Aflevering 2

Rud V. Faden, Alex Larsen, Markus Bak Hansen, Nemo Bremer, Theis Kehlet

21. december 2014

Momenter

Spørgsmål 1.a Først beregner vi $E(\tilde{X})$. Da $E(X) = E(Y) = 0 < \infty$, da kan vi bruge teorem 16.3 in EH.

$$E(\tilde{X}) = E(aX + bY) = E(aX) + E(bY) = aE(X) + bE(Y) = 0 \tag{1}$$

da $E(X) = E(Y) = 0$. Ved symmetri fås at $E(\tilde{Y}) = 0$.

Spørgsmål 1.b Variansen af en stokastisk variable er givet ved $E(X - E(X))^2$. Ved indsætning af $\tilde{X}$ fås

$$V(\tilde{X}) = E\left((aX + bY) - E(aX + bY)\right)^2 \tag{2}$$

$$= E\left((aX + bY)^2\right) - \left(E(aX + bY)\right)^2 \tag{3}$$

Men vi har lige vist at $E(aX + bY) = 0$, så (3) reduceres til

$$V(\tilde{X}) = E\left((aX + bY)^2\right) \tag{4}$$

$$= E\left(a^2X^2 + b^2Y^2 + 2abXY\right) \tag{5}$$

$$= a^2E(X^2) + b^2E(Y^2) + 2abE(XY) \tag{6}$$

Men da $E(XY) = 0$, fås

$$V(\tilde{X}) = a^2E(X^2) + b^2E(Y^2) \tag{7}$$

Vi ser nu at $V(X) = E(X^2) = 1$ og at $V(Y) = E(Y^2) = 1$, så ligning (7) kan skrives som

$$V(\tilde{X}) = a^2 + b^2 \tag{8}$$

Ved symmetri fås at

$$V(\tilde{Y}) = c^2 + d^2 \tag{9}$$

Spørgsmål 1.c Vi kan skrive ligning (8) og ligning (9) som matrix

$$O^T O = OO^T = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+b^2 & ab+cd \\ ab+cd & c^2+d^2 \end{pmatrix} = I = V \begin{pmatrix} \tilde{X} \\ \tilde{Y} \end{pmatrix} \tag{10}$$

Spørgsmål 2.a Vi skal nu vise, under hvilken betingelser på O, at $\tilde{X}$ og $\tilde{Y}$ er ukorreleret. To stokastiske variable er ukorreleret hvis $Cov(\tilde{X}, \tilde{Y}) = 0$. Dette kan også skrive med forventningsoperatoren som

$$E((\tilde{X} - E\tilde{Y})(\tilde{Y} - E\tilde{Y})) = E\tilde{X}\tilde{Y} - E\tilde{X}E\tilde{Y} = 0 \tag{11}$$

Men da vi har at $E\tilde{X} = E\tilde{Y} = 0$ fra forrige opgave, kan vi skrive kovariansen som $E\tilde{X}\tilde{Y}$

$$E\left([aX + bY]\,[cX + dY]\right) = 0 \tag{12}$$

$$acE(X^2) + bdE(Y^2) + adE(XY) + bcE(XY) = 0 \tag{13}$$

Men da $E(XY) = 0$ og $V(X) = V(Y) = E(X^2) = E(Y^2) = 1$, ser vi at ligning (13) kan skrives som

$$ac + bd = 0 \tag{14}$$

Hvilket altid gælder, hvis O er en ortogonal matrix.

Spørgsmål 2.b Vi ser at hvis ligning (14) skal holde, så skal $bd = -ac$. Dermed kan vi skrive

$$E(acX^2 - acY^2) = 0 \tag{15}$$

$$acE(X^2 - Y^2) = 0 \tag{16}$$

$$\tag{17}$$

Da $ac \neq 0$, da må vi dividere med ac. Dermed har vi at

$$E(X^2 - Y^2) = E(X + Y)(X - Y) = 0 \tag{18}$$

og dermed at $X - Y, X + Y$ er ukorrelert.

