Anden obligatoriske opgave

MI 2014/2015

Niels Richard Hansen
3. december 2014

Formaliteter

Dette er den anden af to obligatoriske opgaver på kurset MI 2014/2015. Den skal løses i grupper af 2-5 studerende. Hvis besvarelsen ikke godkendes i første omgang, er der mulighed for genaflevering. Det er en betingelse for at gå til eksamen, at begge obligatoriske opgaver godkendes.

Opgaven stilles onsdag den 3/12 og skal afleveres mandag den 22/12 kl. 13.15. Der skal afleveres en fysisk kopi for hver gruppe, og navnene på gruppens medlemmer skal fremgå af forsiden.

Opgaven bedømmes på følgende måde: Opgaven godkendes som udgangspunkt kun, hvis der er gjort et forsøg på at løse hele opgaven. Dvs. den godkendes ikke, hvis f.eks. kun spørgsmålene 1–5 er besvaret. Er der gjort forsøg på at løse hele opgaven, så godkendes opgaven som udgangspunkt, hvis der er opnået mindst 45 point (10 point per opgave, 70 ialt).

Indledning

Vi skal i denne opgave, som i den første, studere mål på $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$. Specielt sandsynligheds-mål, og især normalfordelingen.

Vi lader X og Y være to reelle stokastiske variable og definerer

$$\begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$$

for $a, b, c, d \in \mathbb{R}$. Dvs. $\tilde{X} = aX + bY$ og $\tilde{Y} = cX + dY$.

Husk i det følgende at en matrix O er ortogonal, hvis

$$O^T O = O O^T = I.$$

Momenter

Indledningsvist er X og Y to reelle stokastiske variable med andet moment, $EX = EY = 0$, $VX = VY = 1$ samt $E(XY) = 0$.

Spørgsmål 1. *Gør rede for at $E\tilde{X} = E\tilde{Y} = 0$ og udregn $V\tilde{X}$ og $V\tilde{Y}$. Vis at hvis matricen*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

er ortogonal, så er $V\tilde{X} = V\tilde{Y} = 1$.

To reelle stokastiske variable X og Y med middelværdi 0 siges at være *ukorrelerede* hvis $E(XY) = 0$.

Spørgsmål 2. *Find en betingelse på matricen*

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix},$$

som sikrer, at $\tilde{X}$ og $\tilde{Y}$ er ukorrelerede, og benyt denne til at vise at $X - Y$ og $X + Y$ er ukorrelerede.

Transformationer

I resten af opgaven antages det at f er en tæthed m.h.t. lebesguemålet m for et sandsynlighedsmål på $\mathbb{R}$, og at f er kontinuert og strengt positiv. Det antages envidere at X og Y er to reelle stokastiske variable således at fordelingen af (X, Y) har tæthed

$$g(x, y) = f(x)f(y)$$

m.h.t. m_2.

Spørgsmål 3. *Vis at fordelingen af såvel X som Y har tæthed f. Find dernæst et udtryk for tætheden $\tilde{g}$ for fordelingen af $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ m.h.t. m_2 når $ad - bc \neq 0$.*

Spørgsmål 4. *Vis nu, at hvis*

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

er tætheden for normalfordeling, og hvis matricen

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

er ortogonal, så er $\tilde{g} = g$.

Karakterisering af normalfordelingen

Vi siger at fordelingen af (X, Y) er invariant overfor ortogonale transformationer, hvis det for alle ortogonale matricer

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

gælder, at $(\tilde{X}, \tilde{Y})$ har samme fordeling som (X, Y).

I de sidste 3 spørgsmål i opgaven antages det at fordelingen af (X, Y) er invariant overfor ortogonale transformationer.

Spørgsmål 5. *Vis at når fordelingen af (X, Y) er invariant overfor ortogonale transformationer, så er*

$$f(x)f(y) = f(0)f(\sqrt{x^2 + y^2})$$

for alle $x, y \in \mathbb{R}^2$.

Spørgsmål 6. *Vis at funktionen*

$$g(x) = \log \frac{f(x)}{f(0)}$$

opfylder funktionalligningen

$$g(x) + g(y) = g(\sqrt{x^2 + y^2}).$$

Vis at de eneste kontinuerte løsninger til funktionalligningen er

$$g(x) = cx^2$$

for en konstant c (hvor altså $c = g(1)$).
Vink: Man kan enten vise direkte fra funktionalligningen at g har den ønskede form ved først at se på ikke-negative heltal, dernæst rationale tal og endelig bruge kontinuitet til at udvide til reelle tal. Det er også tilladt at omskrive ligningen til Cauchys funktionalligning og udnytte at dens løsning er kendt.

Spørgsmål 7. *Benyt at f er tætheden for et sandsynlighedsmål til at vise at $c < 0$, og vis så at X og Y er $\mathcal{N}(0, (-2c)^{-1})$-fordelte.*

Historie: Astronomen John Herschel postulerede i 1850, at den bivariate måleusikkerhed af positioner på himlen må antages at have uafhængige koordinater. Samtidigt postulerede han, at usikkerheden må være invariant overfor rotationer. Herfra udledte han standard normalfordelingen på $\mathbb{R}^2$ (med en skalaparameter), som den eneste mulige fordeling med disse egenskaber. Opgaven genskaber essentielt argumentet i en MI sammenhæng. I 1860 gav James Clerk Maxwell et tilsvarende argument i $\mathbb{R}^3$, og argumentet går derfor under navnet Herschel-Maxwell udledningen. Postulater er postulater (ikke sandheder), men de virker rimelige ud fra geometriske homogenitetsbetragtninger. Og vi kan i hvert fald konkludere, at hvis vi i praksis møder afvigelser fra normalfordelingen i måleusikkerhederne, så må der enten være afhængighed, eller også er fordelingen ikke invariant overfor ortogonale transformationer.