) \subset \mathbb{H}$ med $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$ opfylder:

$$\cup_{i=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{H}.$$

Vis at:

a) $A \cup B = (B^c \backslash A)^c$.

b) Vis at enhver SK er en DK.

c) Vis at enhver DK er en SK.

a)

$$\begin{aligned} (B^c \backslash A)^c &= (B^c \cap A^c)^c && \text{(def. A.4)} \\ &= B \cup A && \text{(de Morgan)} \end{aligned}$$

b)

Lad $\mathbb{H}$ være en SK.

D1) Triviel.

D2) Lad $A, B \in \mathbb{H}$ med $A \subset B$. Vis: $B \backslash A \in \mathbb{H}$.

$$\begin{aligned} B \backslash A &= B \cap A^c && \text{(def. A.4)} \\ &= (B^c \cup A)^c. \end{aligned}$$

Da $B^c \cap A = A \backslash B = \emptyset$, følger det af S2 og S3, at $B \backslash A \in \mathbb{H}$.

D3) Lad $(A_n) \subset \mathbb{H}$ opfylde $i \leq j \Rightarrow A_i \subset A_j$. Vis: $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{H}$.
Bemærk:

$$\begin{aligned} B_n &\overset{\text{def}}{=} A_n \backslash (\cup_{i=1}^{n-1} A_i) \\ &= A_n \backslash A_{n-1}. \end{aligned}$$

Det følger nu af D2, at $B_n \in \mathbb{H}$.
Da (B_n) opfylder $i \leq j \Rightarrow B_i \cap B_j = \emptyset$ (opg. A.9 a), fås:

$$\begin{aligned} \cup_{n=1}^{\infty} A_n &= \cup_{n=1}^{\infty} B_n && \text{(opg A.9 c)} \\ &\in \mathbb{H} && \text{(S3)} \end{aligned}$$

Det konkluderes at $\mathbb{H}$ er en DK.

c)

Lad $\mathbb{H}$ være en DK.

S1) Triviel

S2) Lad $A \in \mathbb{H}$. Vis: $A^c \in \mathbb{H}$.
Af D1 $\mathcal{X} \in \mathbb{H}$ og da $A \subset \mathcal{X}$ giver D2:

$$A^c = \mathcal{X} \backslash A \in \mathbb{H}$$

S3) Lad $(A_n) \subset \mathbb{H}$ opfylde $i \neq j \Rightarrow A_i \cap A_j = \emptyset$. Vis: $\cup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathbb{H}$.

Definer:

$$C_n = \cup_{i=1}^{n} A_i \quad \text{for alle} \quad n \in \mathbb{N}.$$

Det følger D2, D3 samt spm. a), at $(C_n) \subset \mathbb{H}$.
(C_n) opfylder

$$i \leq j \Rightarrow C_i \subset C_j \quad \text{og} \quad \cup_{n=1}^{\infty} C_n = \cup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Vi får:

$$\begin{aligned} \cup_{n=1}^{\infty} A_n &= \cup_{n=1}^{\infty} C_n \\ &\in \mathbb{H}. && \text{(D3)} \end{aligned}$$

Hurtigopgave:

a)

Lad $A \in \mathbb{P}(\mathcal{X})$. Hvis $A = \emptyset$ har vi

$$A \in \mathbb{D} \subset \sigma(\mathbb{D}).$$

Hvis $A \neq \emptyset$ gælder

$$A = \{k_1, ..., k_m\} \quad \text{hvor} \quad 1 \leq m \leq n \quad \text{og} \quad k_1, ..., k_m \in \mathcal{X}.$$

Vi har da

$$A = \{k_1, ..., k_m\} = \cup_{j=1}^{m} \{k_j\} \in \sigma(\mathbb{D}).$$

Hvor vi har brugt

$$\mathbb{D} = \{\{k\} : k \in \mathcal{X}\} \cup \{\emptyset\}.$$

b)

Lad ν endnu et mål på $(\mathcal{X}, \mathbb{P}(\mathcal{X}))$ med:

$$\nu(\{i\}) = p_i \quad \text{for} \quad i = 1, ..., n.$$

Da også $\mu(\emptyset) = 0 = \nu(\emptyset)$, har vi:

$$\nu(D) = \mu(D) \quad \text{for alle} \quad D \in \mathbb{D}.$$

$\mathbb{D}$ er $\cap$-stabil da:

$$\{i\} \cap \{j\} = \begin{cases} \emptyset & , \ i \neq j \\ \\ \{i\} & , \ i = j \end{cases} \quad \text{og} \quad \emptyset \cap D = \emptyset \quad \text{for} \quad D \in \mathbb{D}.$$

Da envidere $\sigma(\mathbb{D}) = \mathbb{P}(\mathcal{X})$ (spg. a) følger det af thm. 3.7 at

$$\mu = \nu$$

c)

Lad H være $m \times n$ matricen givet ved:

$$H_{ij} = 1_{A_i}(j).$$

For $i = 1, ..., n$ fås:

$$\begin{aligned} q_i = \mu(\{A_i\}) &= \mu(\cup_{j:H_{ij}=1} \{j\}) \\ &= \sum_{j:H_{ij}=1} \mu(\{j\}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} H_{ij} \mu(\{j\}) \\ &= \sum_{j=1}^{n} H_{ij} p_j \\ &= (Hp)_i. \end{aligned}$$

Det sluttes at $q = Hp$.

d)

Set:

$$A_i = \{1, 2, ..., i\} \quad \text{for} \quad i = 1, ..., n.$$

Bemærk at $j \in A_i$, hvis og kun hvis, $j \leq i$. Ergo:

$$H_{ij} = 1_{\{j \leq i\}}.$$

I tilfældet $n = 3$ fås:

$$H = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

e)

Hvis de n søjler i H er lineært uafhængige (dvs. $\text{Rang}(H) = n$), har ligningen:

$$p = Hq,$$

netop én løsning. μ er da entydigt bestemt på $\mathbb{D}$, og dermed på $\mathbb{P}(\mathcal{X})$ (spm. b).

Da n vektorerer i $\mathbb{R}^m$ ikke kan være lineært uafhængige hvis $m < n$ kræves $m \geq n$.