Transformationer

Spørgsmål 3.a Vi ser at $(\mathbb{R}^2, \mathbb{B}_2)$ er en sigma-endelig mål rum. Derfor bruger vi lemma 12.2 i EH til at finde den marginale tæthed af $g(x, y)$

$$\int g(x, y)\, dm(y) = \int f(x)f(y)\, dx\, dy \tag{19}$$

$$= f(x) \int f(y)\, dy \tag{20}$$

$$= f(x) \cdot 1 = f(x) \tag{21}$$

Da m er et sandsynlighedsmål. Tæthede $f(y)$ findes på samme måde per symmetri.

Spørgsmål 3.b Vi bruger teorem 12.14 med

$$\nu = g(x, y) \tag{22}$$

$$h(x, y) = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$h^{-1} = \frac{1}{ad - cb} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$D\left(h^{-1}\right)(x, y) = h^{-1} \tag{25}$$

$$\left| \det\left(D\left(h^{-1}\right)(x, y)\right) \right| = \frac{1}{ad - bc} \tag{26}$$

Således har vi at

$$\tilde{g}(x, y) = g(\frac{1}{ad - bc}(dx - by), \frac{1}{ad - bc}(-cx + ay)) \tag{27}$$

Opgave 4.a Da $f(x)$ er standart normalfordelt, så får vi at

$$g(x, y) = \left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-y^2/2}\right) \tag{28}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{(-x^2 - y^2)/2} \tag{29}$$

Matricen O er orgothonal, så $|\det O| = 1$ og $\left(\frac{1}{\det O}(dx - by)\right)^2 = (dx - by)^2$. Derfor er $\tilde{g}(x, y)$ givet ved

$$\tilde{g}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(dx - by)^2/2 - (-cx + ay)^2/2} \tag{30}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-\left((dx - by)^2 + (-cx + ay)^2\right)/2} \tag{31}$$

$$= \frac{1}{2\pi} e^{-(d^2 + c^2)x^2 + (b^2 + a^2)y^2/2 - (db + ac)xy} \tag{32}$$

Men da O er ortogonal har vi at $(d^2 + c^2) = (b^2 + a^2) = 1$ og $(db + ac) = 0$. Derfor kan ligning (32) skrives som

$$\tilde{g}(x, y) = \frac{1}{2\pi} e^{-(x^2 + y^2)/2} = g(x, y) \tag{33}$$

jf. ligning (29).

1 Karakterisering af normalfordelingen

Opgave 5 For at vise at

$$f(x)f(y) = f(0)f(\sqrt{x^2 + y^2}) \tag{34}$$

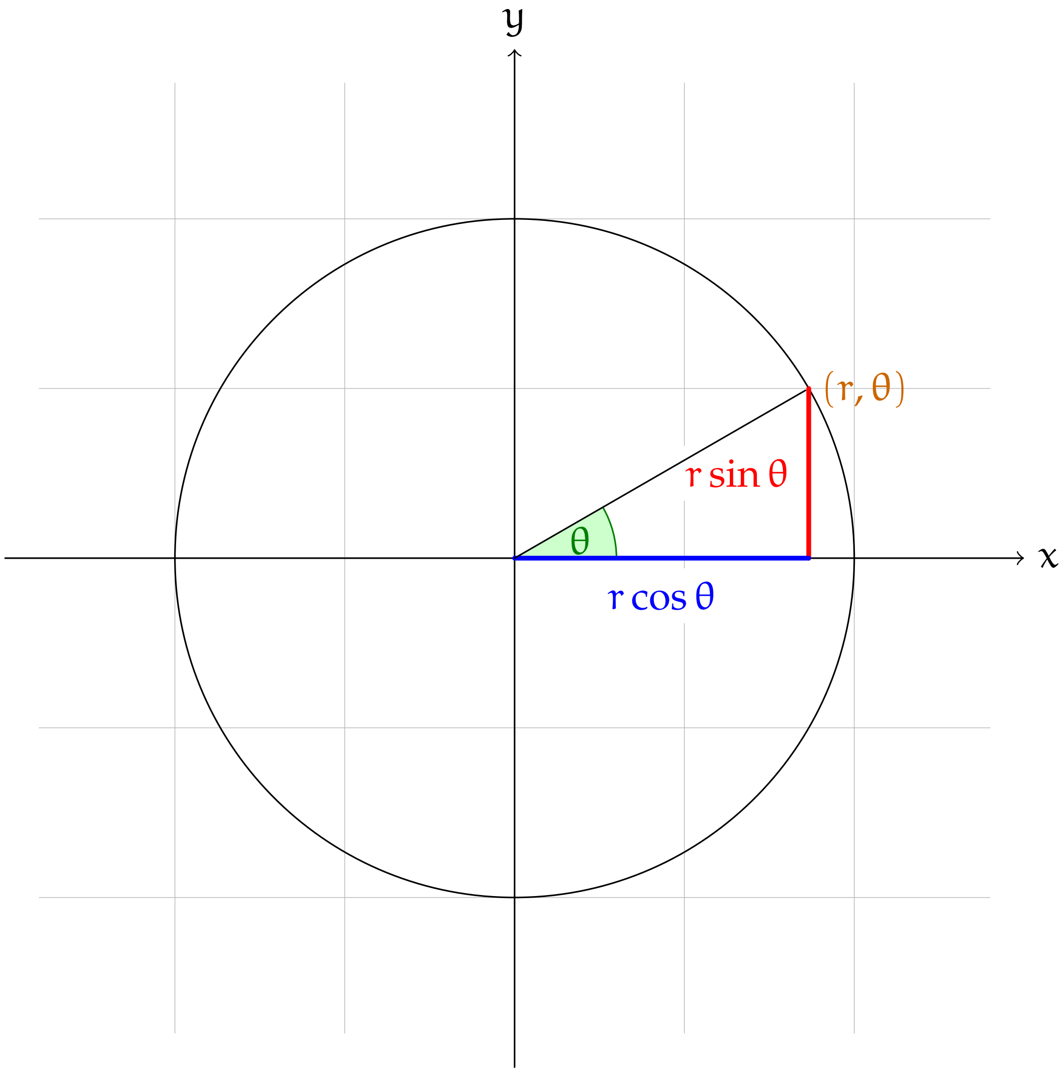
omskriver vi til polar koordinater, således at $x = r\cos(\theta)$, $y = r\sin(\theta)$ og $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Således har vi at

$$f(r\cos(\theta))f(r\sin(\theta)) = f(\theta)f(r) \tag{35}$$

Opskriver vi i matrix form, har vi

$$\begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{x^2+y^2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \tag{36}$$

Vi ser da, at for en hvilken ortogonal transformation af $x = r\cos(\theta), y = r\sin(\theta)$, vil det gælde at vinklen mellem x og y koordinaterne vil blive bevaret. Derved kan dette også udtrykkes som radius r gange en konstant. Dermed ser vi at ligning (34) må holde.



Figur 1: Cirkel

Opgave 6.a Vi ser at

$$g(x) + g(y) = \log\left(\frac{f(x)}{f(0)}\right) + \log\left(\frac{f(y)}{f(0)}\right) \tag{37}$$

$$= \log(f(x)) + \log(f(y)) - 2\log(f(0)) \tag{38}$$

og at

$$g(\sqrt{x^2+y^2}) = \log\left(\frac{f(\sqrt{x^2+y^2})}{f(0)}\right) \tag{39}$$

Da

$$f(x)f(y) = f(\sqrt{x^2+y^2})f(0) \tag{40}$$

$$\frac{f(y)f(x)}{f(0)} = f(\sqrt{x^2+y^2}) \tag{41}$$

Dermed har vi, ved at indsætte ligning (41) i ligning (39) at

$$g(\sqrt{x^2+y^2}) = \log\left(\frac{f(x)f(y)}{f(0)^2}\right) \tag{42}$$

$$= \log(f(x)) + \log(f(y)) - 2\log(f(0)) \tag{43}$$

Da ligning (38) er identisk med ligning (43) er $g(x) + g(y) = g(\sqrt{x^2+y^2})$

Opgave 6.b Cauchy's funktionalligning for f er

$$f(x) + f(y) = f(x+y) \tag{44}$$

$$\tag{45}$$

Heraf følger

$$g(\sqrt{x}) = f(x) \overbrace{=}^{\text{Løsning for Cauchy}} cf = c\sqrt{x^2} \tag{46}$$

$$g(\sqrt{x^2+y^2}) = f(x^2+y^2) = f(x^2) + f(y^2) = g(x) + g(y) \tag{47}$$

Dermed har vi at løsningen er $g(x) = cx^2$

Spørgsmål 7 Vi har at

$$g(x) = \log\frac{f(x)}{f(0)} \tag{48}$$

$$e^{g(x)} = \frac{f(x)}{f(0)} \tag{49}$$

Indsætter vi løsningen til funktionalligningen fra opgave 6, har vi

$$f(0)e^{cx^2} = f(x) \tag{50}$$

Da $f(x)$ er et sandsynlighedsmål, har vi at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = 1 \tag{51}$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(0)e^{cx^2} = 1 \tag{52}$$

Hvis $c \geqslant 0$, da er $\int_{-\infty}^{\infty} f(x) = \infty$. Dermed følger at $c < 0$ skal være opfyldt, for at f kan være et sandsynlighedsmål.

For at vise at $f \sim N(0, (-2c)^{-1})$, bemærker vi først at det er tilfældet hvis

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi(-2c)^{-1}}} e^{-x^2/(2(-2c)^{-1})} \tag{53}$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\pi/(-c)}} e^{cx^2} \tag{54}$$

og at f er et sandsynlighed mål, således at

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(0) e^{cx^2}\, dx = 1 \tag{55}$$
$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{cx^2}\, dx = \frac{1}{f(0)} \tag{56}$$

Pga. symmetri af funktionen har vi at

$$\int_0^{\infty} e^{cx^2}\, dx = \frac{1}{2f(0)} \tag{57}$$

Så

$$\left(\int_0^{\infty} e^{cx^2}\, dx\right)\left(\int_0^{\infty} e^{cy^2}\, dy\right) = \frac{1}{4f(0)^2} \tag{58}$$
$$\int_0^{\infty} e^{c(x^2+y^2)}\, dx\, dy = \frac{1}{4f(0)^2} \tag{59}$$

Vi kan evaluere dette integral ved hjælp af polar koordinater.

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{-\infty} e^{cr^2} r\, dr\, d\theta \tag{60}$$

Ved brug a substitution, med $u = cr^2$, får vi

$$\int_0^{\pi/2} \frac{1}{2c} \int_0^{-\infty} e^u\, du\, d\theta = \int_0^{\pi/2} -\frac{1}{2c}\, d\theta = \pi(-\frac{1}{4c}) \tag{61}$$

Vi ved derfor at

$$\pi(-\frac{1}{4c}) = \frac{1}{4f(0)^2} \Leftrightarrow \tag{62}$$
$$\pi(-\frac{1}{c}) = \frac{1}{f(0)^2} \Leftrightarrow \tag{63}$$
$$\sqrt{\pi(-\frac{1}{c})} = \frac{1}{f(0)} \Leftrightarrow \tag{64}$$
$$f(0) = \frac{1}{\sqrt{\pi/(-c)}} \Leftrightarrow \tag{65}$$

Indsætter vi ligning (65) i ligning (50), får vi

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{\pi/(-c)}} e^{cx^2} \tag{66}$$

Hvilket netop er tætheden for $N(0, (-2c)^{-1})$ jf. ligning (54)